MATEMATIČKA LOGIKA

***

– ISKAZNA LOGIKA –

III DEO

Tvrđenje 3: Ako su formule A i $A \Rightarrow B$ tautologije, onda je tautologija i formula B.

Dokaz: Neka su A i $A \Rightarrow B$ tautologije.

Pretpostavimo da B nije tautologija. Tada postoji valuacija v takva da je $v(B) = 0$, odakle, zbog činjenice da je A tautologija, dobijamo da je

$$v(A \Rightarrow B) = v(A) \Rightarrow v(B) = 1 \Rightarrow 0 = 0,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $A \Rightarrow B$ tautologija.

Dakle, zaključujemo da B mora biti tautologija. $\square$

Tvrđenje 4: Ako je $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ tautologija a B je formula dobijena iz A zamenom tih iskaznih slova redom formulama $A_1, A_2, \dots, A_n$, onda je i B tautologija.

Dokaz: Neka je A tautologija i neka je v proizvoljna valuacija.

Za svaki i, $1 \leqslant i \leqslant n$, neka je $v(A_i) = \alpha_i$. Prema definiciji formule B imamo da je

$$v(B) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1,$$

jer je A tautologija.

Prema tome, dokazali smo da je i B tautologija. $\square$

Primer: Formula

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge \neg B))$$

je tautologija jer se može dobiti iz tautologije $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ zamenom promenljivih p i q formulama A i $B \wedge \neg B$, tim redom.

Tvrđenje 5: Neka su A_1, A i B formule takve da je A podformula neke formule A_1, i neka je B_1 formula dobijena iz A_1 zamenom podformule A formulom B. Tada je tautologija i formula

$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Leftrightarrow B_1).$$

Dokaz: Neka je v proizvoljna valuacija.

Ako je $v(A) \neq v(B)$, tada je $v(A \Leftrightarrow B) = 0$, pa je

$$v((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Leftrightarrow B_1)) = 1.$$

Ukoliko je $v(A) = v(B)$, onda je i $v(A_1) = v(B_1)$, jer se formule A_1 i B_1 razlikuju samo u podformulama A i B. Prema tome,

$$v((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Leftrightarrow B_1)) = 1 \Rightarrow 1 = 1.$$

Ovim smo dokazali da je $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Leftrightarrow B_1)$ tautologija. $\square$

Prethodno tvrđenje se može formulisati i kao: **Ako su formule A i B tautološki ekvivalentne, onda su to i A_1 i B_1.**

Da je formula A tautologija, zapisuje se kraće sa $\models A$.

U dokazu da je neka formula tautologija, često se koristi sledeće

Tvrđenje 6: Ako je $\models A \Leftrightarrow B$ i $\models A$, onda je i $\models B$.

Dokaz: Jednostavan je i ostavlja se za vežbu. $\square$

Tvrđenje 7: $\models A \wedge B$ ako i samo ako je istovremeno $\models A$ i $\models B$.

Tvrđenje 8:

a) $\models A \Leftrightarrow A$;

b) ako je $\models A \Leftrightarrow B$, onda je $\models B \Leftrightarrow A$;

c) ako je $\models A \Leftrightarrow B$ i $\models B \Leftrightarrow C$, onda je $\models A \Leftrightarrow C$.

Napomena. Izrazi koji se ovde i nadalje javljaju i sadrže znak $\models$ nisu formule u teoriji iskaza.

Oni pripadaju jeziku kojim govorimo o iskaznim formulama i služe za sažeto zapisivanje nekih tvrđenja o njima.

Kontradikcije. Zadovoljive formule

Iskazna formula je **kontradikcija** ako nije tačna ni u jednoj interpretaciji.

Takva je na pr. formula $p \wedge \neg p$.

Očigledno, ako je A kontradikcija, onda je $\neg A$ tautologija i obratno.

Za iskaznu formulu se kaže da je **zadovoljiva** ako postoji interpretacija u kojoj je tačna.

Zapravo, iskaz "A je zadovoljiva formula" je negacija iskaza "A je kontradikcija".

Na osnovu pravila logičkog zaključivanja se obično iz poznatih iskaza - premisa, izvode zaključci.

U iskaznoj logici se taj pojam precizno definiše, na sledeći način.

Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n$ i B iskazne formule.

Za formulu B kažemo da je **semantička posledica** skupa formula

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

ukoliko važi da kad god su u nekoj valuaciji tačne sve formule iz tog skupa, onda je u toj valuaciji tačna i formula B.

To beležimo kraće sa

$$A_1, A_2, \dots, A_n \models B,$$

ili sa $A \models B$ kada je $n = 1$ i $A_1 = A$.

Formule $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazivamo hipotezama ili pretpostavkama, tj. kažemo da je B semantička posledica skupa hipoteza $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

U tom nazivu treba istaći prefiks "semantička".

On treba da označi da, kada se B izvodi kao zaključak iz skupa hipoteza $A_1, A_2, \ldots, A_n$, vodimo računa o istinitosti tih hipoteza.

Osim ovog pojma, postoji i pojam "sintaksičke posledice" skupa hipoteza $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

U tom slučaju, pri izvođenju formule B kao zaključka iz skupa hipoteza $A_1, A_2, \ldots, A_n$, neće nas zanimati istinitost tih hipoteza, već ćemo voditi računa jedino o tome da li smo prilikom izvođenja koristili dozvoljena pravila izvođenja ili ne.

Primer 1.11 $p \vee q, p \Rightarrow r \models q \vee r$

Ovo zaključujemo iz sledeće tablice istinitosti, gde su vrste u kojima su obe formule $p \vee q$ i $p \Rightarrow r$ tačne označene zvezdicom

p	q	r	$p \vee q$	$p \Rightarrow r$	$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$	$q \vee r$	
1	1	1	1	1	1	1	*
1	1	0	1	0	0	1	
1	0	1	1	1	1	1	*
1	0	0	1	0	0	0	
0	1	1	1	1	1	1	*
0	1	0	1	1	1	1	*
0	0	1	0	1	0	1	
0	0	0	0	1	0	0	

Primetimo da su obe formule $p \vee q$ i $p \Rightarrow r$ tačne ako i samo ako je tačna njihova konjunkcija $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$, pa važi

$$p \vee q, p \Rightarrow r \models q \vee r$$

ako i samo ako važi

$$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \models q \vee r.$$

To će, u opštijem obliku, biti dokazano u jednom od narednih tvrđenja.

Tvrđenje 1.9 $A \models B$ ako i samo ako je $\models A \Rightarrow B$.

Dokaz: Pretpostavimo da važi $A \models B$.

Naka je data proizvoljna valuacija v. Ako je $v(A \Rightarrow B) = 0$, onda mora biti $v(A) = 1$ i $v(B) = 0$.

Međutim, to nije moguće, jer iz $v(A) = 1$ sledi $v(B) = 1$, s obzirom da važi $A \models B$.

Dakle, zaključujemo da mora biti $v(A \Rightarrow B) = 1$, za proizvoljnu valuaciju v, što znači da je $\models A \Rightarrow B$.

Obratno, neka je $\models A \Rightarrow B$ i v je valuacija takva da je $v(A) = 1$.

Ukoliko bi bilo $v(B) = 0$, tada bi bilo i $v(A \Rightarrow B) = 0$, što protivreči pretpostavci da je $\models A \Rightarrow B$.

Prema tome, zaključujemo da je $v(B) = 1$, čime smo dokazali da je $A \models B$. $\square$

Opštije od ovog tvrđenja je sledeće tvrđenje koje se slično dokazuje.

Tvrđenje 10: **Neka je $n > 1$. Tada je $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n \models B$ ako i samo ako $A_1, \ldots, A_{n-1} \models A_n \Rightarrow B$.**

Ovo tvrđenje predstavlja nešto što veoma često koristimo u svakodnevnoj matematičkoj praksi.

Naime, kada iz nekih pretpostavki $A_1, \ldots, A_{n-1}$ izvodimo neki zaključak koji ima oblik implikacije, $A_n \Rightarrow B$, to često radimo tako što premisu A_n priključujemo hipotezama, i iz pretpostavki $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ dokazujemo B.

Tvrđenje 11: $A_1, \ldots, A_n \models B$ ako i samo ako $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \models B$.

Dokaz: Kao što smo već napomenuli, sve formule $A_1, \ldots, A_n$ su tačne u nekoj valuaciji ako i samo ako je u toj valuaciji tačna formula

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n.$$

Imajući u vidu ovu napomenu i definiciju semantičke posledice, tvrđenje možemo smatrati dokazanim. $\square$

Neprotivrečan skup formula

Za skup formula $\{A_1, \ldots, A_n\}$ kažemo da je neprotivrečan ako postoji neka valuacija u kojoj su sve te formule tačne.

Sa druge strane, za ovaj skup formula kažemo da je protivrečan, ili da je kontradiktoran, ako ni u jednoj valuaciji sve formule iz tog skupa ne mogu biti istovremeno tačne, odnosno ako je u svakoj valuaciji bar jedna od njih netačna.

Umesto skup formula, kaže se i da su same formule protivrečne, odnosno neprotivrečne.

Tvrđenje 1.12 Ako je neka kontradikcija posledica formula $A_1, \ldots, A_n$, onda su te formule protivrečne.

Dokaz: Ako je B kontradikcija i $A_1, \ldots, A_n \models B$, onda prema Tvrđenjima 1.9 i 1.10 imamo da važi $\models A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$.

Odavde zaključujemo da konjunkcija $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ mora biti netačna u svakoj interpretaciji, jer je takva i formula B, čime smo dobili da bar jedna od formula $A_1, \ldots, A_n$ mora biti netačna, pa su te formule protivrečne. $\square$

Naravno, važi i obratno tvrđenje, s obzirom da se iz protivrečnog skupa hipoteza može izvesti bilo koja formula, pa time i kontradikcija.

Zakon svođenja na protivrečnost, tj. tautologija

$$(p \Rightarrow q \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p,$$

može se proširiti na izvođenje zaključaka iz hipoteza.

Naime, ako se iskaz p zameni formulom $A \wedge \neg B$, i ako se kontradikcija $q \wedge \neg q$ označi sa C, a negacija konjunkcije se predstavi odgovarajućom implikacijom, dobija se formula

$$((A \wedge \neg B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B).$$

Tumačenje ovog pravila daje naredno tvrđenje, na kome se zasniva poznati metod indirektnog dokaza, o kome će više reči biti kasnije.

Tvrđenje 13: Ako se neka kontradikcija može izvesti kao posledica hipoteza $A_1, \ldots, A_n, \neg B$, onda je B posledica hipoteza $A_1, \ldots, A_n$.

Dokaz: Neka je C neka kontradikcija i neka je

$$A_1, \ldots, A_n, \neg B \models C.$$

Prema Tvrđenju 1.11 imamo da važi

$$A_1, \ldots, A_n \models \neg B \Rightarrow C.$$

Neka je sada v proizvoljna valuacija u kojoj su tačne sve formule $A_1, \ldots, A_n$. Tada je $v(\neg B \Rightarrow C)$, i kako je $v(C) = 0$, jer je C kontradikcija, to mora biti $v(\neg B) = 0$, odnosno $v(B) = 1$.

Prema tome, dokazali smo da važi $A_1, \ldots, A_n \models B$. $\square$

Zadatak 1. Neka je data sledeća argumentacija:

- Ako je znanje stanje uma (poput osećaja bola), onda bih na osnovu samopromatranja uvek mogao da kažem šta znam.
- Ako bih na na osnovu samopromatranja uvek mogao da kažem šta znam, onda nikad ne bih bio u zabludi da znam.
- Ja sam ponekad u zabludi da znam.
- Dakle, znanje nije stanje uma.

Prevesti ove rečenice u iskazne formule i ustanoviti da li je argumentacija ispravna.

Rešenje: Uvedimo sledeće oznake:

p – "Znanje je stanje uma".

q – "Na osnovu samopromatranja mogu da kažem šta znam".

r – "Ponekad sam u zabludi da znam".

Tada se prva premisa P_1 može predstaviti formulom $p \Rightarrow q$, druga premisa P_2 formulom $q \Rightarrow \neg r$, treća premisa P_3 formulom r, a zaključak C formulom $\neg p$.

Dokaz ispravnosti ove argumentacije je zapravo dokaz da formula

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \Rightarrow C.$$

jeste tautologija, što dokazujemo koristeći njenu istinitosnu tablicu.

p	q	r	$p \Rightarrow q$ P_1	$q \Rightarrow \neg r$ P_2	r P_3	$\neg p$ C	$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ P	$P \Rightarrow C$
1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0	1

Prema trome, $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \Rightarrow C$ je tautologija, pa je argumentacija ispravna.

Zadatak 2. Prevesti sledeća tvrđenja u iskazne formule i odrediti ispravnost argumentacije:

Premisa 1: Ako su jedine osobe prisutne u kući u vreme ubistva bili batler i sobarica, tada je batler ubica ili je sobarica ubica.

Premisa 2: Jedine osobe prisutne u kući u vreme ubistva su bili batler i sobarica.

Premisa 3: Ako je sobarica ubica, onda je sobarica imala motiv za ubistvo.

Premisa 4: Sobarica nije imala motiv za ubistvo.

Zaključak: Batler je ubica.

Rešenje: Uvedimo sledeće oznake za iskaze:

P: "Jedine osobe prisutne u kući u vreme ubistva su bili batler i sobarica",

B: "Batler je ubica",

S: "Sobarica je ubica",

M: "Sobarica je imala motiv za ubistvo".

Tada se gornja argumentacija može izraziti na sledeći način:

Premisa 1: $P \Rightarrow B \vee S$

Premisa 2: P

Premisa 3: $S \Rightarrow M$

Premisa 4: $\neg M$

Zaključak: B

Svođenjem na protivrečnost dokazaćemo da je argumentacija ispravna.

Pretpostavimo da argumentacija nije ispravna, tj. da postoji valuacija v u kojoj su sve premise tačne, a zaključak nije tačan, tj.

$$v(P \Rightarrow B \vee S) = 1, \qquad v(P) = 1, \qquad v(S \Rightarrow M) = 1,$$
$$v(\neg M) = 1, \qquad v(B) = 0.$$

Odavde dobijamo da je

$$v(P) = 1, \qquad v(M) = 0, \qquad v(B) = 0,$$

i iz $v(S \Rightarrow M) = 1$ i $v(M) = 0$ zaključujemo da je

$$v(S) = 0.$$

Ako sada iskoristimo sve te vrednosti, dobijamo

$$v(P \Rightarrow B \vee S) = 1 \Rightarrow 0 \vee 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom

$$v(P \Rightarrow B \vee S) = 1.$$

Dakle, zaključujemo da nam je pretpostavka bila pogrešna, tj. da je argumentacija ispravna. $\square$

Zadatak 3. Četiri prijatelja - Arthur, Betty, Charles i Dorothy - su osumnjičeni za ubistvo. Pred istražnim sudijom oni su izjavili sledeće:

Arthur:	Ako je Betty kriva, kriva je i Dorothy.
Betty:	Arthur je kriv, a Dorothy nije kriva.
Charles:	Ja nisam kriv, ali su Arthur ili Dorothy krivi.
Dorothy:	Ako Arthur nije kriv, tada je kriv Charles.

Za $X \in \{A, B, C, D\}$ neka je sa X predstavljen iskaz "X je nevin".

(a) Da li su ove četiri izjave neprotivrečne, odnosno da li je skup formula dobijen prevođenjem u iskaznu logiku neprotivrečan?

(b) Ako svako govori istinu, ko je kriv?

Opravdati odgovore.

Primeri logičke argumentacije

Rešenje: Gornje izjave prevodimo u formule na sledeći način:

Arthur: $\neg B \Rightarrow \neg D$;

Betty: $\neg A \wedge D$;

Charles: $C \wedge (\neg A \vee \neg D)$;

Dorothy: $A \Rightarrow \neg C$.

Kada bi gornje formule imale manji broj iskaznih slova, onda bi se neprotivrečnost tog skupa formula mogla dokazati formiranjem zajedničke tablice istinitosti za te formule, odakle bi se jasno videlo da li postoji interpretacija u kojoj su sve četiri formule tačne.

Međutim, ovde imamo 4 iskazna slova, pa bi ta tablica bila suviše velika.

Zbog toga koristimo drugačiju metodologiju.

Pretpostavimo da postoji interpretacija v tih formula u kojoj su sve četiri formule tačne, i odredimo vrednosti iskaznih slova A, B, C i D u toj interpretaciji.

Iz $v(\neg A \wedge D) = 1$ dobijamo da je $v(A) = 0$ i $v(D) = 1$.

Dalje, iz $v(C \wedge (\neg A \vee \neg D)) = 1$ sledi da je $v(C) = 1$.

Konačno, iz $v(\neg B \Rightarrow \neg D) = 1$ i $v(\neg D) = 0$ sledi da je $v(\neg B) = 0$, tj. $v(B) = 1$.

Prema tome, dobili smo da je interpretacija v zadata sa

$$v = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ako se sada vratimo unazad, dobićemo da su sve četiri formule tačne u interpretaciji v, što znači da je gornji skup formula neprotivrečan, tj. da izjave nisu protivrečne.

Takođe, ako su sve četiri izjave tačne, onda iz napred pokazanog sledi da se to može desiti samo u slučaju gornje interpretacije v, što znači da je Arthur kriv, a da su ostali nevini. $\square$

Zadatak 4. Postoji ostrvo na kome žive dve vrste stanovnika:

vitezovi, koji uvek govore istinu, i

nitkovi, koji uvek lažu.

Svaki stanovnik ostrva pripada tačno jednoj od ovih grupa.

Neka su A i B dva stanovnika ostrva.

(a) Ako stanovnik A kaže: "Ja sam nitkov ili je B vitez", šta su onda stanovnici A i B?

(b) Ako stanovnik A kaže: "Ili sam ja nitkov ili je B vitez", šta su onda stanovnici A i B?

Rešenje: Označimo iskaz "A je nitkov" sa p, a "B je vitez" sa q.

Tada je iskaz "A je nitkov ili je B vitez" predstavljen sa $p \vee q$, a iskaz "Ili je A nitkov, ili je B vitez" sa $p \oplus q$.

(a) Ako je $v(p) = 1$, to znači da je A nitkov, tj. da laže, pa je $v(p \vee q) = 0$, što nije moguće.

Dakle, $v(p) = 0$, što znači da je A vitez, odnosno da govori istinu, pa je $v(p \vee q) = 1$, odakle sledi da je $v(q) = 1$.

Dakle, A i B su vitezovi.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(b) Ako je $v(p) = 1$, to znači da je A nitkov, tj. da laže, pa je $v(p \oplus q) = 0$, odakle sledi da je $v(q) = 1$.

Dakle, u ovom slučaju je A nitkov, a B vitez.

Neka je sada $v(p) = 0$. Tada je A vitez, odnosno da govori istinu, pa je $v(p \oplus q) = 1$, odakle ponovo sledi da je $v(q) = 1$.

Dakle, u ovom slučaju su i A i B su vitezovi. $\square$

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0