MATEMATIČKA LOGIKA

***

– SKUPOVI –

U matematici se pojam skup ne definiše eksplicitno.

On predstavlja osnovni pojam, poput pojma tačke ili prave u geometriji.

Suštinsko svojstvo skupa je da se on sastoji od elemenata ili članova.

Osnovni odnos između elemenata i skupova je pripadanje.

Izraz "a pripada A" se simboličkim matematičkim jezikom piše

$$a \in A$$

Kaže se i da je a element skupa A, ili da je a sadržan u A.

Izraz "a ne pripada skupu A", odnosno negacija formule $a \in A$, se simbolički označava sa $a \notin A$.

Pojam skupa

Za simboličko označavanje skupova najčešće koristimo slova latinskog alfabeta.

Pri tome, skupove obično označavamo velikim slovima a njihove elemente malim.

Primeri skupova:

- skup svih Beograđana
- skup svih nacija
- skup celih brojeva
- skup svih reči
- sve osobe koje imaju određenu osobinu zajedno čine skup
- svi tipovi u programskim jezicima (integer, real) čine skupove

Pojam skupa

Napomena: Često sami skupovi jesu elementi drugih skupova.

Primeri:

- prava, kao skup tačaka u ravni, pripada skupu svih pravih te ravni
- nacija, kao skup individua, pripadnika te nacije, pripada skupu svih nacija

➠ **Navođenjem svih njegovih elemenata**, između vitičastih zagrada { i }.

$\{3, 6, 7\}$	Konačan skup, sa elementima 3, 6 i 7. Ovakav način zadavanja skupova koristi se za konačne skupove sa ne tako velikim brojem elemenata, koje je tehnički moguće sve navesti
$\{1, 2, \dots, n\}$	Konačan skup sa većim brojem elemenata koje tehnički nije moguće sve navesti, zbog čega stavljamo tri tačke "$\dots$" koje znače "i tako dalje, po istom obrascu". Odgovarajući obrazac mora da bude očigledan.
$\{2, 4, 6, 8, \dots\}$	Skup svih parnih brojeva. Primetimo da je ovaj skup, za razliku od prethodnog, beskonačan.
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	Skup svih prirodnih brojeva.

Zadavanje skupova

➠ **Zadavanjem svojstva koje svi njegovi elementi moraju da imaju.**

Zajedničko svojstvo objedinjuje u skup sve objekte sa tim svojstvom.

Takvi skupovi se zapisuju u sledećem obliku

$$A = \{x \mid x \text{ ima svojstvo } P(x)\} \quad \text{ili} \quad A = \{x \mid P(x)\},$$

gde je sa $P(x)$ označeno svojstvo koje može imati objekat x.

Na ovaj način je označen **skup svih objekata x za koje važi $P(x)$**, odnosno **skup svih objekata x koji imaju svojstvo $P(x)$**.

Na primer, skup parnih brojeva može se zadati sa

$$\{x \mid \text{postoji } y \in \mathbb{N} \text{ tako da je } x = 2y\}.$$

➠ **Rekurzivna (induktivna) definicija skupa.**

Skup A se može definisati rekurzivno ili induktivno na sledeći način:

(i) zadaju se polazni elementi ili bazni elementi skupa A;

(ii) određuje se način na koji se, pomoću određenih operacija, iz prethodno definisanih elemenata mogu definisati drugi elementi skupa A;

(iii) kaže se da skupu A mogu pripadati oni i samo oni objekti koji se mogu dobiti primenom pravila (i) i (ii) konačan broj puta.

Na ovaj način će kasnije biti definisane iskazne i predikatske formule.

Rekurzivno se definišu i formule u jeziku FORTRAN.

Jednakost skupova. Podskup

Dva skupa A i B su **jednaka**, u oznaci $A = B$, ako imaju iste elemente, tj.

$$A = B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Negacija gornje formule označava se sa $A \neq B$.

Skup A je **podskup** skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, ako su svi elementi skupa A sadržani u B, tj.

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Odnos $\subseteq$ zove se **inkluzija**.

Ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$, onda se kaže da je A **pravi podskup** skupa B, u oznaci $A \subset B$.

Napomena: U prethodnim definicijama koristili smo sledeće simboličke oznake:

$\Leftrightarrow$	znači "ako i samo ako" ili "ekvivalentno" (ekvivalencija);
$\overset{\text{def}}{\iff}$	znači "ekvivalentno po definiciji";
$\Rightarrow$	znači "ako..., onda..." ili "povlači" (implikacija).

Više reči o ovome biće u kasnijim poglavljima.

Primetimo da "ekvivalentno" i "ekvivalentno po definiciji" imaju drugačija značenja:

$P \Leftrightarrow Q$ znači da je P tačno ako i samo ako je tačno Q, dok $P \overset{\text{def}}{\iff} Q$ znači da P i Q imaju isto značenje, tj. Q je samo drugačiji zapis za P.

Primeri jednakih skupova:

$$\{x, x\} = \{x\} \qquad \{x, y\} = \{y, x\}$$

$$\{x, y, z\} = \{x, z, y\} \qquad \{x, y, z\} = \{z, x, x, y\}$$

Ove jednakosti se dokazuju neposrednom primenom definicije jednakosti skupova. Dokaz se ostavlja za vežbu.

Odavde možemo izvući dva pravila koja se tiču zadavanja skupova navođenjem njegovih elemenata:

– Nije bitan redosled po kome se elementi navode (nabrajaju).

– Svaki element se navodi samo jednom.

Primeri inkluzije:

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ — **skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je podskup skupa celih brojeva $\mathbb{Z}$ (i to pravi podskup);**

$\{a, b, c\} \subseteq \{b, d, a, c\}$

Zadatak 1. Da li su sledeća tvrđenja tačna:

(a) $\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\}$;

(b) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{\{1, 2\}, 3, \{1, 2, 3\}\}$.

Rešenje: (a) Ovo nije tačno, jer skupovi na levoj i desnoj strani nemaju iste elemente. Naime, elementi skupa na levoj strani su a i $\{b, c\}$, a elementi skupa na desnoj strani su $\{a, b\}$ i c.

Prema tome, a je, na primer, element skupa na levoj strani, ali nije element skupa na desnoj strani.

(b) Ni ovo nije tačno, jer elementi skupa na levoj strani su 1, 2 i 3, a elementi skupa na desnoj strani su $\{1, 2\}$, 3 i $\{1, 2, 3\}$. Dakle, 1 i 2 nisu elementi skupa na desnoj strani. $\square$

Zadatak 2. Odrediti broj elemenata sledećih skupova:

(a) $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

(b) $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$

(c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, a, b, \{a, b\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$

(d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

(e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

Rešenje:

(a) Skup $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ima samo jedan element, skup $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(b) Skup $\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$ **ima 4 elementa:**

(1) 1, **(2)** 2, **(3)** 3 **i (4)** $\{1,2,3\}$.

(c) Skup $\{\emptyset,\{\emptyset\},a,b,\{a,b\},\{a,b,\{a,b\}\}\}$ **ima 6 elemenata:**

(1) $\emptyset$, **(2)** $\{\emptyset\}$, **(3)** a, **(4)** b, **(5)** $\{a,b\}$, **i (6)** $\{a,b,\{a,b\}\}$.

(d) Skup $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ **ima 3 elementa:**

(1) $\emptyset$, **(2)** $\{\emptyset\}$, **i (3)** $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

(e) Skup $\{\emptyset,\{\emptyset\},\emptyset\}$ **ima 2 elementa:**

(1) $\emptyset$ **(dva puta zapisan), i (2)** $\{\emptyset\}$. $\square$

Svojstva jednakosti i inkluzije skupova

Tvrđenje 1. Za proizvoljne skupove A, B, C važi:

(i) $A = A$ (refleksivnost)

$A = B \Rightarrow B = A$ (simetričnost)

$A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$ (tranzitivnost)

(ii) $A \subseteq A$ (refleksivnost)

$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (antisimetričnost)

$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (tranzitivnost)

Dokaz: Ostavlja se za vežbu.

Zbog refleksivnosti inkluzije, svaki skup je i svoj sopstveni podskup.

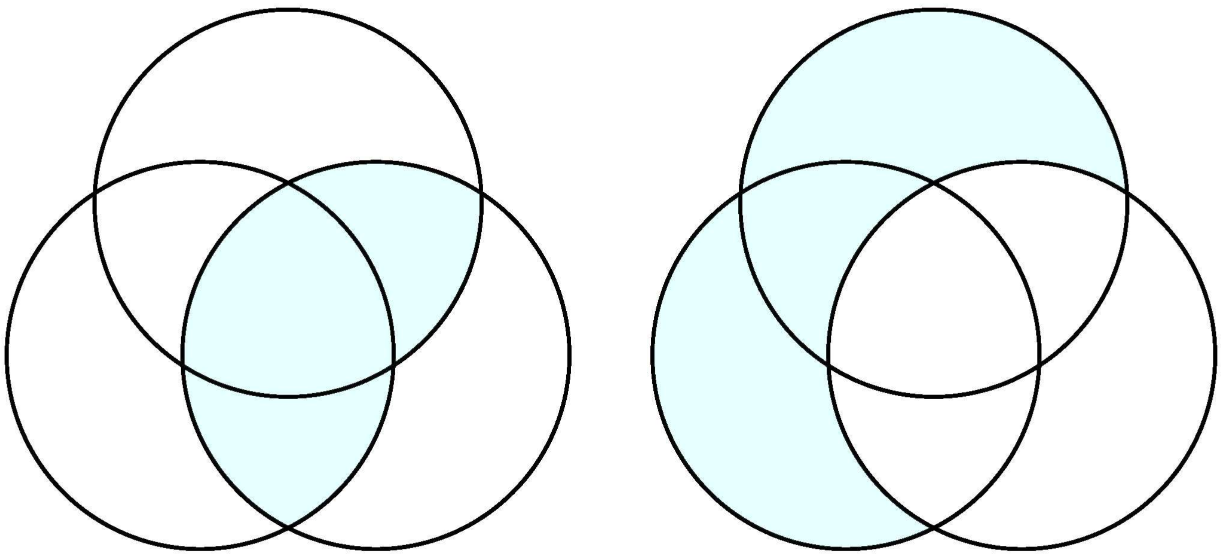
Antisimetričnost inkluzije je svojstvo koje se veoma mnogo koristi kada se dokazuje jednakost skupova.

Naime, skupovnu jednakost $A = B$ najčešće dokazujemo tako što dokazujemo da je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Skupove grafički najčešće predstavljamo pomoću Venovih dijagrama.

Kod Venovih dijagrama skupovi su predstavljeni skupovima tačaka izvesnih geometrijskih figura u ravni, kao što su krugovi ili elipse, i oblasti u ravni koje nastaju presecanjem tih geometrijskih figura.

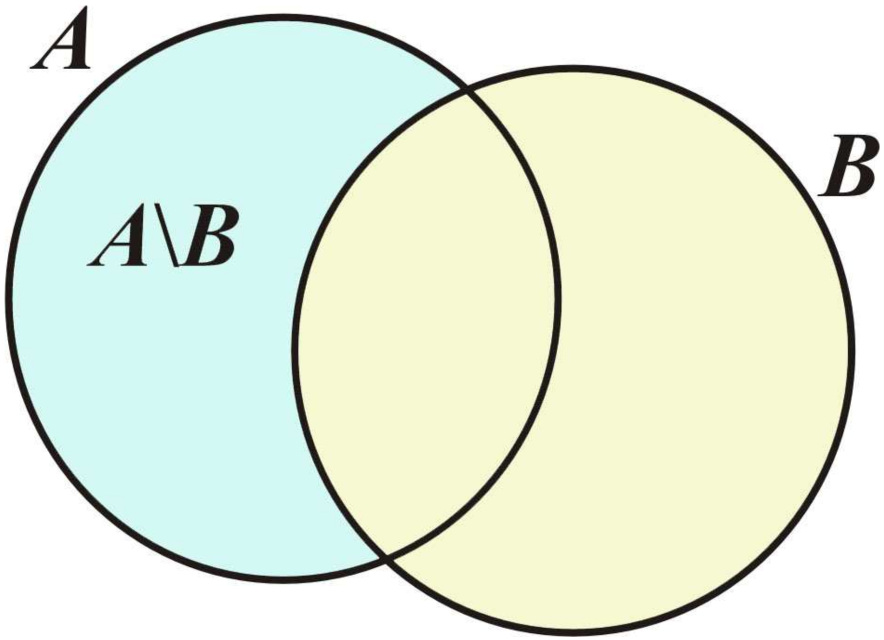
Dva primera Venovih dijagrama data su na donjoj slici:



Razlika skupova A i B je skup $A \setminus B$ koji se definiše sa

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \land x \notin B\}.$$

tj. skup svih elemenata iz A koji ne pripadaju skupu B



Tvrđenje 2. Neka su X i Y proizvoljni skupovi. Tada je

$$X \setminus X = Y \setminus Y.$$

Dokaz: Imamo da je

$$x \in X \setminus X \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin X \Leftrightarrow \perp$$
$$x \in Y \setminus Y \Leftrightarrow x \in Y \wedge x \notin Y \Leftrightarrow \perp$$

odakle sledi da je $x \in X \setminus X \Leftrightarrow x \in Y \setminus Y$.

Prema ovom tvrđenju, razlika $X \setminus X$ ne zavisi od skupa X.

Zato **prazan skup**, u oznaci $\emptyset$, definišemo kao skup $X \setminus X$, gde je X proizvoljan skup.

Prema ovakvoj definiciji

$$x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin X.$$

Kako je desna strana ove ekvivalencije kontradikcija, to imamo da ni za jedno x ne važi $x \in \emptyset$.

Tako dolazimo do ekvivalentne definicije praznog skupa: **prazan skup je skup koji nema elemenata**.

Tvrđenje 3. Za svaki skup X važi $\emptyset \subseteq X$.

Dokaz: Implikacija

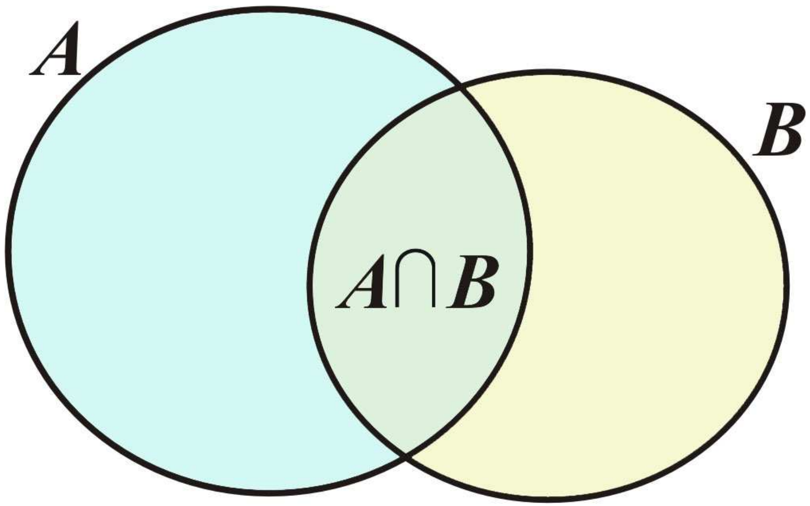
$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in X$$

važi za svaki x jer je leva strana te implikacije uvek netačna.

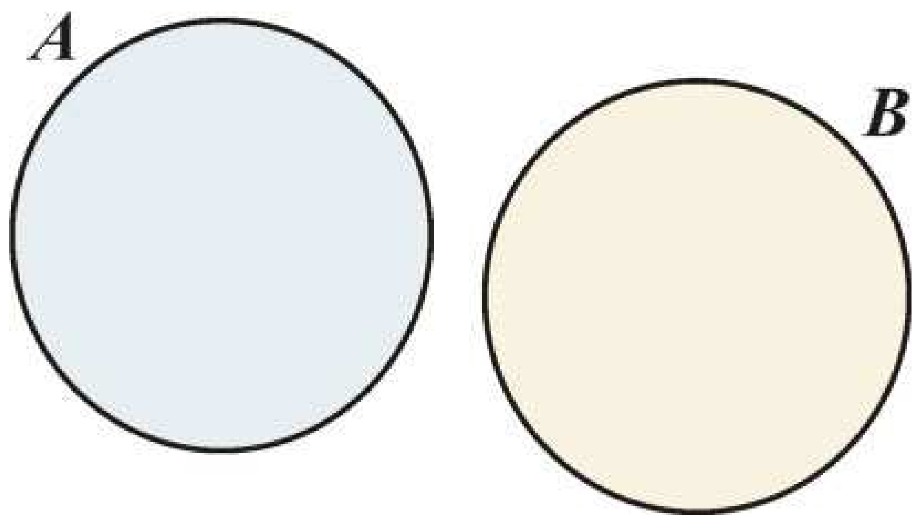
Presek skupova A **i** B**, u oznaci** $A \cap B$**, je skup koji sadrži tačno one elemente koji se nalaze istovremeno u oba skupa:**

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

Za skupove A **i** B **čiji je presek prazan skup se kaže da su** **disjunktni.**



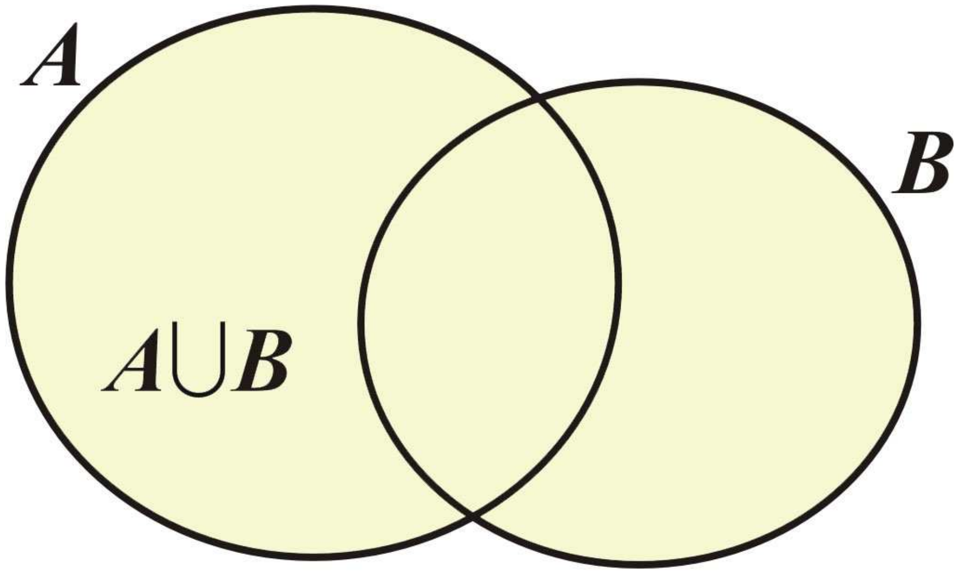
presek skupova



disjunktni skupovi

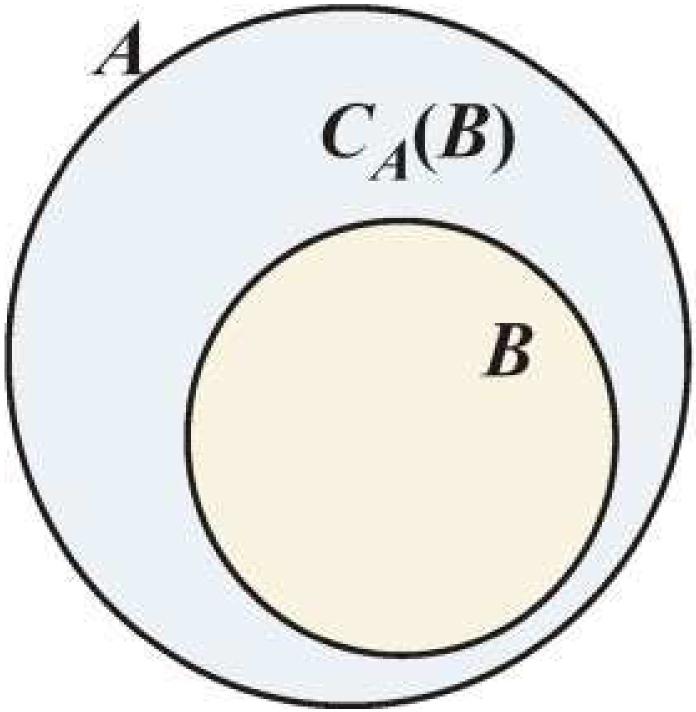
Unija skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze bar u jednom od njih:

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



Ako je $B \subseteq A$, onda se razlika $A \setminus B$ zove **komplement skupa B u odnosu na A** i označava sa $C_A(B)$:

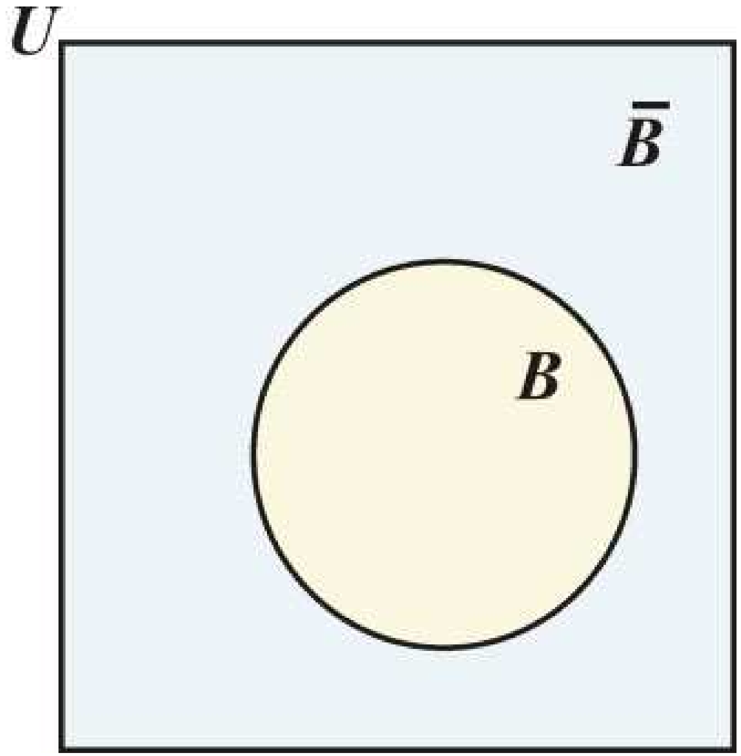
$$C_A(B) \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$



Često se posmatraju isključivo podskupovi nekog unapred datog skupa U, koji se zove **univerzalni skup**.

Tada za $B \subseteq U$, $C_U(B)$ se označava sa $\overline{B}$ i zove se samo **komplement skupa** B:

$$\overline{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \notin B\}$$



a) Ako je

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists k)(x = 2k)\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists m)(x = 3m)\},$$

onda je

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists p)(x = 6p)\};$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists q)(x = 2q \lor x = 3q)\};$$

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists r)(x = 2r - 1)\}.$$

b) Skupovi tačaka koje pripadaju dvema mimoilaznim pravama su disjunktni.

Neka je dat univerzalni skup U i njegovi podskupovi A_1, A_2,..., A_n.

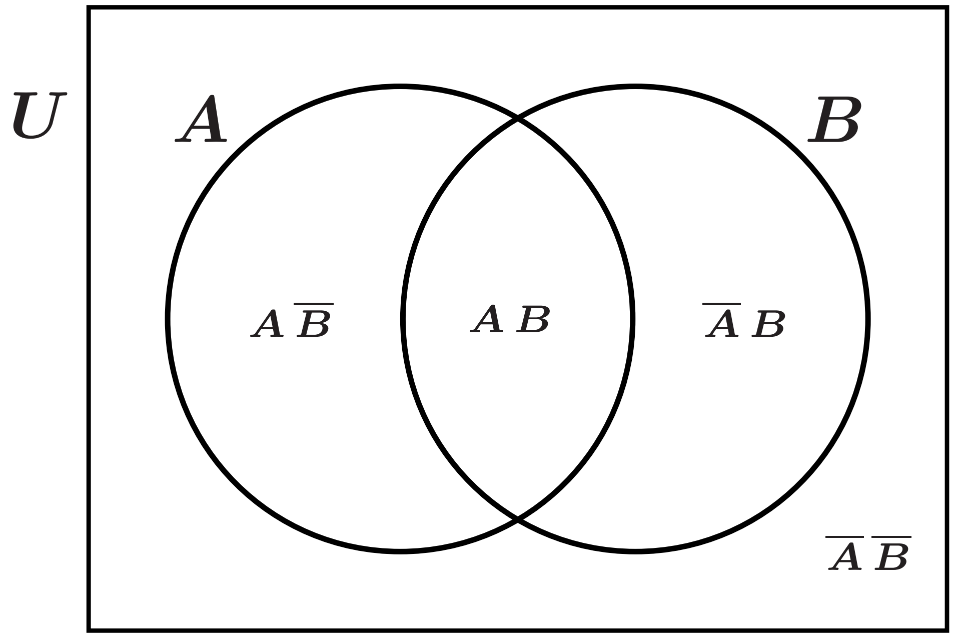
Predstavljanje tih skupova **Venovim dijagramom** je takvo grafičko predstavljanje gde je univerzalni skup U predstavljen pravougaonikom, a skupovi A_1, A_2,..., A_n krugovima ili elipsama.

Pri tome mora biti ispunjen uslov da krugovi, odnosno elipse, dele pravougaonik na 2^n delova, od kojih je svaka povezana oblast.

Venov dijagram mora da obezbedi dovoljan broj oblasti za predstavljanje svih mogućih preseka skupova A_1,..., A_n i njihovih komplemenata.

Svi ti preseci mogu biti neprazni, i tada ih ima 2^n, što znači da je neophodno u Venovom dijagramu obezbediti 2^n povezanih oblasti.

Venov dijagram za dva skupa, u oznaci V_2, prikazan je na sledećoj slici:

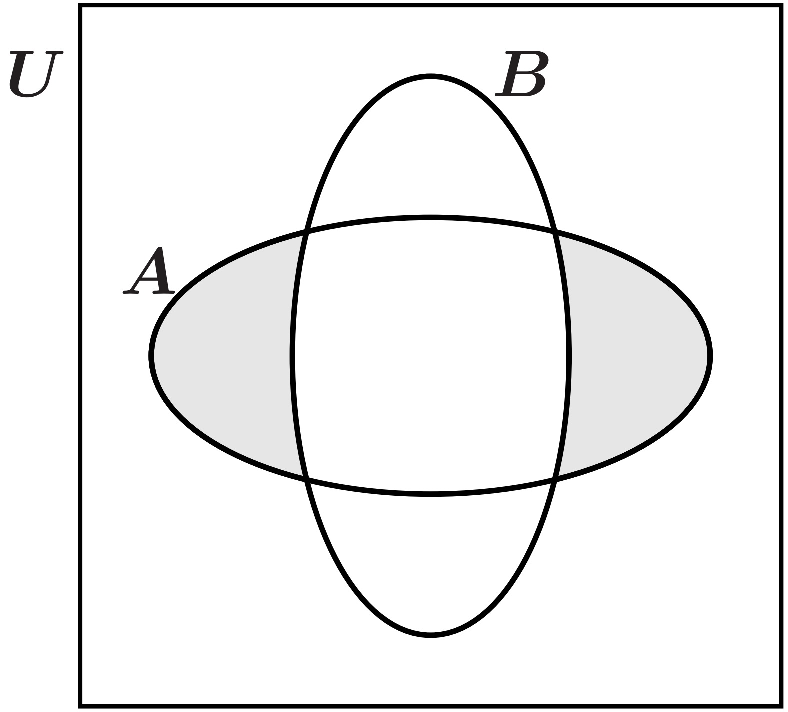


Jednostavnosti radi, ovde smo izostavljali znak $\cap$ za presek skupova.

Na primer, $A\,\overline{B}$ kraći zapis za $A \cap \overline{B}$.

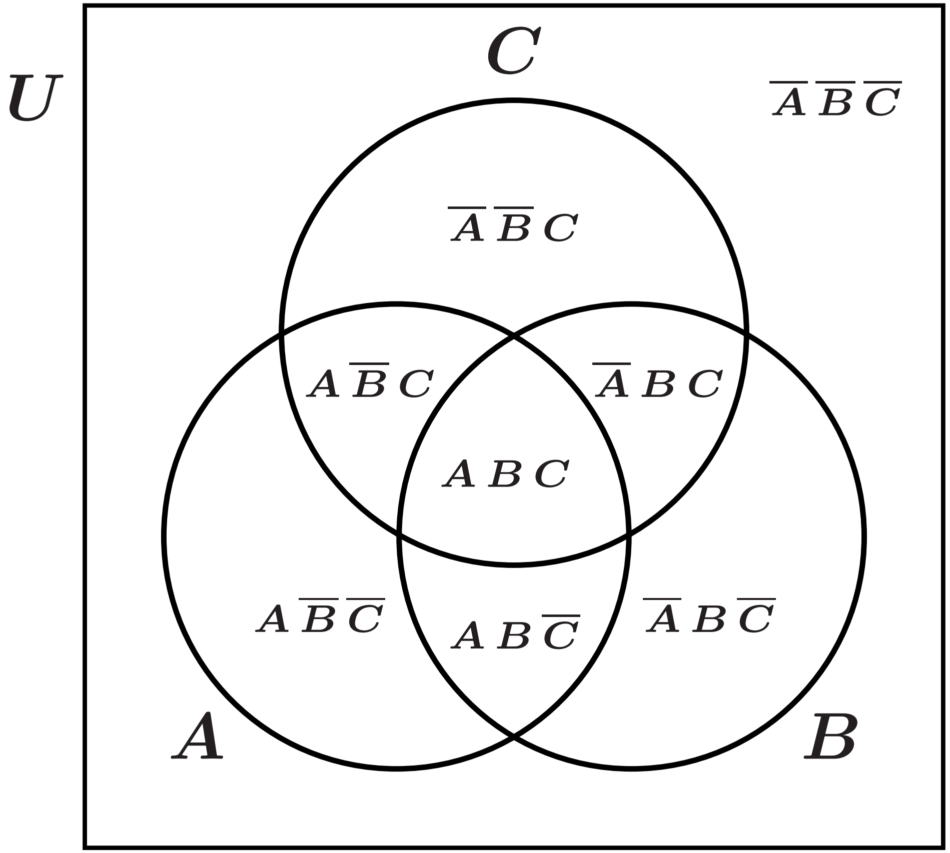
Komplement se gleda u odnosu na univerzalni skup U.

Primer predstavljanja koje nije Venov dijagram, jer ne ispunjava napred postavljeni uslov, dat je na sledećoj slici.

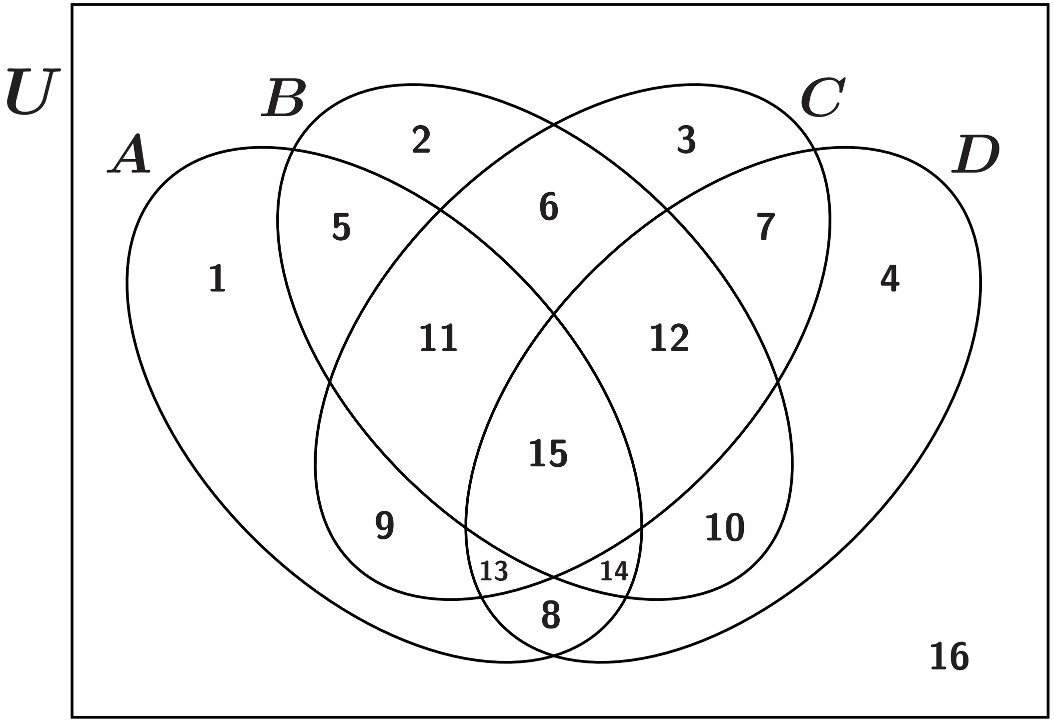


Ovo nije Venov dijagram jer skup $A \cap \overline{B}$ nije predstavljen povezanom oblašću.

Venov dijagram za tri skupa, u oznaci V_3, je



Venov dijagram za četiri skupa, u oznaci V_4, je prikazan na sledećoj slici:



1 : $A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$

2 : $\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$

3 : $\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$

4 : $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$

5 : $AB\overline{C}\,\overline{D}$

6 : $\overline{A}BC\overline{D}$

7 : $\overline{A}\,\overline{B}CD$

8 : $A\overline{B}\,\overline{C}D$

9 : $A\overline{B}C\overline{D}$

10 : $\overline{A}B\overline{C}D$

11 : $ABC\overline{D}$

12 : $\overline{A}BCD$

13 : $A\overline{B}CD$

14 : $AB\overline{C}D$

15 : $ABCD$

16 : $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$

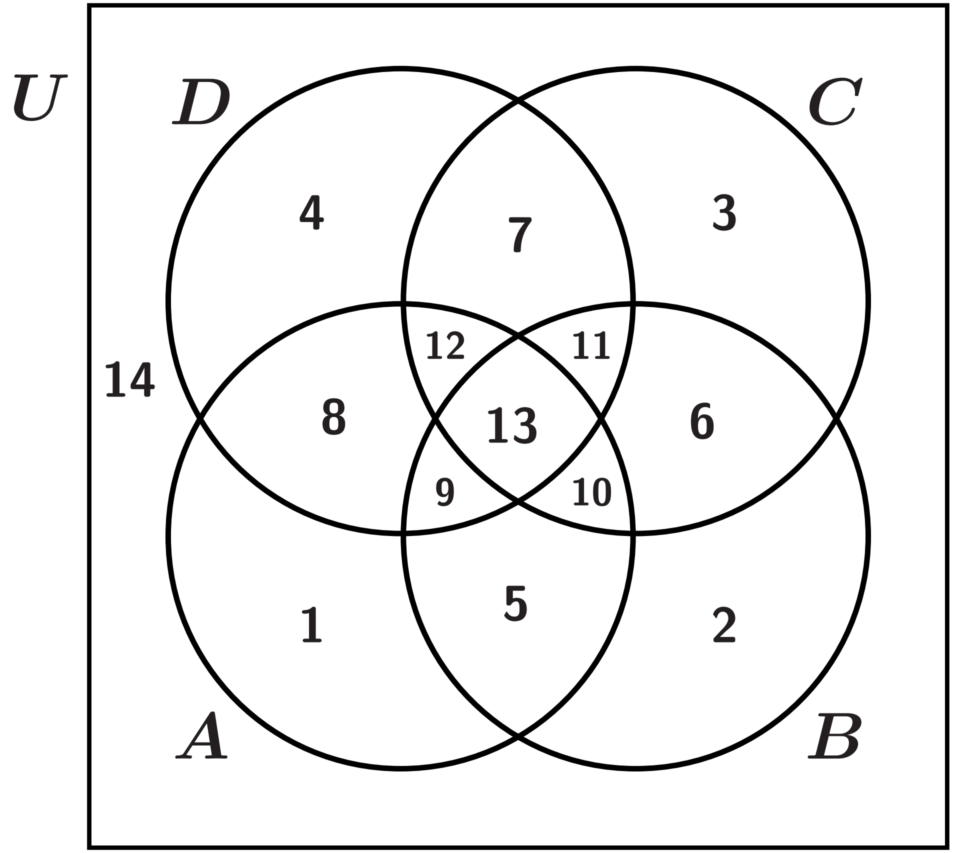
Venovi dijagrami za n skupova

Već u slučaju četiri skupa nije moguće nacrtati Venov dijagram sa krugovima, čak i različitih poluprečnika, već se to mora uraditi elipsama.

Iako su Venovi dijagrami uvedeni još 1881. godine, tek je 1975. godine dokazano da se za svaki prirodan broj n može nacrtati Venov dijagram sa n elipsi koji obezbeđuje svih 2^n oblasti.

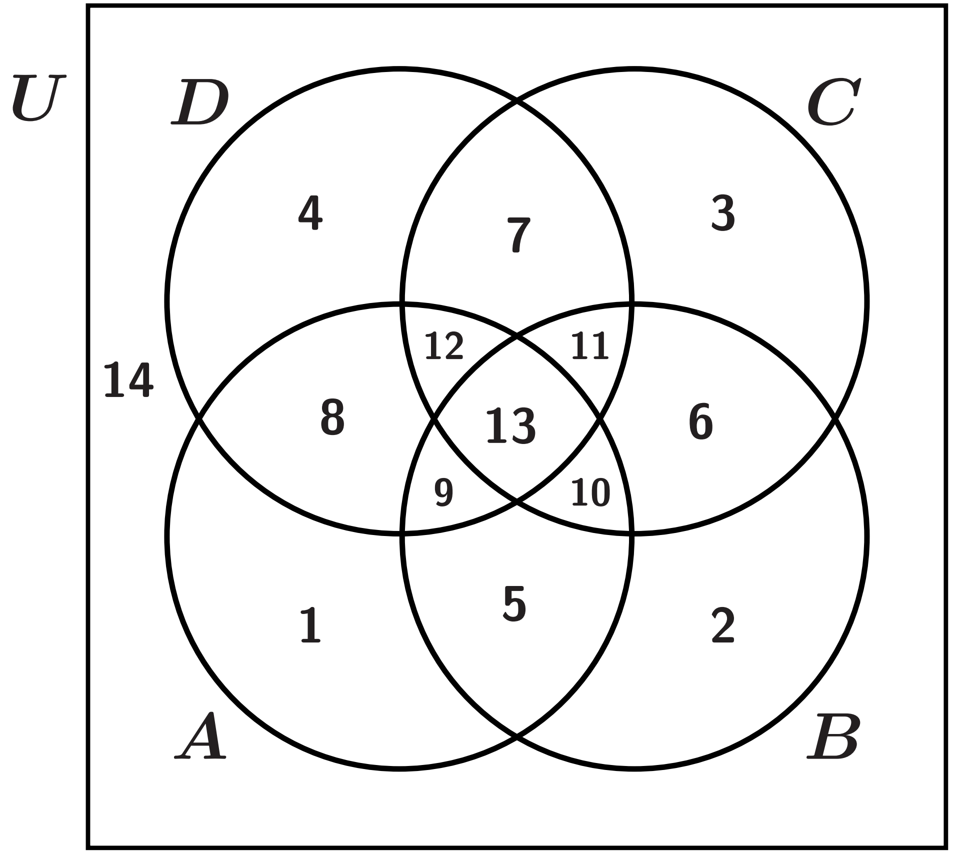
Međutim, crtanje Venovih dijagrama za pet i više skupova je toliko komplikovano da to nećemo raditi.

Zadatak 3. Dokazati da donja slika ne predstavlja Venov dijagram.



Označene oblasti izraziti kao preseke skupova A, B, C i D, odnosno njihovih komplemenata, na način kako je to urađeno za V_4.

Rešenje: Već na prvi pogled se vidi da nedostaju oblasti koje odgovaraju skupovima $A\,C\,\overline{B}\,\overline{D}$ i $B\,D\,\overline{A}\,\overline{C}$, tj., $A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}$ i $\overline{A}\,B\,\overline{C}\,D$.

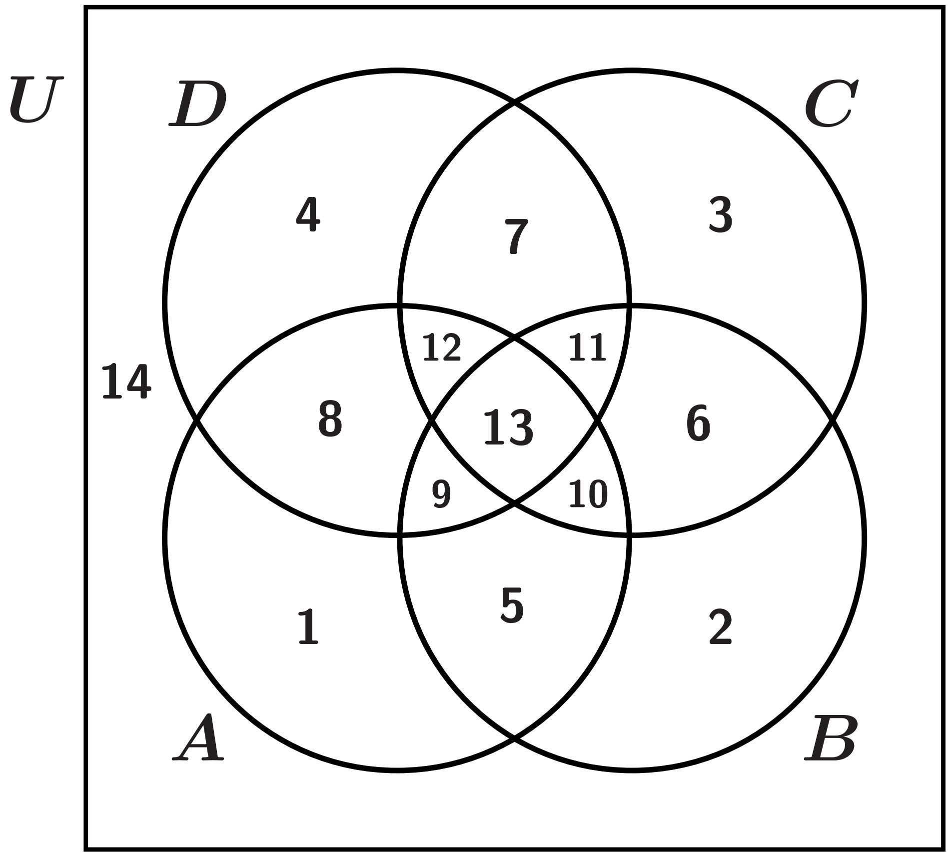


Drugim rečima, u ovom slučaju je

$$A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} = \emptyset \quad \text{i} \quad \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D = \emptyset.$$

Venovi dijagrami – zadatak

Sve ostale oblasti iz Venovog dijagrama V_4 su prisutne na ovom dijagramu i odgovaraju sledećim oblastima sa ovog dijagrama



$$
\begin{array}{llll}
1: A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} & & 8: A\overline{B}\,\overline{C}D \\
2: \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} & & 9: AB\overline{C}D \\
3: \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} & & 10: ABC\overline{D} \\
4: \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D & & 11: \overline{A}BCD \\
5: AB\overline{C}\,\overline{D} & & 12: A\overline{B}CD \\
6: \overline{A}BC\overline{D} & & 13: ABCD \\
7: \overline{A}\,\overline{B}CD & & 14: \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}.
\end{array}
$$

Tvrđenje 4. Neka je A skup i $X, Y, Z \subseteq A$. Tada važi:

(a) **Komutativnost**

$$X \cap Y = Y \cap X,$$
$$X \cup Y = Y \cup X;$$

(b) **Asocijativnost**

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z,$$
$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z;$$

(c) **Distributivnost**

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z);$$

(d) **Apsorptivnost**

$$X \cap (X \cup Y) = X,$$
$$X \cup (X \cap Y) = X;$$

Svojstva skupovnih operacija

(e) Idempotentnost

$$X \cap X = X,$$
$$X \cup X = X;$$

(f) De Morganovi zakoni

$$\overline{(X \cap Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y},$$
$$\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cap \overline{Y};$$

(g)
$$X \cap \overline{X} = \emptyset,$$
$$X \cup \overline{X} = A;$$

(h)
$$X \cap A = X,$$
$$X \cup A = A;$$

(i)
$$X \cap \emptyset = \emptyset,$$
$$X \cup \emptyset = X.$$

Dokaz: Ostavlja se za vežbu.

Svojstva inkluzije

Sledeće tvrđenje daje nam vezu između inkluzije i operacija preseka i unije skupova.

Tvrđenje 5. Neka su X i Y skupovi. Tada važi:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow X \cap Y = X,$$
$$X \subseteq Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y.$$

Dokaz: Ostavlja se za vežbu.

Kolekcija svih podskupova proizvoljnog skupa A je skup koji nazivamo **partitivni skup** skupa A i označavamo ga sa $\mathscr{P}(A)$:

$$\mathscr{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Tvrđenje 6.

(a) Prazan skup je element svakog partitivnog skupa.

(b) Skup A je element svog partitivnog skupa $\mathscr{P}(A)$.

Za razliku od samog praznog skupa, koji nema elemenata, njegov partitivni skup je jednočlan (jednoelementan):

$$\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

Primer partitivnog skupa:

Za $A = \{a, b, c\}$ je

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Tvrđenje: Neka skup A ima n elemenata. Tada

(a) A ima $\binom{n}{k}$ podskupova sa k elemenata $(0 \leqslant k \leqslant n)$;

(b) $\mathscr{P}(A)$ ima 2^n elemenata.

Zbog ovoga se često umesto oznake $\mathscr{P}(A)$ koristi oznaka 2^A.

Setimo se da je $\binom{n}{k}$ binomni koeficijent, tj.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}.$$

Posebne vrednosti binomnih koeficijenata su:

$$\binom{n}{0} \overset{\text{def}}{=} 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Zadatak: Odrediti sve podskupove skupa $A = \{\alpha, 2, 5, w\}$.

Rešenje: Svi podskupovi skupa A su

broj elemenata	podskup	broj podskupova
0	$\emptyset$	1
1	$\{\alpha\}$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{w\}$	4
2	$\{\alpha, 2\}$, $\{\alpha, 5\}$, $\{\alpha, w\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, w\}$, $\{5, w\}$	6
3	$\{\alpha, 2, 5\}$, $\{\alpha, 2, w\}$, $\{\alpha, 5, w\}$, $\{2, 5, w\}$	4
4	A	1
	ukupno:	16

Uređeni par

Kao što znamo, $\{x, y\}$ označava skup koji sadrži elemente x i y, pri čemu je $\{x, y\}$ isto što i $\{y, x\}$, tj., nije nije bitan redosled po kome navodimo elemente x i y.

Zato se skup $\{x, y\}$ ponekad naziva i neuređeni par elemenata x i y.

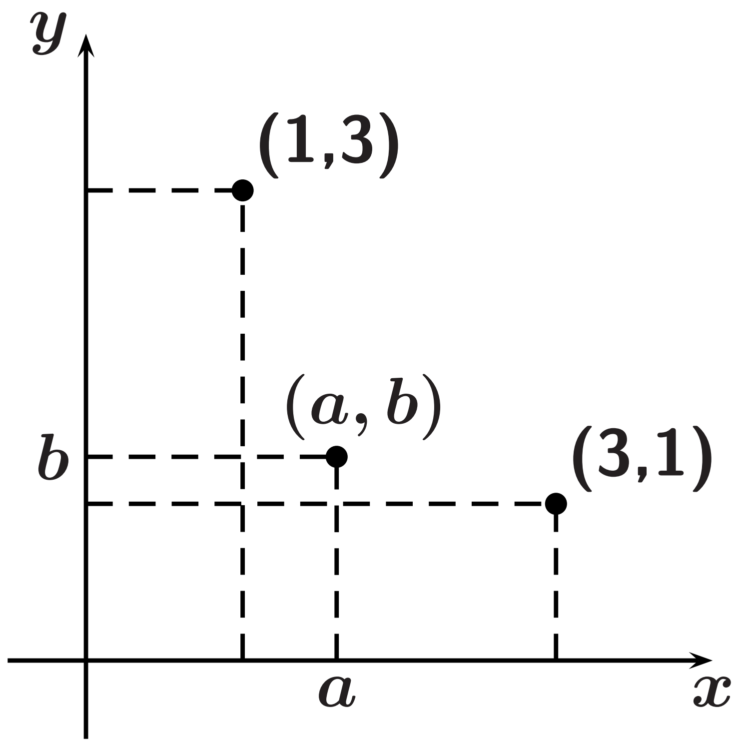
Međutim, često se nameće potreba da istaknemo koji je element prvi a koji drugi u paru.

Da bi smo to istakli, uvodimo oznaku (x, y) i kažemo da je (x, y) uređeni par elemenata x i y.

Za x kažemo da je prva komponenta ili prva koordinata, a za y da je druga komponenta ili druga koordinata uređenog para (x, y).

Svaka tačka u ravni može se predstaviti uređenim parom (a, b) realnih brojeva, pri čemu za a kažemo da je njena x-koordinata, a za b da je njena y-koordinata.

Kao što vidimo na slici, uređeni par $(1, 3)$ nije isto što i uređeni par $(3, 1)$.



Prethodna priča o uređenim parovima je bila potpuno neformalna.

Njena uloga je bila da objasni svrhu uvođenja pojma uređenog para i kako treba shvatiti taj pojam.

U nastavfkmu dajemo formalnu matematičku definiciju uređenog para.

Uređeni par (x, y) elemenata x i y se formalno definiše kao skup

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Ovakva definicija može izgledati vrlo neobično i prilično apstraktno. Međutim, ona omogućava da se iz nje izvedu fundamentalna svojstva uređenih parova.

Jedno od takvih svojstava je i jednakost uređenih parova, koja je tema naših daljih razmatranja.

Tvrđenje 7. Dokazati da su dva uređena para (a, b) i (c, d) jednaka ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Dokaz: Ako je $a = c$ i $b = d$, tada je jasno da je $\{a\} = \{c\}$ i $\{a, b\} = \{c, d\}$, pa je $(a, b) = (c, d)$.

Obratno, neka je $(a, b) = (c, d)$, tj.

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Slučaj $a = b$: U ovom slučaju je $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$, pa

$$\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\},$$

što znači da je

$$\{\{a\}\} = \{\{c\}\} = \{\{c, d\}\},$$

odakle se lako dobija da je $a = b = c = d$.

Slučaj $a \neq b$: U ovom slučaju je $\{a\} \neq \{a, b\}$, zbog čega mora biti i $\{c\} \neq \{c, d\}$, odnosno $c \neq d$. Iz

$$\{c\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

dobija se $\{c\} = \{a\}$, tj. $c = a$, dok se iz

$$\{c, d\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} \quad \text{i} \quad \{c, d\} \neq \{a\}$$

dobija $\{c, d\} = \{a, b\}$, pa iz $d \neq c = a$ i $d \in \{c, d\} = \{a, b\}$ zaključujemo da mora biti $d = b$. Dakle, $a = c$ i $b = d$. $\square$

Prema tome, dva uređena para su jednaka ako su im jednake odgovarajuće koordinate.

Iz jednakosti uređenih parova možemo zaključiti i da važi

$$(x, y) = (y, x) \ \Leftrightarrow \ x = y.$$

Uređena n-torka

Uopštenjem pojma uređenog para sa $n = 2$ na bilo koji prirodan broj n, dolazimo do pojma uređene n-torke.

Uređena n-torka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ elemenata $x_1, x_2, \dots, x_n$ definiše se induktivno, na sledeći način:

$$(x_1) \stackrel{\text{def}}{=} x_1$$

$$(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n).$$

Na primer, uređena trojka (a, b, c) je zapravo uređeni par $((a, b), c)$.

Za bilo koji $k \in \{1, \dots, n\}$, element x_k se naziva **k-ta koordinata** uređene n-torke $(x_1, \dots, x_n)$.

Jednakost uređenih n-torki

Kao i kod uređenih parova, za uređene n-torke važi

Tvrđenje 8. Dve uređene n-torke $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_n)$ su jednake ako i samo ako su im jednake odgovarajuće koordinate, tj.

$$x_1 = y_1 \ \wedge \ x_2 = y_2 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ x_n = y_n.$$

Dokaz: Ovo tvrđenje dokazuje se indukcijom po n.

Za $n = 1$ tvrđenje je trivijalno, a u slučaju $n = 2$ dokazano je u prethodnom tvrđenju.

Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za neki prirodan broj $n - 1$ i dokažimo da važi i za n.

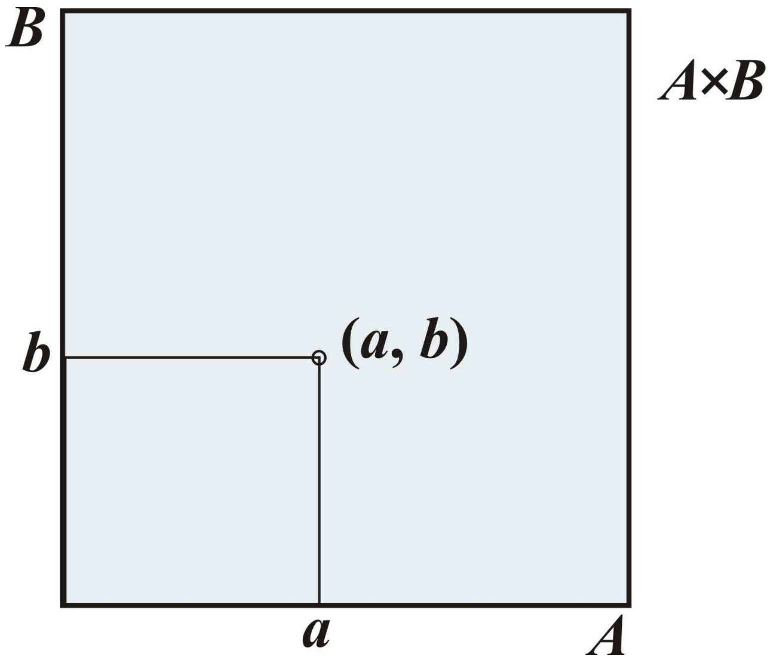
Zaista,

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\Leftrightarrow ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) = ((y_1, \ldots, y_{n-1}), y_n) \\
&\qquad \text{(definicija uređene } n\text{-torke)} \\
&\Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_{n-1}) = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \ \wedge \ x_n = y_n \\
&\qquad \text{(jednakost uređenih parova)} \\
&\Leftrightarrow x_1 = y_1 \ \wedge \ldots \wedge \ x_{n-1} = y_{n-1} \ \wedge \ x_n = y_n \\
&\qquad \text{(indukcijska hipoteza).}
\end{aligned}
$$

Ovim je tvrđenje dokazano za svaki prirodan broj n. $\square$

Ako su A i B skupovi, onda se skup svih uređenih parova sa prvom koordinatom iz A, a drugom iz B naziva **Dekartov**, **Kartezijev** ili **direktan proizvod** skupova A i B, i označava se sa $A \times B$:

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$



Dekartov proizvod dva skupa

Sam naziv "Dekartov proizvod" potiče od pojma "Dekartov koordinatni sistem" – predstavljanja tačaka u ravni uređenim parom realnih brojeva.

Ako je bilo koji od skupova A i B prazan, tada je po definiciji i njihov Dekartov proizvod $A \times B$ prazan.

Dekartov proizvod $A \times A$ skupa A sa samim sobom označava se sa A^2 i naziva Dekartov kvadrat skupa A.

Primer: Ako je $A = \{0, 1\}$ i $B = \{x, y, z\}$, onda je

$$A \times B = \{(0, x), (0, y), (0, z), (1, x), (1, y), (1, z)\};$$
$$A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Dekartov proizvod skupova sa m i n elemenata ima mn elemenata.

Dekartov proizvod n skupova

Dekartov proizvod n skupova $A_1, \dots, A_n$, u oznaci

$$A_1 \times \cdots \times A_n \quad \text{ili} \quad \prod_{i=1}^{n} A_i,$$

je skup svih uređenih n-torki sa koordinatama iz odgovarajućih skupova:

$$A_1 \times \cdots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Ako je bilo koji od skupova $A_1, \dots, A_n$ prazan, onda je po definiciji prazan i skup $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Dekartov n-ti stepen

Ako je $A_1 = \cdots = A_n = A$, onda se odgovarajući Dekartov proizvod označava sa A^n i zove **Dekartov n-ti stepen** skupa A.

Jasno, $A^1 = A$.

Ako je $A \neq \emptyset$, onda je Dekartov stepen zgodno proširiti (dodefinisati) i za $n = 0$, na sledeći način:

$$A^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\emptyset\}$$

U ovoj definiciji je najbitnije da je A^0 **jednoelementan skup**.

Jedini element ovog skupa mogli smo označiti i nekako drugačije, ali je uzeta oznaka za prazan skup zbog svoje univerzalnosti.

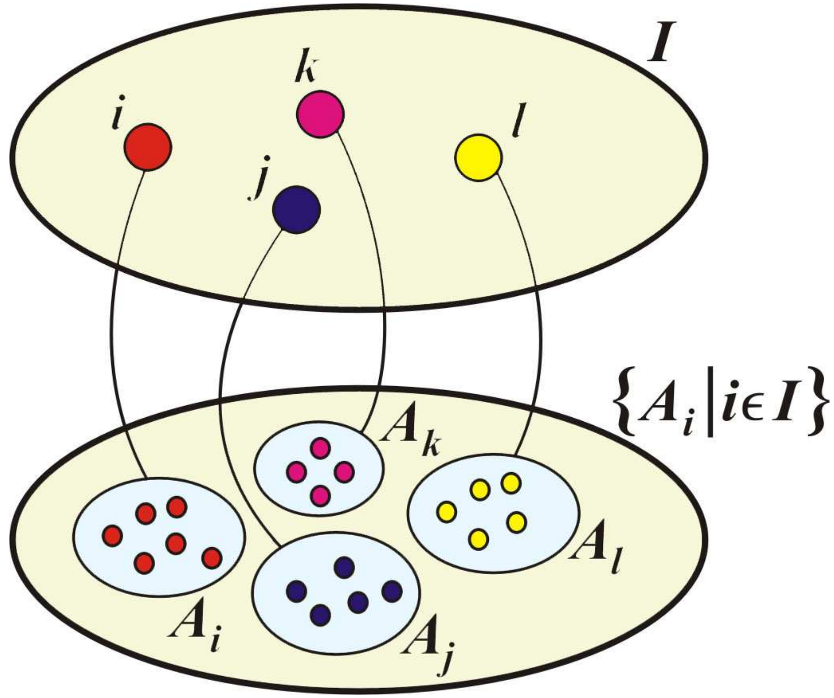
Neka je dat neprazan skup I, koji ćemo nazivati indeksni skup, i neka je svakom elementu $i \in I$ pridružen neki skup A_i.

Tada možemo formirati novi skup

$$\{A_i \mid i \in I\}$$

tako što svaki element i u skupu I zamenimo odgovarajućim skupom A_i.

Dakle, elementi tog novog skupa su skupovi A_i.

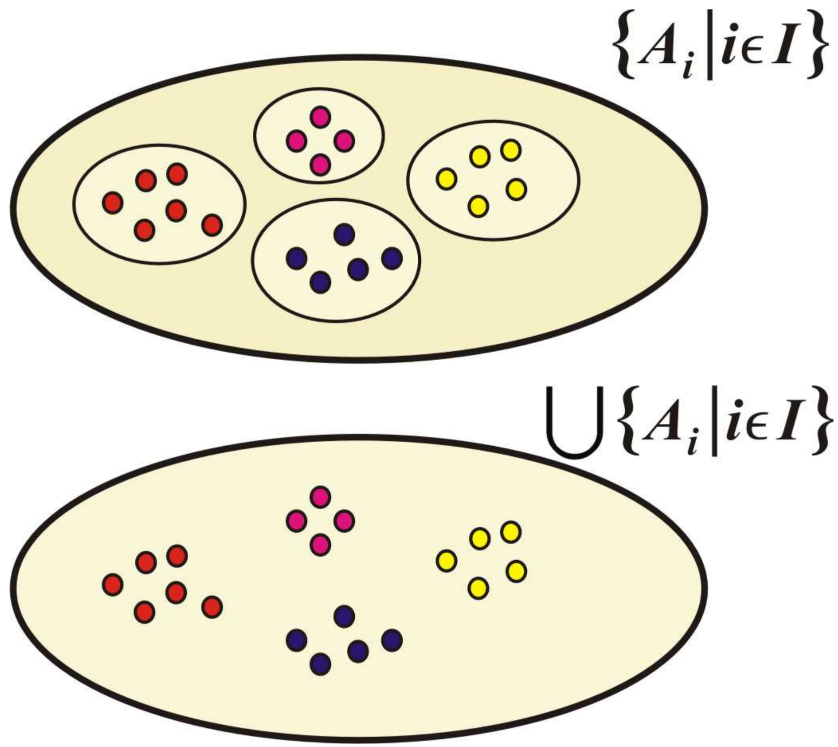


Ovako definisan skup nazivamo familija skupova A_i, $i \in I$, indeksirana skupom I, koju takođe označavamo i sa $\{A_i\}_{i \in I}$.

Unija familije skupova $\{A_i \mid i \in I\}$ **definiše se na sledeći način:**

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup\{A_i \mid i \in I\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (\exists i \in I)\, x \in A_i\}.$$

Kao što se vidi sa slike, uniju familije skupova možemo shvatiti tako kao da smo uklonili opne koje razdvajaju elemente iz različitih skupova A_i i time sve te elemente objedinili u jedan skup.



Presek familije skupova $\{A_i \mid i \in I\}$ **definiše se sa:**

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap\{A_i \mid i \in I\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (\forall i \in I)\, x \in A_i\}.$$

Na slici desno prikazan je presek familije $\{A_i\}_{i\in I}$, **gde je** $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.