1 Prostori dimenzije $n \geq 4$

DEFINICIJA 1.1 **Prava.** *Jednačina prave kroz tačku $M_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^N)$ u pravcu vektora $\overrightarrow{a} = \{a^1, a^2, \ldots, a^N\}$ ima skalarne parametarske jednačine*

$$x^i = x_0^i + ta^i, \quad i = 1, \ldots, n, \ t \in K \tag{1.1}$$

ili u kanonskom obliku

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a^2} = \ldots = \frac{x^N - x_0^N}{a^N}. \tag{1.2}$$

DEFINICIJA 1.2 **Hiperravan.** *Podprostor oblika $M_0 + \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_{N-1})$ gde su $a_1, \ldots, a_{N-1}$ linearno nezavisni vektori.*

Zadatak 1.1 *Naći jednačinu prave $p \in \mathbb{R}^4$ koja prolazi kroz tačku $T(10, 3, -9, -13)$ i seče pravu AB, $(A(2, 1, -1, 0,)\ B(-1, 0, 2, 3))$ i ravan*

$$\mathcal{P} = \begin{cases} x^1 + x^2 - x^3 = 0 \\ 2x^2 + 2x^3 - x^4 + 3 = 0. \end{cases}$$

Rešenje. Prava AB ima jednačinu

$$(AB) : \ \frac{x^1 - 2}{-3} = \frac{x^2 - 1}{-1} = \frac{x^3 + 1}{3} = \frac{x^4}{3} = t,$$

gde je $\overrightarrow{AB} = \{-3, -1, 3, 3\}$, tj.

$$(AB) : \ x^1 + x^4 - 2 = 0, \ 3x^2 + x^4 - 3 = 0, \ x^3 - x^4 + 1 = 0.$$

Prava p ima jednačinu

$$(p) : \ \frac{x^1 - 10}{a_1} = \frac{x^2 - 3}{a_2} = \frac{x^3 + 9}{a_3} = \frac{x^4 + 13}{a_4} = u,$$

Uslov da se seku p i (AB) je

$$\begin{cases} a_1 u + 10 + a_4 u - 13 - 2 = 0 \\ 3(a_2 u + 3) + a_4 u - 13 - 3 = 0 \\ a_3 u - 9 - a_4 u + 13 + 1 = 0 \end{cases}$$

tj.

$$\frac{a_1 + a_4}{5} = \frac{3a_2 + a_4}{7} = \frac{a_4 - a_3}{5} = \frac{1}{u}, \tag{1.3}$$

Pa je vektor pravca prave

$$\overrightarrow{p} = \{a_1, a_2, \frac{15a_2 - 7a_1}{2}, -a_1\}, \ a_1, a_2 \in R. \tag{1.4}$$

Kako p seče ravan $\mathcal{P}$, onda sistem ima rešenje

$$\begin{cases} a_1 u + 10 + a_2 u + 3 - a_3 u - 9 = 0 \\ a_2 u + 3 + 2(a_3 u - 9) - a_4 u - 13 + 3 = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Rešavanjem sistema (3) i (5) dobija se vektor pravca prave p. ♣

Zadatak 1.2 *Naći jednačinu ravni $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ koja sadrži tačke $A(1,1,1,-1)$, $B(2,3,6,-7)$, $C(0,0,6,-7)$, $D(3,4,1,-1)$.*

Rešenje. Posmatrajmo vektore $\overrightarrow{AB} = \{1,2,5,-6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-1,-1,5,6\}$, $\overrightarrow{AD} = \{2,3,0,0\}$. Ispitujemo linearnu zavisnost vektora.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -6 \\ -1 & -1 & 5 & -6 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zaključujemo da je dimenzija ravni nad ovim vektorima 2. Jednačina ravni je $\mathcal{P} : (1,1,1,-1) + u \cdot \{1,2,5,-6\} + v \cdot \{0,1,10,-12\}$ ♣

Zadatak 1.3 *Naći projekciju tačke $A(5,0,-3,4) \in \mathbb{R}^4$ na dvodimenzionalnu ravan $\mathcal{P}$ paralelno dvodimenzionalnoj ravni $\mathcal{Q}$*

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 + 1 = 0 \\ x^1 + x^2 - x^4 = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{Q} : \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0 \\ x^1 - 2x^4 - 3 = 0. \end{cases}$$

Rešenje. Projekciju tačke A odredimo kao presek ravni $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}_1$, koja prolazi kroz A i paralelna je sa $\mathcal{Q}$. Ako ravan $\mathcal{Q}$ napišemo u parametarskom obliku imamo

$$\mathcal{Q} : \; x^1 = 2t_2 + 3, \; x^2 = -t_1 - 3t_2 - 3, \; x^3 = t_1, \; t_2.$$

Pa je $\mathcal{Q} : \; \overrightarrow{r} = (3,-3,0,0) + t_1\{0,-1,1,0\} + t_2\{2,-3,0,1\}$. Kako su $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}_1 \ni A$ paralelne, to je jednačina ravni $\mathcal{Q}_1$:

$$\mathcal{Q}_1 : \; \overrightarrow{r} = (5,0,-3,4) + t_1\{0,-1,1,0\} + t_2\{2,-3,0,1\}$$

tj.

$$\mathcal{Q}_1 : \begin{cases} x^2 + x^3 + 3x^4 - 9 = 0 \\ x^1 - 2x^4 + 3 = 0. \end{cases}$$

Sada tražimo presek $\mathcal{Q}_1$ i $\mathcal{P}$,

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 + 1 = 0 \\ x^1 + x^2 - x^4 = 0 \\ x^2 + x^3 + 3x^4 - 9 = 0 \\ x^1 - 2x^4 + 3 = 0. \end{cases}$$

i kao rešenje ovog sistema dobijamo tačku $A'(-5,4,8,-2)$. ♣

Zadatak 1.4 *U četvorodimenzionalnom euklidkom prostoru data je prava*

$$(l) : x_1 = 4 + t, \; x_2 = 3 + 2t, \; x_3 = -3 - t, \; x_4 = 7 + 3t, \; t \in \mathbb{R}$$

i tačke $A(4,1,-1,1), B(-1,2,4,0), C(0,3,0,-2)$.

a) Odrediti tačku A_1 simetričnu tački A u odnosu na pravu l.

b) Odrediti jednačinu sfere čiji je centar tačka A_1 i koja sadrži težište trougla $\triangle ABC$.

Rešenje. Konstruišimo normalu iz A na l, neka je to tačka P. Tačka P pripada hiperravni koja sadrži A i normalna je na l, pa je njena jednačina

$$(x_1 - 4) + 2(x_2 - 1) - (x_3 + 1) + 3(x_4 + 1) = 0$$

. Ako zamenimo sada jednačinu prave l u jednačinu hiperravni dobijamo tačku $P(2,-1,-1,1)$. Koristimo uslov da je P sredina duži AA_1 pa je $A_1(0,-3,-1,3)$.

b) Kordinate težišta se nalaze iz uslova $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, tj. $T(1,2,1,-1)$ Poluprečnik sfere je $d(A_1,T) = \sqrt{46}$. Jednačina tražene sfere S^4 je

$$x_1^2 + (x_2+3)^2 + (x_3+1)^2 + (x_4-3)^2 = 46.$$

♣

Zadatak 1.5 *Naći jednačinu GMT, $M \in \mathbb{R}^4$ za koje je $d(M,\mathcal{P}) = d(M,O)$, gde je $O(0,0,0,0)$ i*

$$\mathcal{P} = \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 9 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 12 = 0. \end{cases}$$

Rešenje. Lako se može transformisati ravan

$$\mathcal{P} : (0,0,-3,6) + \mathcal{L}(\{1,0,2,-2\},\{0,1,2,0\})$$

Neka je $A(0,0,-3,6)$, $\overrightarrow{a}_1 = \{1,0,2,-2\}$, a $\overrightarrow{a}_2 = \{0,1,2,0\}$) i neka je $M = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ proizvoljna tačka, tada je

$$d(M,O) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4}$$

$$d(M,\mathcal{P}) = \sqrt{\frac{\Gamma(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{AM})}{\Gamma(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2)}} \text{ (formula 4.4.11. na 206 str. [1])}$$

gde je $\Gamma(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{AM})$ determinanta Gramove matrice (strana 179. u [1]). Kako je $\overrightarrow{AM} = \{x_1, x_2, x_3 + 3, x_4 - 6\}$, ona se računa po obrazcu

$$\Gamma(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{AM}) = det \begin{pmatrix} <\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_1> & <\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2> & <\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{AM}> \\ <\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_1> & <\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_2> & <\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{AM}> \\ <\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{a}_1> & <\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{a}_2> & <\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM}> \end{pmatrix}$$
$$= det \begin{pmatrix} 9 & 4 & x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 18 \\ 4 & 5 & x_2 + 2x_3 + 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 18 & x_2 + 2x_3 + 6 & x_1^2 + x_2^2 + (x_3^2 + 3)^2 + (x_4 - 6)^2 \end{pmatrix}$$
$$\Gamma(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2) = det \begin{pmatrix} <\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_1> & <\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2> \\ <\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_1> & <\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_2> \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 29$$

gde je $<,>$ skalarni proizvod. Traženo GMT se dobija iz uslova $d(M,O) = d(M,\mathcal{P})$.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4 = \frac{1}{29} \begin{vmatrix} 9 & 4 & x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 18 \\ 4 & 5 & x_2 + 2x_3 + 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 18 & x_2 + 2x_3 + 6 & x_1^2 + x_2^2 + (x_3^2 + 3)^2 + (x_4 - 6)^2 \end{vmatrix}$$

♣

References

[1] **Kočinac, Lj.** *Linearne algebra i analitička geometrija,* Prosveta, Niš, 1999.

[2] **Kočinac, Lj., Djordjević, S.,** *Zbirka zadataka iz Linearne algebre i analitičke geometrije,* Prosveta, Niš, 1999.

[3] **Milenković, O., Djorić, M.,** *Zbirka zadataka iz analitičke geometrije,* Matematički fakultet Beograd, 2007.