

1 Prava i ravan

Opšti vektorski oblik jednačine ravni

$$\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0, \quad (1)$$

gde je $M_1(\vec{r}_1)$, odnosno $M_1(x_1, y_1, z_1)$ tačka koja pripada ravni, vektor \vec{n} vektor normale ravni, a $D = -\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_1$.

Kako je $\vec{n} = (A, B, C)$, $\vec{r} - \vec{r}_1 = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, to prethodna jednačina postaje

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (2)$$

Jednačina (2) je **skalarni oblik** jednačine (1).

Opšti skalarni oblik jednačine ravni je

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (3)$$

Jednačina ravni kroz tri nekolinearne tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ je

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Segmentni oblik ravni koja ne sadrži koordinatni početak i seče ose Ox, Oy i Oz redom u tačkama $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ i $C(0, 0, c)$ ($abc \neq 0$) je

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Opšti vektorski oblik prave je (kao presek dve ravni koje nisu paralelne zadate u vektorskom obliku)

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0, \quad \vec{n}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0, \quad (1)$$

odnosno **opšti skalarni oblik**

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (2)$$

Parametarski oblik

$$x - x_1 = lt, \quad y - y_1 = mt, \quad z - z_1 = nt, \quad (3)$$

odnosno

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} (= t), \quad (4)$$

gde je $M(x_1, y_1, z_1)$ tačka koja pripada datoj pravoj, a $\vec{a} = (l, m, n)$ vektor pravca date prave.

Zadatak 1.1 Data je prava u opštem obliku

$$(l) : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + 5z - y = 0 \end{cases}$$

Naći njenu jednačinu u parametarskom (simetričnom) obliku.

Zadatak 1.2 Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačku $M_1(-2, 1, 3)$ i

a) normalna je na vektor $\vec{n} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$,

b) paralelna je vektorima $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (4, 2, -1)$.

Zadatak 1.3 Naći presek pravih ako postoji

$$(p) : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (q) : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Zadatak 1.4 Naći zajedničku normalu dve prave:

$$(a) : \begin{cases} x = 2 + p \\ y = 1 - 2p \\ z = 3 - p \end{cases} \quad (b) : \frac{x - 4}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{-1}.$$

Zadatak 1.5 Naći zajedničku normalu dve prave:

$$(a) : \begin{cases} x = 4 + p \\ y = -3p \\ z = 4 + p \end{cases} \quad (b) : \begin{cases} x = 5 + p \\ y = 2 + 2p \\ z = 3 - p \end{cases}$$

Zadatak 1.6 Date su dve tačke $A(-1, 0, 3)$ i $B(2, 1, -5)$ i prava l svojom jednačinom

$$(l) : x = y + 1 = 3z.$$

Naći ravan α takvu da je $A, B \in \alpha$ i da je α paralelna sa pravom l .

Zadatak 1.7 Date su prave

$$(a) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (b) : \begin{cases} 2x - y + z = 0 & (\alpha_1) \\ 2x + y - z + 1 = 0 & (\alpha_2) \end{cases}$$

a) Naći ravan β koja sadrži pravu b i paralelna je sa a .

b) Naći normalnu projekciju prave a na ravan β .

Zadatak 1.8 Data su tačke $A(1, 1, -1)$, $B(0, -1, 3)$ i vektor $\vec{v} = (2, 1, 4)$ i ravan $(\tau) : x - y = 2z$.

Naći jednačinu projekcije prave AB u pravcu vektora \vec{v} na ravan τ .

Zadatak 1.9 Ravan α i Oxy su simetrične u odnosu na ravan $\beta : 2x + y - 4z - 5 = 0$. Naći jednačinu ravni α .

Zadatak 1.10 Data je ravan $(\alpha) : 2x - y + z + 1 = 0$ i tačka $A(1, 2, -1) \in \alpha$ i ravan $(\beta) : x - y + 3z + 2 = 0$. Naći vektor pravca prave p koja je paralelna sa ravni β , leži u ravni α i sadrži tačku A .

Zadatak 1.11 Data je ravan $(\tau) : -x + 2y + 6z - 5 = 0$, tačka $A(0, -1, 0)$ i prava $(l) : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.

Naći pravu p takvu da tačka A pripada pravoj p , p ima zajedničkih tačaka sa l i paralelna je sa τ .