

# 1 Krive u ravni

Konusni presek  $\mathcal{K}(l, M, e) = \{T \in \mathbb{E}^2 : \frac{d(T, M)}{d(T, l)} = e\}$

- $e > 1$ , hiperbola  $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ ;
- $e = 1$ , parabola  $(y^2 = 2px, p > 0)$ ;
- $0 < e < 1$ , elipsa  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ .

Parametarske jednačine:

- hiperbola ( $h$ ) :  $\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases}$
- kružnica ( $k$ ) :  $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$
- elipsa ( $e$ ) :  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$
- parabola ( $p$ ) :  $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$

Žiže:

- hiperbola  $F_1(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0), F_2(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ ;
- elipsa  $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ ;
- parabola  $F(\frac{p}{2}, 0)$ .

Uslov dodira prave  $y = kx + n$  i

- hiperbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  je  $a^2k^2 - b^2 = n^2$ ;
- kružnice  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$  je  $r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$ ;
- elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  je  $a^2k^2 + b^2 = n^2$ ;
- parabole  $y^2 = 2px$  je  $p = 2kn$ .

**Zadatak 1.1** Data je kružnica  $k : x^2 + y^2 = r^2$  i tačka  $P(c, 0)$ ,  $c > r$ . Naći geometrijsko mesto središta tetiva kružnice  $k$  koje prolaze kroz tačku  $P$ .

**Zadatak 1.2** Tačka  $P'$  je normalna projekcija proizvoljne tačke  $P$  kružnice  $x^2 + y^2 = r^2$  na osu  $Ox$ . Neka tačka  $M$  deli duž  $\overline{PP'}$  u datoj razmeri  $\lambda$ . Naći geometrijsko mesto tačka  $M$  kada tačka  $P$  opisuje datu kružnicu.

**Zadatak 1.3** Naći konusni presek  $\mathcal{K}$  kome je direktrisa prava  $(l) : x - y = 0$  tako da tačke  $A(0, 1)$ ,  $B(-2, 0)$  i  $C(1, -1)$  pripadaju  $\mathcal{K}$ .

**Zadatak 1.4** Naći geometrijsko mesto tačaka iz kojih se kriva

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vidi pod pravim uglom.

**Zadatak 1.5** Dokazati da je proizvod rastojanja žiža od bilo koje dve paralelne tangente elipse konstantan.

**Zadatak 1.6** Ako temena paralelograma leže na nekoj elipsi onda se presek dijagonala paralelograma i centar elipse poklapaju. Dokazati.

**Zadatak 1.7** Date su dve parabole sa uzajamno normalnim direktrisama i tačke  $A_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  koje pripadaju obema parabolama. Dokazati da postoji kružnica koja sadrži sve četiri tačke.

## 2 Krive u prostoru

**Zadatak 2.1** Odrediti koja je kriva data sistemom jednačina

$$\mathcal{K} : \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 + z^2 = r^2. \end{cases}$$

**Zadatak 2.2** Pokazati da presek površi  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  i  $2xy = z^2$  predstavlja dve kružnice čije su ravni normalne na ravan  $xOy$ .

**Zadatak 2.3** Dokazati da kriva

$$\mathcal{K}_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \\ z^2 = ax. \end{cases}$$

leži na sferi  $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$  i na cilindru  $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{5}{4}a^2$ .

**Zadatak 2.4** Odrediti geometrijsko mesto tačaka  $M$  koje zadovoljavaju uslove:  $\overline{MM'} = 1$  i  $\overline{MN} = 3$ , gde je  $M'$  normalna projekcija tačke  $M$  na ravan  $xOy$ , i  $N(1, 2, -2)$ .

**Zadatak 2.5** Data je duž  $\overline{AB}$  dužine  $a$ . Tačka  $A$  klizi po pravoj  $l$ , koja leži u ravni  $zOx$  paralelna je sa osom  $Oz$  i na rastojanju  $r$  je od nje. Tačka  $B$  klizi po kružnici  $k$ , koja je opisana oko koordinatnog početka  $O$  poluprečnikom  $r$  u ravni  $xOy$ . Napisati jednačine krive koju opisuje sredina duži  $\overline{AB}$ .