# MATEMATIČKA LOGIKA

***

# – ISKAZNA LOGIKA –

## II DEO

Osnovno svojstvo iskaza, ma kako složen bio, jeste da je on ili tačan, ili netačan.

Da bi se pravila za određivanje istinitosti precizno formalizovala, uvodi se sledeća matematička struktura.

**Iskazna algebra** je dvoelementni skup $\{1, 0\}$, zajedno sa jednom unarnom operacijom $\neg$ i četiri binarne operacije $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$, koje su definisane sledećim tablicama:

| | $\neg$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

| $\wedge$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

| $\vee$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

| $\Rightarrow$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |

| $\Leftrightarrow$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

Navedene operacije označavaju se isto kao odgovarajući logički veznici, jer su njima motivisane.

Međutim, to nisu isti pojmovi: znak $\wedge$ u iskaznoj formuli $p \wedge q$ je zamena za veznik **i**, a oznaka $\wedge$ u gornjoj tablici označava operaciju na skupu $\{1, 0\}$.

Da ponovimo još jednom, **iskazna algebra** je uređena šestorka

$$(\{1, 0\}, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow).$$

Njeni elementi $1$ i $0$ odgovaraju istinitosnim vrednostima iskaza, kako se definiše u nastavku.

# Potreban broj iskaznih slova

Primetimo da svaka iskazna formula može sadržati samo konačno mnogo iskaznih slova.

Sa druge strane, broj iskaznih slova koja se javljaju u svim formulama ne može se ograničiti nijednim prirodnim brojem, jer se uvek može napraviti nova formula sa većim brojem iskaznih slova.

Dakle, za formiranje svih iskaznih formula nije dovoljan konačan skup iskaznih slova, ali je dovoljan prebrojiv skup iskaznih slova

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \dots\ ,\ p_n,\ \dots$$

Zato nadalje podrazumevamo da iskaznih slova ima prebrojivo mnogo i da ova lista jeste lista svih iskaznih slova.

Neka je $A$ iskazna formula.

Njena istinitost pre svega zavisi od istinitosti iskaznih slova koja se u njoj javljaju.

Zato određivanje istinitosne vrednosti formule $A$ mora početi dodeljivanjem izvesnih istinitosnih vrednosti svim iskaznim slovima koja se u njoj javljaju.

Potom se te istinitosne vrednosti sa slova prenose na celu formulu.

To se može formalizovati na način prikazan u daljem tekstu.

**Valuaciju** definišemo kako proizvoljnu funkciju

$$v : \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\} \longrightarrow \{1, 0\}$$

iz skupa svih iskaznih slova u skup $\{1, 0\}$.

Vrednost $v(p_i)$ naziva se **istinitosna vrednost** iskaznog slova $p_i$.

Drugim rečima, valuacija je dodeljivanje istinitosnih vrednosti **svim iskaznim slovima**, nezavisno od toga što se u konkretnimm formulama koje u datom trenutku razmatramo ne javljaju sva ta slova.

Kada razmatranje ograničimo na formulu $AA$, ili konačan skup formula $A_1, A_2, \ldots, A_n$, onda su nam bitne istinitosne vrednosti samo onih slova koja se javljaju u formuli $A$, odnosno formulama $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Zato se, za razliku od valuacije, interpretacija formule $A$, odnosno formula $A_1, A_2, \ldots, A_n$, definiše se kao funkcija

$$v : \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \longrightarrow \{1, 0\}$$

iz skupa svih iskaznih slova koja se javljaju u formuli $A$, odnosno u formulama $A_1, A_2, \ldots, A_n$, u skup $\{1, 0\}$.

Drugim rečima, to je dodeljivanje istinitosnih vrednosti svim iskaznim slovima koja se javljaju u formuli $A$, odnosno u formulama $A_1, \ldots, A_n$.

Neka je

$$v : \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\} \longrightarrow \{1, 0\}$$

proizvoljna valuacija.

Kao što smo rekli, valuacija pridružuje istinitosne vrednosti iskaznim slovima.

Funkcija $v$ se sa skupa svih iskaznih slova može proširiti i na skup svih iskaznih formula.

To se čini induktivnom definicijom, po složenosti formule, koja omogućuje da se istinitosna vrednost formule izvede iz istinitosnih vrednosti slova koja se u njoj javljaju.

# Vrednost formule u valuaciji

Naime, **vrednost formule $A$ u valuaciji $v$** definiše se na sledeći način:

1. Ako formula $A$ jeste iskazno slovo $p$, onda je
$$v(A) \stackrel{\text{def}}{=} v(p).$$
2. Ako je $A = \neg B$ i poznata je vrednost $v(B)$, onda je
$$v(A) \stackrel{\text{def}}{=} \neg v(B).$$
3. Ako je $A = B * C$, gde je $*$ jedan od logičkih veznika $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$, i poznate su vrednosti $v(B)$ i $v(C)$, onda je
$$v(A) \stackrel{\text{def}}{=} v(B) * v(C).$$

Dakle,

$$v(B \wedge C) = v(B) \wedge v(C), \qquad v(B \vee C) = v(B) \vee v(C),$$

$$v(B \Rightarrow C) = v(B) \Rightarrow v(C), \qquad v(B \Leftrightarrow C) = v(B) \Leftrightarrow v(C).$$

Primetimo da su vrednosti na desnoj strani jednakosti iz skupa $\{1, 0\}$, a znaci $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ na desnoj strani predstavljaju operacije u iskaznoj algebri.

Istim tim znacima na levoj strani označeni su logički veznici.

# Vrednost formule u valuaciji

Uočimo još jednom da vrednost formule zavisi od valuacije u kojoj se posmatra - u različitim valuacijama ona može imati različite vrednosti.

Takođe, istinitosna vrednost složenih formula određuje se tako što se najpre odrede istinitosne vrednosti jednostavnijih formula koje je grade, polazeći od iskaznih slova.

Ako u nekoj valuaciji vrednost formule jednaka $1$, onda kažemo da je formula **tačna** u toj valuaciji.

Ako je vrednost foremule u toj valuaciji jednaka $0$, kažemo da je formula **netačna** u toj valuaciji.

Posmatrajmo iskaznu formulu $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$.

Iskazna slova koja se u njoj javljaju su $p$, $q$ i $r$. Dodelimo im redom vrednosti $1, 0, 0$. To je jedna intepretacija date formule. Tada je

$$\begin{aligned} v(p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)) &= v(p) \wedge (v(q) \Leftrightarrow \neg v(r)) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow \neg 0) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow 1) = \\ &= 1 \wedge 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, u ovoj interpretaciji ova formula je netačna.

Za neke druge vrednosti iskaznih slova $p$, $q$ i $r$, tj. za neku drugu interpretaciju, trebalo bi, razume se, ponovo odrediti vrednost formule, i može se desiti da tada formula bude i tačna.

Da bi se odredile vrednosti formule za **sve interpretacije** koriste se **tablice istinitosti** ili **istinitosne tablice**.

Budući da svakoj interpretaciji formule odgovara jedan raspored simbola $1$ i $0$ po slovima formule, u tablicu se unose svi ti rasporedi.

Za svaki raspored određuju se vrednosti podformula i na kraju vrednost same formule.

Ako različitih iskaznih slova u formuli ima $n$, onda svaki raspored simbola $1$ i $0$ po slovima jeste jedna uređena $n$-torka tih simbola.

Svih rasporeda, pa tako i svih interpretacija formule, ima dakle $2^n$.

**Vratimo se na formulu $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$ iz ranijeg primera.**

**Svih interpretacija te formule ima $2^3 = 8$, i vrednost formule za svaku od tih interpretacija određena je sledećom istinitosnom tablicom:**

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg r$ | $q \Leftrightarrow \neg r$ | $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Ako je $A$ formula u kojoj učestvuju iskazna slova $p_1, \dots, p_n$, tada to ističemo pišući $A(p_1, \dots, p_n)$ umesto $A$.

Ako je $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{1,0\}^n$ proizvoljna $n$-torka elemenata iz skupa $\{1,0\}$, tada stavljamo

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \stackrel{\text{def}}{=} v(A),$$

gde je $v(A)$ vrednost formule $A$ u interpretaciji $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (odnosno $v(p_i) = \alpha_i$, za svaki $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$).

Dakle, formula $A$ određuje funkciju $f_A : \{1,0\}^n \longrightarrow \{1,0\}$, definisanu sa

$$f_A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \stackrel{\text{def}}{=} A(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

koje nazivamo istinitosna funkcija formule $A$.

Obratan problem je da se za proizvoljnu funkciju

$$f : \{1,0\}^n \longrightarrow \{1,0\}$$

odredi iskazna formula $A(p_1,\ldots,p_n)$, čija bi istinitosna funkcija bila funkcija $f$, dakle $f = f_A$.

Dokazaćemo da takva formula postoji, odnosno da se svaka funkcija $f : \{1,0\}^n \longrightarrow \{1,0\}$ (tj. $n$-arna operacija na skupu $\{1,0\}$) može na poseban način izraziti pomoću operacija $\wedge, \vee$ i $\neg$ iskazne algebre.

Najpre uvodimo oznaku

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \neg x, & \alpha = 0 \end{cases}, \quad \text{tj.} \quad x^1 = x \ \text{ i } \ x^0 = \neg x.$$

Primetimo da važi sledeće:

$$1^1 = 1, \quad 0^1 = 0, \quad 1^0 = 0, \quad 0^0 = 1.$$

Prema tome, za svaki $x \in \{1, 0\}$ važi

$$x^\alpha = 1 \ \text{ ako i samo ako je } \ x = \alpha.$$

**Tvrđenje 1:** Za proizvoljno preslikavanje $f : \{1,0\}^n \to \{1,0\}$ važi

$$(\star) \quad f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{1,0\}^n} f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\alpha_n}.$$

Pre nego što pređemo na dokaz, primetimo da se u ovoj jednakosti javljaju isključivo operacije iskazne algebre (a ne iskazni veznici).

Na primer, za $n = 2$, gornja jednakost u razvijenom obliku postaje:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = {} & (f(1,1) \wedge x_1^1 \wedge x_2^1) \vee (f(1,0) \wedge x_1^1 \wedge x_2^0) \vee \\ & (f(0,1) \wedge x_1^0 \wedge x_2^1) \vee (f(0,0) \wedge x_1^0 \wedge x_2^0), \quad \text{odnosno,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = {} & (f(1,1) \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (f(1,0) \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee \\ & (f(0,1) \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (f(0,0) \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2). \end{aligned}$$

**Dokaz:** Za proizvoljne $b_1, \dots, b_n \in \{1, 0\}$ kao vrednosti promenljivih $x_1, \dots, x_n$, tim redom, vrednost funkcije $f$ je $f(b_1, \dots, b_n) \in \{1, 0\}$, a izraz na desnoj strani postaje

$$\bigvee_{(\alpha_1,\dots\alpha_n)\in\{1,0\}^n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge b_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge b_n^{\alpha_n}.$$

Uzimajući u obzir da, kako smo ranije primetili, za $x \in \{1, 0\}$ važi

$$x^\alpha = 1 \ \text{ ako i samo ako je } \ x = \alpha,$$

kao i činjenicu da je konjunkcija tačna ako i samo ako su svi njeni članovi tačni, zaključujemo da je

$$b_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge b_n^{\alpha_n} = 1 \ \text{ ako i samo ako je } \ \alpha_i = b_i \text{ za sve } i.$$

U svim ostalim slučajevima vrednost tog izraza je $0$.

**Na ovaj način dobijamo da gornja disjunkcija postaje**

$$0 \vee \cdots \vee (f(b_1, \ldots, b_n) \wedge 1) \vee \cdots \vee 0 = f(b_1, \ldots, b_n),$$

**pa je tvrđenje dokazano.** $\square$

Uzmimo da funkcija $f$ iz Tvrđenja 1. nije jednaka $0$ za sve uređene $n$-torke iz $\{1,0\}^n$, tj. da je u njenoj tablici bar jedna vrednost $1$.

Ako se tada sa desne strane jednakosti

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{1,0\}^n} f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\wedge x_1^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge x_n^{\alpha_n}.$$

izostave svi oni izrazi oblika $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\wedge x_1^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge x_n^{\alpha_n}$ za koje je $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 0$, jednakost i dalje važi, s obzirom da je u iskaznoj algebri $x\vee 0 = x$.

Ako se u preostalim članovima disjunkcije izostave izrazi $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ (vrednost svakog od njih je $1$) jednakost ponovo ostaje očuvana, jer je $1\wedge x = x$.

Tako se dobija izraz

$$(\clubsuit) \qquad \bigvee_{f(\alpha_1,\ldots\alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\alpha_n}.$$

Ako je $f$ konstantno jednaka $0$, onda poslednji izraz za nju očito ne postoji; u tom slučaju dodeljujemo joj $x_1 \wedge \neg x_1$.

Izraz iz ($\clubsuit$) je iskazna formula (to je i $x_1 \wedge \neg x_1$), pa je ovim dokazano sledeće tvrđenje koje se odnosi na problem sa početka odeljka.

Označimo iskaznu formulu iz ($\clubsuit$) sa $A_f$.

**Tvrđenje 2:** Neka je $f : \{1,0\}^n \longrightarrow \{1,0\}$ proizvoljna $n$-arna operacija na skupu $\{1,0\}$.

(a) Ako $f$ nije konstantno jednaka $0$, onda se istinitosna vrednost iskazne formule $A_f$ u svakoj interpretaciji poklapa sa odgovarajućom vrednošću operacije $f$.

(b) Ako je $f$ konstantno jednaka $0$, onda vrednosti iskazne formule $x_1 \wedge \neg x_1$ odgovaraju vrednostima preslikavanja $f$.

Iskazna formula $A_f$ koja se u obliku ($\clubsuit$) pridružuje funkciji $f$ zove se **disjunktivna normalna forma** te funkcije, skraćeno DNF.

Disjuktivna normalna forma se može i čisto sintaktički definisati u odnosu na slova $p_1, \ldots, p_n$ kao formula $(K_1) \vee \cdots \vee (K_m)$, gde su $K_i$ različite konjunkcije svih navedenih slova sa negacijom ili bez nje.

Ukoliko se ne zahteva da u svakoj konjunkciji učestvuju uvek sva slova koja se u formuli javljaju, formula se zove **disjunktivna forma**.

Formula

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

je jedna disjunktivna normalna forma u odnosu na promenljive $p, q$ i $r$, a

$$\neg p \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

je primer disjunktivne forme.

Neka je $f : \{1,0\}^3 \longrightarrow \{1,0\}$, gde je

| $p$ | $q$ | $r$ | $f(p,q,r)$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $*$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | $*$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $*$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | |

Da bi odredili formulu koja odgovara funkciji $f$, najpre izdvajamo one interpretacije slova $p, q, r$ za koje funkcija $f$ ima vrednost $1$ (one označene sa $*$).

Zatim se za svaku takvu trojku $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{1,0\}^3$ obrazuje konjunkcija $p^\alpha \wedge q^\beta \wedge r^\gamma$.

Konačno, disjunkcija tih izraza jeste iskazna formula

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r).$$

Osim o disjunktivnoj normalnoj formi funkcije, možemo govoriti i o **disjunktivnoj normalnoj formi** iskazne formule $A$.

To je zapravo disjunktivna normalna forma istinitosne funkcije $f_A$.

Takođe, možemo govoriti i o **konjuktivnoj normalnoj formi** preslikavanja i formule, skraćeno KNF.

Do njih možemo doći iz disjunktivne normalne forme korišćenjem De Morganovih zakona, o kojima govorimo u narednom odeljku.

Iskazna formula je **tautologija**, ako je tačna u svakoj valuaciji, odnosno interpretaciji.

U njenoj tablici istinitosti, sve vrednosti u poslednjoj koloni, koja odgovara celoj formuli, su jednake $1$.

Jednostavan primer tautologije je formula $p \vee \neg p$.

Ta formula zove se **Zakon isključenja trećeg** i opisuje poznato pravilo logičkog mišljenja koje primenjujemo u klasičnoj dvovalentnoj logici.

Sve tautologije su više ili manje poznati logički zakoni.

U nastavku je naveden spisak poznatijih tautologija – logičkih zakona – sa njihovim nazivima.

**Zakon isključenja trećeg (Tertium non datur)**

$$p \vee \neg p$$

Ovo znači: "Tačno je $p$ ili $\neg p$", odnosno: "$p$ je tačno ili netačno"

Kao što smo rekli, ovo je zakon na kome počiva klasična dvovalentna logika – logika sa samo dve moguće istinitosne vrednosti $1$ i $0$.

U novije vreme izučavaju se i neke logike sa više mogućih istinitosnih vrednosti – intuicionistička logika (koja je trovalentna), polivalentne logike, modalne logike itd.

## Zakon neprotivrečnosti

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

Ovo znači: "$p$ i $\neg p$ ne mogu biti istovremeno tačni"

Drugim rečima: "$p$ ne može biti istovremeno tačno i netačno"

Naravno, i ovo je jedan od osnovnih logičkih zakona koji kaže da neprotivrečnosti nisu dozvoljene.

**Zakon odvajanja – Modus ponendo ponens**, ili kraće, samo **Modus ponens**

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

Ovo znači: "**Ako je tačno $p$, i ako iz $p$ sledi $q$, onda je tačno i $q$**"

Ovo je zakon na kome počiva osnovno pravilo deduktivnog zaključivanja u iskaznoj logici, i uopšte u matematici.

Ovaj zakon kaže da iz pretpostavki da važe stavovi $p$ i $p \Rightarrow q$ zaključujemo da važi i $q$, što radimo kadgod koristimo deduktivno zaključivanje.

## Modus tollendo tollens

$$\neg q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$$

Ovo znači: "Ako iz $p$ sledi $q$ i ako nije tačno $q$, tada nije tačno ni $p$"

Na ovom zakonu temelji se metod opovrgivanja – ukoliko smo ustanovili da se iz neke pretpostavke (u ovom slučaju $p$) može izvesti pogrešan zaključak (ovde je to $q$), onda zaključujemo da je pretpostavka pogrešna.

Ovaj metod je u širokoj upotrebi u empirijsko-deduktivnim naukama.

**Modus tollendo ponens**

$$\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$$

**Ovo znači:** ”Ako je tačno jedno od $p$ i $q$, i nije tačno $p$, tada mora biti tačno $q$”

**Zakon pojednostavljivanja**

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

**Ovo znači:** ”Ako je tačno ”$p$ i $q$”, onda je tačno i $p$”

## Zakon hipotetičkog silogizma

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

**Ovo znači: "Ako iz $p$ sledi $q$ i iz $q$ sledi $r$, onda iz $p$ sledi $r$"**

**Potsećamo da smo o ovom zakonu smo govorili na početku ove nastavne teme, kada smo hipotetički silogizam prikazali kao jedan od primera logičke argumentacije.**

## Zakon svođenja na apsurd – Reductio ad absurdum

$$(p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg p$$

Ovo znači: "Ako se iz $p$ može izvesti kontradikcija, onda $p$ nije tačno"

Ovaj zakon veoma često koristimo u matematičkim dokazima – ako, polazeći od neke pretpostavke, dođemo do kontradikcije, to znači da nam ta pretpostavka nije bila dobra, odnosno da važi suprotno.

## Istina iz proizvoljnog – Verum ex quolibet

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

**Ovo znači:** "**Ako je $p$ tačno, onda $p$ sledi iz bilo čega**"

## Iz lažnog proizvoljno

$$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Ovo znači: "**Ako je $p$ nije tačno, onda iz $p$ sledi bilo šta**"

Ili: "**Iz laži može da se zaključi bilo šta**"

Ovaj zakon pokazuje da, ako bi neka matematička teorija bila protivrečna, tj. ako bi se u njoj mogla dokazati kontradikcija, onda ta teorija ne bi bila besmislena samo zbog te činjenice, već i zbog toga što bi onda svako drugo tvrđenje u toj teoriji bilo teorema.

## Zakon zaključivanja iz suprotnog – Ex contrario

$$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

**I ovo je zakon koji često koristimo u matematičkim dokazima – ako pretpostavimo da neki iskaz $p$ ne važi, i iz toga zaključimo da on ipak mora da važi, onda iz svega toga zaključujemo da je $p$ tačan iskaz.**

**U suštini, ovo se svodi na Zakon svodjenja na apsurd jer iskazi $\neg p$ i $\neg p \Rightarrow p$ zajedno daju kontradikciju (tj. iskaz $\neg p \wedge (\neg p \Rightarrow p)$ je kontradikcija).**

## Zakon dvostruke negacije

$$p \Leftrightarrow \neg\neg p$$

**Ovaj zakon koristimo za uprošćavanje logičkih izraza, eliminacijom višestruke upotrebe negacije.**

## Zakon kontrapozicije

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

**Ovo je još jedan od zakona koje često koristimo u dokazima.**

**Naime, često tvrđenje u formi implikacije $p \Rightarrow q$ dokazujemo tako što dokazujemo ekvivalentnu formu te implikacije $\neg q \Rightarrow \neg p$.**

## De Morganovi zakoni

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

**De Morganovi zakoni nam kažu kako negacija "prolazi" kroz konjunkciju i disjunkciju.**

**Ako iskoristimo Zakon dvojne negacije i tranzitivnost ekvivalencije, iz De Morganovih zakona dolazimo do tautologija**

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

**One se koriste za eliminaciju veznika $\wedge$ ili $\vee$, tj. za zamenu veznika $\wedge$ veznicima $\neg$ i $\vee$, odnosno veznika $\vee$ veznicima $\neg$ i $\wedge$.**

## Zakoni ekvivalencije za implikaciju, disjunkciju i konjunkciju

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$p \vee q \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$$

Prvi zakon se koristi za eliminaciju implikacije, njenom zamenom negacijom i disjunkcijom.

Drugi se koristi za eliminaciju disjunkcije, njenim izražavanjem pomoću implikacije.

Treći zakon služi za eliminaciju konjunkcije i njeno izražavanje pomoću negacije i implikacije.

## Zakon negacije implikacije

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

**Jasno, ovo je drugačija forma Zakona ekvivalencije za implikaciju.**

## Zakon ekvivalencije

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

**Ovaj zakon omogućuje da ekvivalenciju $p \Leftrightarrow q$ tretiramo kao konjunkciju implikacija $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$.**

## Zakon unošenja i iznošenja

$$(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

## Zakoni komutativnosti

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$
$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

## Zakoni apsorpcije

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$
$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

## Zakoni idempotentnosti

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$
$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

## Zakoni asocijativnosti

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

## Zakoni distributivnosti

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Ako su $A$ i $B$ iskazne formule i $A \Rightarrow B$ je tautologija, onda tu formulu nazivamo **tautološka implikacija**.

Tada kažemo da iskaz koji odgovara formuli $A$ **tautološki implicira** iskaz dat formulom $B$.

Slično, ako je $A \Leftrightarrow B$ tautologija, onda se ta formula naziva **tautološka ekvivalencija**.

Za iskaze koji odgovaraju formulama $A$ i $B$ se tada kaže da su **tautološki ekvivalentni**.

Među napred navedenim logičkim zakonima puno je primera tautoloških implikacija i ekvivalencija.

Napomenimo da je u jezik pogodno uvesti i simbole $1$ i $0$, koje shvatamo kao konstantne simbole, ili redom kao zamene za formule $p \vee \neg p$ i $p \wedge \neg p$.

U svakom slučaju, ti znaci interpretiraju se kao isto označene konstante iskazne algebre.

Tada su tautologije i formule

$$p \wedge 1 \Leftrightarrow p, \quad p \vee 0 \Leftrightarrow p, \quad (p \Rightarrow 1) \Leftrightarrow 1$$

i slično.