MATEMATIČKA LOGIKA

***

– RELACIJE –

II DEO

Relacija ϱ na skupu A je **relacija poretka** na A ako je

① **refleksivna**

② **antisimetrična**

③ **tranzitivna**

Umesto "relacija poretka" često kažemo i **parcijalno uređenje** ili samo **uređenje**.

Za skup A se kaže da je A **uređen** relacijom ϱ, a par (A, ϱ) se zove **parcijalno uređeni skup**, ili samo **uređeni skup**.

Za označavanje uređenja na skupovima najčešće koristimo oznaku $\leqslant$, koju koristimo i za standardna uređenja brojeva.

Relacije poretka su, uz relacije ekvivalencija, najrašireniji tip relacija u matematici.

One služe da pomoću njih "upoređujemo" ili "uređujemo" elemente skupa A, tj. da formiramo neki "poredak" u skupu A, odakle potiču i nazivi za te relacije.

Prefiks "parcijalno" služi da se ukaže na to da u uređenom skupu mogu da postoje i elementi koji se ne mogu međusobno uporediti, tj., međusobno su neuporedivi, kao što ćemo videti u primerima koji slede.

a) Osnovne relacije poretka na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ su relacije

$\leqslant$ (manje ili jednako), $\quad$ $|$ (deli).

Analogno definisana, relacija $\leqslant$ je relacija poretka i na drugim skupovima brojeva:

$\mathbb{Z}$ (celi brojevi), $\mathbb{Q}$ (racionalni brojevi) i $\mathbb{R}$ (realni brojevi).

Dakle, $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$, $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ i $(\mathbb{R}, \leqslant)$ su uređeni skupovi.

b) Iako je relacija poretka na skupu prirodnih brojeva, analogno definisana relacija "deli" na skupu celih brojeva nije relacija poretka, jer nije antisimetrična.

Kao što smo već rekli, za svaki celi broj $n \neq 0$ je $-n \mid n$ i $n \mid -n$, i pri tome je $-n \neq n$.

c) Na partitivnom skupu $\mathscr{P}(A)$ proizvoljnog skupa A, inkluzija $\subseteq$ je relacija poretka.

Uređeni skup $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ je primer uređenog skupa u kome ima neuporedivih elemenata.

Na primer, bilo koja dva disjunktna podskupa od A su međusobno neuporedivi.

Naravno, lako je naći primer i skupova koji imaju neprazan presek, a neuporedivi su, tj., nijedan od njih nije podskup onog drugog.

d) Relacija $<$ (strogo manje) nije uređenje ni na jednom od skupova $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$, jer nije refleksivna.

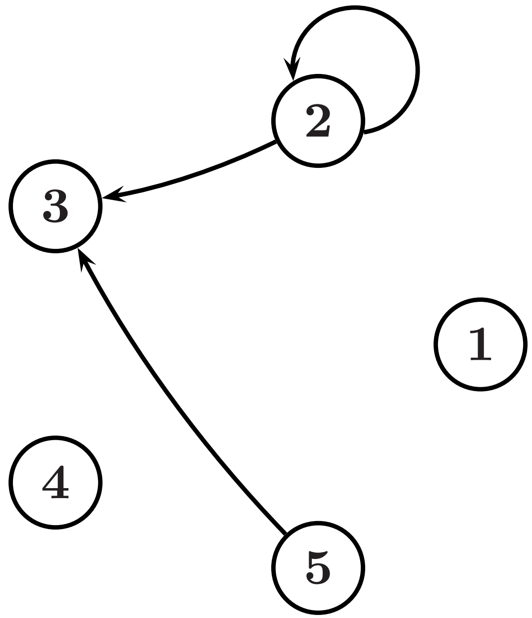
Zadatak 1.1. Data je relacija $\varrho = \{(2,2),(2,3),(5,3)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$.

(a) Odrediti najmanju relaciju ekvivalencije na A koja sadrži relaciju ϱ.

(b) Odrediti najmanju relaciju poretka na A koja sadrži relaciju ϱ.

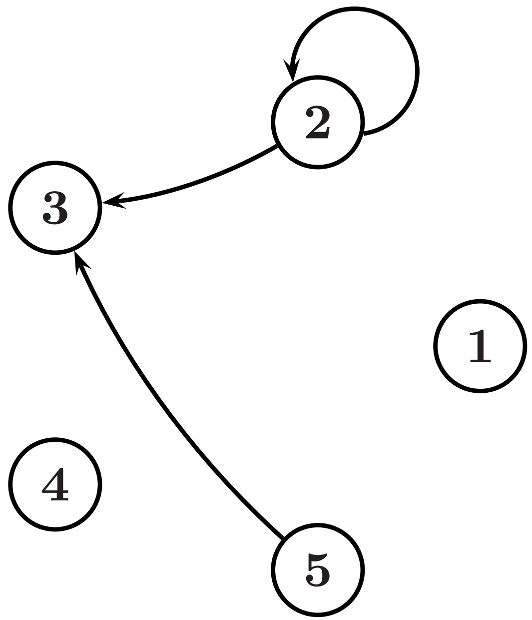
Rešenje:

Relacija ϱ se može zadati sledećim grafom:

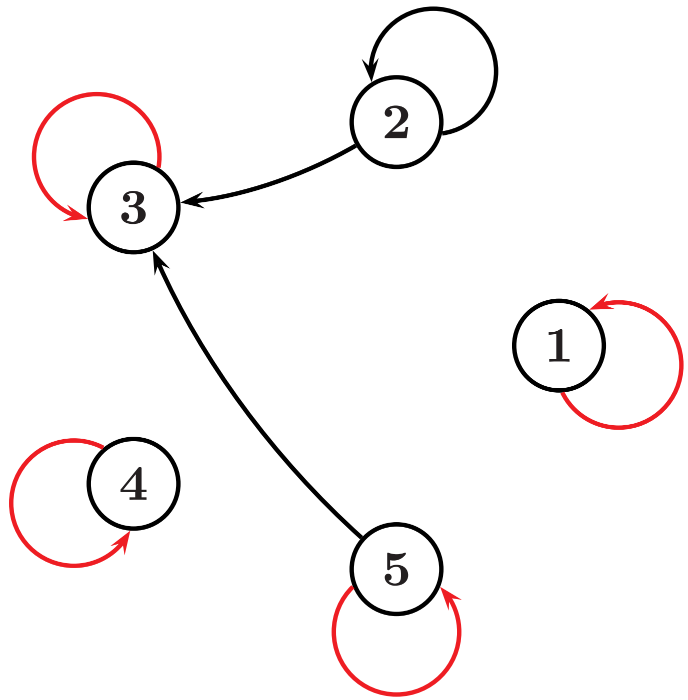


Zatvorenja relacija

(a) Prvi korak u konstrukciji najmanje relacije ekvivalencije koja sadrži ϱ je refleksivno zatvorenje: relacija ϱ se dopunjuje do refleksivne relacije dodavanjem svih parova oblika (x, x), za svaki $x \in A$ za koji taj par nije već bio u toj relaciji.

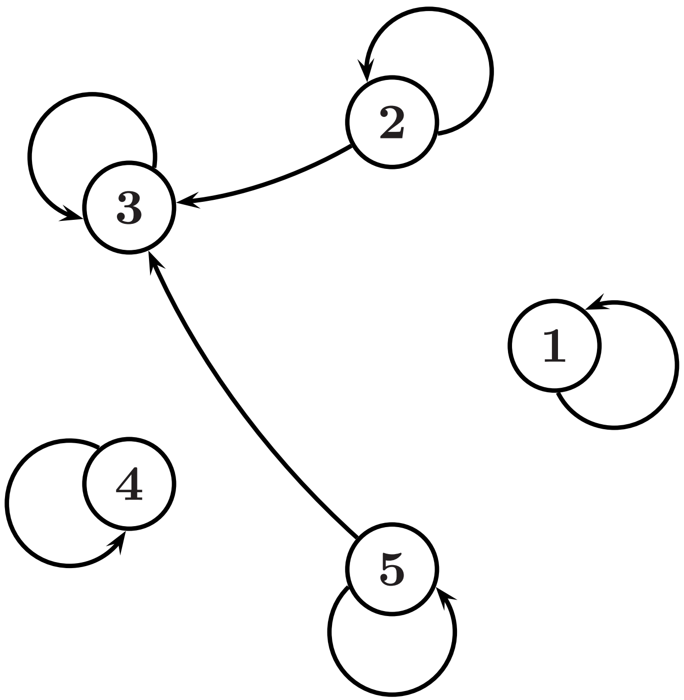


Relacija ϱ

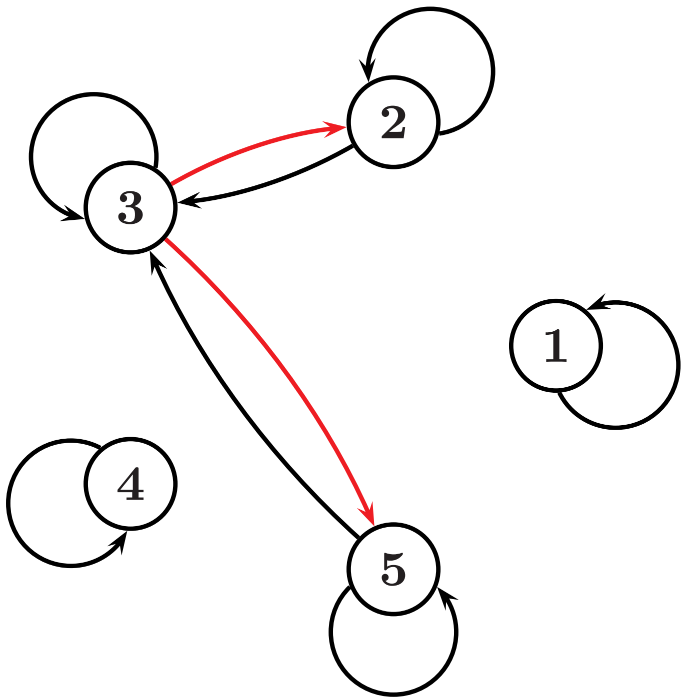


Refleksivno zatvorenje relacije ϱ

Sledeći korak je simetrično zatvorenje: relacija dobijena u prvom koraku se dopunjuje do simetrične relacije tako što se za svaki par $(x, y) \in \varrho$ relaciji dodaje i obratni par (y, x), ukoliko nije već bio u toj relaciji.

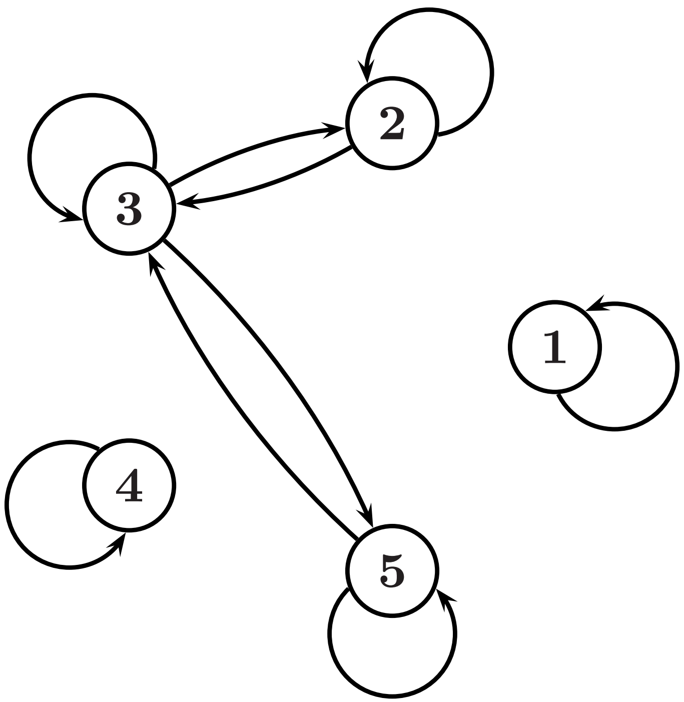


Refleksivno zatvorenje relacije ϱ

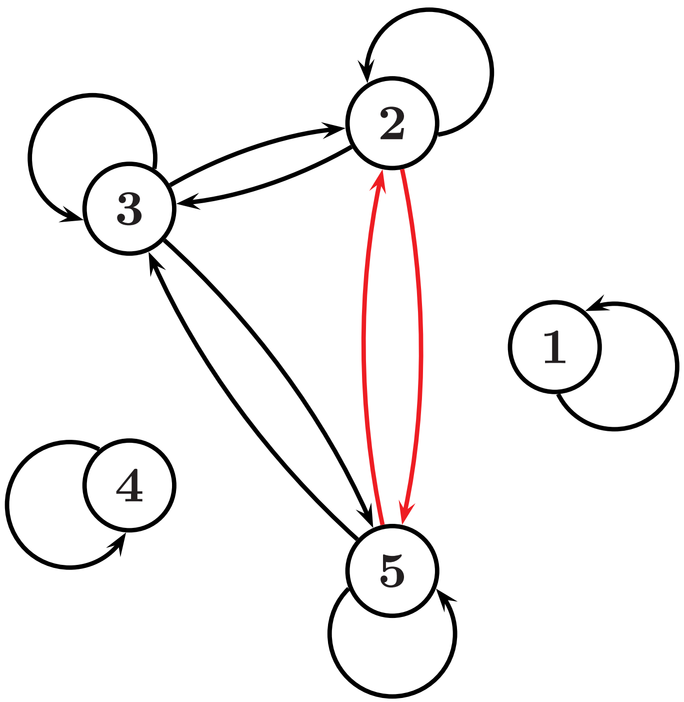


Refleksivno-simetrično zatvorenje relacije ϱ

Konačno, tražena relacija ekvivalencije se dobija primenom tranzitivnog zatvorenja: relacija dobijena u prethodnom koraku se dopunjuje do tranzitivne relacije zatvaranjem svih trouglova u grafu te relacije, tj., ukoliko su (x, y) i (y, z) u toj relaciji, onda dodajemo i par (x, y).



Refleksivno-simetrično zatvorenje relacije ϱ



Najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži ϱ

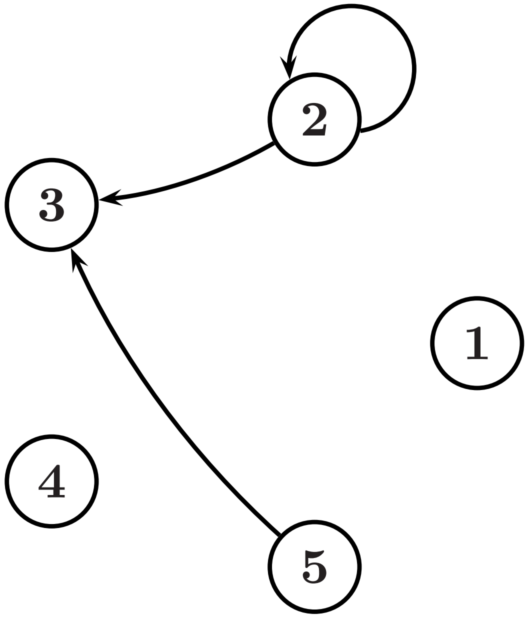
Dakle, najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži ϱ je

$$\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),$$
$$(4,4),(5,2),(5,3),(5,5)\},$$

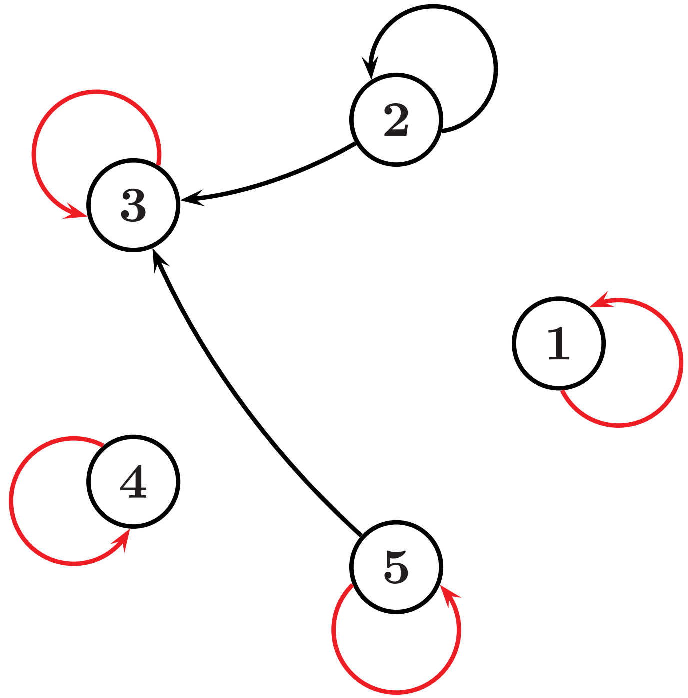
tj., to je relacija ekvivalencije sa klasama

$$\{2,3,5\},\ \{1\},\ \{4\}.$$

(b) Relacija ϱ je antisimetrična, jer nema parova oblika (x,y) i (y,x), i tranzitivna, jer nema parova oblika (x,y) i (y,z), pa se najmanja relacija poretka koja sadrži ϱ dobija samo refleksivnim zatvorenjem.



Relacija ϱ



Najmanja relacija poretka koja sadrži ϱ

Dualno uređenje

Ako je ϱ uređenje na skupu A, onda je i inverzna relacija ϱ^{-1} takođe uređenje na A (proveriti za vežbu).

U tom slučaju ϱ^{-1} zovemo dualno uređenje ili dualni poredak za ϱ.

a) Dualno uređenje uređenja $\leqslant$ (manje ili jednako), na bilo kom od skupova brojeva $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ili $\mathbb{R}$, je uređenje $\geqslant$ (veće ili jednako).

b) Dualno uređenje uređenja $\subseteq$ na partitivnom skupu $\mathscr{P}(A)$ je uređenje $\supseteq$ (nadskup).

Neka je ϱ relacija na skupu A i $B \subseteq A$.

Definišimo relaciju $\varrho_{|B}$ na B sa:

$$\varrho_{|B} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in B \times B \,|\, (x, y) \in \varrho\} = \varrho \cap B \times B.$$

Ovako definisanu relaciju $\varrho_{|B}$ nazivamo **restrikcija** relacije ϱ na B.

Neka je ϱ uređenje na skupu A, tada njegova restrikcija $\varrho_{|B}$ jeste **uređenje na skupu B**.

Bez opasnosti od zabune, umesto $\varrho_{|B}$ mi često pišemo samo ϱ, tj. polazno uređenje i njegovu restrikciju označavamo istim simbolom.

Na primer, uobičajeno uređenje prirodnih brojeva je restrikcija uobičajenog uređenja celih brojeva na skup prirodnih brojeva.

Uređenje ϱ na skupu A je **linearno** ili **totalno uređenje** ako pored uslova koji definišu uređenje ispunjava i **uslov linearnosti**:

④ za sve $x, y \in A$ važi

$$x\,\varrho\,y \;\vee\; y\,\varrho\,x.$$

U tom slučaju, par (A, ϱ) se naziva **linearno uređen skup**, **totalno uređen skup** ili **lanac**.

Drugim rečima, uređeni skup je linearno uređen ako su svaka dva njegova elementa **uporediva**.

Kao što smo već videli, u opštem slučaju ne moraju svi elementi uređenog skupa biti uporedivi.

Primeri linearno uređenih skupova

a) Uređeni skupovi $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$, $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ i $(\mathbb{R}, \leqslant)$ su linearno uređeni.

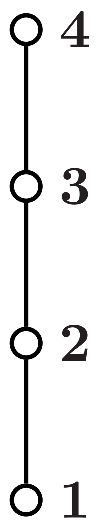
b) Uređeni skupovi $(\mathbb{N}, |)$ i $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ nisu linearno uređeni:

- u $(\mathbb{N}, |)$, elementi 2 i 3 su neuporedivi,
- u $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$, za $a, b \in A$ takve da je $a \neq b$, $\{a\}$ i $\{b\}$ su neuporedivi elementi iz $\mathscr{P}(A)$.

Neki uređeni skupovi, pre svega oni konačni, mogu se predstavljati **Haseovim dijagramima**:

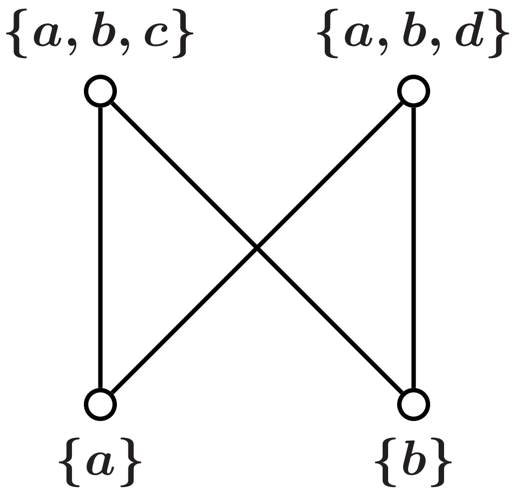
Elementi skupa predstavljaju se kao tačke u ravni i to tako da se $x\,\varrho\,y$ obeležava spojnicom od x ka y, pri čemu je x na crtežu niže od y.

Ne označava se $x\,\varrho\,x$, niti $x\,\varrho\,z$, ako postoje spojnice za $x\,\varrho\,y$ i $y\,\varrho z$.



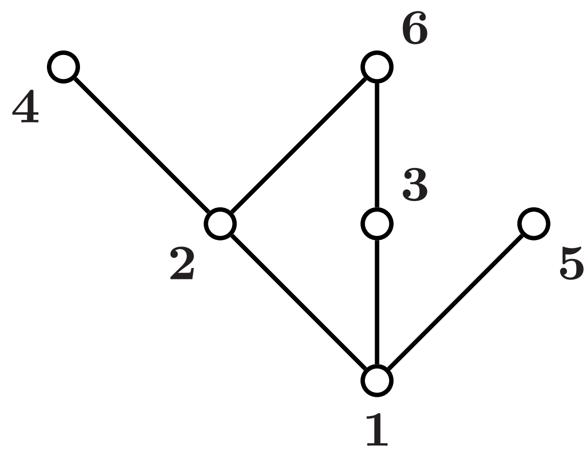
linearno uređeni skup

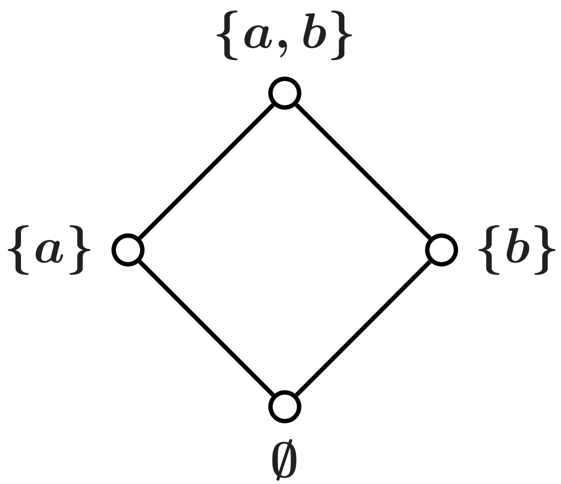
$(\{1,2,3,4\},\leqslant)$



kolekcija od četiri podskupa skupa $\{a, b, c, d\}$ uređena inkluzijom

skup $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ uređen relacijom "deli"





partitivni skup dvočlanog skupa uređen inkluzijom

Neka je $(A, \leqslant)$ uređeni skup.

Za element $a \in A$ kažemo da je minimalan u A ako ne postoji $x \in A$ tako da je $x \neq a$ i $x \leqslant a$.

Drugim rečima, a je minimalan ako u A ne postoji strogo manji element od njega.

Analogno, za element $a \in A$ kažemo da je maksimalan u A ako ne postoji $x \in A$ tako da je $x \neq a$ i $a \leqslant x$.

Dakle, a je maksimalan ako u A ne postoji strogo veći element od njega.

Za element $a \in A$ kažemo da je najmanji u A ako je $a \leqslant x$, za svaki $x \in A$.

Drugim rečima, a je najmanji element u A ako je manji od svakog drugog elementa iz A.

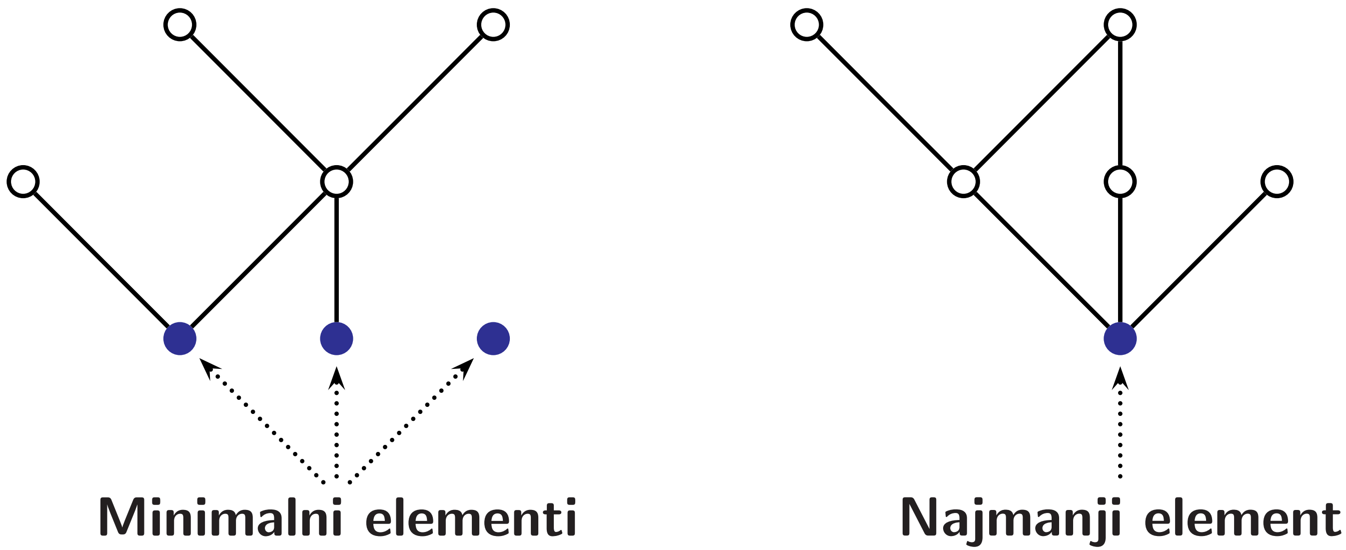
Slično, za element $a \in A$ kažemo da je najveći u A ako je $x \leqslant a$, za svaki $x \in A$.

Prema tome, a je najveći element u A ako je veći od svakog drugog elementa iz A.

Ukoliko uređeni skup A ima najmanji element, tada je on jedinstven.

Pri tome taj element jeste i jedini minimalni element u A.

Uređeni skup može imati više minimalnih elemenata (i u tom slučaju ne može imati najmanji element).



Isto važi i za maksimalne elemente i najveći element.

a) U uređenim skupovima $(\mathbb{N}, \leqslant)$ i $(\mathbb{N}, |)$ broj 1 je najmanji element, dakle i jedini minimalan, dok nema maksimalnih elemenata niti najvećeg.

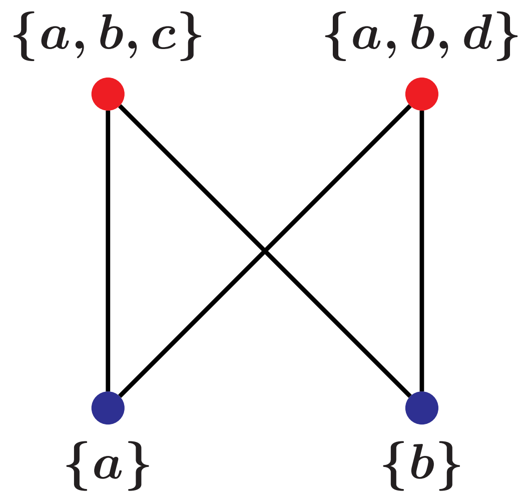
b) U $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ nema ni minimalnih ni maksimalnih elemenata, pa, prema tome, ni najmanjeg ni najvećeg.

c) U $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ prazan skup $\emptyset$ je najmanji, a skup A je najveći element.

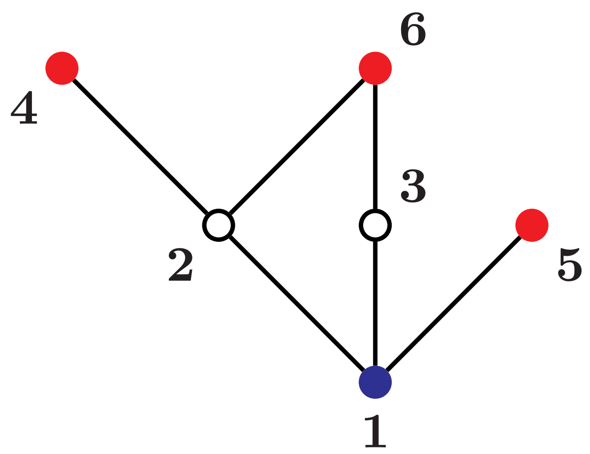
d) U uređenom skupu $(\mathscr{P}'(A), \subseteq)$ svih **nepraznih podskupova** skupa A, svi **jednoelementni podskupovi** su minimalni.

Ukoliko A ima bar dva elementa, onda $\mathscr{P}'(A)$ ima više minimalnih elemenata, pa **nema najmanji element**.

Uređeni skup na slici ima dva minimalna i dva maksimalna elementa, ali nema najmanji ni najveći element.



Uređeni skup $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ ima tri maksimalna elementa: 4, 5 i 6, i najmanji element 1.



Tvrđenje 3: U svakom konačnom uređenom skupu postoji bar jedan minimalan i bar jedan maksimalan element.

Dokaz: Neka je $(A, \leqslant)$ konačan uređeni skup i $a \in A$.

Ako je a minimalan element, dokaz je gotov; ako nije, postoji element $a_1 \neq a$, tako da je $a_1 \leqslant a$.

Ako je a_1 minimalan, tvrđenje je dokazano, a ako nije, postoji element $a_2 \neq a_1$, takav da je $a_2 \leqslant a_1$. Jasno je da mora biti i $a_2 \neq a$, jer bi smo u suprotnom dobili $a_1 = a_2 = a$.

Na ovaj način dolazi se do minimalnog elementa, jer u protivnom skup A ne bi bio konačan – sadržao bi lanac $a, a_1, a_2, \ldots$ međusobno različitih elemenata.

Dokaz da postoji maksimalan element je analogan.

Za uređeni skup $(A, \leqslant)$ kažemo da je **dobro uređen** ako je

- linearno uređen, i
- svaki njegov neprazan podskup ima najmanji elemenat.

a) Glavni primer dobro uređenih skupova je $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

b) Primer linearno uređenog skupa koji nije dobro uređen je skup svih nenegativnih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}_0^+ = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, 0 \leqslant x\}$ uređen restrikcijom uobičajenog uređenja racionalnih brojeva na $\mathbb{Q}_0^+$.

Na primer, u ovom uređenom skupu podskup $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ nema najmanji element.

Neka je B neprazan podskup uređenog skupa $(A, \leqslant)$.

Element $a \in A$ nazivamo **donja granica** ili **donje ograničenje** skupa B ako je

$$a \leqslant x, \ \text{za svaki element } x \in B,$$

tj. ako je a manji od svih elemenata skupa B.

Analogno, element $a \in A$ nazivamo **gornja granica** ili **gornje ograničenje** skupa B ako je

$$x \leqslant a, \ \text{za svaki element } x \in B,$$

tj. ako je a veći od svih elemenata skupa B.

Donja i gornja granica skupa

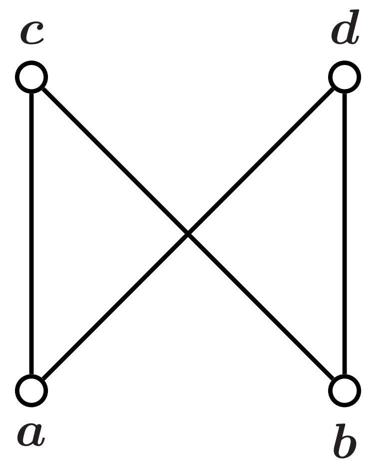
Sa B^d označavaćemo skup svih donjih, a sa B^g skup svih gornjih granica skupa B, tj.

$$B^d = \{a \in A \,|\, a \leqslant x, \text{ za svaki } x \in B\},$$

$$B^g = \{a \in A \,|\, x \leqslant a, \text{ za svaki } x \in B\}.$$

Skupovi B^d i B^g **mogu biti i prazni**.

Na primer, kod uređenog skupa na slici, za skup $B = \{a, b\}$, skup B^d je prazan, dok je $B^g = \{c, d\}$.



Infimum i supremum skupa

Neka je B neprazan podskup uređenog skupa $(A, \leqslant)$.

Najveća donja granica skupa B, tj. najveći element skupa B^d, ukoliko takav postoji, naziva se **infimum** skupa B.

Analogno, **najmanja gornja granica** skupa B, tj. najmanji element skupa B^g, ukoliko takav postoji, naziva se **supremum** skupa B.

Ukoliko postoji infimum skupa B, onda je on **jedinstven**, zbog jedinstvenosti najvećeg elementa skupa B^d.

Isto važi i za supremum.

Primeri infimuma i supremuma

a) U uređenom skupu $(\mathbb{N}, \leqslant)$, svaki **konačan podskup** ima supremum – to je najveći element podskupa.

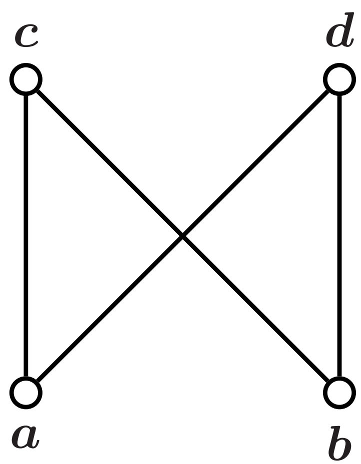
U $(\mathbb{N}, \leqslant)$ infimum postoji za **svaki podskup** – to je najmanji element u podskupu.

b) U uređenom skupu $(\mathbb{N}, |)$ infimum konačnog podskupa je **najveći zajednički delilac**, a supremum je **najmanji zajednički sadržalac** elemenata tog podskupa.

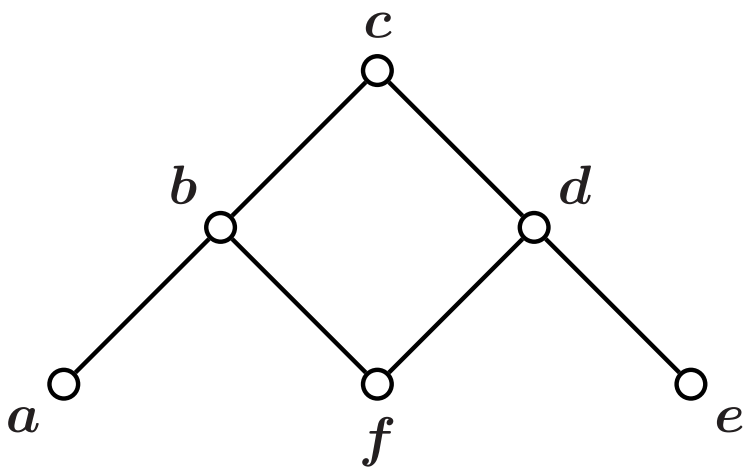
c) U partitivnom skupu nekog skupa, uređenom inkluzijom, infimum kolekcije podskupova je njihov presek, a supremum je njihova unija.

d) **U uređenom skupu na slici, skup $B = \{a, b\}$ nema infimum, jer uopšte nema donjih granica.**

Ovaj skup nema ni supremum, jer skup njegovih gornjih granica $B^g = \{c, d\}$ nema najmanji element.



Zadatak 1.2. Neka je dat parcijalno uređeni skup



(a) Odrediti elemente neuporedive sa a:

(b) Odrediti minimalne elemente:

(c) Odrediti maksimalne elemente:

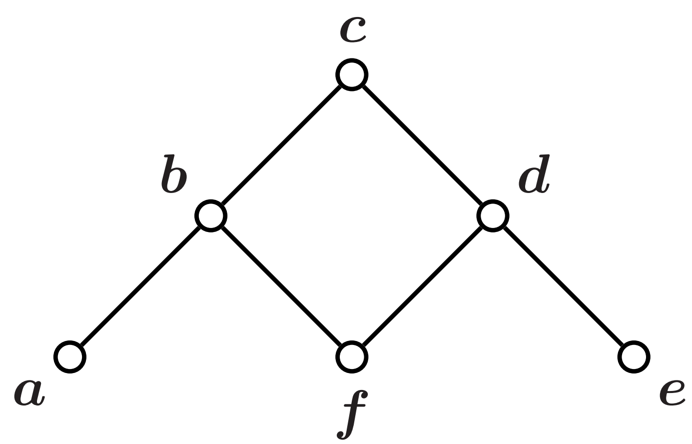
(d) Odrediti najmanji element:

(e) Odrediti najveći element:

(f) Infimum skupa $\{a, b, d\}$:

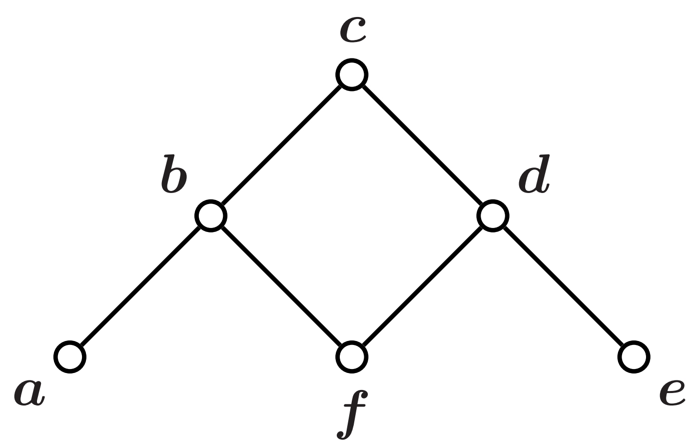
(g) Supremum skupa $\{a, b, d\}$:

Rešenje: Imamo sledeće:



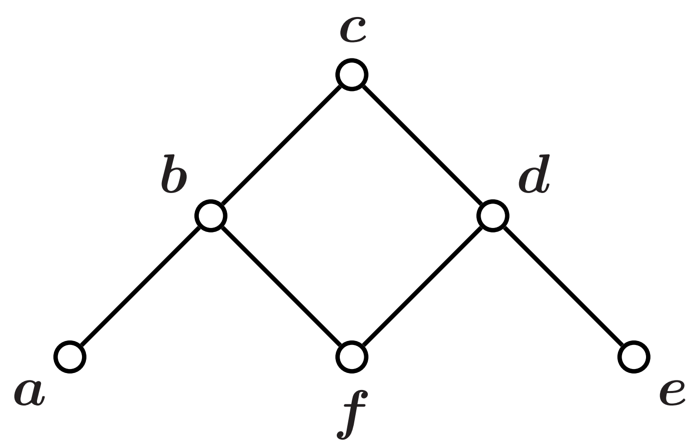
Rešenje: Imamo sledeće:

(a) Elementi neuporedivi sa a su:



Rešenje: Imamo sledeće:

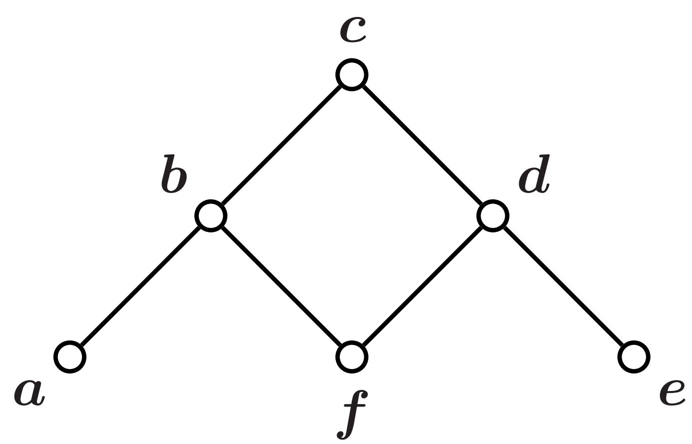
(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$



Rešenje: Imamo sledeće:

(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

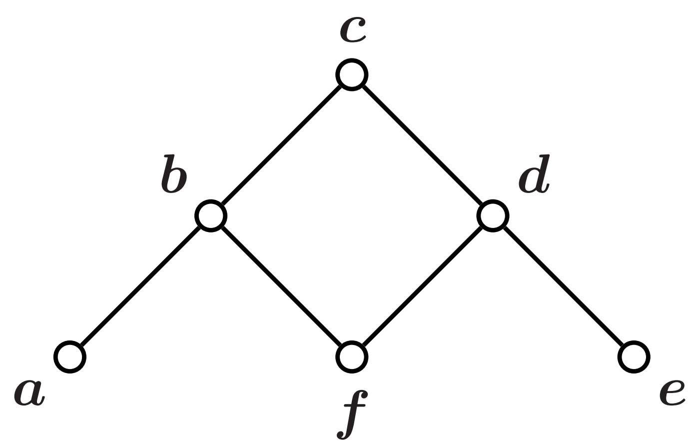
(b) Minimalni elementi su:



Rešenje: Imamo sledeće:

(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

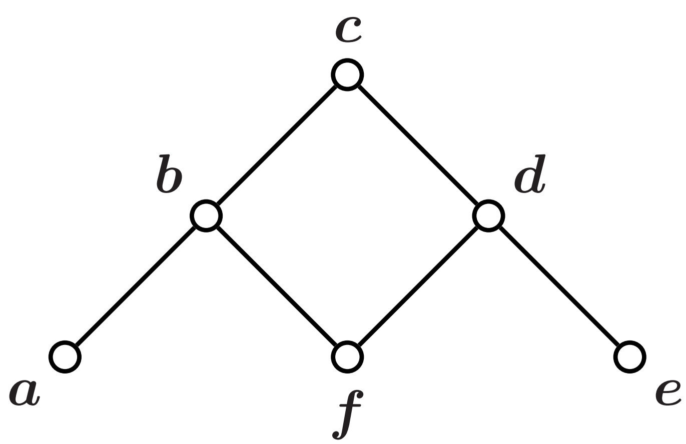


Rešenje: Imamo sledeće:

(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

(c) Maksimalni element je:

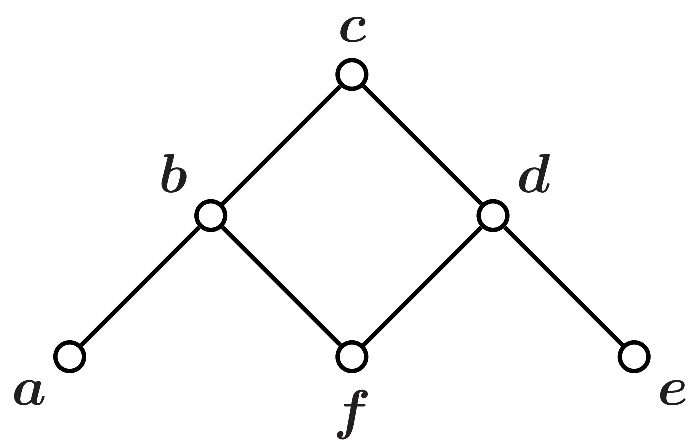


Rešenje: Imamo sledeće:

(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

(c) Maksimalni element je: $\boxed{c}$



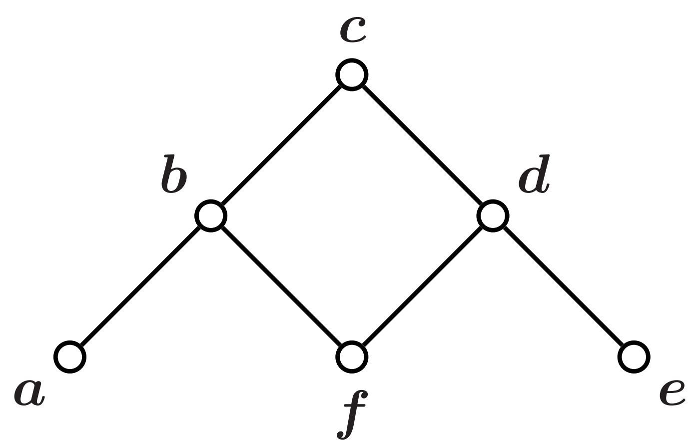
Rešenje: Imamo sledeće:

(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

(c) Maksimalni element je: $\boxed{c}$

(d) Najmanji element:



Primeri infimuma i supremuma

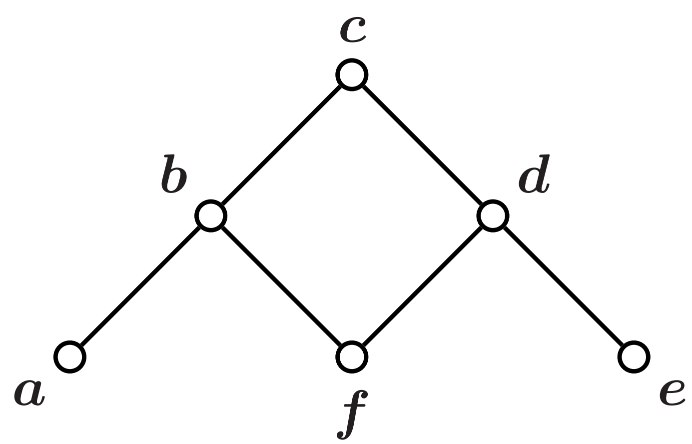
Rešenje: Imamo sledeće:

(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

(c) Maksimalni element je: $\boxed{c}$

(d) Najmanji element: $\boxed{\text{ne postoji}}$



Rešenje: Imamo sledeće:

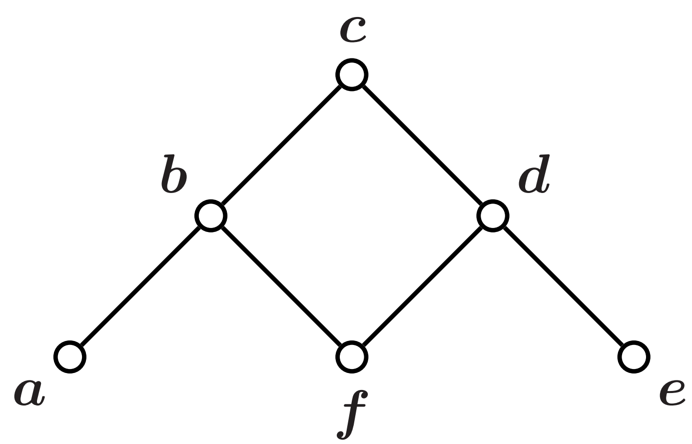
(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

(c) Maksimalni element je: $\boxed{c}$

(d) Najmanji element: $\boxed{\text{ne postoji}}$

(e) Najveći element je:



Rešenje: Imamo sledeće:

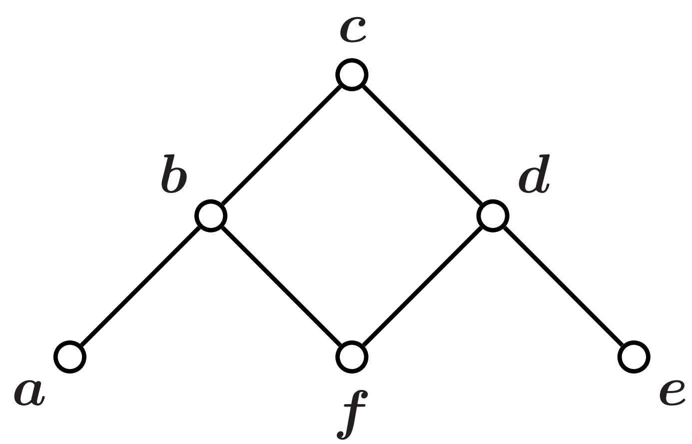
(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

(c) Maksimalni element je: $\boxed{c}$

(d) Najmanji element: $\boxed{\text{ne postoji}}$

(e) Najveći element je: $\boxed{c}$



Rešenje: Imamo sledeće:

(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

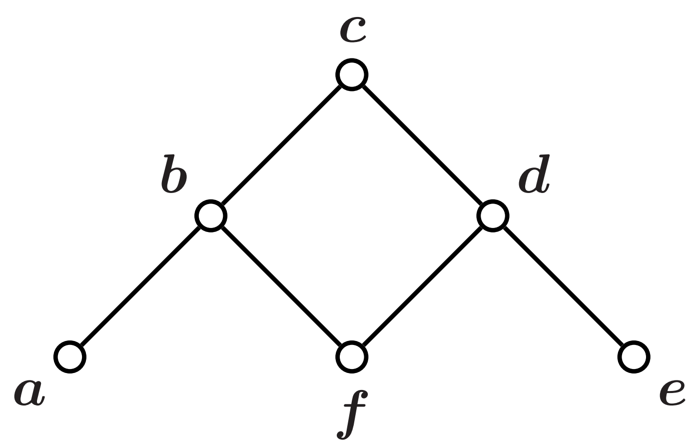
(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

(c) Maksimalni element je: $\boxed{c}$

(d) Najmanji element: $\boxed{\text{ne postoji}}$

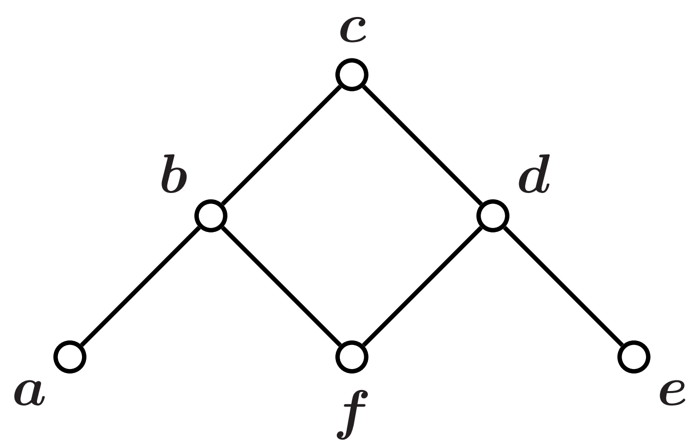
(e) Najveći element je: $\boxed{c}$

(f) Infimum skupa $\{a, b, d\}$:



Primeri infimuma i supremuma

Rešenje: Imamo sledeće:



(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

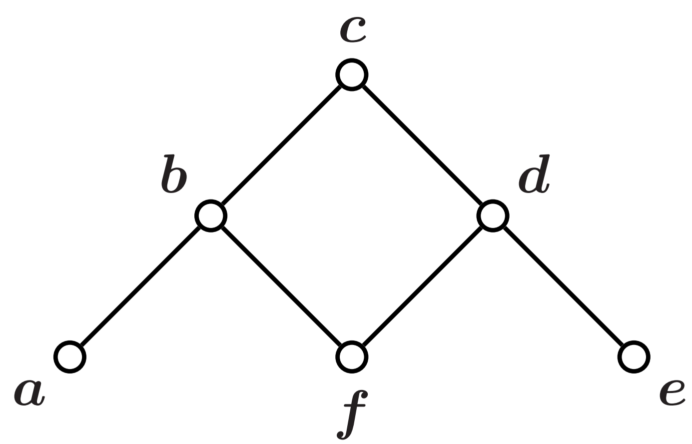
(c) Maksimalni element je: $\boxed{c}$

(d) Najmanji element: $\boxed{\text{ne postoji}}$

(e) Najveći element je: $\boxed{c}$

(f) Infimum skupa $\{a, b, d\}$: $\boxed{\text{ne postoji}}$ (jer taj skup nema nijednu donju granicu)

Rešenje: Imamo sledeće:



(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

(c) Maksimalni element je: $\boxed{c}$

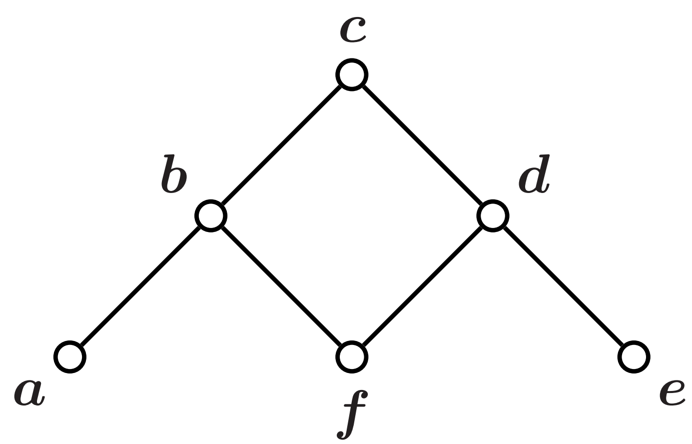
(d) Najmanji element: $\boxed{\text{ne postoji}}$

(e) Najveći element je: $\boxed{c}$

(f) Infimum skupa $\{a, b, d\}$: $\boxed{\text{ne postoji}}$ (jer taj skup nema nijednu donju granicu)

(g) Supremum skupa $\{a, b, d\}$ je:

Rešenje: Imamo sledeće:



(a) Elementi neuporedivi sa a su: $\boxed{f,\ d,\ e}$

(b) Minimalni elementi su: $\boxed{a,\ f,\ e}$

(c) Maksimalni element je: $\boxed{c}$

(d) Najmanji element: $\boxed{\text{ne postoji}}$

(e) Najveći element je: $\boxed{c}$

(f) Infimum skupa $\{a, b, d\}$: $\boxed{\text{ne postoji}}$ (jer taj skup nema nijednu donju granicu)

(g) Supremum skupa $\{a, b, d\}$ je: $\boxed{c}$ (jer je to i jedina gornja granica tog skupa, pa je i najmanja gornja granica, tj. supremum). $\square$

Neka je A neprazan skup, koji nazivamo **alfabetom**, a njegove elemente **slovima**.

Reč nad alfabetom A definišemo kao konačan niz

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

elemenata iz A.

Iz ovakve definicije je jasno da se jednakost reči definiše kao jednakost nizova, tj., dve reči

$$u = x_1 x_2 \cdots x_n \qquad \text{i} \qquad v = y_1 y_2 \cdots y_m$$

jednake ako i samo ako je $m = n$ i $x_i = y_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Skup svih reči nad alfabetom A označavamo sa A^+.

Na skupu A^+ definišemo operaciju **spajanja**, **dopisivanja** ili **konkatenacije** reči na sledeći način:

Proizvod reči $x_1x_2\cdots x_n$ i $y_1y_2\cdots y_n$, gde su $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m$ slova iz A, je reč

$$x_1x_2\cdots x_ny_1y_2\cdots y_m.$$

Lako se proverava da je ova operacija asocijativna.

Neka je ε element takav da $\varepsilon\notin A^+$, koji nazivamo **prazna reč**.

Tada pišemo $A^*=A^+\cup\{\varepsilon\}$, i dodefinišemo operaciju spajanja reči sa: $u\varepsilon=u$ i $\varepsilon u=u$, tj., spajanjem bilo koje reči sa praznom reči dobija se ista ta reč.

Neka je data reč $u = x_1x_2\cdots x_n$, koju čine slova $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$.

Broj n, tj. broj elemenata u nizu $x_1x_2\cdots x_n$, označavamo sa $|u|$, i nazivamo ga **dužinom reči** u. Za praznu reč kažemo da je dužine 0.

Ako x jeste i-to slovo reči u, onda i zovemo **pozicijom** slova x u reči u.

Neka je $A = \{x, y\}$. Reči nad tim alfabetom su

$$x,\ y,\ xy,\ yx,\ xyx,\ xy^2,\ yx^2,\ yxy,\ xyx^2,\ (xy)^2,\ xy^2x,\ xy^3,\ \dots,$$

Na primer, reč xyx^2 je dužine 4.

Za prirodan broj k, slovo x i reč u, x^k i u^k su skraćeni zapisi reči

$$\underbrace{xx\cdots x}_{k \text{ puta}} \quad \text{i} \quad \underbrace{uu\cdots u}_{k \text{ puta}}$$

Prefiks, sufiks, infiks

Za reč $u \in A^*$ kažemo da je

- **prefiks** reči v ako postoji reč $w \in A^*$ takva da je $v = uw$, tj. ako je v reč koja **počinje sa** u;
- **sufiks** reči v ako postoji reč $w \in A^*$ takva da je $v = wu$, tj. ako je v reč koja se **završava sa** u;
- **infiks** reči v ako postoje reči $p, q \in A^*$ takve da je $v = puq$, tj. ako je v reč koja **sadrži reč** u.

Infiks reči v nazivamo još i **faktor** reči v.

Jasno, prema ovim definicijama, prazna reč je prefiks, sufiks i faktor bilo koje reči.

Zadatak 1.3. Definišimo na skupu A^* sledeće relacije:

$$u \leqslant_p v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \text{ je prefiks od } v,$$

$$u \leqslant_s v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \text{ je sufiks od } v,$$

$$u \leqslant_f v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \text{ je faktor od } v.$$

Dokazati da su sve one relacije poretka na A^*.

Napomena 1.1. Za ova uređenja koristimo sledeće nazive

- $\leqslant_p$ – **prefiks uređenje**;
- $\leqslant_s$ – **sufiks uređenje**;
- $\leqslant_f$ – **faktor uređenje**.

Rešenje: Dokazujemo samo tvrđenje za relaciju $\leqslant_p$. Ostalo se ostavlja za samostalan rad.

(a) Refleksivnost sledi iz činjenice da je $u = u\varepsilon$, za svaku reč $u \in A^*$.

(b) Antisimetričnost: Neka je $u \leqslant_p v$ i $v \leqslant_p u$.

To znači da je $v = up$ i $u = vq$, za neke reči $p, q \in A^*$, pa je $u = vq = upq$.

Na osnovu svojstva jednakosti reči, iz $u = upq$ sledi da mora biti $pq = \varepsilon$, što dalje povlači da je $p = q = \varepsilon$, odakle je $u = v$.

(c) Tranzitivnost: Neka je $u \leqslant_p v$ i $v \leqslant_p w$.

To znači da je $v = up$ i $w = vq$, za neke reči $p, q \in A^*$, odakle je $w = vq = upq$. Prema tome, $u \leqslant_p w$. $\square$

Prefiks (sufiks, faktor) uređenje

U daljem radu, koristićemo i sledeće oznake:

$$u <_p v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \leqslant_p v \ \text{ i } \ u \neq v,$$

$$u <_s v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \leqslant_s v \ \text{ i } \ u \neq v,$$

$$u <_f v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \leqslant_f v \ \text{ i } \ u \neq v.$$

i ako je $u <_p v$ (odnosno $u <_s v$, $u <_f v$), govorićemo da je u pravi prefiks (odnosno pravi sufiks, pravi faktor) reči v.

Zadatak 1.4. Dokazati da za proizvoljne reči $u, v, w \in A^*$ važi

$$u \leqslant_p w \ \wedge \ v \leqslant_p w \quad \Rightarrow \quad u \leqslant_p v \ \vee \ v \leqslant_p u \ .$$

Rešenje: Napišimo reč w u obliku

$$w = x_1 x_2 \dots x_n,$$

za neki $n \in \mathbb{N}$ i slova $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$.

Tada $u \leqslant_p w$ i $v \leqslant_p w$ znači da je

$$u = x_1 \dots x_i \quad \text{i} \quad v = x_1 \dots x_j,$$

za neke $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Prema tome, ako je $i \leqslant j$, onda imamo da je $u \leqslant_p v$, a ako je $j \leqslant i$, onda je $v \leqslant_p u$. $\square$

Neka je alfabet A linearno uređen nekim uređenjem $\leqslant$.

Tada se to uređenje može proširiti do linearnog uređenja $\leqslant_l$ na A^*, koje nazivamo leksikografsko uređenje, na sledeći način:

$$u \leqslant_l v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \leqslant_p v \text{ ili } \begin{array}{l} u = pxq,\ v = pyr,\ \text{sa } x < y \text{ u } A, \\ \text{gde su } p, q, r \in A^* \text{ i } x, y \in A \end{array}$$

Drugim rečima, $u \leqslant_l v$ ako je $u \leqslant_p v$ ili za prvo slovo x u u koje se razlikuje od odgovarajućeg slova y u v važi da je $x < y$ u A.

Kada kažemo da je y odgovarajuće slovo za x, pod time podrazumevamo da y u v ima istu poziciju kao x u u.

Takođe, p u gornjoj formuli je najduži zajednički prefiks reči u i v.

Zadatak 1.5. Dokazati da je $\leqslant_l$ linearno uređenje na A^*.

Rešenje:

(1) **Refleksivnost:** Za proizvoljnu reč $u \in A^*$ je $u \leqslant_l u$, jer je $u \leqslant_p u$.

(2) **Antisimetričnost:** Za reči $u, v \in A^*$ neka je $u \leqslant_l v$ i $v \leqslant_l u$.

(2.1) Ako je $u \leqslant_p v$ i $v \leqslant_p u$, tada je $u = v$, zbog antisimetričnosti prefiks uređenja.

(2.2) Neka je $u \leqslant_p v$ i $v = pxq$, $u = pyr$, pri čemu je $x < y$, za neke $p, q, r \in A^*$ i $x, y \in A$.

Kako je p najduži zajednički prefiks za u i v i $u \leqslant_p v$, to je $p = u$, što je u suprotnosti sa $u = pyr$ i $y \in A$.

Dakle, zaključujemo da slučaj (2.2) nije moguć.

(2.3) Neka je $v \leqslant_p u$ i $u = pxq$, $v = pyr$, pri čemu je $x < y$, za neke $p, q, r \in A^*$ i $x, y \in A$.

Na isti način dokazujemo da ni ovaj slučaj nije moguć.

(2.4) Neka je $x_1 < y_1$, gde je x_1, y_1 prvi par različitih slova na istoj poziciji u u i v, i neka je $y_2 < x_2$, gde je y_2, x_2 prvi par različitih slova na istoj poziciji u v i u.

Tada je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$, što znači da je $x_1 < y_1$ i $y_1 < x_1$, što nije moguće.

Prema tome, ni slučaj (2.4) nije moguć.

(3) Tranzitivnost: Neka su $u, v, w \in A^*$ reči takve da je $u \leqslant_l v$ i $v \leqslant_l w$.

(3.1) Neka je $u \leqslant_p v$ i $v \leqslant_p w$. Tada je $u \leqslant_p w$, zbog tranzitivnosti prefiks uređenja, pa je $u \leqslant_l w$.

(3.2) Neka je $u \leqslant_p v$ i $v = pxq$, $w = pyr$, pri čemu je $x < y$, za neke $p, q, r \in A^*$ i $x, y \in A$.

Kako u ovom slučaju važi da je $u \leqslant_p v$ i $p \leqslant_p v$, to dobijamo da je $u \leqslant_p v$ ili $p \leqslant_p u$.

Ako je $u \leqslant_p p$, tada, s obzirom da je $p \leqslant_p w$, imamo da je $u \leqslant_p w$, pa je, dakle, $u \leqslant_l w$, što je i trebalo dokazati.

Neka je sada $p \leqslant_p u$. Kako je slučaj $p = u$ obuhvaćen prethodnim slučajem $u \leqslant_p p$, to možemo uzeti da je $p <_p u$, tj. da je p pravi prefiks od u.

U tom slučaju imamo da je $u = pxq'$, za neku reč $q \in A^*$, što zajedno sa $w = pyr$ i $x < y$ povlači da važi $u \leqslant_l w$.

(3.3) Neka je $u = pxq$, $v = pyr$, pri čemu je $x < y$, za neke $p, q, r \in A^*$ i $x, y \in A$, i $v \leqslant_p w$.

Tada, na potpuno isti način kao u (3.2) dokazujemo da je $u \leqslant_l w$.

(3.4) Neka je $u = p_1x_1q_1$, $v = p_1y_1r_1$, pri čemu je $x_1 < y_1$, za neke $p_1, q_1, r_1 \in A^*$ i $x_1, y_1 \in A$, i neka je $v = p_2x_2q_2$, $w = p_2y_2r_2$, pri čemu je $x_2 < y_2$, za neke $p_2, q_2, r_2 \in A^*$ i $x_2, y_2 \in A$.

Kako je $p_1 \leqslant_p v$ i $p_2 \leqslant_p v$, to imamo da je $p_1 \leqslant_p p_2$ ili $p_2 \leqslant_p p_1$.

Kako se oba slučaja razmatraju na sličan način, to možemo uzeti da je, na primer, $p_1 \leqslant_p p_2$.

Pretpostavimo najpre da je $p_1 = p_2$.

Tada je $y_1 = x_2$, i $x_1 < y_1 = x_2 < y_2$ povlači da je $x_1 < y_2$, pa iz $u = p_1x_1q_1$, $w = p_1y_2r_2$ i $x_1 < y_2$ zaključujemo da je $u \leqslant_l w$.

Neka je sada $p_1 <_p p_2$.

Iz $v = p_1y_1r_1$, $v = p_2x_2q_2$ i $p_1 <_p p_2$ zaključujemo da je $p_2 = p_1y_1s$, za neku reč $s \in A^*$, odakle sledi da je $w = p_1y_1t$, za neku reč $t \in A^*$.

Prema tome, imamo da je $u = p_1x_1q_1$, $w = p_1y_1t$ i $x_1 < y_1$, odakle sledi da je $u \leqslant_l w$.

Ovim je dokazana tranzitivnost relacije $\leqslant_l$.

(4) **Linearnost:** Neka su date proizvoljne reči $u, v \in A^*$.

Ako u i v nemaju zajednički prefiks, to znači da im se razlikuju već prva slova. Neka je x prvo slovo od u i y je prvo slovo od v.

Kako je, prema pretpostavci, alfabet A linearno uređen, to je $x < y$, u kom slučaju je $u <_l v$, ili je $y < x$, u kom slučaju je $v <_l u$.

Dalje, uzmimo da u i v imaju zajednički prefiks. U tom slučaju postoji najduži zajednički prefiks od u i v, koji ćemo označiti sa p.

Sada imamo da je $u = pxq$ i $v = pyr$, za neke $q, r \in A^*$ i slova $x, y \in A$ takva da je $x \neq y$, pa opet na osnovu linearnosti uređenja na alfabetu A zaključujemo da je $x < y$, u kom slučaju je $u <_l v$, ili je $y < x$, u kom slučaju je $v <_l u$. $\square$

Zadatak 1.6. Uporediti leksikografski sledeće binarne reči:

$$u = 01000001, \quad v = 00110111, \quad w = 00111111 \ .$$

Rešenje: Prva pozicija na kojoj se reč u razlikuje od v i w je pozicija 2.

Pri tome, na poziciji 2 reč u ima slovo 1, a reči v i w slovo 0, pa kako je $0 < 1$, to dobijamo da je $v <_l u$ i $w <_l u$.

Dalje, prva pozicija na kojoj se razlikuju od reči v i w je pozicija 5.

Na poziciji 5 reč v ima slovo 0, a reč w slovo 1, odakle je $v <_l w$. $\square$

Napomena 1.2. Binarne reči iz prethodnog zadatka su ASCII kodovi alfanumeričkih simbola A, 7 i ?, tim redom.

Zadatak 1.7. Urediti leksikografski sve binarne reči dužine 4.

Rešenje:

Sve binarne reči dužine 4 su leksikografski uređene na sledeći način:

$$
\begin{array}{cccccccc}
0000 & 0001 & 0010 & 0011 & 0100 & 0101 & 0110 & 0111 \\
1000 & 1001 & 1010 & 1011 & 1100 & 1101 & 1110 & 1111
\end{array}
$$

Neka je alfabet A linearno uređen nekim uređenjem $\leqslant$.

Tada se uređenje $\leqslant_a$ na A^*, koje nazivamo alfabetsko uređenje, definiše na sledeći način:

$$u \leqslant_a v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} |u| < |v| \text{ ili } \big(|u| = |v| \text{ i } u \leqslant_l v\big)$$

Zadatak 1.8. Dokazati da je $\leqslant_a$ linearno uređenje na A^*.

Rešenje:

(1) Refleksivnost: Za proizvoljnu reč $u \in A^*$ je $u \leqslant_a u$, jer je $|u| = |u|$ i $u \leqslant_l u$.

(2) **Antisimetričnost:** Neka je $u \leqslant_a v$ i $v \leqslant_a u$, za neke reči $u, v \in A^*$.

Ako je $|u| = |v|$, tada imamo da je $u \leqslant_l v$ i $v \leqslant_l u$, odakle je $u = v$, zbog antisimetričnosti leksikografskog uređenja.

Sa druge strane, slučaj $|u| \neq |v|$ nije moguć, jer bi u suprotnom dobili da je $|u| < |v|$ i $|v| < |u|$.

Prema tome, zaključujemo da je $\leqslant_a$ antisimetrična relacija.

(3) **Tranzitivnost:** Neka je $u \leqslant_a v$ i $v \leqslant_a w$, za neke reči $u, v, w \in A^*$.

(3.1) Ako je $|u| < |v|$ i $|v| < |w|$, tada je $|u| < |w|$, pa je $u \leqslant_a w$.

(3.2) Ako je $|u| < |v|$, $|v| = |w|$ i $v \leqslant_l w$, tada je $|u| < |w|$, odakle sledi da je $u \leqslant_a w$.

(3.3) Ako je $|u| = |v|$, $u \leqslant_l v$, $|v| < |w|$, tada je opet $|u| < |w|$, odakle je $u \leqslant_a w$.

(3.4) Neka je $|u| = |v|$, $u \leqslant_l v$, $|v| = |w|$ i $v \leqslant_l w$.

Tada dobijamo da je $|u| = |w|$ i $u \leqslant_l w$, zbog tranzitivnosti leksikografskog uređenja, odakle sledi da je $u \leqslant_a w$.

Ovim smo dokazali tranzitivnost relacije $\leqslant_a$.

(3) **Linearnost:** Neka su date proizvoljne reči $u, v \in A^*$.

Ako je $|u| \neq |v|$, tada je $|u| < |v|$, u kom slučaju je $u \leqslant_a v$, ili je $|v| < |u|$, u kom slučaju je $v \leqslant_a u$.

Ako je $|u| = |v|$, tada iz linearnosti leksikografskog uređenja sledi da je $u \leqslant_l v$ ili $v \leqslant_l u$, što zajedno sa $|u| = |v|$ daje $u \leqslant_a v$ ili $v \leqslant_a u$. $\square$

Zadatak 1.9. **Urediti leksikografski i alfabetski sve binarne reči dužine manje ili jednake 3.**

Rešenje: **Leksikografski poredak:**

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 00 & 000 & 001 & 01 & 010 & 011 \\ 1 & 10 & 100 & 101 & 11 & 110 & 111 \end{array}$$

Alfabetski poredak:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 00 & 01 & 10 & 11 & & \\ 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{array}$$

Zadatak 1.10. Počev od najmanjeg, pa do najvećeg, leksikografski urediti sledeće binarne reči:

$$A = 01001011,\ B = 00101010,\ C = 01100100,\ D = 01101111,\ E = 01000101.$$

Rešenje: Kako sve ove reči imaju isto prvo slovo, to razmatramo drugo slovo.

Jedino reč B ima drigo slovo 0, dok sve ostale imaju drugo slovo 1. Prema tome, B je najmanji element u ovom skupu.

Od preostalih reči, A i E imaju treće slovo 0, pa su manje od C i D, koje kao treće slovo imaju 1. Ako dalje uporedimo A i E, videćemo da se prvo slovo po kome se razlikuju na petoj poziciji, gde kod A stoji 1, a kod E stoji 0. Dakle, reč E je druga, a A treća po veličini.

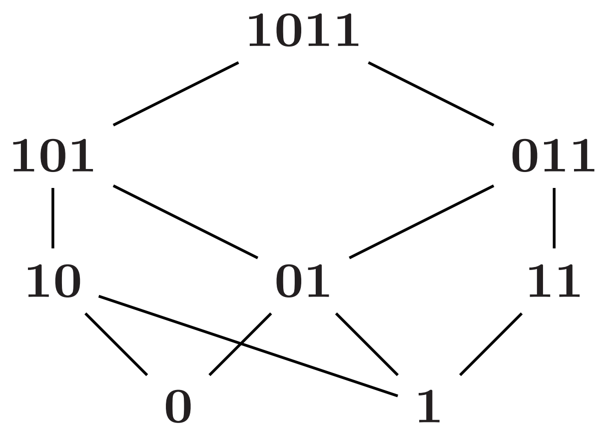
Konačno, prvo slovo po kome se razlikuju C i D je na petoj poziciji, gde kod C stoji 0, a kod D stoji 1. Prema tome, reč C je četvrta a D peta po veličini.

Dakle, rešenje je $BEACD$. $\square$

Zadatak 1.11. Neka je $\preccurlyeq$ uređenje na skupu binarnih nizova

$$X = \{0, 1, 10, 01, 11, 101, 011, 1011\}$$

zadato sledećim Haseovim dijagramom.

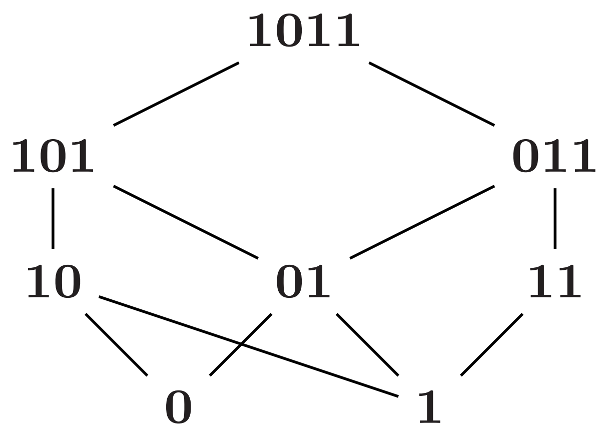


Koje od sledećih uređenja ima $\preccurlyeq$ kao svoju restrikciju na skupu X:

(a) prefiks uređenje
(b) leksikografsko uređenje
(c) faktor uređenje
(d) alfabetsko uređenje
(e) sufiks uređenje

Alfabetsko uređenje

Rešenje: Primetimo najpre da uređenje $\preccurlyeq$ nije linearno, jer, na primer, elementi 0 i 1 nisu uporedivi. Kako znamo da leksikografsko i alfabetsko uređenje jesu linearna uređenja, to zaključujemo da $\preccurlyeq$ nije jedno od njih.



Ako bi $\preccurlyeq$ bilo prefiks uređenje, onda ne bi moglo da bude $0 \preccurlyeq 10$, a ako bi to bilo sufiks uređenje, onda ne bi moglo da bude $1 \preccurlyeq 01$. Odavde zaključijemo da $\preccurlyeq$ ne može biti ni jedno od ta dva uređenja.

Dakle, ostaje samo mogućnost da $\preccurlyeq$ jeste faktor uređenje. To zaista važi, jer se sa slike vidi da je bilo koja reč iz datog skupa manja od neke druge ako i samo ako je njen faktor.

Dakle, $\preccurlyeq$ je faktor uređenje. $\square$

Zadatak 1.12. U odnosu na koje uređenje su poređani sledeći nizovi:

$$11,\ 101,\ 011,\ 01,\ 0.$$

(a) prefiks uređenje

(b) leksikografsko uređenje

(c) faktor uređenje

(d) alfabetsko uređenje

(e) simetrično uređenje

Rešenje: U zavisnosti od toga da li su ove reči date u rastućem poretku (od najmanjeg ka najvećem) ili opadajućem poretku (od najvećeg ka najmanjem), imamo da je ili $011 \leqslant 101$ ili $101 \leqslant 011$.

Odatle zaključujemo da se ne radi o prefiks uređenju, jer nijedna od te dve reči nije prefiks one druge.

Na isti način zaključujemo i da se ne radi o faktor uređenju, jer nijedna od te dve reči nije faktor druge.

Alfabetsko uređenje

Simetrično uređenje ne postoji, pa i tu mogućnost isključujemo.

Prema tome, preostaju mogućnosti da je $\leqslant$ alfabetsko ili leksikografsko uređenje.

Kako se kod alfabetskog uređenja reči uređuju najpre po dužini, a potom se reči iste dužine uređuju leksikografski, to zaključujemo da $\leqslant$ nije ni alfabetsko uređenje, jer dati poredak ne uvažava dužinu reči.

Preostaje, dakle, da $\leqslant$ jeste leksikografsko uređenje. Ako date nizove poređamo po leksikografskom poretku, od najvećeg ka najmanjem, videćemo da je to upravo dati poredak.

To znači da je rešenje (b) - leksikografsko uređenje. $\square$