1 Krive

Zadatak 1 *Neka je* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, *vektorska funkcija i neka je* t_o *iz intervala definisanosti, tada je:*

$$\lim_{t\to t_o} \vec{r}(t) = \lim_{t\to t_o} x(t)\vec{i} + \lim_{t\to t_o} y(t)\vec{j} + \lim_{t\to t_o} z(t)\vec{k}.$$

Dokazati.

Zadatak 2 *Dokazati sledeća tvrdjenja:*

a) za proizvoljnu vektorsku funkciju važi $\vec{r} \cdot d\vec{r} = ||\vec{r}||d||\vec{r}||$;

b) ako vektor $\vec{A}$ *ima konstantnu dužinu, onda je* $\vec{A} \perp \frac{d\vec{A}}{dt}$;

c) ako vektor $\vec{r}(t)$ *ima konstantni pravac i važi da je*

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) + \vec{a}(t)) = 0,$$

onda je $||\vec{r} \times \vec{a}||^2 = C||\vec{r}||^2$, *gde je* $C = const$;

d) ako je $\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{0}$, *onda je ort* $\vec{r}(t)$ *konstantni vektor.*

Zadatak 3 *Neka je* $\vec{r}(x)$ *vektorska funkcija koja na zatvorenom intervalu* $[x_1, x_2]$ *zadovoljava uslove Rolove teoreme. Ako su vektori* $\vec{r}(x_1)$ *i* $\vec{r}(x_2)$ *normalni na konstantan vektor* $\vec{a}$, *dokazati da postoji* $x^* \in (x_1, x_2)$ *tako da je* $\frac{d\vec{r}(x^*)}{dx} \perp \vec{a}$.

Zadatak 4 *Data je kriva* $\vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b}(1-t)$, *gde su* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *konstantni vektori.*

a) Koja je kriva odredjena datom jednačinom;

b) Odrediti dužinu luka krive u funkciji od parametra t;

Zadatak 5 *Naći dužinu dela krive linije*

$$x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - cost);\ z = 4a\cos\frac{t}{2}, \quad a > 0$$

medju dvema njenim tačkama preseka sa ravni xOz.

Zadatak 6 *a) Dokazati da je kriva* $\vec{r}(t) = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c}$ *(*$\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *nisu kolinearni) ravna i naći jednačinu ravni u kojoj ona leži;*

b) Dokazati da je kriva

$$\vec{r}(t) = (\vec{a} \times \vec{b})\cos t + [\vec{a} - \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{b})]\sin t,$$

gde su $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *konstantni vektori i* $||\vec{b}|| = 1$, *jednačina kruga.*

Zadatak 7 *Biregularna kriva* $x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)$ *je ravna akko je*

$$\triangle = \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix} = 0.$$

Zadatak 8 *Dokazati da je sledeća parametrizacija krive*

$$\vec{r}(t) = \Big(\frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+1}), \frac{1}{2(t+\sqrt{t^2+1})}, \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(t + \sqrt{t^2+1})\Big)$$

prirodna parametrizacija.

1.1 Prirodni triedar

Zadatak 9 *Data je kriva* $\vec{r}(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$. *Dokazati da simetrala izmedju tangente i binormale ima konstantan pravac.*

Zadatak 10 *Dokazati da tangenta krive*

$$x^2 = 3y, \ 2xy = 9z,$$

zaklapa stalni ugao sa jednim pravcem. Koji je to pravac i koji je to ugao?

Zadatak 11 *Napisati jednačine tangente, glavne normale, binormale, normalne, rektifikacione i oskulatorne ravni zavojnice* $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \ a, b \neq 0$, *u proizvoljnoj tački.*

Zadatak 12 *Napisati jednačine tangente, glavne normale, binormale, normalne, rektifikacione i oskulatorne ravni krive*

$$\mathcal{K} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 11 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

u tački $M(1, 1, 3)$.

Zadatak 13 *Naći one tačke krive* $\vec{r}(t) = (\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2})$ *u kojima su tangente paralelne sa ravni* $x + 3y + 2z = 0$.

Zadatak 14 *Data je kriva* $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + f(t)\vec{k}$, *pri čemu je* $f(t)$ *dva puta diferencijabilna funkcija. Odrediti funkciju* $f(t)$ *tako da oskulatorna ravan krive u proizvoljnoj tački prolazi kroz koordinatni početak.*

Zadatak 15 *Data je kriva*

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, af(t)), \ a \neq 0,$$

pri čemu je $f(t)$ *dva puta diferencijabilna funkcija.*

a) *odrediti funkciju* $f(t)$ *tako da kriva prolazi kroz tačku* $A(a, 0, a)$ *i da tangente u proizvoljnoj tački prodiru* xOy *ravan u tačkama kružnice* $x^2 + y^2 = R^2, \ R > a$;

b) *odrediti funkciju* $f(t)$ *tako da oskulatorna ravan krive zaklapa sa* Oz *osom konstantan ugao* α.

1.2 Krivina i torzija krive. Freneove formule

Zadatak 16 *Naći krivinu i torziju krive* $\vec{r} = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$.

Zadatak 17 *Data je kriva* $\vec{r}(s) + \lambda s\vec{u} + \vec{u} \times \vec{c}(s)$, *gde je* s *dužina luka krive,* λ *konstantni skalar,* $\vec{u}$ *konstantni jedinični vektor i* $\vec{c}(s)$ *vektorska funkcija. Dokazati da:*

a) tangenta krive zaklapa konstantan ugao sa $\vec{u}$*;*

b) glavna normala krive je normalna na $\vec{u}$*;*

c) odnos krivine i torzije je konstantan.

Zadatak 18 *Kriva* $C : \vec{r} = \vec{r}(s)$ *je opšta cilindaska zavojnica ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih uslova:*

a) odnos krivine i torzije je konstantan;

b) $\left[\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}, \frac{d^4\vec{r}}{ds^4}\right] = 0$*;*

c) $\left[\frac{d\underset{1}{\vec{b}}}{ds}, \frac{d^2\underset{1}{\vec{b}}}{ds^2}, \frac{d^3\underset{1}{\vec{b}}}{ds^3}\right] = 0,$

gde je s *luk krive* C.

Zadatak 19 *Potreban i dovoljan uslov da glavne normale krive budu paralelne nekoj utvrdjenoj ravni je da ta kriva bude cilindarska zavojnica.*

Zadatak 20 *Dokazati da je kriva* $\vec{r}(t) = (4a\cos^3 t, 4a\sin^3 t, 3a\cos 2t)$ *cilindarska zavojnica.*

Zadatak 21 *Ako se glavne normale krive* $C : \vec{r} = r(s)$, *gde je* s *luk krive* C, *poklapaju sa binormalama krive* C^*, *pokazati da na krivoj* C *važi*

$$\alpha(\kappa^2 + \tau^2) = \kappa,\ \alpha = const.$$

Zadatak 22 *Na tangenti krive čija je krivina* κ *i torzija* τ *izabrana je tačka* M^* *tako da rastojanje od nje do dodirne tačke* M *jednako* l. *Izračunati krivinu* κ^* *geometrijskog mesta tačaka* M^*.

Zadatak 23 *Dokazati da za krive koje leže na sferi poluprečnika* a *i čija torzija nikada nije jednaka nuli važi*

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = a^2.$$

Zadatak 24 *Za krivu* $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *zna se da je dužina njenog luka* $s = \varphi(t)$. *Dokazati da je torzija te krive data obrazcem*

$$\tau = \frac{1}{k^2\varphi'^6}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

gde je κ *krivina krive, a izvodi su po parametru* t.

Zadatak 25 *Naći vektor* $\vec{A}(s)$ *koji zadovoljava uslove*

$$\frac{d\underset{1}{\vec{t}}}{ds} = \vec{A} \times \underset{1}{\vec{t}}, \quad \frac{d\underset{1}{\vec{n}}}{ds} = \vec{A} \times \underset{1}{\vec{n}},$$

gde je s *luk krive* $\vec{r} = \vec{r}(s)$, *a* $\underset{1}{\vec{t}}$, $\underset{1}{\vec{n}}$ *i* $\underset{1}{\vec{b}}$ *redom, ort tangente, normale i binormale.*

Zadatak 26 *Data je kriva* $C : \vec{r} = \vec{r}(s)$ *konstantne torzije, gde je* s *dužina luka krive. Na binormali krive nalazi se odsečak dužine* l*, čiji je jedan kraj na krivoj, dok drugi opisuje krivu* $\vec{R} = \vec{R}(s)$ *kad se* s *menja. Razložiti vektor binormale krive* $C_1 : \vec{R} = \vec{R}(s)$ *po pravcima ortova prirodnog triedra krive* C*. Odrediti ugao izmedju binormala krivih* C *i* C_1*, za odredjeno* s*.*

Zadatak 27 *Data je kriva kao presek paraboloida* $z = x^2 + y^2$ *i ravni* $y = z$*. Naći:*

a) ortove prirodnog triedra;

b) tačke krive u kojima je krivina $\kappa = 2\sqrt{2}$*;*

c) Freneove formule u tački krive nadjenoj pod b).

1.3 Oskulatorni krug. Evoluta i evolventa

Zadatak 28 *Naći oskulatorni krug krive* $\vec{r} = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$ *u tački* $(1, 1, 0)$.

Zadatak 29 *Naći krivinu i oskulatorni krug krive*

$$\mathcal{K} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = \frac{b}{2}x^2, \ a, b > 0 \end{cases}$$

u tački $M(0, 0, a)$.

Zadatak 30 *Naći sfernu indikatrisu tangenata krive*

$$\vec{r}(t) = (2t - \sin 2t, -\cos 2t, 4\sin t).$$

Zadatak 31 *Naći krivinu* κ^* *i torziju* τ^* *sfernih indikatrisa*

a) tangenata krive;

b) binormale krive.

Zadatak 32 *Data je sferna indikatrisa tangenata krive. Odrediti krivu kada je ta indikatrisa kružnica.*

Zadatak 33 *Naći evolutu i evolventu cilindarske zavojnice*

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \ (a, b > 0).$$

Zadatak 34 *Naći krivinu i torziju evolvente date krive* $\vec{r} = \vec{r}(s)$*, gde je* s *luk krive.*

Zadatak 35 *Data je kriva* $C : \vec{r} = \vec{r}(s)$*, gde je* s *luk krive i tačka* M *na njoj. Posmatrajmo vektor* $\vec{R}$ *koji leži u normalnoj ravni ove krive i gradi ugao* φ *sa glavnom normalom te krive. Ako je vektor* $\vec{R}$ *tangenta neke evolute date krive, dokazati da je* $\frac{d\varphi}{ds} = \pm\tau$*, gde je* τ *torzija krive* C.