1 Kombinatorni zadaci. Geometrijske njednakosti

DEFINICIJA 1.1 *Geometrijski lik ω je* ***konveksan*** *ako za proizvoljne tačke A i B lika ω cela duž $\overline{AB}$ pripada liku ω.*

DEFINICIJA 1.2 *Geometrijski lik ω je* ***ograničen*** *ako postoji kružna površ koja sadrži sve tačke tog lika.*

DEFINICIJA 1.3 *Geometrijski lik ω je* ***otvoren*** *ako za proizvoljnu tačku A lika ω postoji kružna površ λ sa centrom u tački A koja cela pripada liku ω.*

DEFINICIJA 1.4 *Sve tačke jedne površi ω se dele na unutršnje, spoljašnje i granične.*

DEFINICIJA 1.5 *Tačka A je* ***unutrašnja*** *tačka površi ω ako postoji kružna površ sa središtem u tački A čije sve tačke pripadaju površi ω.*

DEFINICIJA 1.6 *Tačka B je* ***spoljašnja*** *tačka površi ω ako u ravni te površi postoji kružna površ sa središtem u tački B koja ne sadrži ni jednu tačku površi ω.*

DEFINICIJA 1.7 *Tačka C je* ***granična*** *tačka površi ω ako u ravni te površi svaka kružna površ sa središtem u tački C sadrži i unutrašnje i spoljašnje tačke površi ω.*

DEFINICIJA 1.8 *Neka je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je* ***harmonijska sredina*** *$H_n(a)$ brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definisana izrazom*

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

njihova ***geometrijska sredina*** *$G_n(a)$ je definisana kao*

$$G_n(a) = (a_1 \cdot a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}},$$

njihova ***aritmetička sredina*** *$A_n(a)$:*

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

i njihova ***kvadratna sredina*** *$K_n(a)$:*

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Teorema 1.1 *Neka su date sredine kao u prethodnoj definiciji, tada je:*

$$H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a).$$

Jednakost važi ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Zadatak 1.1 *Bela ravan je polivena crnom bojom. Dokazati da postoje dve tačke iste boje izmedju kojih je rastojanje 2011m.*

Zadatak 1.2 *Dat je konveksan 1985-to ugao, čiji je obim 2500. Dokazati da neka tri temena datog mnogougla odredjuju trougao čija je površina manja od 1.*

Zadatak 1.3 *Dokazati da skup koji se sastoji iz konačnog broja od n pravih neke ravni π, pri čemu se svake dve od tih pravih seku, a nikoje tri i više ne seku u jednoj tački, razlaže ravan π na $\alpha_n = \frac{n^2+n+2}{2}$ konveksnih oblasti, od kojih je $\beta_n = 2n$ neograničenih i $\gamma_n = \frac{n^2-3n+2}{2}$ ograničenih.*

Zadatak 1.4 *Dokazati da skup koji se sastoji od n krugova neke ravni π, pri čemu se svaka dva kruga iz tog skupa seku, a nikoja tri i više ne seku u jednoj tački, razlaže ravan π na $n^2 - n + 2$ oblasti.*

Zadatak 1.5 *Ako su a, b, c stranice trougla i s poluobim trougla, dokazati da važi*

$$
\begin{aligned}
&a)\ 2\sqrt{(s-b)(s-c)} \leq a \\
&b)\ s\Big(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\Big) \geq \frac{9}{4} \\
&c) \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big).
\end{aligned}
$$

Zadatak 1.6 *U trouglu $\triangle ABC$ izabrana je proizvoljna tačka M. Kroz tačku M i temena A, B, C konstruisane su prave AM, BM, CM, koje seku odgovarajuće stranice trougla u tačkama A_1, B_1, C_1. Dokazati da važe nejednakosti:*

$$
\begin{aligned}
&a)\ \frac{\overline{AM}}{\overline{A_1M}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{B_1M}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{C_1M}} \geq 6 \\
&b)\ \frac{\overline{AM}}{\overline{A_1M}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{B_1M}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{C_1M}} \geq 8.
\end{aligned}
$$

Zadatak 1.7 *Dokazati da u pravouglom trouglu važi nejednakost $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$, gde je r poluprečnik upisanog kruga, a h hipotenuzina visina.*

Zadatak 1.8 *Dokazati da u trouglu važi nejednakost:*

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leqslant 2\sqrt{3}rR,$$

gde su r i R poluprečnik upisanog i opisanog kruga oko trougla, i a, b, c stranice tog trougla.

Zadatak 1.9 *Nejednakost*

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$$

je potreban i dovoljan uslov da se dužima čije su veličine a, b, c može konstruisati trougao.

Zadatak 1.10 *Ako su h_a, h_b, h_c odgovarajuće visine i r poluprečnik upisane kružnice trougla, dokazati:*
a) $h_ah_bh_c \geq 27r^3$;
b) $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.