1 Vektori

Zadatak 1.1 *Dokazati sledeće identitete:*

$$a)\ (\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2,\ \textit{(Langranžov identitet)}$$

$$b)\ (\vec{a}\times\vec{b})^2(\vec{a}\times\vec{c})^2-((\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c}))^2=((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})^2\vec{a}^2,\quad \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\overrightarrow{E^3}.$$

Zadatak 1.2 *Naći vektor $\vec{x}$ ako je*

$$\vec{x}\cdot\vec{a}=k,\ \vec{x}\cdot\vec{b}=m,\ \vec{x}\cdot\vec{c}=n,$$

gde su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dati nekomplanarni vektori a k, m, n dati skalari.

Zadatak 1.3 *Dokazati vektorskim putem da se simetrale stranica trougla seku u istoj tački.*

Zadatak 1.4 *Date su tačke $A(2,2,1)$, $B(1,3,1)$ i $C(1,1,1)$. Naći tačku T na pravoj AB tako da je rastojanje $\overline{CT}$ jednako $3\sqrt{2}$.*

Zadatak 1.5 *Date su tačke $A(2,2,1)$, $B(1,3,1)$ i $C(1,1,1)$. Naći tačku T na pravoj AB tako da prava CT bude normalana na pravu AB.*

Zadatak 1.6 *Date su tačke $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(3,0,0)$, i tačka $T(1,-1,0)$. Prava p prolazi kroz tačku T i ima vektor pravca $\vec{v}=(2,-3,1)$.*
a) Na pravoj p naći tačku X tako da tetraedar $ABCX$ ima zapreminu 10.
b) Naći presečnu tačku prave p i ravni odredjene tačkama A, B, C.

Zadatak 1.7 *Naći dužinu težišne linije koja odgovara stranici c trougla $\triangle ABC$, u zavisnosti od stranica trougla a, b, c.*

Zadatak 1.8 *Neka je dat trougao $\triangle ABC$. Tačka A_1 deli stranicu $\overline{BC}$ tako da je $\overline{A_1B}=\frac{1}{5}\overline{BC}$, a C_1 stranicu $\overline{AB}$ tako da je $\overline{C_1B}=\frac{1}{3}\overline{AB}$. Prave AA_1 i CC_1 se seku u tački T. Razložiti vektor $\overrightarrow{AT}$ u pravcu vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB}$.*

Zadatak 1.9 *Dokazati da za proizvoljnu tačku O unutar trougla $\triangle ABC$ važi:*

$$P_A\overrightarrow{OA}+P_B\overrightarrow{OB}+P_C\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0},$$

gde su P_A, P_B i P_C redom površine trouglova $\triangle BOC$, $\triangle COA$ i $\triangle AOB$.

Zadatak 1.10 *Neka su tačke E, F i G redom središta stranica $\overline{BC}, \overline{CD}$ i $\overline{DA}$ konveksnog četvorougla $\square ABCD$. Ako je T težište trougla $\triangle EFG$ i ako su površine trouglova $\triangle ATD$ i $\triangle BTC$ jednake dokazati da je četvorougao $\square ABCD$ trapez.*

Zadatak 1.11 *Dat je triedar sa vrhom O i tačke A, B i C na njegovim ivicama koje su podjednako udaljene od tačke O. Neka je S centar lopte upisane u taj triedar. Dokazati da je vektor $\overrightarrow{OS}$ kolinearan sa vektorom*

$$\vec{v}=\sin(\measuredangle BOC)\overrightarrow{OA}+\sin(\measuredangle COA)\overrightarrow{OB}+\sin(\measuredangle AOB)\overrightarrow{OC}.$$