

1 Površni

1.1 Tangentna ravan i normala površi

Zadatak 1 Data je površ $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \sqrt{a^2 - u^2})$, $a = \text{const}$. Ispitati o kojoj se površi radi i odrediti u i v linije.

Zadatak 2 Data je površ $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(v))$. Odrediti u i v linije ove površi i predstaviti površ u obliku $z = F(x, y)$.

Zadatak 3 Naći jednačinu tangentne ravni i vektora normale površi u tački:

a) $z = x^3 + y^3$, $M(1, 2, 9)$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $M(3, 4, 12)$;

Zadatak 4 Odrediti tangentnu ravan površi $\vec{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ u tački $T(0, 0, 0)$.

Zadatak 5 a) Dokazati da su parametarske jednačine površi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

date sa

$$x = a \frac{uv + 1}{u + v}, \quad y = b \frac{uv - 1}{u + v}, \quad z = c \frac{u - v}{u + v};$$

b) odredi parametre u i v onih tačka površi

$$x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1,$$

koje leže na pravoj

$$\frac{x + 3}{4} = \frac{y + 8}{14} = \frac{z - 12}{-21}.$$

Zadatak 6 Dokazati da kriva $\vec{r}(t) = (a \operatorname{cht} \cos t, a \operatorname{cht} \sin t, at)$, $a \neq 0$ leži na površi $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$ i da se oskulatorna ravan krive poklapa sa tangentnom ravni površi u svakoj tački krive.

Zadatak 7 Data je površ $4x^2 - y^2 - 4z = 0$. Kriva C je skup tačaka na datoj površi u kojima tangentne ravni površi prolaze tačkom $(0, 2, 0)$. Naći jednačinu krive C u parametarskom obliku.

Zadatak 8 Dokazati sledeća tvrdjenja:

a) tangentne ravni površi $z = x f(\frac{y}{x})$ prolaze kroz jednu tačku;

b) projekcija na xOy ravan odsečka normale površi

$$\vec{r}(u, v) = (v \cos u - \varphi(u) \cos u + \varphi'(u) \sin u, v \sin u - \varphi(u) \sin u + \varphi'(u) \cos u, \sqrt{2v})$$

je konstantne dužine.

Zadatak 9 Naći jednačinu površi koja prolazi kroz krivu $y = 1, z = x^2$ i čija tangentna ravan u tački $M(x, y, z)$ seče Ox -osu u tački čija je apcisa $\frac{x}{2}$.

Zadatak 10 Ako sve normale površi prolaze kroz jednu tačku onda je ta površ sfera ili oblast na sferi.

1.2 Prva i druga kvadratna forma površi. Gausova i srednja krivina na površi

Zadatak 11 Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivih na površi sa datom prvom kvadratnom formom površi

$$d\vec{r}^2 = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Zadatak 12 Naći krive koje polove ugao između koordinatnih krivih na površi čija je prva kvadratna forma

$$d\vec{r}^2 = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Specijano, za

$$\vec{r} = (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v), \quad a \neq 0, \quad a = \text{const.}$$

Zadatak 13 Data je kriva $C : \vec{r} = \vec{r}(s)$, gde je s luk krive. Dokazati da su sve tačke tangentne površi

$$\vec{r}^*(s, u) = \vec{r}(s) + u \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds},$$

krive C , parabolčke.

Zadatak 14 Odrediti sferne tačke paraboloida

$$2z = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}, \quad A, B \in \mathbb{R}^+.$$

Zadatak 15 Za rotacionu površ $\vec{r}(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, u)$, naći glavne pravce i glavne krivine, srednju i Gausovu krivinu površi.

Zadatak 16 Pokazati da Gausova krivina K_G svakog pravog konoida zadovoljava uslov

$$-1 < K_G < 0.$$

Zadatak 17 Dokazati da na površi važi $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = K_G(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$, gde je \vec{N}_1 jedinični vektor normale površi, a K_G Gausova krivina površi.

Zadatak 18 Izračunati Gausovu i srednju krivinu površi koju obrazuju binormale krive čija je krivina κ , a torzija τ .

Zadatak 19 Odrediti poluprečnik krivine normalnog preseka paraboloida

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

u tački $(0, 0, 0)$ kad je normalni presek određen sa ravni $y = kx$, $k = \text{const.}$

1.3 Linije krivine i asimptotske linije na površi

Zadatak 20 Naći linije krivine na površi $z = \arctan \frac{y}{x}$.

Zadatak 21 Naći asimptotske linije na površi $z = f(\frac{y}{x})$. Specijalno, ako je $z = (\frac{y}{x})^3$.

Zadatak 22 Odrediti funkciju f , tako da asimptotske linije površi $z = f(x) - f(y)$ obrazuju ortogonalnu mrežu.

Zadatak 23 Odrediti sve površi $z = F(x, y)$, čije su asimptotske linije date jednačinama

$$y = c, \quad xf(y) = c', \quad (c, c' = \text{const.}).$$

Zadatak 24 (Teorema Rodriga) Ako je $\frac{du}{dv}$ pravac jedan od glavnih pravaca u nekoj tački površi $\vec{r}(u, v)$, tada je

$$d\vec{N}_1 = -\overline{K} d\vec{r},$$

gde je \vec{N}_1 jedinični vektor normale površi a \overline{K} jedna od glavnih krivina u toj tački.

Obratno, ako za neki pravac $\frac{du}{dv}$ na površi važi

$$d\vec{N}_1 = \lambda d\vec{r},$$

tada je taj pravac glavni i $\lambda = -\overline{K} \in \{-K_1, -K_2\}$.

Zadatak 25 Ako se dve površi seku pod konstantnim uglom i ako je linija preseka površi linija krivine jedne površi, dokazati da je ona linija krivine i druge površi.

Zadatak 26 Dokazati da važi

$$III - 2K_S II + K_G I = 0,$$

gde je $III = d\vec{N}_1 \cdot d\vec{N}_1$ treća kvadratna forma površi, a K_S, K_G srednja i Gausova krivina površi, dok su I, II prva i druga kvadratna forma površi.

Zadatak 27 Dokazati da za torziju asimptotske linije koja nije prava linija važi

$$\tau^2 = -K_G,$$

gde je K_G Gausova krivina površi.

Zadatak 28 Naći torziju asimptotskih linija površi

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av), \quad a = \text{const.}$$

1.4 Specijalne klase površi

Zadatak 29 Ispitati da li je površ

$$\vec{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$$

razvojna.

Zadatak 30 Naći tangentnu površ krive $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$.

Zadatak 31 Kriva $x = R \sin u$, $z = R(\ln \tan \frac{u}{2} + \cos u)$ koja je u ravni xOz rotira oko z -ose. Naći Gausovu krivinu dobijene površi.

Zadatak 32 Jednačinu površi $z = x^2 + y^2$ prikazati u obliku

$$\vec{r}(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u)).$$

Zadatak 33 Naći jednačinu asimptotskih linija za rotacione površi ako je dat meridijan $z = f(x)$, $y = 0$, a rotaciona osa je Oz -osa.

Zadatak 34 Data je dvoparametarska familija pravih

$$x = tz + p, \quad y = pz + \frac{t^3}{3},$$

gde su t i p realni parametri. Koji uslov treba da zadovoljavaju t i p da bi date familije bile generatriše razvojne površi.

Zadatak 35 Izvesti opštu jednačinu pravolinijske površi koja nastaje kretanjem prave koja datu pravu seče pod konstantnim uglom α .

1.5 Unutrašnja geometrija površi

Zadatak 36 Naći Kristofelove simbole prve i druge vrste za površ sa kvadratnom formom

$$ds^2 = (\cosh v)^2 du^2 + dv^2.$$

Zadatak 37 Naći Kristofelove simbole obrtne površi

$$\vec{r}(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u)).$$

Zadatak 38 Na površi sa datom metričkom formom

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

posmatrajmo krive definisane jednačinom

$$P(u, v)du^2 + Q(u, v)dudv + R(u, v)dv^2 = 0.$$

Pod kojim uslovom krive zadate prethodnom jednačinom obrazuju na zadatoj površi ortogonalnu mrežu.

DEFINICIJA 1 Ako na normalama jedne površi nanosimo istu duž a onda geometrijsko mesto krajnjih tačka obrazuje površ koja se zove **paralelna** površ date površi. Tačke dveju površi koje leže na istoj normali nazivamo koorespondentnim.

Zadatak 39 Date su dve paralelne površi S i S^* kod kojih je rastojanje između korespondentnih tačaka a :

- naći Gausovu krivinu K_G^* , srednju krivinu K_S^* površi S^* kao funkciju od K_G i K_S površi S ;
- kada asimptotske linije na S odgovaraju asimptotskim linijama na S^* .

Zadatak 40 Naći Gausovu krivinu ako je data metrika:

- $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$;
- $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}$;
- $ds^2 = du^2 + F(u, v)dv^2$;
- $ds^2 = 2F(u, v)dudv$;

Zadatak 41 Naći geodezijsku krivinu koordinatnih linija metrike

$$ds^2 = du^2 + 2ududv + 5u^2dv^2.$$

Zadatak 42 Odrediti geodezijsku krivinu krive po kojoj ravan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ seče elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ u tački $A(a, 0, 0)$.

Zadatak 43 Neka je $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ površ sa metrikom $ds^2 = E(u)du^2 + G(u)dv^2$. Dokazati:

- u -koordinatne linije su geodezijske;
- v -koordinatna linija $u = u_0$ je geodezijska akko je $G'(u_0) = 0$.

c) kriva $\vec{r}(u, v(u))$ je geodezijska akko je

$$v = \pm \int \frac{c\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}} du, \quad c = \text{const.}$$

Zadatak 44 Naći geodezijske linije površi i izračunati Gausovu krivinu površi

$$\vec{r}(u, v) = (u \sin \alpha \cos v, u \sin \alpha \sin v, u \cos \alpha)$$

pri čemu je $\alpha = \text{const.}$ i $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Zadatak 45 Naći Gausovu krivinu i geodezijske linije površi zadatu metrikom

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2-1} du^2 + u^2 dv^2.$$

Zadatak 46 Površ Liuvila je površ za koju je prva kvadratna forma

$$ds^2 = (f(u) + \varphi(u))(du^2 + dv^2).$$

Dokazati da su joj geodezijske linije zadate sa

$$\int \frac{du}{\sqrt{f(u)+a}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{\varphi(v)-a}} + b, \quad a, b = \text{const.}$$

Zadatak 47 Naći geodezijske linije za površ $z = a \arctan \frac{y}{x}$