MATEMATIČKA LOGIKA

***

– FUNKCIJE –

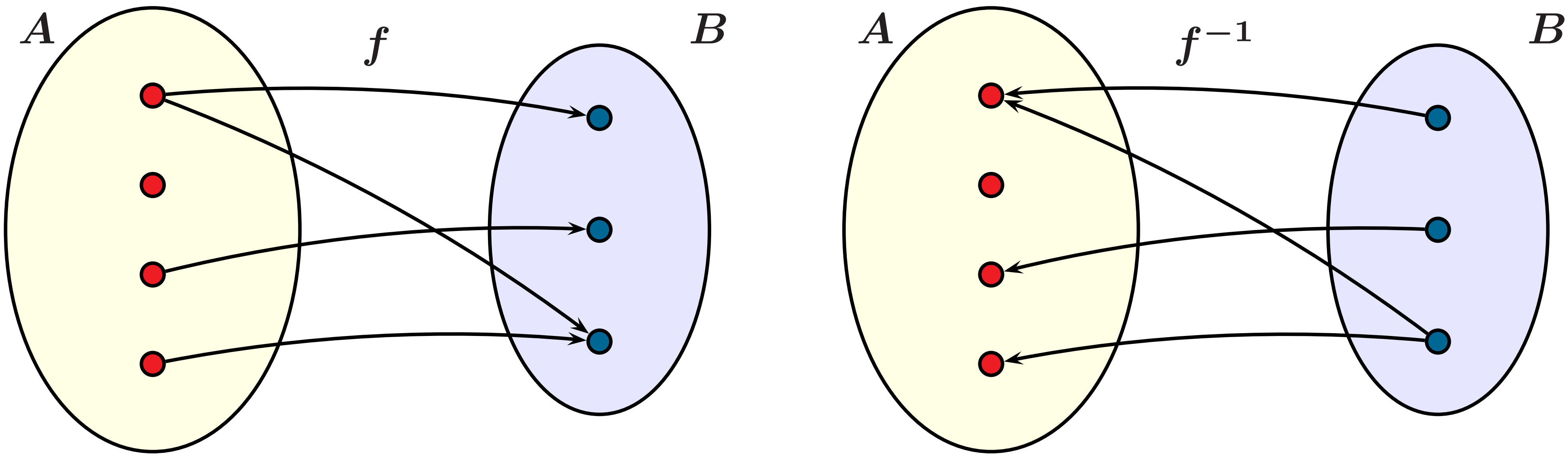
II DEO

Neka je data korespondencija $f \subseteq A \times B$.

Tada korespondenciju $f^{-1} \subseteq B \times A$ definisanu sa

$$f^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in f\}$$

nazivamo **inverznom korespondencijom** korespondencije f.



Ako funkciju $f : A \longrightarrow B$ posmatramo kao korespondenciju iz A u B, onda možemo govoriti o njenoj inverznoj korespondenciji f^{-1}.

U opštem slučaju, to f^{-1} može, ali ne mora, da bude funkcija.

Ako je f^{-1} funkcija, onda bi smo mogli reći da je to inverzna funkcija za f.

Međutim, pojam inverzne funkcije definisaćemo na drugačiji način, a potom ćemo dokazati da

- funkcija f ima inverznu funkciju ako i samo ako inverzna korespondencija f^{-1} jeste funkcija,
- u tom slučaju je baš to f^{-1} inverzna funkcija od f.

Pre no što definišemo pojam inverzne funkcije, dokazujemo sledeće:

Tvrđenje 5: Za svaku funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoji najviše jedna funkcija $g : B \longrightarrow A$ za koju važi

$$f \circ g = I_A \quad \text{i} \quad g \circ f = I_B.$$

Dokaz: Pretpostavimo da su $g_1, g_2 : B \longrightarrow A$ dve funkcije sa navedenim osobinama, tj. funkcije za koja važi

$$f \circ g_1 = I_A,\ g_1 \circ f = I_B \quad \text{i} \quad f \circ g_2 = I_A,\ g_2 \circ f = I_B.$$

Tada, na osnovu Tvrđenja 2.14 i asocijativnosti kompozicije funkcija,

$$g_1 = g_1 \circ I_A = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = I_B \circ g_2 = g_2. \quad \square$$

Dakle, ako za funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoji funkcija $g : B \longrightarrow A$ takva da važi

$$f \circ g = I_A \quad \text{i} \quad g \circ f = I_B,$$

tada je takva funkcija g jedinstvena i nazivamo je **inverznom funkcijom** funkcije f.

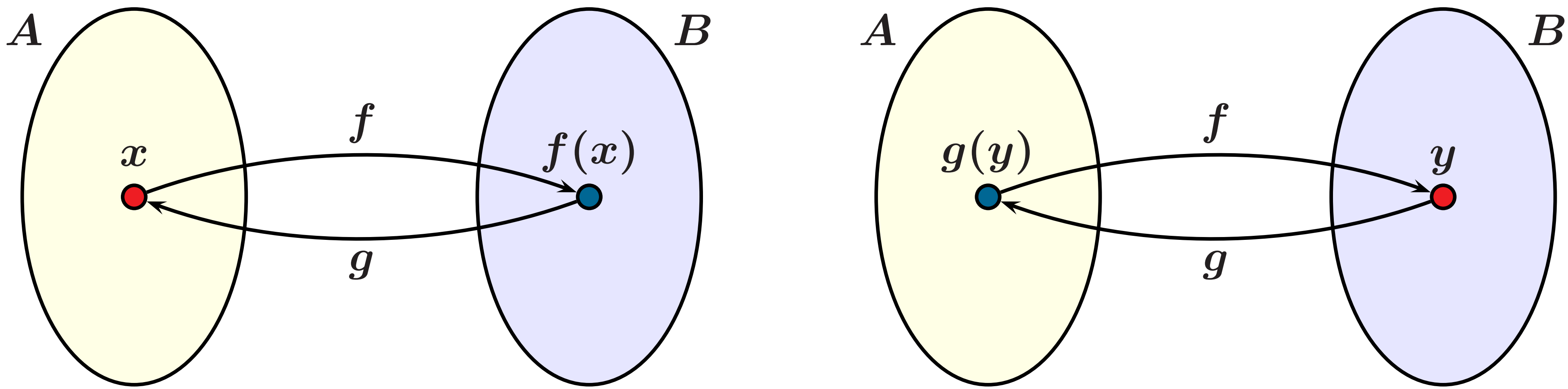
Jasno, za svaku funkciju ne mora da postoji inverzna funkcija.

Razmotrimo značenje uslova $f \circ g = I_A$ i $g \circ f = I_B$.

On znači da za svaki $x \in A$ i svaki $y \in B$ važi

$$g(f(x)) = x \quad \text{i} \quad f(g(y)) = y,$$

što je prikazano na sledećoj slici:



Drugim rečima, svaka od funkcija f i g **poništava** onu drugu, tj., vraća nas na stanje pre primene prve funkcije.

Prirodno se nameće pitanje:

U kakvoj su vezi pojmovi inverzne korespondencije i inverznog preslikavanja funkcije?

Odgovor na to pitanje daje sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 6: Neka je data funkcija $f : A \longrightarrow B$ i neka je f^{-1} njena inverzna korespondencija.

Tada f ima inverznu funkciju ako i samo ako je f^{-1} funkcija.

U tom slučaju je upravo f^{-1} inverzna funkcija za f.

Dokaz: Pretpostavimo da f ima inverzno preslikavanje g, tj. da je $f \circ g = I_A$ i $g \circ f = I_B$.

(a1) f^{-1} zadovoljava uslov (i) iz definicije funkcije:

Neka je $y \in B$. Tada za $x = g(y)$ imamo da je

$$f(x) = f(g(y)) = g \circ f(y) = I_B(y) = y,$$

pa je $(x, y) \in f$, tj. $(y, x) \in f^{-1}$.

Dakle, $pr_1 f^{-1} = B$, pa f^{-1} zadovoljava uslov (i) definicije funkcije.

(a2) f^{-1} zadovoljava uslov jednoznačnosti:

Dokažimo sada da iz $(y, x_1) \in f^{-1}$ i $(y, x_2) \in f^{-1}$ sledi $x_1 = x_2$.

Zaista, odatle dobijamo da je $(x_1, y) \in f$ i $(x_2, y) \in f$, tj.

$$f(x_1) = y = f(x_2),$$

odakle je

$$\begin{aligned} x_1 = I_A(x_1) &= f \circ g(x_1) = g(f(x_1)) = \\ &= g(f(x_2)) = f \circ g(x_2) = I_A(x_2) = x_2. \end{aligned}$$

Prema tome, f^{-1} zadovoljava uslov jednoznačnosti.

Konačno, iz (a1) i (a2) sledi da je f^{-1} funkcija.

Obratno, neka je f^{-1} funkcija. Dokazaćemo da je $f \circ f^{-1} = I_A$ i $f^{-1} \circ f = I_B$.

Zaista, neka je $x \in A$. Tada za $y = f(x) \in B$ imamo da je $(x, y) \in f$, odakle je $(y, x) \in f^{-1}$, tj. $f^{-1}(y) = x$. Prema tome,

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_A(x),$$

čime smo dokazali da je $f \circ f^{-1} = I_A$.

Na potpuno isti način dokazujemo da je $f^{-1} \circ f = I_B$.

Dakle, f^{-1} je inverzna funkcija funkcije f. $\square$

U skladu sa prethodnim tvrđenjem, ako funkcija $f : A \longrightarrow B$ ima inverznu funkciju, onda je označavamo upravo sa f^{-1}.

Dakle, prema Tvrđenju 6., funkcija f ima inverznu funkciju ako i samo ako njena inverzna korespondencija f^{-1} jeste funkcija, tj. zadovoljava uslove (i) i (ii) iz definicije funkcije.

Uslovi pod kojima f^{-1} zadovoljava (i) i (ii) iz definicije funkcije dati su sledećim tvrđenjem:

Tvrđenje 7: Neka je data funkcija $f : A \longrightarrow B$. Tada

a) Inverzna korespondencija f^{-1} zadovoljava uslov (i) iz definicije funkcije ako i samo ako f jeste sirjekcija.

b) Inverzna korespondencija f^{-1} zadovoljava uslov (ii) iz definicije funkcije ako i samo ako f jeste injekcija.

Dokaz:

a) Korespondencija f^{-1} zadovoljava uslov (i) iz definicije funkcije, tj. $pr_1 f^{-1} = B$, ako i samo ako za svaki $y \in B$ postoji $x \in B$ tako da je $(y, x) \in f^{-1}$.

To je dalje ekvivalentno sa tim da je f sirjekcija, jer je $(y, x) \in f^{-1}$ ekvivalentno sa $(x, y) \in f$, odnosno sa $f(x) = y$.

b) Korespondencija f^{-1} zadovoljava uslov (ii) iz definicije funkcije, tj. $(y, x_1) \in f^{-1}$ i $(y, x_2) \in f^{-1}$ povlači $x_1 = x_2$, ako i samo ako $f(x_1) = y$ i $f(x_2) = y$ povlači $x_1 = x_2$.

To je, jasno, ekvivalentno sa tim da je f injekcija. $\square$

Konačno, uslovi pod kojima funkcija ima inverznu funkciju dati su sledećim tvrđenjem:

Tvrđenje 8: Funkcija $f : A \longrightarrow B$ ima inverznu funkciju ako i samo ako je f bijekcija.

Dokaz: Dokaz sledi neposredno iz prethodna dva tvrđenja. $\square$

Tvrđenje 9: Neka funkcija $f : A \longrightarrow B$ ima inverznu funkciju f^{-1}. Tada:

(a) f^{-1} je bijekcija;

(b) $(f^{-1})^{-1} = f$.

Dokaz: S obzirom na Tvrđenje 8., dovoljno je dokazati (b).

Tvrđenje (b) sledi neposredno iz Tvrđenja 5, koje kaže da, pošto je f^{-1} inverzna funkcija za f, važi

$$f \circ f^{-1} = I_A \quad \text{i} \quad f^{-1} \circ f = I_B.$$

Zbog simetričnosti ovog uslova sledi da je f inverzna funkcija za f^{-1}.

Primer 1.1. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i neka je $f : A \longrightarrow A$ funkcija zadata sa

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Dokazati da je f bijekcija (tj. permutacija skupa A);

(b) Odrediti inverznu funkciju f^{-1}.

Rešenje: (a) Kako su svi elementi u drugoj vrsti različiti, to na osnovu ranije dokazanog imamo da je f bijekcija, odnosno permutacija.

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ & & & \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Biramo argument 1 u tabeli funkcije f^{-1}

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Pronalazimo taj isti argument među slikama u tabeli funkcije f

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ & & & \end{pmatrix}$$

U tabeli funkcije f nalazimo element 3 koji se slika u $f(1)$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

Vrednost $3 = f^{-1}(1)$ zapisujemo na odgovarajuće mesto u tabeli funkcije f^{-1}

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

Isti postupak ponavljamo za argument 2 tabeli funkcije f^{-1} ...

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & & \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 3 & 4 & & \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & & \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ 3 & 4 & & \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 3 & 4 & 2 & \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & \end{pmatrix}$$

Inverzna funkcija – primer

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Postupak za određivanje inverzne funkcije f^{-1} prikazan je sledećom animacijom:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Primer 1.2. Neka su date funkcije

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odrediti funkciju $F = g \circ h^{-1} \circ f$.

Rešenje: Primetimo najpre da je funkcija h bijekcija, jer se u drugoj vrsti njenog matričnog predstavljanja pojavljuju svi elementi iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, pa h zaista ima inverznu funkciju h^{-1} koja je data sa:

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dalje je

$$g \circ h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = (g \circ h^{-1}) \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

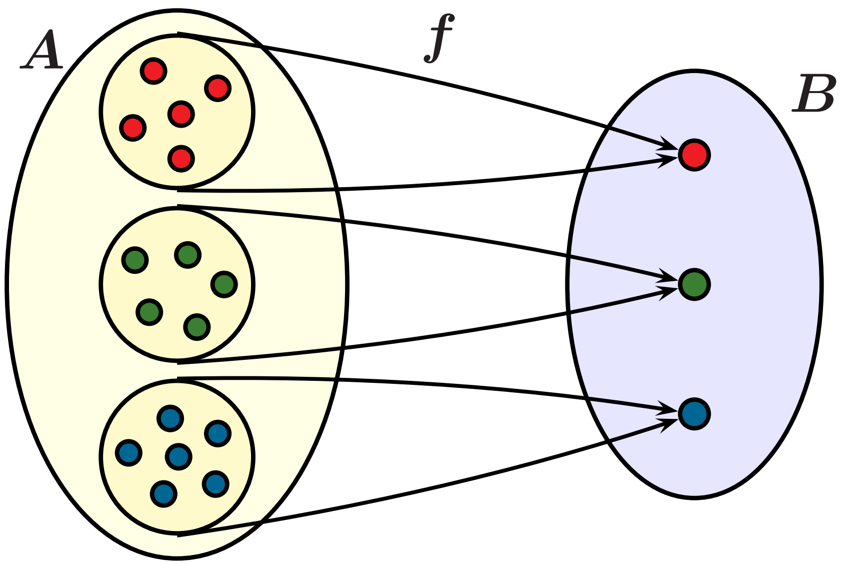
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Jezgrom funkcije $f : A \longrightarrow B$ (engl. **kernel**) nazivamo relaciju $\ker f$ definisanu na skupu A na sledeći način:

$$(x_1, x_2) \in \ker f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x_1) = f(x_2).$$

Tvrđenje 10: Jezgro funkcije $f : A \longrightarrow B$ je relacija ekvivalencije na A.

Dokaz: Ostavlja se za vežbu.



Na slici desno vidi se da jednu klasu relacije $\ker f$ čine svi oni elementi iz A koji se slikaju i jedan isti element iz B.

Važi i obratno tvrđenje:

Tvrđenje 11: Za svaku relaciju ekvivalencije ϱ na skupu A postoji skup B i funkcija $f : A \longrightarrow B$, tako da je jezgro funkcije f baš to relacija ϱ.

Dokaz: Neka je ρ relacija ekvivalencije na A i $B = A/\varrho$ odgovarajući faktor skup.

Definišimo funkciju $f : A \longrightarrow A/\varrho$ tako da se svaki element iz A slika u svoju ϱ-klasu, tj. $f(x) = [x]_\varrho$, za svaki $x \in A$.

Kako svaki element $x \in A$ jednoznačno određuje klasu $[x]_\varrho$, funkcija f je dobro definisana.

Dalje, imamo da je

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in \ker f \quad &\Leftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) && \text{(definicija jezgra funkcije)} \\
&\Leftrightarrow \quad [x_1]_\varrho = [x_2]_\varrho && \text{(definicija funkcije } f\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad (x_1, x_2) \in \varrho && \text{(svojstvo jednakosti klasa),}
\end{aligned}
$$

odakle je $\ker f = \varrho$. $\square$

Funkcija f definisana kao u dokazu prethodne teoreme naziva se prirodno preslikavanje relacije ekvivalencije ϱ i označava se sa $\varrho^\natural$.

Jasno, ova funkcija je uvek sirjektivna.

Tvrđenje 12: Neka je $f : A \longrightarrow B$ proizvoljna funkcija, $\varrho = \ker f$ je njeno jezgro i $\varphi = \varrho^\natural : A \longrightarrow A/\varrho$ je prirodno preslikavanje relacije ekvivalencije ϱ.

Tada je sa

$$\psi : [x]_\rho \mapsto f(x) \quad \text{tj.} \quad \psi([x]_\rho) = f(x)$$

definisana funkcija iz A/ϱ u B za koju važi:

(a) ψ je injektivna funkcija;

(b) $f = \varphi \circ \psi$;

(c) ako je f sirjektivna funkcija, onda je ψ bijekcija.

Drugim rečima, ovo tvrđenje kaže da postoji funkcija $\psi : A/\varrho \to B$ takva da sledeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi = \varrho^{\natural}"] \arrow[dr, "f"'] & & A/\varrho \arrow[dl, "\psi"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Pri tome je ψ i injektivna funkcija.

Osim toga, važi i sledeće:

(d) ψ je jedinstvena injektivna funkcija takva da gornji dijagram komutira.

Dokaz: Funkcija ψ je dobro definisana, jer za svaku klasu $[x]_\varrho$ postoji tačno jedan elemenat iz B u koji se svi elementi te klase preslikavaju funkcijom f – to je element $f(x)$.

Dakle, definicija ove funkcije ne zavisi od izbora predstavnika klase.

(a) Za proizvoljne klase $[x_1]_\varrho, [x_2]_\varrho \in A/\varrho$ važi

$$\begin{aligned} \psi([x_1]_\varrho) = \psi([x_2]_\varrho) &\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) && \text{(definicija funkcije } \psi\text{)} \\ &\Rightarrow (x_1, x_2) \in \varrho && \text{(definicija jezgra funkcije)} \\ &\Rightarrow [x_1]_\varrho = [x_2]_\varrho && \text{(svojstvo jednakosti klasa),} \end{aligned}$$

odakle sledi da je funkcija ψ injektivna.

(b) Neka je $x \in A$. Tada je

$$\varphi \circ \psi(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi([x]_\varrho) = f(x).$$

Dakle, $\varphi \circ \psi = f$.

(c) Ako je f sirjekcija, onda je ψ i sirjekcija iz A/ϱ na B, što sledi neposredno iz Tvrđenja 4 (b), pa je, dakle, ψ bijekcija.

(d) Dokazujemo da je ψ jedinstvena injektivna funkcija takva da gornji dijagram komutira.

Pretpostavimo suprotno, da postoji i neka druga injektivna funkcija $\chi : A/\varrho \to B$, takva da taj dijagram komutira, tj. da je $\varphi \circ \chi = f$.

Jezgro funkcije

U tom slučaju za proizvoljnu klasu $[x]_\varrho \in A/\varrho$ važi:

$$
\begin{aligned}
\chi([x]_\varrho) &= \chi(\varphi(x)) && \text{(jer je } \varphi = \varrho^\natural\text{)} \\
&= \varphi \circ \chi(x) && \text{(definicija kompozicije funkcija)} \\
&= f(x) && \text{(pretpostavka da je } \varphi \circ \chi = f\text{)} \\
&= \varphi \circ \psi(x) && \text{(jer je } \varphi \circ \psi = f\text{)} \\
&= \psi(\varphi(x)) && \text{(definicija kompozicije funkcija)} \\
&= \psi([x]_\varrho) && \text{(jer je } \varphi = \varrho^\natural\text{).}
\end{aligned}
$$

Kako ovo važi za proizvoljnu klasu iz A/ϱ, to sledi da je $\chi = \psi$. $\square$

Operacije

Neka je A neprazan skup i $n \in \mathbb{N}_0$ je proizvoljan prirodan broj.

Proizvoljnu funkciju $f : A^n \longrightarrow A$ koja slika Dekartov n-ti stepen A^n skupa A u sam skup A nazivamo n-arnom operacijom na skupu A.

Broj n zovemo arnost ili dužina operacije f.

Operacije dužine 2 nazivamo binarne operacije.

Operacije dužine 1 nazivamo unarne operacije.

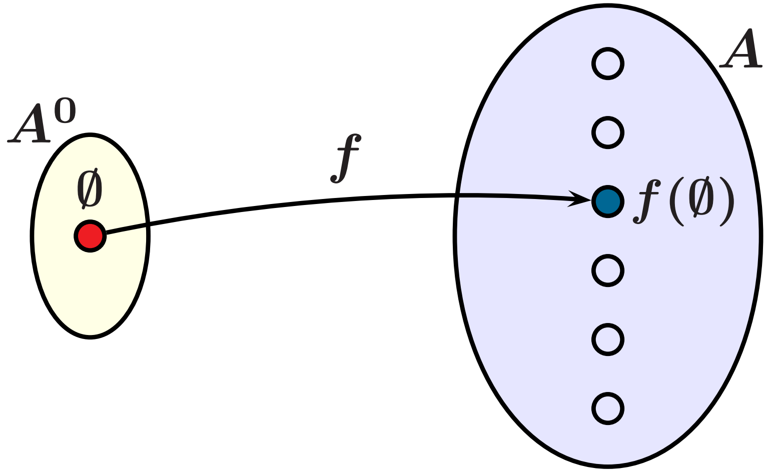
Jasno, unarne operacije su obične funkcije iz A u A.

Operacije dužine 0 nazivamo nularne operacije.

Nularne operacije su karakteristične, pa ćemo se nešto više zadržati na njima da bi pojasnili njihovo dejstvo.

Naime, nularna operacija je preslikavanje $f : A^0 \longrightarrow A$.

Kako se skup A^0 sastoji iz samo jednog elementa $\emptyset$, to se tim preslikavanjem zapravo fiksira jedan element – konstanta $f(\emptyset) \in A$.



Zato umesto o nularnim operacijama na skupu A često radije govorimo o izboru i fiksiranju izvesnih konstanti u tom skupu.

Binarne operacije su operacije koje se najviše koriste u matematici.

Kako najčešće radimo upravo sa njima, to ih obično nazivamo samo **operacije**, ako je iz konteksta jasno da se radi o binarnim operacijama.

Ako je f binarna operacija na skupu A, proizvod "$f(a, b)$" elemenata a i b iz A, tj. rezultat primene operacije f na te elemente, radije označavamo sa "$a\ f\ b$".

Takođe, za označavanje binarnih operacija najčešće koristimo simbole "$\cdot$", "$+$", "$*$", "$\circ$" i slično.

Rezultat primene te operacije na elemente $a, b \in A$ označavamo sa "$a \cdot b$", "$a + b$", "$a * b$" ili "$a \circ b$".

Umesto "$a \cdot b$" obično pišemo samo "ab", tj. izostavljamo tačku.

Primeri operacija

(a) Sabiranje i množenje prirodnih, celih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva su binarne operacije na skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ (ovo poslednje je oznaka za skup kompleksnih brojeva).

Sabiranje označavamo znakom "$+$" a množenje znakom "$\cdot$", pri čemu, kao što smo rekli, tačku obično izostavljamo.

(b) Unija, presek, razlika i simetrična razlika skupova su binarne operacije, dok je komplement unarna operacija na partitivnom skupu $\mathscr{P}(U)$ skupa U.

Ako je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ konačan skup, onda operaciju $\cdot$ na tom skupu možemo predstaviti takozvanom Kejlijevom tablicom, kod koje

- vrste i kolone tabele su označene elementima iz skupa A;
- u ćeliji tabele koja pripada vrsti elementa a_i i koloni elementa a_j ubeležen je njihov proizvod $a_i \cdot a_j$.

$\cdot$	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \cdot a_1$	$a_1 \cdot a_2$	$\cdots$	$a_1 \cdot a_j$	$\cdots$	$a_1 \cdot a_n$
a_2	$a_2 \cdot a_1$	$a_2 \cdot a_2$	$\cdots$	$a_2 \cdot a_j$	$\cdots$	$a_2 \cdot a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_i	$a_i \cdot a_1$	$a_i \cdot a_2$	$\cdots$	$a_i \cdot a_j$	$\cdots$	$a_i \cdot a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	$a_n \cdot a_1$	$a_n \cdot a_2$	$\cdots$	$a_n \cdot a_j$	$\cdots$	$a_n \cdot a_n$

Što se tiče unarnih operacija na skupu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, i njih možemo predstaviti tablicom.

Naime, ako je $f : A \longrightarrow A$ unarna operacija, tada se ona predstavlja tablicom sledećeg oblika:

	f
a_1	$f(a_1)$
a_2	$f(a_2)$
$\vdots$	$\vdots$
a_i	$f(a_i)$
$\vdots$	$\vdots$
a_n	$f(a_n)$

Primer – Bulove operacije

Na skupu $\mathbb{B} = \{0,1\}$ definišimo unarnu operaciju $\neg$ i četiri binarne operacije $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ pomoću sledećih tablica:

	$\neg$
1	0
0	1

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\Rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\Leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

Iz tablica se jasno vidi

- da su 1 i 0 samo drugačije oznake logičkih vrednosti $\top$ (tačno) i $\bot$ (netačno), tim redom;
- da su $\neg$ – **negacija**, $\wedge$ – **konjunkcija**, $\vee$ – **disjunkcija**, $\Rightarrow$ – **implikacija**, i $\Leftrightarrow$ – **ekvivalencija**, standardne logičke operacije.

Primer – Bulove operacije

Ove operacije nazivamo i **Bulovim operacijama**, u čast **Džordža Bula** (George Boole), britanskog matematičara iz 19. veka, tvorca matematičke logike i savremene algebre.

Kao što već znamo, uređena šestorka $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg)$ naziva se **iskazna algebra**.

Svojstva operacija

Navešćemo samo neka osnovna svojstva koja mogu imati binarne i unarne operacije.

Neka je $\cdot$ binarna operacija na skupu A. Operacija $\cdot$ je

- **asocijativna** ako za sve $a, b, c \in A$ važi

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

- **komutativna** ako za sve $a, b \in A$ važi

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

- **idempotentna** ako za svaki $a \in A$ važi

$$a \cdot a = a.$$

Svojstva operacija

Neka su $\cdot$ i $+$ binarne operacija na skupu A. Operacija $\cdot$ je

- **distributivna u odnosu na $+$** ako za sve $a, b, c \in A$ važi:

$$a \cdot (b + c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad \text{i} \quad (b + c) \cdot a = (b + a) \cdot (c + a).$$

Neka je $^* : a \mapsto a^*$ unarna operacija, a $\cdot$ je binarna operacija na skupu A. Operacija * je

- **involutivna u odnosu na $\cdot$** ako za proizvoljne $a, b \in A$ važi

$$(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*,$$

i za proizvoljan $a \in A$ važi

$$(a^*)^* = a$$

Još primera operacija

(a) Operacije $+$ sabiranja i $\cdot$ množenja prirodnih, celih, racionalnih, realnih ili kompleksnih brojeva su komutativne i asocijativne.

Operacija množenja je distributivna u odnosu na sabiranje, ali ne važi obratno – sabiranje nije distributivno u odnosu na množenje, jer je, na primer,

$$2 + (3 \cdot 4) = 2 + 12 = 14, \quad (2 + 3) \cdot (2 + 4) = 5 \cdot 6 = 30.$$

(b) Operacija kompozicije relacija je distributivna u odnosu na uniju, ali nije u odnosu na presek (Videti Tvrđenje 3. iz dela o relacijama).

(c) Operacija preseka skupova je distributivna u odnosu na uniju, a važi i obratno, unija je distributivna u odnosu na presek.

(b) Operacija ${}^{-1}$: $\varrho \mapsto \varrho^{-1}$ **inverzije relacija** je involutivna u odnosu na kompoziciju relacija, tj.

$$(\varrho \circ \theta)^{-1} = \theta^{-1} \circ \varrho^{-1}, \qquad (\varrho^{-1})^{-1} = \varrho,$$

za proizvoljne relacije ϱ i θ na datom skupu A.

Isto to važi i za inverziju i kompoziciju korespondencija i funkcija.

Pitanje: Da li je inverzija matrica involutivna i u odnosu na presek i uniju relacija?

Neka je A proizvoljan neprazan skup.

Niz elemenata iz skupa A formalno matematički definišemo kao funkciju $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ iz skupa $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva u A.

Niz se najčešće navodi samo skupom vrednosti.

Naime, za svaki $i \in \mathbb{N}$ stavljamo da je $f(i) = a_i$, i u tom slučaju niz predstavljamo kao

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad \text{ili} \qquad (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

Za ovakav niz kažemo i da je **indeksiran** skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, jer se pri označavanju elemenata niza kao indeksi koriste prirodni brojevi.

Obostrano beskonačni nizovi

Pored skupova indeksiranih skupom prirodnih brojeva, u matematici se izučavaju i skupovi indeksirani skupom $\mathbb{Z}$ celih brojeva.

To su takozvani obostrano beskonačni nizovi, koji se definišu kao funkcije $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$, i predstavljaju kao $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ili

$$\ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

gde je $a_i = f(i)$, za svaki $i \in \mathbb{Z}$.

Razlog zbog čega se ovi nizovi nazivaju "obostrano beskonačnim" je očigledan.

U tom pogledu, nizovi indeksirani prirodnim brojevima su "beskonačni samo sa jedne strane".

Dakle, nizove elemenata iz skupa A smo definisali kao funkcije iz skupa prirodnih brojeva u skup A.

Na isti način **konačan niz** elemenata iz A možemo definisati kao funkciju $f : \mathbb{N}_n \to A$, gde je $n \in \mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ je skup prvih n prirodnih brojeva.

Takve nizove označavamo sa

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}_n}, \quad (a_i)_{i=1}^{n}, \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{ili} \quad a_1, a_2, \dots, a_n$$

Broj n je **broj elemenata** u nizu ili **dužina niza**.

Jasno, konačan niz dužine n nije ništa drugo do **uređena n-torka** elemenata iz A.

Konačni nizovi

Konačan niz dužine n u nekim prilikama zovemo i **vektor** dužine n.

U nekim primenama, konačan niz dužine n elemenata iz skupa A predstavljamo i bez pisanja zagrada i zapeta, na sledeći način:

$$x_1 x_2 \dots x_n$$

Konačne nizove koje predstavljamo na ovaj način zovemo **rečima** ili **stringovima** elemenata iz skupa A.

U tom slučaju, uobičajeno je da se skup A naziva **alfabet**, a njegovi elementi **slova**.

Kada kažemo "niz" mislimo na beskonačan niz, a kada radimo sa konačnim nizovima, onda uvek govorimo "konačan niz".

Potsetimo se da su dve funkcije $f : A \longrightarrow B$ i $g : C \longrightarrow D$ jednake ako i samo ako je $A = C$, $B = D$, i za svaki $x \in A$ je $f(x) = g(x)$.

Budući da su i nizovi definisani kao funkcije, to znači da su dva niza $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ i $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ jednaka ako i samo ako je

$$f(i) = g(i), \text{ za svaki } i \in \mathbb{N},$$

odnosno, dva niza $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ elemenata iz skupa A su jednaka ako i samo ako je

$$a_i = b_i\,, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Slično važi i za nizove indeksirane skupom celih brojeva.

Jednakost nizova

Ako definiciju jednakosti funkcija primenimo na konačne nizove, onda su dva konačna niza $f : \mathbb{N}_m \longrightarrow A$ i $g : \mathbb{N}_n \longrightarrow A$ (gde su $m, n \in \mathbb{N}$) jednaka ako i samo ako je $m = n$ i $f(i) = g(i)$, za svaki $i \in \mathbb{N}_n$.

Drugim rečima, dva konačna niza $a_1, a_2, \dots, a_m$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ su jednaka ako i samo ako je

$$m = n \quad \text{i} \quad a_i = b_i, \ \text{za svaki } i \in \mathbb{N}_n.$$

Drugim rečima, jednakost konačnih nizova se svodi na jednakost uređenih n-torki.

Funkciju $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow A$, koja slika Dekartov kvadrat $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ skupa prirodnih brojeva u dati skup A nazivamo **dvodimenzionalnim nizom** elemenata iz skupa A.

Ako za proizvoljan par $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ stavimo da je $f(i, j) = a_{i,j}$ ili $f(i, j) = a_{ij}$, onda dvodimenzionalni niz predstavljamo kao $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$, ili kao dvodimenzionalnu pravougaonu šemu

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Višedimenzionalni nizovi

Na isti način definišemo i obostrano beskonačni dvodimenzionalni niz, tj. dvodimenzionalni niz indeksiran skupom celih brojeva.

Takođe, za proizvoljan prirodan broj n, n-dimenzionalni niz elemenata iz skupa A možemo definisati kao funkciju $f : \mathbb{N}^n \longrightarrow A$, koja slika Dekartov n-ti stepen skupa $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva u skup A.

Konačan dvodimenzionalni niz ili **matricu** elemenata iz skupa A definišemo kao funkciju $f : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \longrightarrow A$, gde su m i n neki prirodni brojevi.

Za tu matricu kažemo da je **formata** $m \times n$ (čitamo "m puta n"), ili da je $m \times n$-**matrica**.

Ako za proizvoljan par $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ stavimo da je $f(i, j) = a_{i,j}$ ili $f(i, j) = a_{ij}$, onda matricu predstavljamo kao pravougaonu šemu

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Familija skupova $\{A_i \mid i \in I\}$ indeksirana skupom I, koju smo ranije definisali, zapravo je funkcija koja svakom indeksu $i \in I$ pridružuje jedan skup A_i. Specijalno, za $I = \mathbb{N}$, govorimo o **nizu skupova**

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots.$$

Neka je $\{A_i \mid i \in I\}$ familija skupova.

Dekartov proizvod ili **direktan proizvod** familije skupova $\{A_i \mid i \in I\}$, u oznaci $\prod_{i\in I} A_i$, definiše se kao skup svih preslikavanja $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ takvih da je $f(i) \in A_i$, za svaki $i \in I$, tj.

$$\prod_{i\in I} A_i \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i,\ f(i) \in A_i \text{ za svaki } i \in I\}.$$

U slučaju kada je $I = \mathbb{N}_n$, dobijamo uobičajenu definiciju Dekartovog proizvoda n skupova $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Zbog analogije sa uređenim n-torkama i nizovima, element $f \in \prod_{i\in I} A_i$ često označavamo sa $(a_i)_{i\in I}$, gde je $a_i \stackrel{\text{def}}{=} f(i)$, za svaki $i \in I$.

Pri tome a_i nazivamo i-tom koordinatom od f.

Funkciju $\pi_i : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i$ definisanu sa

$$\pi_i(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(i),$$

odnosno sa

$$\pi_i((a_i)_{i\in I}) \stackrel{\text{def}}{=} a_i,$$

nazivamo i-ta projekcija ili i-ta projekciona funkcija.

Dekartov proizvod familije skupova

Da li svaka neprazna familija nepraznih skupova ima neprazan Dekartov proizvod?

Postojanje Dekartovog proizvoda proizvoljne familije skupova ekvivalentno je sa tzv. **Aksiomom izbora**, koja glasi:

Za proizvoljnu familiju nepraznih skupova $\{A_i \mid i \in I\}$ postoji skup koji se sastoji od po jednog elementa svakog skupa iz te familije.