

# 1 Četvorougao i krug

**Stav 1.1** *Centralni ugao nekog kruga je dva puta veći od odgovarajućeg periferijskog ugla tog kruga nad istim lukom.*

**Posledica 1.1** *Periferijski ugao nad prečnikom kruga je prav.*

**Posledica 1.2** *Ugao odredjen tetivom i tangentom u jednoj krajnjoj tački tetive nekog kruga podudaran je periferijskom uglu nad tom tetivom.*

**DEFINICIJA 1.1** *Četvorougao je **tetivan** ako i samo ako oko njega može da se opiše krug.*

Osobine tetivnih četvorouglova:

**Teorema 1.1** *Četvorougao je tetivan ako i samo ako se simetrale bilo koje tri njegove stranice seku u jednoj tački.*

**Teorema 1.2** *Četvorougao je tetivan ako i samo ako je zbir svaka dva naspramna ugla jednak  $180^\circ$ .*

**Posledica 1.3** *Četvorougao je tetivan ako i samo ako je spoljašnji ugao kod jednog temena podudaran sa unutrašnjim uglom kod njemu dijagonalnog temena.*

**Teorema 1.3** *Četvorougao je tetivan ako i samo ako se svaka stranica vidi iz preostala dva temena pod podudarnim uglovima.*

**DEFINICIJA 1.2** *Četvorougao je **tangentan** ako i samo ako postoji kružnica koja dodiruje sve njegove stranice.*

Osobine tangentnih četvorouglova:

**Teorema 1.4** *Četvorougao je tangentan ako i samo ako se simetrale unutrašnjih uglova seku u jednoj tački.*

**Teorema 1.5** *Četvorougao je tangentan ako i samo ako  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ .*

**Teorema 1.6** *Sledeća tvrdjenja su medjusobno ekvivalentna:*

- (i) *četvorougao je paralelogram,*
- (ii) *postoje dve suprotne stranice četvorougla koje su jednake i paralelne,*
- (iii) *svake dve suprotne stranice četvorougla su jednake,*
- (iv) *dijagonale četvorougla se medjusobno polove,*
- (v) *oba para suprotnih uglova četvorougla su jednaka.*

**Teorema 1.7** *Dokazati:*

- i) Paralelogram je romb ako su mu dijagonale međusobno normalne;
- ii) Paralelogram je pravougaonik ako su mu dijagonale međusobno podudarne;
- iii) Paralelogram je kvadrat ako su mu dijagonale međusobno normalne i podudarne.

**Teorema 1.8** *Sledeća tvrdjenja su međusobno ekvivalentna:*

- (i) četvorougao je romb,
- (ii) sve stranice četvorougla su jednake,
- (iii) dijagonale četvorougla polove sve unutrašnje uglove,
- (iv) dijagonale četvorougla se polove i međusobno su normalne.

**Teorema 1.9 (teorema o srednjoj liniji trapeza)** *Srednja linija trapeza je paralelna osnovicama trapeza i jednaka je polovini zbira osnovica.*

**Zadatak 1.1** *U pravougaoniku stranica  $\overline{BC}$  dva puta veća od stranice  $\overline{AB}$ . Iz tačke  $M$  na  $\overline{BC}$  duži  $\overline{AB}$  i  $\overline{AD}$  se vide pod jednakim uglovima. Izračunati ove uglove.*

**Zadatak 1.2** *Ako je visina jednakokrakog trapeza jednaka  $h$ , a površina  $h^2$ , dokazati da su njegove dijagonale međusobno normalne.*

**Zadatak 1.3** *Neka je  $P$  proizvoljna tačka na kraćem luku  $\widehat{AB}$  kruga  $k$  opisanog oko pravougaonika  $\square ABCD$ , a  $L$  i  $M$  podnožja normala iz tačke  $P$  na dijagonalama  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$ . Dokazati da dužina duži  $\overline{LM}$  ne zavisi od položaja tačke  $P$ .*

**Zadatak 1.4** *Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju se spolja u tački  $S$ . Ako su  $A, B, C, D$  tačke dodira zajedničkih spoljašnjih tangenti (Slika ??), dokazati da je četvorougao  $\square ABCD$  tangentan.*

**Zadatak 1.5** *Ako su  $P, Q, R$  preseči simetrala uglova  $\triangle ABC$  i opisanog kruga oko ovog trougla, dokazati da su prave  $AP, BQ, CR$  visine trougla  $\triangle PQR$ .*

**Zadatak 1.6** *Krugovi  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$  imaju zajedničku tetivu  $\overline{MN}$ . Neka je  $O_1M \cap k_1 = \{A_1\}$ ,  $O_1M \cap k_2 = \{A_2\}$ ,  $O_2M \cap k_1 = \{B_1\}$  i  $O_2M \cap k_2 = \{B_2\}$ . Dokazati da se prave  $MN, A_1B_1, A_2B_2$  seku u jednoj tački.*

**Zadatak 1.7** *Neka je  $\square ABCD$  tetivni četvorougao i neka su  $P, Q, R, S$  redom sredine lukova  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$  opisane kružnice. Dokazati da je  $\overline{PR} \perp \overline{QS}$ .*

**Zadatak 1.8** *Ako su  $M$  i  $N$  tačke simetrične podnožju  $A_1$  visine  $\overline{AA_1}$ ,  $\triangle ABC$  u odnosu na stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ , i neka je  $K$  presek pravih  $\overline{AB}$  i  $\overline{MN}$ , dokazati da tačke  $A, K, A_1, C, N$  pripadaju jednom krugu.*

**Zadatak 1.9** *Dokazati da simetrala proizvoljnog ugla trougla je i simetrala ugla kojeg obrazuju visina konstruisana iz tog temena i prečnik kruga opisanog oko tog trougla koji sadrži pomenuto teme.*

**Zadatak 1.10** *Naspramne stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  četvorougla  $\square ABCD$  su jednake međusobno. Dokazati da prava  $p$  koja polovi druge dve stranice zaklapa jednake uglove sa stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$ .*