1 Vektori

Klasa jednakih usmerenih duži je **vektor**.

Dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **jednaki** ako imaju isti pravac, smer i intenzitet. Prava kojoj pripada vektor, tj. odgovarajuća usmerena duž, je **nosač vektora**.

Dva vektora su **kolinearna**, ako pripadaju istom nosaču, a **komplanarni** ako pripadaju istoj ravni.

Vektor čija se početna i krajnja tačka poklapaju je **nula vektor**, na primer $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, a vektor čiji je intenzitet 1 je **jedinični vektor**.

Vektor koji se od datog vektora razlikuje samo smerom je **suprotan vektor**. Na primer, $\vec{a}$ i $-\vec{a}$ su suprotni vektori.

Zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ koji ima početak u početku prvog vektora, a kraj u kraju drugog vektora ako se ovi nadovežu jedan na drugi. Kažemo da za sabiranje dva vektora važi **pravilo paralelograma**.
Sabiranje vektora ima sledeće **osobine**:

$$\begin{aligned}
&\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}, \quad \text{(komutativni zakon)},\\
&|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|, \quad |\vec{a}-\vec{b}| \ge |\vec{a}|-|\vec{b}|,\\
&(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}), \quad \text{(asocijativni zakon)},\\
&\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a},\\
&\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=0.
\end{aligned}$$

Razlika vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{d}$ za koji važi da je $\vec{a}=\vec{b}+\vec{d}$.

Proizvod skalara (broja) k **i vektora** $\vec{a}$ je vektor istog pravca, čiji je intenzitet $|k|\cdot|\vec{a}|$, smer je isti kao i smer vektora $\vec{a}$ za $k>0$, a suprotan za $k<0$, $0\ \vec{a}=0$. Očigledno je da su vektori $\vec{a}$ i $k\vec{a}$ kolinearni.
Množenje vektora i skalara ima sledeće osobine:

$$\begin{aligned}
&k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}, \quad \text{(asocijativni zakon)},\\
&(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}, \quad \text{(I distributivni zakon)},\\
&k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}, \quad \text{(II distributivni zakon)}.
\end{aligned}$$

Napomenimo da se svaki vektor $\vec{a}$ može predstaviti kao proizvod svoga intenziteta $|\vec{a}|$ i jediničnog vektora $\vec{a}_0$ istog pravca i smera kao što je dati vektor:

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0 \Leftrightarrow \vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Prava za čije dve proizvoljne tačke je utvrdjeno da se jedna od njih smatra prethodnom, a druga sledećom, naziva se **orjentisana prava** ili **osa**. Osa može biti odredjena jediničnim vektorom koji leži na njoj i koji se zove **ort** te ose.

Zadatak 1.1 *Ako su P, Q, R, S sredine stranica proizvoljnog konveksnog četvorougla $\square ABCD$ dokazati da se $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$ polove. (P i Q su sredine naspramnih stranica četvorougla.)*

Zadatak 1.2 *Neka je O centar opisanog kruga oko trougla $\triangle ABC$ i H ortocentar tog trougla. Dokazati da je*

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Zadatak 1.3 *Dat je pravilni petougao $ABCDE$ i proizvoljna tačka T u prostoru. Ako je O centar petougla, dokazati da je*

$$5\overrightarrow{TO} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TE}.$$

Zadatak 1.4 *U konveksknom petouglu $ABCDE$ tačke M, N, P, Q su središta redom stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$. Dokazati da je duž koja je odredjena središtima duži $\overline{MP}$ i $\overline{NQ}$ paralelna sa $\overline{AE}$ i jednaka $\frac{1}{4}\overline{AE}$.*

Zadatak 1.5 *Da bi tri tačke A, B i C bile kolinearne potrebno je i dovoljno da važi*

$$\overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \tag{1.1}$$

gde je O proizvoljna tačka i t realan parametar.

Zadatak 1.6 *Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trougla $\triangle ABC$ date su redom tačke K i L, takve da važi*

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{AK}} + \frac{\overline{LC}}{\overline{AL}} = 1.$$

Dokazati da težište trougla $\triangle ABC$ pripada duži $\overline{KL}$.

Zadatak 1.7 *Neka su P i Q tačke na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ trougla $\triangle ABC$ takve da je $\overline{CP} : \overline{PB} = 2 : 1$, $\overline{AQ} : \overline{QB} = 3 : 1$. Ako je $\overline{AP} \cap \overline{CQ} = S$ izračunati odnose $\overline{CS} : \overline{SQ}$ i $\overline{AS} : \overline{SP}$.*

Zadatak 1.8 *Neka su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke. Ako su A_T, B_T, C_T, D_T težišta trouglova $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, $\triangle ABC$ dokazati da se duži $\overline{AA_T}$, $\overline{BB_T}$, $\overline{CC_T}$, i $\overline{DD_T}$ seku u jednoj tački T. U kom odnosu ta tačka razlaže te duži?*

Zadatak 1.9 *Dve normalne prave p i q koje se seku u tački M, seku dati krug sa centrom O u tačkama A, B, C, D, pri čemu $A, B \in p$ i $C, D \in q$. Dokazati da je*

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}.$$

Zadatak 1.10 *Ako su A, B, C težišta trouglova $\triangle OMN$, $\triangle ONP$, $\triangle OMP$ dokazati da su težište trougla $\triangle MNP$, težište trougla $\triangle ABC$ i tačka O tri kolinearne tačke, gde je O proizvoljna tačka u ravni trougla $\triangle MNP$.*