3. VIŠEKRITERIJUMSKA OPTIMIZACIJA

3.1. Uvod

Opšta formulacija zadatka višekriterijumske optimizacije (VKO) je:

$$(\max)\ \left[f_1(x),\ f_2(x),\ \dots\ ,\ f_p(x)\right]\ ,\quad p \geq 2$$

$$\begin{aligned} &p.o. \\ &\qquad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1,\ \dots\ ,\ m \\ &\qquad x_j \geq 0 \quad j = 1,\ \dots\ ,\ n \end{aligned}$$

gde su: $f_1(x)$, ... , $f_p(x)$, $g_1(x)$, ... , $g_m(x)$ realne funkcije od n promenljivih, tj. $x = (x_1, x_2, \dots , x_n)$.

U ovom zadatku traži se rešenje x koje maksimizira svih p funkcija cilja. Zato se zadatak VKO naziva i zadatkom vektorske optimizacije. Radi jednostavnosti ovde se razmatraju samo problemi maksimizacije. Poznato je da se zadatak minimizacije jednostavno prevodi u zadatak maksimizacije množenjem sa kriterijumske funkcije sa -1. Sve nadalje izložene definicije i metode moguće je prilagoditi da važe za rešavanje zadataka minimizacije.

Kažemo da je $X \subseteq R^n$ *skup dopustivih rešenja*, ako je:

$$X = \left\{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \dots , m;\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots , n\right\}\ .$$

Svakom dopustivom rešenju $x \in X$ odgovara skup vrednosti kriterijumskih funkcija, tj. vektor $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots , f_p(x))$. Na taj način se skup dopustivih rešenja preslikava u *kriterijumski skup*, tj. $S = \{f(x) \mid x \in X\}$. Ove pojmove ćemo objasniti na sledećem primeru:

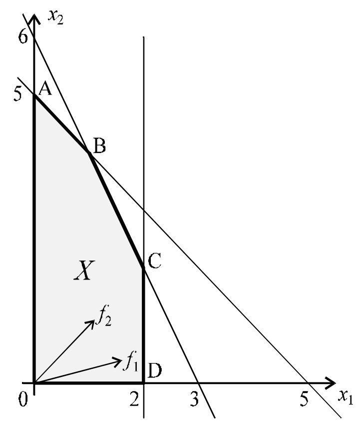
Primer 3.1. Dat je zadatak VKO:

$$(\max)\ \left[f_1(x) = 40x_1 + 10x_2\,,\ f_2(x) = x_1 + x_2\right]$$

p.o.

$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_2 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Na slici 3.1. je prikazan skup dopustivih rešenja u prostoru rešenja. Radi se o *n*-dimenzionalnom prostoru (u ovom



slučaju $n = 2$) čije ose predstavljaju promenljive model

Slika 3.1.

Da bismo odredili kriterijumski skup S, najpre izrazimo promenljive x_1 i x_2 u zavisnosti od $f_1 = f_1(x)$ i $f_2 = f_2(x)$, a onda tako dobijene izraze uvrstimo u sistem ograničenja. Dakle, iz sistema jednačina:

$$f_1 = 40x_1 + 10x_2$$
$$f_2 = x_1 + x_2$$

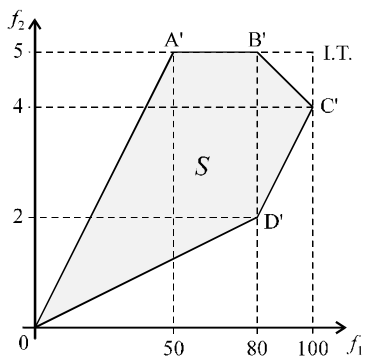
dobija se:

$$x_1 = \frac{1}{30}f_1 - \frac{1}{3}f_2$$
$$x_2 = \frac{1}{30}f_1 - \frac{4}{3}f_2.$$

Zamena u sistemu ograničenja daje:

$$f_1 + 20f_2 \le 180$$
$$f_2 \le 5$$
$$f_1 - 10f_2 \le 60$$
$$f_1 - 10f_2 \ge 0$$
$$-f_1 + 40f_2 \ge 0$$

Ovako transformisan originalni skup ograničenja određuje skup *S,* tj. skup vrednosti kriterijuma u kriterijumskom prostoru. Ovaj skup je prikazan na slici 3.2.



Slika 3.2.

Za problem *višekriterijumskog linearnog programiranja* (VLP) skup vrednosti kriterijuma može se dobiti i jednostavnije: ekstremne tačke skupa dopustivih rešenja X se preslikaju u ekstremne tačke skupa vrednosti kriterijuma S, ($A \to A'$, $B \to B'$, itd.); zatim se, u slučaju dve kriterijumske funkcije, ove tačke spoje pravim linijama i na taj način odredi skup S. ■

U daljem tekstu koristićemo sledeće pojmove:

- *Marginalna rešenja* zadatka VKO se određuju optimizacijom svake od funkcija cilja pojedinačno nad zadatim dopustivim skupom, tj. rešavanjem p jednokriterijumskih zadataka:

$$(\max)\ f_k(x)\ ,\quad k = 1,\ \dots\ ,\ p$$
$$p.o.$$
$$x \in X$$

Marginalna rešenja ćemo obeležavati sa $x^{(k)*} = (x_1^{(k)*}, x_2^{(k)*}, \dots \dots , x_n^{(k)*})$, tj. $x^{(k)*}$ je optimalno rešenje dobijeno optimizacijom k-te funkcije cilja nad zadatim dopustivim skupom X.

U primeru 3.1. marginalna rešenja su: za prvu funkciju cilja to je tačka **C**, tj. $x^{(1)*} = (2, 2)$, dok se optimizacijom druge funkcije cilja dobija višestruko rešenje, tj. maksimum se dostiže u svim tačkama koje pripadaju duži čije su krajnje tačke **A** i **B**. (Marginalno rešenje $x^{(2)*}$ je bilo koja tačka $x^{(2)*} = (\lambda, 5\text{-}\lambda)$, $0 \le \lambda \le 1$.

- *Idealne vrednosti funkcija cilja* $f_k^* = f_k(x^{(k)*})$, $k = 1, \dots , p$ su vrednosti funkcija cilja za marginalna rešenja.

U primeru se te vrednosti mogu videti na slici 3.2. To su najveće vrednosti koje kriterijumi dostižu u okviru dopustive oblasti, tj. $f_1^* = 100$, $f_2^* = 5$.

- Idealne vrednosti funkcija cilja određuju *idealnu tačku* u kriterijumskom prostoru, tj. idealnu vrednost vektorske funkcije $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots , f_p^*)$. Na slici 3.2.ta tačka je obeležena sa I.T.
- Ako postoji rešenje x^* koje istovremeno maksimizira sve funkcije cilja, tj. $x^* = \{x \mid f_k(x) = f_k^*, k = 1, \dots , p\}$, onda se takvo rešenje naziva *savršeno rešenje.*

U najvećem broju slučajeva marginalna rešenja se razlikuju i savršeno rešenje ne postoji. Kada ono postoji, tada se u suštini ne radi o problemu VKO.

U primeru 3.1. ne postoji savršeno rešenje jer je $x^{(1)*} \ne x^{(2)*}$.

Pareto optimalnost

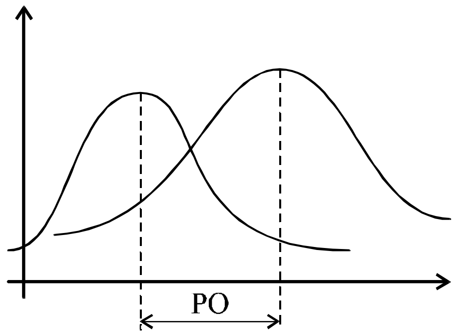
Činjenica da zadaci VKO po pravilu nemaju savršeno rešenje upućuje na preispitivanje koncepta optimalnosti i definicije optimalnog rešenja. Ključnu ulogu u tome ima *koncept Pareto optimalnosti*. To je proširenje poznatog koncepta optimalnosti koji se koristi u klasičnoj jednokriterijumskoj optimizaciji.

Pareto optimum se definiše na sledeći način:

- Dopustivo rešenje x^* predstavlja *Pareto optimum* zadatka VKO ako *ne* postoji neko drugo dopustivo rešenje x takvo da važi:
$$f_k(x) \ge f_k(x^*)\ \forall\ k = 1, \dots , p$$
pri čemu bar jedna od nejednakosti prelazi u strogu nejednakost „>“. ■

Drugim rečima, x^* je Pareto optimum ako bi poboljšanje vrednosti bilo koje funkcije cilja prouzrokovalo pogoršanje vrednosti neke druge funkcije cilja (slika 3.3). Za Pareto optimum postoje sledeći sinonimi: *efikasno*, *dominantno* i *nedominirano* rešenje.

Pored Pareto optimuma definišu se i slabi i strogi (jaki) Pareto optimumi [51]:

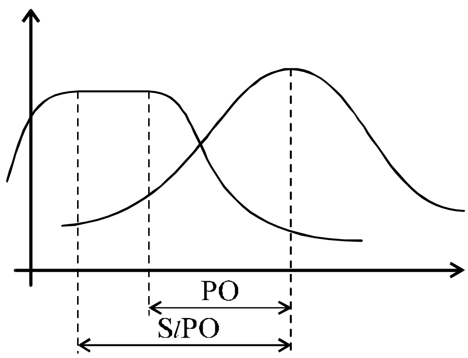


Slika 3.3.

Dopustivo rešenje x^* je *slabi Pareto optimum* ako ne postoji neko drugo dopustivo rešenje x takvo da važi:

$$f_k(x) > f_k(x^*) \ \forall\ k = 1, \dots, p. \qquad \blacksquare$$

Drugim rečima, x^* je slabi Pareto optimum ako nije moguće istovremeno poboljšati sve funkcije cilja (slika 3.4).



Slika 3.4.

Pareto optimalno rešenje x^* je *strogi Pareto optimum* ako postoji broj $\beta > 0$ takav da za svaki indeks $k \in \{1, \dots, p\}$ i svako x koje ne postoji savršeno rešenje zadovoljava:

$$f^k(x) > f^k(x^*)$$

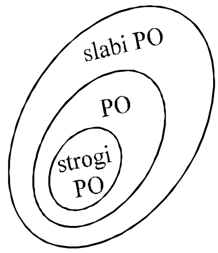
postoji bar jedno $l \in \{1, \dots, p\}\backslash\{k\}$ takvo da je:

$$f^l(x) < f^l(x^*)$$

i da važi:

$$\frac{f^k(x) - f^k(x^*)}{f^l(x^*) - f^l(x)} \leq \beta \quad .$$

Strogi Pareto optimum izdvaja ona Pareto rešenja čije promene ne prouzrokuju prevelike relativne promene u funkcijama cilja.



Slika 3.5.

Odnos između opisanih optimuma je takav da svaki skup strožijih Pareto optimuma predstavlja podskup slabijih optimuma, tj. svaki Pareto optimum je istovremeno i slabi Pareto optimum, a svaki strogi Pareto optimum je i Pareto optimum. Odnos ovih skupova je dat na slici 3.5.

<u>Primer 3.2.</u> Jedno preduzeće proizvodi dva artikla P1 i P2 uz korišćenje tri grupe mašina M1, M2 i M3, i sirovine S. Normativi utroška vremena ovih grupa mašina, njihovi kapaciteti, normativi utroška sirovine i dobit po jedinici proizvoda dati su u sledećoj tabeli:

Proizvod	M1	M2	M3	S	Dobit
P1	8	2	4	5	8
P2	4	3	3	10	12
Kapac.	600	300	360		

Preduzeće je u obavezi da utroši bar 600 jedinica sirovine. Ne postoje ograničenja plasmana ova dva proizvoda.

a) Formulisati zadatak VKO za određivanje proizvodnog programa

$x=(x_1, x_2)$, gde je x_1-količina proizvoda P1, a x_2 -količina proizvoda P2, tako da se maksimizira ukupno angažovanje kapaciteta, ukupna dobit i ukupni fizički obim proizvodnje.

b) Od sledećih datih rešenja izdvojiti i obrazložiti koja su Pareto, a koja slabo Pareto optimalna za model pod (a):

(1) $x_1 = 50, x_2 = 60$; (2) $x_1 = 30, x_2 = 75$;
(3) $x_1 = 45, x_2 = 60$; (4) $x_1 = 15, x_2 = 30$.

Rešenje: a) Funkcija angažovanja kapaciteta je:

$$f_1(x) = 14x_1 + 10x_2.$$

Funkcija dobiti je:

$$f_2(x) = 8x_1 + 12x_2.$$

Ukupni fizički obim proizvodnje je:

$$f_3(x) = x_1 + x_2.$$

Dakle, matematički model postavljenog zadatka je sledeći:

$$(\max)\ [f_1(x), f_2(x), f_3(x)]$$

p.o.

$$\begin{aligned} 8x_1 + 4x_2 &\le 600 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 300 \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 360 \\ 5x_1 + 10x_2 &\le 600 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Skup dopustivih rešenja X je prikazan na slici 3.6.

Najpre ćemo na grafiku uočiti ekstremne tačke dopustivog skupa: **A**(0, 60), **B**(0, 100), **C**(30, 80), **D**(45, 60) i **E**(60, 30). Marginalna rešenja i idealne vrednosti funkcija kriterijuma određujemo nekom od standardnih metoda linearnog programiranja (npr. grafička ili simpleks metoda):

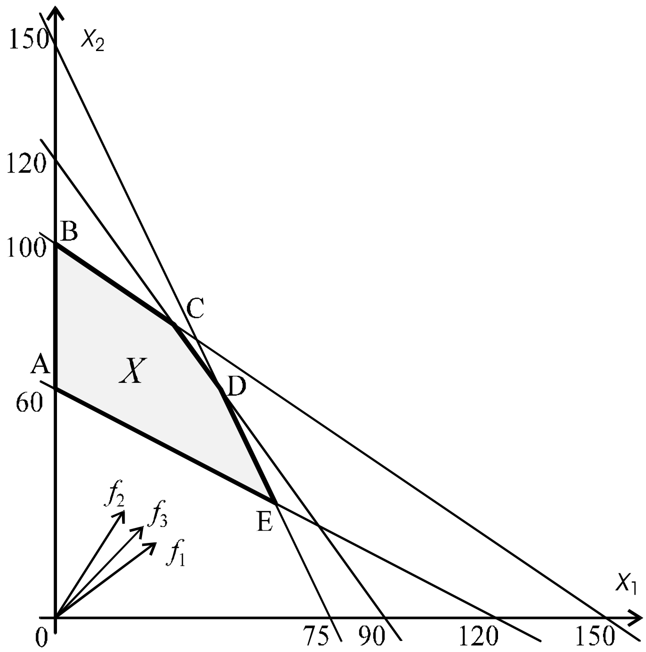
$f_1^* = 1230$, $x_1^{(1)*} = 45$, $x_2^{(1)*} = 60$, tj. tačka **D**;

$f_2^* = 1200$, marginalno rešenje je višestruko, tj. rešenje su sve tačke na duži između tačaka:

$x_1^{(2)*\prime} = 0$, $x_2^{(2)*\prime} = 100$, tj. tačke **B** i

$x_1^{(2)*\prime\prime} = 30$, $x_2^{(2)*\prime\prime} = 80$, tj. tačke **C**;

$f_3^* = 110$, $x_1^{(3)*} = 30$, $x_2^{(3)*} = 80$, tj. tačka **C**;



Slika 3.6.

b) (1) Prvo je potrebno proveriti da li je rešenje dopustivo:
M1: 8×50 + 4×60 = 640 > 600 => rešenje je nedopustivo.

(2) Ponovo prvo proveravamo da li $x \in X$:

M1: 8×30 + 4×75 = 540 < 600
M2: 2×30 + 3×75 = 285 < 300
M3: 4×30 + 3×75 = 345 < 360
S: 5×30 + 10×75 = 900 > 600

Možemo zaključiti da ovo rešenje jeste dopustivo, ali se nalazi u unutrašnjosti dopustivog skupa (ni jedno ograničenje nije aktivno, tj. ni jedno ograničenje ne zadovoljava uslov sa „="). To znači da ovo rešenje ne može biti optimalno ni po jednom kriterijumu jer je iz teorije linearnog programiranja poznato da su samo tačke na granici dopustive oblasti kandidati za optimalno rešenje. Zaista, u zadatoj tački su vrednosti funkcija cilja: $f_1(x) = 1170$, $f_2(x) = 1180$ i $f_3(x) = 105$, a možemo da nađemo tačku u kojoj su vrednosti sva tri kriterijuma veća (npr. u tački **C,** f(C) = (1220, 1200, 110). Prema tome ova tačka nije ni Pareto ni slabi Pareto optimum.

(3) Odmah vidimo da ovo rešenje odgovara tački **D**. Prvo treba

konstatovati da je ova tačka dopustiva i da se nalazi na granici dopustivog skupa. Vrednosti funkcija cilja u ovoj tački su sledeće: $f_1(x) = 1230$, $f_2(x) = 1080$ i $f_3(x) = 105$. Vidimo da se vrednost prvog kriterijuma poklapa sa idealnom vrednosti te funkcije cilja i da je to marginalno rešenje jedinstveno. Ovo znači, da će u bilo kojoj drugoj tački vrednost ovog kriterijuma biti strogo manja od ove vrednosti, tj. ne postoji neka druga tačka $x^o \in X$ u kojoj bi važio sistem nejednačina: $f_k(x^o) \geq f_k(x)$, $k = 1, 2, 3$, sa bar jednom strogom nejednakošću „>", što je po definiciji dovoljan uslov za Pareto optimum.

(4) Uvršćavanjem vrednosti x=(15, 30) u ograničenja možemo zaključiti da je ovo rešenje dopustivo. Vrednosti kriterijumskih funkcija su: $f_1(x) = 1110$, $f_2(x) = 1200$ i $f_3(x) = 105$. Vidimo da je vrednost drugog kriterijuma jednaka idealnoj vrednosti funkcije cilja (ova tačka leži na duži **BC**), ali ovo marginalno rešenje nije jedinstveno. To znači da možemo naći tačku koja zadovoljava sistem nejednačina $f_k(x^o) \geq f_k(x)$, $k = 1, 2, 3$, sa makar jednim strogom nejednakošću „>" (npr. bilo koja tačka koja se nalazi između zadate i tačke **C**). Prema tome, ova tačka nije Pareto optimalna. S druge strane, ne postoji tačka u kojoj će sve tri funkcije cilja imati strogo veću vrednost ($f_k(x^o) > f_k(x)$, $k = 1, 2, 3$), dakle, ova tačka jeste slabi Pareto optimum.

Napomena: Već se pregledom marginalnih rešenja može zaključiti da su tačke na duži **CD** Pareto rešenja, a na duži **BC** slaba Pareto rešenja. Jasno je da će se, krećući se od tačke **D** ka **C**, vrednost prvog kriterijuma smanjivati, dok će vrednosti drugog i trećeg kriterijuma rasti i obrnuto, ako se krećemo od tačke **C** ka **D** vrednost prvog kriterijuma će rasti, dok će drugi i treći kriterijum opadati, što je i uslov za Pareto optimum. Drugi kriterijum dostiže maksimum na čitavoj duži **BC**, što znači da kretanjem duž ove duži nije moguće popraviti vrednosti svih funkcija cilja, a to je uslov za slabi Pareto optimum. Ova duž nije ni Pareto optimum zato što se kretanjem od tačke **B** ka **C** poboljšavaju vrednosti prvog i trećeg kriterijuma, ali se ne pogoršava ni jedan drugi kriterijum. Naravno, sva Pareto rešenja su takođe i slaba Pareto rešenja. ■

Metode za rešavanje zadataka VKO

Prema pristupu rešavanju zadatka metode VKO klasifikuju se [23; 37; 50] u sledeće tri grupe:

1) *A posteriori metode* u kojima se donosilac odluke (DO) informiše o dominantnim (Pareto optimalnim) rešenjima matematičkog modela, a on na osnovu njih donosi konačnu odluku.
2) *A priori metode* u kojima se informacije o odnosu DO prema kriterijumima ugrađuju u matematički model ili metodu *a priori*, tj. pre bilo kakvog rešavanja modela, a konačna odluka se donosi na osnovu tako dobijenog rešenja.
3) *Interaktivne metode* u kojima DO aktivno učestvuje tokom rešavanja modela. U njima se iterativno kombinuju metode iz prethodne dve grupe, tj. DO prvo daje preliminarne informacije o svojim preferencijama, a zatim kada dobije rešenje, može promeniti informacije ili rešenje. Ovaj postupak se iterativno ponavlja sve dok DO ne bude konačno zadovoljan dobijenim rešenjem.

U tekstu koji sledi, a posteriorne metode ćemo ilustrovati primerom višekriterijumskog određivanja najboljeg puta između dva čvora u mreži. Od a priori metoda ćemo obraditi: metodu težinskih koeficijenata, zatim leksikografsku i relaksiranu leksikografsku metodu i metodu ε ograničenja i objasniti princip grupe metoda nazvanih metode rastojanja. Kao predstavnika interaktivnih metoda, opisaćemo metodu interaktivnog kompromisnog programiranja.

3.2. Izdvajanje skupa dominantnih rešenja

Formulacija problema

U ovom slučaju mreža se predstavlja grafom $G = (N, L)$, gde je $N = \{1, \dots , n\}$ skup čvorova, a L skup grana $(i, j) \in L$, pri $i, j \in$ N, a svakoj grani se umesto skalara sada pridružuje vektor $C_{ij} = (c_{ij}^1, \dots , c_{ij}^K)$ koji se, po analogiji, naziva „dužina“ grane. Komponente ovog vektora mogu biti različite karakteristike grane koje utiču na ukupan kvalitet puta: dužina, tarifa, pouzdanost, kvalitet, propusna moć i sl. Problem je odrediti najbolje puteve između dva zadata čvora s i t.

Pretpostavimo da između posmatranih čvorova s i t, $s \in N$ i $t \in N$ postoji više alternativnih puteva $p^1, \dots , p^M$, pri čemu je put p^m, $m = 1, \dots , M$ određen vektorom čvorova $p^m = (s, i_2, \dots , t)$. Svakom putu se pridružuje vektor

$F^m = (f_m^{\,1}, \ldots, f_m^{\,K})$ koji se naziva „dužina“ puta. Komponente ovog vektora su vrednosti kriterijuma. Vrednost k-tog kriterijuma za put m, $f_m^{\,k}$ je funkcija odgovarajućih karakteristika grana, tj. komponenti $c_{ij}^{\,k}$ vektora grana koje se nalaze na putu. Funkcija $f_m^{\,k}$ ima oblik sume kada je u pitanju dužina grane ili broj čvorova na putu, proizvod u slučaju pouzdanosti puta, ili neki drugi oblik za slučaj npr. kvaliteta ili propusne sposobnosti grane. Neke kriterijume treba minimizirati, npr. dužinu puta, a neke maksimizirati, npr. pouzdanost.

Za put se kaže da je dominantan (nedominiran) ako ne postoji nijedan drugi put koji bi bio od njega bolji bar po jednom kriterijumu, a istovremeno ne bi bio gori po nekom od ostalih kriterijuma.

Zadatak je iz skupa mogućih puteva izdvojiti podskup dominantnih puteva.

Koncept dominantnih puteva predstavlja osnovu za formiranje principa Pareto optimalnosti kao proširenja dobro poznatog principa optimalnosti. Princip Pareto optimalnosti se u ovom konkretnom slučaju može izraziti na sledeći dosta opšti način: *dominantni put ima osobinu da su svi njegovi delovi takođe dominantni*.

Kao što se algoritam obeležavanja za nalaženje najkraćeg puta može izvesti iz principa optimalnosti, po analogiji se iz navedenog principa Pareto optimalnosti razvija algoritam za nalaženje dominantnih puteva. U tu svrhu čvorovima se pridružuju obeležja koja su vektorskog karaktera i mogu biti privremena ili trajna. Pored toga, u ovom slučaju čvor može imati više obeležja.

Privremeno obeležje čvora $i \in N$ je ili fiktivno ili „dužina“ nekog od puteva od početnog čvora s do čvora i. Trajno obeležje čvora i je vektor $F_i = (f_i^1, \ldots, f_i^p)$ koji predstavlja „dužinu“ dominantnog puta od s do i. S obzirom da može postojati više dominantnih puteva od s do i, čvor i može imati više trajnih ili privremenih obeležja $F_i^{(1)}, \ldots, F_i^{(r)}$ koja formiraju skup $\mathscr{F}^i = \{F_i^{(1)}, \ldots, F_i^{(r)}\}$ gde je r broj obeležja.

Polazeći od ovih definicija,za određivanje podskupa dominantnih puteva može se modifikovati Belmanov algoritam nalaženja najkraćeg puta [41,43,44]. Pretpostavljajući da se „dužine“ puteva računaju kao sume dužina grana i da ih treba minimizirati, algoritam se sastoji od sledećih osnovnih koraka:

Algoritam

1° Inicijalizacija: Početni čvor se obeleži trajnim obeležjem $F^s = (0, \ldots, 0)$. Čvorovi koji slede čvor s dobijaju obeležja $F_j = (c_{sj}^{\,1}, \ldots, c_{sj}^{\,K})$. Svi ostali čvorovi dobijaju obeležja $(\infty, \ldots, \infty)$.

2° Odredi se skup čvorova I čiji se skup obeležja promenio u prethodnoj iteraciji, i skup čvorova J, u koje se može dospeti iz čvorova $i \in I$.

3° Za svako $i \in I$ uradi se sledeće: Izračunaju se nova obeležja F_j za $j \in J$ na osnovu obeležja F_i promenjenih u prethodnoj iteraciji i dužina grana c_{ij}. Pritom se postupa na jedan od sledećih načina:

a) Ako u skupu $\mathscr{F}^j$ postoji obeležje koje dominira nad F_j, skup $\mathscr{F}^j$ se ne menja.

b) Ako u skupu $\mathscr{F}^j$ postoje obeležja nad kojima dominira obeležje F_j, tada se ta obeležja izbacuju iz skupa $\mathscr{F}^j$, a u njega ulazi obeležje F_j.

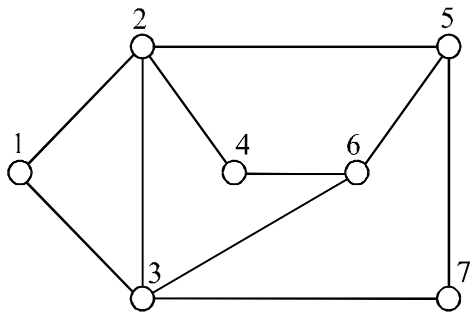
c) Ako nije ispunjen nijedan od ovih uslova, skup $\mathscr{F}^j$ se proširuje novim članom F_j.

(Jedna iteracija obuhvata tretiranje svih čvorova čiji se skup obeležja promenio u prethodnoj iteraciji.)

4° Postupak obeležavanja završava se iteracijom koja ne donosi promenu ni u jednom od obeležja čvorova. ■

Dominantni putevi se iz obeležene mreže izdvajaju jedan po jedan polazeći od krajnjeg čvora, postupkom analognim izdvajanju najkraćeg puta.

Primer 3.3. Opisani algoritam ilustrovaćemo primerom nalaženja skupa dominantnih puteva između čvorova 1 i 7 za mrežu prikazanu na slici 3.7. koja predstavlja deo jedne evropske računarske mreže.



Slika 3.7.

Razmatraju se sledeća četiri kriterijuma:

1. Pouzdanost puta P koju treba maksimizirati. Ona se računa kao proizvod pouzdanosti grana p_{ij}:

$$P = f_i = \prod_{(i,j)} p_{ij}$$

2. Dužina puta D koju treba minimizirati. Ona se dobija kao zbir geografskih rastojanja d_{ij} između čvorova na putu:

$$D = f_2 = \sum_{(i,j)} d_{ij}$$

3. Kvalitet puta Q koji treba maksimizirati. On je jednak kvalitetu najgore grane na putu:

$$Q = f_3 = \min_{(i,j)} \{q_{ij}\}$$

gde je q_{ij} ocena kvaliteta grane (i, j) označena sa 1, 2, 3, 4 ili 5, pri čemu je 1 najniži, a 5 najviši nivo kvaliteta.

4. Broj čvorova na putu B, koji treba minimizirati. On se računa kao aditivna funkcija ako se svakoj grani (i, j) kao četvrta karakteristika c_{ij}^4 pripiše broj 1 i dobijenoj sumi doda početni čvor:

$$B = f_4 = 1 + \sum_{(i,j)} c_{ij}^4$$

Napomena: Oznaka (i, j) u navedenim izrazima za računanje kriterijuma $f_1, \ldots, f_4$, odnosi se samo na grane koje pripadaju određenom putu.

Podaci o mreži sa slike 3.7. dati su u sledećoj tabeli:

Grana (i, j)	Pouzdanost p_{ij}	Dužina d_{ij}	Kvalitet q_{ij}
(1, 2)	0,93	400	5
(1, 3)	0,87	1300	4
(2, 3)	0,87	600	5
(2, 4)	0,94	290	3
(2, 5)	0,94	350	5
(3, 6)	0,93	450	5
(3, 7)	0,88	800	5
(4, 6)	0,87	170	2
(5, 6)	0,88	300	5
(5, 7)	0,89	1250	4

Rešenje: U sledećoj tabeli su prikazani rezultati primene algoritma pri čemu se kolone tabele odnose na redni broj iteracije, a vrste na čvor. Obeležja su data u zagradama i označavaju: pouzdanost, dužinu, kvalitet i broj čvorova, respektivno. Broj posle zagrade je oznaka prethodnog čvora. Treba primetiti da se postupak obeležavanja prilagođava vrsti funkcije po kojoj se računa karakteristika puta, kao i nameri da se ona maksimizira ili minimizira.

Čv.	Iteracija 1	Iteracija 2	Iteracija 3	Iteracija 4
1	(1; 0; 5; 1) -	(1; 0; 5; 1) -	(1; 0; 5; 1) -	(1; 0; 5; 1) -
2	(0; ∞; 1; ∞)-	(0,93; 400; 5; 2)1	(0,93; 400; 5; 2) 1	(0,93; 400; 5; 2) 1
3	(0; ∞; 1; ∞)-	(0,87;1300; 4; 2)1	(0,87; 1300; 4; 2) 1 (0,809; 1000; 5; 3) 2	(0,87; 1300; 4; 2) 1 (0,809; 1000; 5; 3) 2
4	(0; ∞; 1; ∞)-	(0; ∞; 1; ∞) -	(0,874; 690; 3; 3) 2	(0,874; 690; 3; 3) 2
5	(0; ∞; 1; ∞)-	(0; ∞; 1; ∞) -	(0,874; 750; 5; 3) 2	(0,874; 750; 5; 3) 2
6	(0; ∞; 1; ∞)-	(0; ∞; 1; ∞) -	(0,809; 1750; 4; 3) 3	(0,809; 1750; 4; 3) 3 (0,761; 860; 3; 3) 4 (0,769; 1050; 5; 4) 5
7	(0; ∞; 1; ∞)-	(0; ∞; 1; ∞) -	(0,766; 2100; 3; 3) 3	(0,766; 2100; 3; 3) 3 (0,712; 1800 ;4; 3) 3 (0,778; 2000; 4; 4) 5

Do skupa dominantnih puteva došlo se posle četvrte iteracije. Postoje 3 dominantna puta: (1, 3, 7), (1, 2, 3, 7) i (1, 2, 5, 7) čije su karakteristike date u prethodnoj tabeli. Prva vrednost je pouzdanost, druga dužina, treća broj čvorova i četvrta kvalitet puta. ■

Opisani algoritam za rešavanje zadatka određivanja skupa dominantnih puteva između dva čvora ima sledeće dobre osobine [41]:

1. Jednim prolazom se pored skupa dominantnih puteva od početnog do krajnjeg čvora dobijaju i skupovi dominantnih puteva od početnog do bilo kog čvora u mreži.
2. Algoritam nalazi i pamti samo dominantne puteve čiji je broj obično mnogo manji od broja svih puteva.
3. Jednim prolazom se dobijaju optimalne vrednosti puta po svim kriterijumima (marginalna rešenja). Ove vrednosti su potrebne u daljoj analizi skupa dominantnih rešenja, odnosno u drugoj fazi višekriterijumskog izbora.
4. Iz obeležene mreže se jednostavno rekonstruišu svi optimalni putevi po jednom kriterijumu.

Osnovni nedostatak opisanog pristupa je u tome što on predstavlja jedan sistematizovan način pretraživanja u zadatku koji u opštem slučaju može da ima veoma veliki broj dominantnih rešenja. Zahtevani računarski resursi rastu sa brojem dominantnih puteva između dva čvora. U opštem slučaju ta zavisnost može da bude eksponencijalna, odnosno svi putevi između posmatranih čvorova mogu biti dominantni. Takvi slučajevi bi izazvali ozbiljne teškoće u praktičnoj primeni algoritma. Broj puteva zavisi od dimenzije zadatka koja je određena strukturom grafa, tj. brojem čvorova i brojem grana, a broj dominantnih puteva zavisi od odnosa izabranih kriterijuma. Eksperimenti pokazuju da je broj dominantnih puteva u praktičnim problemima značajno manji od broja svih puteva između posmatranih čvorova. To zavisi od korelisanosti i konfliktnosti posmatranih kriterijuma u konkretnom zadatku. Naime, ako se posmatraju kriterijumi koji su međusobno delimično korelisani (npr. dužina grane i vreme putovanja), odnosno ako ne postoje kriterijumi koji su direktno u potpunosti suprotstavljeni, onda se broj obeležja koji se pridružuju čvorovima, vrlo brzo ustali i ne raste značajno sa dimenzijom grafa.

3.3. Metoda težinskih koeficijenata

Metoda težinskih koeficijenata (MTK) je najčešće korišćena a priori metoda VKO. Ona je specijalan slučaj grupe metoda koje koriste *funkciju korisnosti* DO da bi omogućili svođenje zadatka VKO na zadatak jednokriterijumske optimizacije. Kod ove grupe metoda se od polaznog modela:

$$
\begin{aligned}
&(\max)\ \left[f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ ,\ f_p(x)\right] \\
&p.o. \\
&\qquad g_i(x) \le 0\ ,\quad i = 1, \ldots , m \\
&\qquad x_j \ge 0\ ,\quad j = 1, \ldots , n
\end{aligned}
$$

formira nov jednokriterijumski model:

$$
\begin{aligned}
&(\max)\ U(f) = U\big(f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ ,\ f_p(x)\big) \\
&p.o. \\
&\qquad g_i(x) \le 0\ ,\quad i = 1, \ldots , m \\
&\qquad x_j \ge 0\ ,\quad j = 1, \ldots , n
\end{aligned}
$$

gde je $U(f)$ funkcija korisnosti DO koja zavisi od datih funkcija cilja i odnosa DO prema kriterijumima. Rešenje ovog zadatka se usvaja kao rešenje originalnog zadatka VKO.

U MTK se kao funkcija korisnosti upotrebljava linearna kombinacija normalizovanih funkcija cilja, tj. rešava se zadatak:

$$(\max)\ f^{MTK}(x) = \sum_{k=1}^{p} w_k f_k^o(x)$$

$$\begin{aligned} &p.o. \\ &\quad g_i(x) \le 0\ ,\quad i = 1, \ldots , m \\ &\quad x_j \ge 0\ ,\quad j = 1, \ldots , n \end{aligned}$$

gde su:
$w_k \ge 0$ - težinski koeficijent k-tog kriterijuma, $k = 1, \ldots , p$, koje zadaje DO;
$f_k^o(x)$ - normalizovana k-ta funkcija cilja $f_k(x)$, $k = 1, \ldots , p$.

Normalizacija funkcija kriterijuma se radi da bi se izbegle nepovoljne posledice koje potiču iz činjenice da su zadati kriterijumi, po pravilu, raznorodne veličine koje se izražavaju različitim jedinicama mere (npr. dinari, kilogrami, sati i sl) i na različitim skalama. Zato je pogodno sve kriterijume svesti na istu skalu i eventualno na istu jedinicu mere. Kada su funkcije cilja linearne, ovaj postupak je relativno jednostavan. Naime, ako je $f_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j$, tada je:

$$f_k^o(x) = \frac{f_k(x)}{S_k} = \frac{a_{k1}}{S_k} x_1 + \frac{a_{k2}}{S_k} x_2 + \ldots + \frac{a_{kn}}{S_k} x_n$$

gde je $S_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}$.

Na ovaj način se dobijaju linearne funkcije cilja koje imaju zbir koeficijenata uz promenljive x_j jednak jedinici. Za nelinearne funkcije cilja problem normalizacije je složeniji i ovde ga nećemo razmatrati.

Može se dokazati da se primenom MTK dobija Pareto optimalno rešenje ako su svi težinski koeficijenti veći od nule. Ako je bar jedan od težinskih koeficijenata jednak nuli, metoda garantuje dobijanje makar slabog Pareto optimuma. Naime, ako je u tom slučaju dobijeno rešenje jedinstveno, ono je Pareto optimalno.

Kada je skup vrednosti kriterijuma konveksan, kao u primeru VLP, podešavanjem težinskih koeficijenata moguće je dobiti sva Pareto i slaba Pareto rešenja.

<u>Primer 3.4.</u> Rešiti zadatak iz primera 3.1. metodom težinskih koeficijenata s tim da su težine odgovarajućih kriterijuma: $w_1 = 0.8$ i $w_2 = 0.2$.

<u>Rešenje:</u> Polazni matematički zadatak je:

$$(\max)\ \left[40x_1 + 10x_2,\ x_1 + x_2\right]$$

p.o.

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \leq 2$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

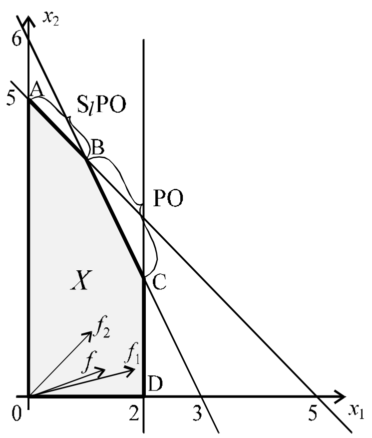
Marginalna rešenja ovog zadatka su:

$f_1^*(x) = 100$, $x_1^{(1)*} = 2$, $x_2^{(1)*} = 2$ (tačka **C**);

$f_2^*(x) = 5$, rešenje je višestruko, tj. rešenje su sve tačke na duži koja spaja tačke:

$x_1^{(2)*'} = 0$, $x_2^{(2)*'} = 5$ (tačka **A**) i

$x_1^{(2)*''} = 1$, $x_2^{(2)*''} = 4$ (tačka **B**).



Slika 3.8.

Grafički ilustracija data je na slici 3.8. Vidimo da su tačke između **B** i **C** (uključujući i ove tačke) Pareto optimalna rešenja, a između **A** i **B** (uključujući i **A**, ali ne uključujući **B**) samo slaba Pareto rešenja. Vidimo na slici da je vektor (gradijent) funkcije korisnosti između gradijenata polaznih funkcija cilja, bliže prvoj funkciji (zato što je $w_1 > w_2$). Menjajući relativni odnos između težinskih koeficijenata, ovaj gradijent će se približavati jednoj, odnosno drugoj funkciji cilja.

Matematički model MTK ima sledeći oblik:

$$(\max)\ f^{MTK}(x) = w_1 f_1^o(x) + w_2 f_2^o =$$
$$= 0{,}8(0{,}8x_1 + 0{,}2x_2) + 0{,}2(0{,}5x_1 + 0{,}5x_2) =$$
$$= 0{,}74x_1 + 0{,}26x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Rešenje ovog zadatka LP je sledeće: $f^{MTK*} = 2$, $x_1^* = 2$, $x_2^* = 2$, pri čemu odgovarajuće vrednosti polaznih funkcija cilja imaju vrednosti: $f_1^* = 100$ i $f_2^* = 4$. Dobijeno rešenje je u stvari, tačka **C** za koju smo rekli da je Pareto optimalna.

Napomena: Da je DO veći prioritet dao drugom kriterijumu, npr. da su težinski koeficijenti bili $w = (0{,}2,\ 0{,}8)$, tada bi se za rešenje dobila tačka **B**, koja je takođe Pareto optimalna, a da su koeficijenti bili npr. $w = (0,\ 1)$, tada bi se gradijent funkcije korisnosti poklopio sa gradijentom druge funkcije cilja, a optimalna rešenja bi bile sve tačke na duži **AB**, tj. i one tačke koje su samo slabo Pareto optimalne. ■

Primer 3.5. Radionica proizvodi dva artikla P1 i P2, oba na istom tipu mašina (M). U proizvodnji se koriste tri sirovine: S1, S2 i S3. Za sledeći mesec, radionica je naručila 1400kg sirovine S1, 1200kg S2 i 2100kg S3. Mašina na kojima se artikli proizvode ima dovoljno, tako da ne predstavljaju usko grlo u proizvodnji. Naprotiv, postoji zahtev za njihovim što boljim iskorišćenjem. Po jedinici artikla P1 radionica zaradi 60din, a po jedinici artikla P2 180din. Normativi utroška sirovina i vremena mašina za artikle, dati su u tabeli:

Proizvodi	S1	S2	S3	M
P1	2 kg/kom	3 kg/kom	7 kg/kom	2 h/kom
P2	7 kg/kom	4 kg/kom	3 kg/kom	1 h/kom

a) Formulisati zadatak VKO za određivanje proizvodnog programa koji će maksimizirati zaradu radionice i ukupno iskorišćenje mašina.

b) Rešiti problem primenom metode težinskih koeficijenata ako su težine kriterijuma $w_1 = 8$ za zaradu radionice i $w_2 = 3$ za iskorišćenje mašina. Izračunati ukupnu zaradu i iskorišćenje mašina pri tako dobijenom rešenju.

Rešenje: a)

$$(\max)\ \left[f_1(x) = 60x_1 + 180x_2,\ f_2(x) = 2x_1 + x_2\right]$$

$$p.o.$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &\le 1400 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 1200 \\ 7x_1 + 3x_2 &\le 2100 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

b) Matematički model MTK je:

$$(\max)\ f^{MTK}(x) = 8\left(\frac{60}{240}x_1 + \frac{180}{240}x_2\right) + 3\left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2\right) =$$

$$= (\max)\ f^{MTK}(x) = 4x_1 + 7x_2$$

$p.o.$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &\le 1400 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 1200 \\ 7x_1 + 3x_2 &\le 2100 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Rešenje ovog zadatka je:

$f^{MTK*} = 1830{,}769$, $x_1^* = 215{,}3846$, $x_2^* = 138{,}4615$

a odgovarajuće vrednosti funkcija cilja su:

$f_1^* = 37.846{,}146$ (din), $f_2^* = 569{,}2307$ (h)

Zaključak: Da bi radionica istovremeno maksimizirala i zaradu i iskorišćenje mašine, pretpostavljajući date težinske koeficijente, potrebno je da proizvodi približno 215,4 proizvoda P1 i 138,5 proizvoda P2 mesečno. Pri tome će zaraditi 37 846 dinara, a mašine će raditi 569,23 sati. ■

3.4. Leksikografska metoda

U *leksikografskoj metodi* DO zadaje prioritete kriterijuma u vidu strogo definisanog redosleda značajnosti funkcija cilja. Pretpostavićemo da su kriterijumi već poređani i indeksirani tako da kriterijum f_1 ima najviši prioritet, f_2 sledeći niži, itd. sve do f_p koji ima najniži prioritet. Rešenje polaznog zadatka dobija se tako što se posebno rešava najviše p jednokriterijumskih zadataka.

U prvom koraku tražimo rešenje koje je optimalno samo po prvom (najznačajnijem) kriterijumu pri zadatim ograničenjima, tj. rešavamo jednokriterijumski zadatak:

$$
\begin{aligned}
&(\max)\ f_1(x) \\
p.o.&\\
&g_i(x) \le 0\ , \quad i = 1, \dots, m \\
&x_j \ge 0\ , \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

odakle se dobija rešenje x^{1*} i vrednost funkcije cilja f_1^*. Ako je ovo rešenje jedinstveno, završavamo algoritam, a ovako dobijeno rešenje usvajamo za rešenje polaznog problema. Ako dobijeno rešenje nije jedinstveno, rešavamo jednokriterijumski model kojim minimiziramo drugu po značajnosti funkciju cilja, ali tako da ne pokvarimo najbolju vrednost prvog kriterijuma, tj. rešavamo sledeći zadatak:

$$
\begin{aligned}
&(\max)\ f_2(x) \\
p.o.&\\
&g_i(x) \le 0\ , \quad i = 1, \dots, m \\
&f_1(x) \ge f_1^* \\
&x_j \ge 0\ , \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

Ako je dobijeno rešenje x^{2*}, sa vrednošću funkcije cilja f_2^*, jedinstveno, ono se usvaja za rešenje polaznog problema i algoritam se završava. U suprotnom, prelazi se na sledeći korak.

U opštem slučaju rešava se $r \le p$ jednokriterijumskih zadataka oblika:

$$
\begin{aligned}
&(\max)\ f_k(x) \\
p.o.&\\
&g_i(x) \le 0\ , \quad i = 1, \dots, m \\
&f_l(x) \ge f_l^*\ , \quad l = 1, \dots, k-1 \\
&x_j \ge 0\ , \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

gde je $k = 1, \ldots, r$, a r je redni broj zadatka koji ima jedinstveno optimalno rešenje.

Ako se leksikografskom metodom dobije jedinstveno rešenje, ono je sigurno Pareto optimalno. Ako se ni posle p koraka ne dobije jedinstveno rešenje, dobijen rezultat će biti bar slabo Pareto rešenje. U opštem slučaju, leksikografskom metodom nije moguće dobiti sva Pareto optimalna rešenja.

Primer 3.6. Rešiti zadatak iz primera 3.2. leksikografskom metodom tako da redosled značajnosti kriterijuma bude sledeći: 1. maksimizacija dobiti, 2. maksimalno iskorišćenje kapaciteta i 3. maksimizacija fizičkog obima proizvodnje.

Rešenje: Funkcije cilja indeksiramo u skladu sa prioritetima:

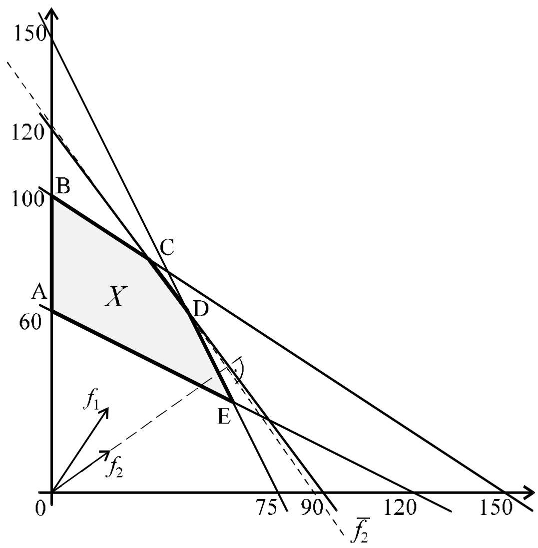
$$f_1(x) = 8x_1 + 12x_2$$
$$f_2(x) = 14x_1 + 10x_2$$
$$f_3(x) = x_1 + x_2$$

Zadatak VKO dobija sledeći oblik:

$$(\max)\ \left[f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\right]$$

$p.o.$

$$8x_1 + 4x_2 \le 600 \qquad (1)$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 300 \qquad (2)$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 360 \qquad (3)$$
$$5x_1 + 10x_2 \ge 600 \qquad (4)$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$



Slika 3.9.

Skup dopustivih rešenja polaznog modela definisan nejednačinama (1) - (4), obeležićemo sa X. U prvom koraku rešavamo sledeći zadatak:

$$(\max)\ f_1(x) = 8x_1 + 12x_2$$

$$p.o.$$

$$x \in X$$

odakle dobijamo višestruko rešenje:

$f_1^* = 1200$, a x^{1*} je bilo koja tačka na duži koja spaja tačke $x^{1*'} = (30, 80)$ i $x^{1*''} = (0, 100)$ (na slici 3.9. ovo su tačke **B** i **C**), tj. $x^{1*} = (30\lambda, 80\lambda + 100(1 - \lambda)),\ 0 \le \lambda \le 1$.

Pošto je rešenje višestruko, prelazimo na sledeći korak u kome se rešava zadatak:

$$(\max)\ f_1(x) = 14x_1 + 10x_2$$

$$p.o.$$

$$x \in X$$

$$8x_1 + 12x_2 \ge 1200$$

Drugim rečima, tražimo tačku koja se nalazi na duži **BC**, i pri tome maksimizira drugu funkciju cilja. Rešenje ovog zadatka je tačka **C**, tj. $x^{2*} = (30, 80)$, pri čemu je $f_2^* = 1220$. Pošto je ovo rešenje jedinstveno, usvajamo ga kao rešenje polaznog modela. Pri tome funkcije cilja imaju vrednosti $F^* = (1200, 1220, 110)$.∎

Mada je sa teorijskog aspekta leksikografska metoda značajna, njena primenjivost se dovodi u sumnju zato što realni jednokriterijumski zadaci optimizacije retko imaju višestruko optimalno rešenje. To znači da se leksikografskom metodom optimizacija najčešće vrši samo po prvom kriterijumu a da ostali kriterijumi ne utiču na rešenje. To nije u skladu sa originalnim zadatkom VKO i namerom da se više kriterijuma uzme u obzir pri nalaženju konkretnog rešenja. Da bi se prevazišli ovi problemi i da bi i kriterijumi nižeg prioriteta uticali na donošenje konačnog rešenja, razvijena je *relaksirana leksikografska metoda*.

3.5. Relaksirana leksikografska metoda

Ova metoda je takođe iterativni postupak u kome se rešavaju jednokriterijumski zadaci optimizacije. Kao i u prethodnoj metodi, pretpostavlja se da su od strane DO dati prioriteti kriterijuma i da su u skladu sa njima dodeljeni indeksi kriterijumima. Za razliku od prethodne, u relaksiranoj leksikografskoj metodi se po svakom od p kriterijuma rešava jednokriterijumski zadatak optimizacije. Pri tome se u narednoj iteraciji ne postavlja kao ograničenje zahtev da rešenje bude optimalno po kriterijumu višeg prioriteta, već se ono relaksira tako da se zahteva da rešenje bude u okolini optimalnog rešenja dobijenog u prethodnoj iteraciji. Na taj način, svaki kriterijum utiče na konačno rešenje.

Isto kao i kod obične leksikografske metode, DO zadaje redosled kriterijuma po značajnosti. Pored toga, svakom kriterijumu, izuzimajući poslednji, dodeljuje se vrednost α_k, $k = 1, \dots, p\text{-}1$, za koju kriterijum višeg prioriteta sme da odstupi od svoje optimalne vrednosti. Metoda obuhvata izvršavanje sledećih p koraka:

korak 1

$$\begin{array}{ll} & (\max)\ f_1(x) \\ p.o. & \\ & x \in X \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad f_1^*$$

korak 2

$$
\begin{array}{ll}
(\max)\ f_2(x) & \\
p.o. & \\
\quad x \in X & \Rightarrow \quad f_2^* \\
\quad f_1(x) \geq f_1^* - \alpha_1 &
\end{array}
$$

. . . . .

. . . . .

korak p

$$
\begin{array}{ll}
(\max)\ f_p(x) & \\
p.o. & \\
\quad x \in X & \Rightarrow \quad f_p^* \\
\quad f_l(x) \geq f_l^* - \alpha_l\ , \quad l = 1, \ldots, p-1 &
\end{array}
$$

Za rešenje polaznog modela se usvaja rezultat dobijen u poslednjem koraku, a vrednosti funkcija cilja za dobijeno rešenje se moraju posebno računati. ■

Rešenje dobijeno ovom metodom obezbeđuje slabi Pareto optimum, a ako je rešenje jedinstveno, ono je i Pareto optimalno. Ako je dopustiva oblast konveksna, podešavanjem parametara α_k, $k = 1, \ldots, p$-1, može se dobiti bilo koje Pareto optimalno rešenje.

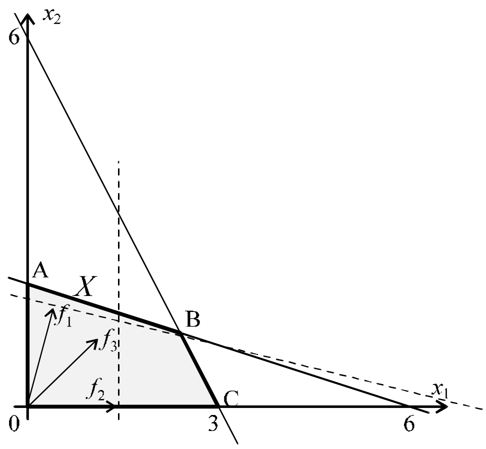
Primer 3.7. Primenom relaksirane leksikografske metode rešiti sledeći zadatak VKO (funkcije cilja su indeksirane po prioritetu):

$$
\begin{array}{l}
(\max)\ \left[f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\right] \\
p.o. \\
\quad 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
\quad x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
\quad x_1,\ x_2 \geq 0
\end{array}
$$

ako je zadato:

$$
\begin{array}{ll}
f_1(x) = x_1 + 4x_2 & \alpha_1 = 1 \\
f_2(x) = x_1 & \alpha_2 = 1 \\
f_3(x) = x_1 + x_2. &
\end{array}
$$

Rešenje:



Slika 3.10.

korak 1 $\quad$ (max) $f_1(x) = x_1 + 4x_2$

$$p.o. \quad x \in X$$

Ovaj zadatak ima jedinstveno optimalno rešenje u tački $x^{1*} = (0, 2)$, pri čemu je $f_1^* = 8$.

korak 2

$$(\max)\ f_2(x) = x_1$$

$$p.o. \quad x \in X, \quad x_1 + 4x_2 \geq 7$$

Dobija se rešenje: $x^{2*} = (2{,}43,\ 1{,}14)$, $f_2^* = 2{,}43$.

korak 3

$$(\max)\ f_3(x) = x_1 + x_2$$

$$p.o. \quad x \in X, \quad x_1 + 4x_2 \geq 7, \quad x_1 \geq 1{,}43$$

Rešenje ovog zadatka se usvaja kao konačno. To je rešenje: $x_1^* = 3{,}6$, $x_2^* = 1{,}2$. Vrednosti funkcija cilja u ovoj tački su: $f^* = (7{,}2,\ 2{,}4,\ 3{,}6)$. ■

Relaksirana leksikografska metoda je veoma osetljiva na izbor koeficijenata α_k, u toj meri da se „pogrešnim“ izborom mogu dobiti neprihvatljiva rešenja. Tako u primeru 3.7. imamo slučaj da se konačno rešenje poklapa sa marginalnim rešenjem funkcije cilja koja ima najniži prioritet, dok je vrednost najznačajnijeg kriterijuma smanjena. Kod primene ove metode se preporučuje da DO kritički preispita dobijena rešenja, uporedi ih sa marginalnim i da po potrebi koriguje zadate koeficijente.

Primer 3.8. Vlasnik hotela pre početka sezone odlučuje o opremanju soba nameštajem. Hotel raspolaže sa ukupno 58 soba, od kojih su 16 male, tako da mogu da budu samo jednokrevetne, dok ostale mogu biti jednokrevetne, dvokrevetne ili trokrevetne. Podaci o ceni opremanja soba i sezonskoj zaradi po sobi su dati u sledećoj tabeli:

	Jednokrevetna	Dvokrevetna	Trokrevetna
Cena opremanja	20.000 din	40.000 din	60.000 din
Sezonska zarada	15.000 din	25.000 din	30.000 din

Za opremanje soba, vlasnik može da izdvoji 2,5 miliona dinara. On želi da postigne dva cilja: 1. da ostvari što veću sezonsku zaradu hotela i 2. da omogući primanje što većeg broja gostiju kako ne bi došlo do toga, da gostima bude uskraćeno gostoprimstvo.

a) Formulisati matematički model za određivanje optimalnog opremanja soba potrebnim nameštajem (broj kreveta) ako se žele ostvariti oba postavljena kriterijuma.

b) Rešiti zadatak ako je prvi kriterijum prioritetan i ako je vlasnik spreman da „žrtvuje“ 50.000 din svoje sezonske zarade da bi poboljšao drugi kriterijum.

Rešenje: a) Promenljive x_1, x_2 i x_3 će predstavljati broj jednokrevetnih, dvokrevetnih i trokrevetnih soba u hotelu, respektivno. Matematički model ima sledeći oblik:

$$(\max)\ \left[f_1(x),\ f_2(x)\right]$$

p.o.

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 58$$

$$20.000x_1 + 40.000x_2 + 60.000x_3 \le 2.500.000$$

$$x_1 \ge 16$$

$$x_2 \ge 0$$

$$x_3 \ge 0$$

gde su:

$$f_1(x) = 15.000x_1 + 25.000x_2 + 30.000x_3$$
$$f_2(x) = x_1 + x_2 + 3x_3$$

b) Iako nije eksplicitno naglašeno, na osnovu zahteva zadatka je očigledano da se traži rešenje dobijeno relaksiranom leksikografskom metodom, s tim da je najvažniji prvi kriterijum, a zadati koeficijent $\alpha_1 = 50.000$. U prvom koraku rešavamo model:

$$(\max)\ f_1(x) = 15.000x_1 + 25.000x_2 + 30.000x_3$$

p.o.

$$x \in X$$

čije je rešenje: $f_1^* = 1.415.000$ din, $x_1^{1*} = 16$, $x_2^{1*} = 17$, $x_3^{1*} = 25$. U drugoj iteraciji rešavamo model u koji smo dodali ograničenje kojim obezbeđujemo da se prvi kriterijum ne „pokvari" za više od 50 000:

(1.415.000 - 50.000 = 1.365.000):

$$(\max)\ f_2(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

p.o.

$$x \in X$$

$$15.000x_1 + 25.000x_2 + 30.000x_3 \ge 1.365.000$$

Rešenje ovog zadatka je konačno rešenje problema. Ono, međutim, nije jedinstveno. Štaviše, simpleks metodom se se mogu generisati četiri rešenja: $x^{*\mathrm{I}} = (23, 0, 34)$, $x^{*\mathrm{II}} = (16, 7, 31{,}67)$, $x^{*\mathrm{III}} = (24{,}5, 0, 33{,}5)$ i $x^{*\mathrm{IV}} = (16, 17, 25)$. Sva optimalna rešenja se mogu dobiti konveksnom kombinacijom ova četiri. Grafički posmatrano, u trodimenzionalnom prostoru se dobija da su optimalna rešenja deo ravni oivičen trapezoidom čija su temena date četiri tačke. U svim tačkama koje se nalaze unutar tog trapezoida, vrednost druge funkcije cilja iznosi 125, dok vrednost prve varira između 1.365.000 i 1.415.000. Dakle, dobili smo skup tačaka koje predstavljaju slaba Pareto rešenja. Jedino tačka x^{*IV}, koja je optimalna i po prvom kriterijumu, je Pareto rešenje.

Zaključak: Da bi vlasnik hotela na što bolji način zadovoljio oba kriterijuma, najbolje je da opremi 16 jednokrevetnih, 17 dvokrevetnih i 25 trokrevetnih soba i tako ostvari zaradu od 1.415.000 din po sezoni. Pri tome će hotel moći da prima 125 gostiju. ■

3.6. Metoda ε ograničenja

U ovoj metodi DO izdvaja kriterijum $f_q(x)$ koji ima najviši prioritet i njega maksimizira, dok ostale funkcije cilja ne smeju imati vrednosti manje od unapred zadatih ε_k, $k = 1, \dots, p$, $k \neq q$. Drugim rečima, rešava se sledeći jednokriterijumski zadatak:

$$(\max)\ f_q(x)$$

$$p.o.$$

$$\begin{aligned} g_i(x) &\leq 0 & i &= 1, \dots, m \\ f_k(x) &\geq \varepsilon_k & k &= 1, \dots, p,\ k \neq q \\ x_j &\geq 0 & j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

čije se rešenje usvaja kao rešenje polaznog zadatka VKO. Ako postavljeni zadatak nema dopustivo rešenje, potrebno je smanjiti vrednosti ε_k. Slično prethodnoj metodi, rešenje dobijeno ovim postupkom osetljivo je na izbor parametara koje daje DO. Zato se preporučuje da DO aktivno učestvuje u eksperimentima na modelu i da u slučaju potrebe koriguje zadate koeficijente.

Primer 3.9. Rešiti sledeći zadatak VKO:

$$(\max)\ \left[f_1(x) = x_1,\ f_2(x) = x_2\right]$$

$$p.o.$$

$$0 \leq x_j \leq 1\ ,\quad j = 1,\ 2$$

metodom ε ograničenja, ako prvi kriterijum ima najviši prioritet, dok drugi ne sme imati vrednost manju od 0,5.

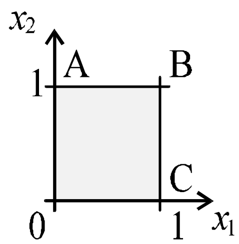
Rešenje: Skup dopustivih rešenja za polazni zadatak prikazan je na slici 3.11. Rešavamo sledeći zadatak linearnog programiranja:

$$(\max) f_1(x) = x_1$$

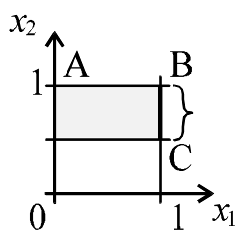
p.o.

$$0 \le x_1 \le 1$$

$$\frac{1}{2} \le x_2 \le 1$$



Slika 3.11.



Slika 3.12.

čije je rešenje višestruko (slika 3.12) $x_1^* = 1$, $x_2^* \in [\frac{1}{2}, 1]$, a vrednosti funkcija cilja su $f_1^* = 1$ i u zavisnosti od izbora višestrukog rešanja $f_2^* \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Napomena: Sva dobijena rešenja su slabo Pareto optimaln a rešenje (1, 1) je Pareto optimalno. Da je DO stavio ε = 1, tada bi rešenje bilo u tački (1, 1), bilo bi jedinstveno i Pareto optimalno. ■

Primer 3.10. Rešiti zadatak VKO:

$$(\max)\ \left[f_1(x) = x_1,\ f_2(x) = x_2\right]$$

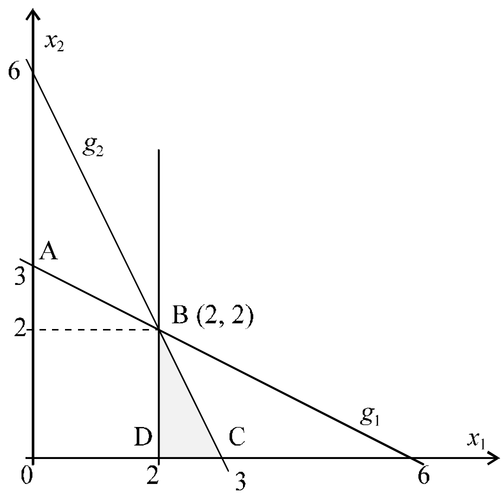
p.o.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

ako je DO zadao: $q = 2$, $\varepsilon_1 = 2$.



Slika 3.13.

<u>Rešenje:</u> Model transformišemo u:

$$(\max)\ f_2(x) = x_2$$

p.o.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 2$$

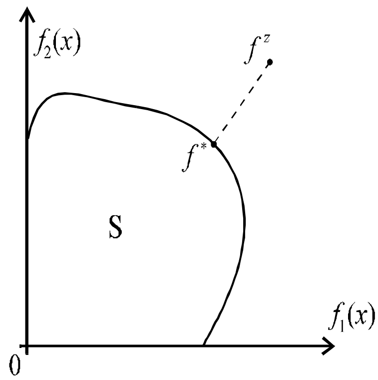
$$x_2 \geq 0$$

Rešenje ovog modela je jedinstveno (tačka **B** na slici 3.13.) i Pareto optimalno: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 2$, $f_1^* = 2$, $f_2^* = 2$. ■

Metoda ε ograničenja garantuje slabo Pareto optimalno rešenja, a ako je rešenje jedinstveno, onda je i Pareto optimalno. Ako je dopustiva oblast konveksna, modifikacijom koeficijenata ε_k može se dobiti bilo koje Pareto optimalno rešenje.

3.7. Metode rastojanja

Metode rastojanja čine grupu metoda za rešavanje zadataka VKO čija je osnovna ideja da se u kriterijumskom prostoru traži tačka koja je najbliža nekoj unapred određenoj tački koja se želi dostići ili ka kojoj treba težiti ako ona nije dopustiva. Drugim rečima, minimizira se rastojanje između željene tačke i dopustive oblasti (slika 3.14). Razlike između metoda ove grupe potiču od toga kako se željena tačka određuje, na koji način se rastojanje od nje „meri“, da li se uvode težinski koeficijenti, itd.



Slika 3.14.

U opštem slučaju, DO za svaki od p kriterijuma zadaje željene vrednosti ili određuje način kako će se one izračunati. Na taj način se u p - dimenzionalnom kriterijumskom prostoru definiše tačka $f^z = (f_1^z, \ldots, f_p^z)$ koja po pravilu ne pripada dopustivoj oblasti **S. U slučaju da je $f^z \in$S** zadatak se rešava rešavanjem sistema jednačina koje su definisane skupom ograničenja.

U metodi rastojanja rešava se sledeći opšti zadatak:

$$(\min)\ d\left(f^z - f(x)\right)$$

$$p.o.$$

$$x \in X$$

gde $d(\bullet, \bullet)$ označava rastojanje definisano pogodnom metrikom.

U drugoj glavi je već razmatran pojam rastojanja između tačaka i načini na koje se to rastojanje može matematički izraziti. U kontekstu merenja rastojanja u kriterijumskom prostoru ovde ćemo ponoviti definicije metrika koje se najčešće koriste u metodama rastojanja:

l_1 (pravougaona) metrika: $d_{l_1}(f^z,\ f(x)) = \sum_{k=1}^{p} |f_k^z - f_k(x)|$,

l_2 (Euklidova) metrika: $d_{l_2}(f^z,\ f(x)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (f_k^z - f_k(x))^2}$,

l_∞ (Čebiševljeva) metrika: $d_{l_\infty}(f^z,\ f(x)) = \max_{1 \le k \le p} |f_k^z - f_k(x)|$.

Kriterijumima je moguće dodeliti težinske koeficijente, tako da prethodne formule za rastojanje između željenog i traženog rešenja dobijaju oblik:

$d_{l_1}(f^z,\ f(x)) = \sum_{k=1}^{p} w_k |f_k^z - f_k(x)|$ za pravougaonu metriku,

$d_{l_2}(f^z,\ f(x)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} w_k \left(f_k^z - f_k(x)\right)^2}$ za Euklidovu metriku i

$d_{l_\infty}(f^z,\ f(x)) = \max_{1 \le k \le p} \left(w_k |f_k^z - f_k(x)|\right)$ za Čebiševljevu metriku.

Bez obzira na oblik polaznih funkcija cilja, zadaci minimizacije rastojanja su problemi nelinearnog programiranja, za koje, u opštem slučaju, nije jednostavno pronaći optimalno rešenje. Izuzetno se u slučaju l_1 metrike i linearnih funkcija cilja i ograničenja zadatak minimizacije rastojanja može formulisati kao problem LP što ćemo objasniti na sledećem primeru.

Primer 3.11. Zadatak VKO

$$(\max)\ [f_1(x) = x_1,\ f_2(x) = x_2]$$

p.o.

$$0 \le x_j \le 1, \quad j = 1, 2$$

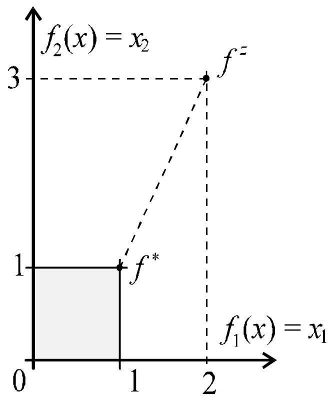
rešiti metodom rastojanja koristeći pravougaonu metriku, ako se žele dostići vrednosti kriterijuma: $f_1^z = 2$ i $f_2^z = 3$.

Rešenje: Zbog specifičnog oblika funkcija cilja, dopustivi skup i kriterijumski skup će imati isti oblik (slika 3.15). Mada je sa slike očigledno da je dopustiva tačka $f^* = (1, 1)$ najbliža željenoj, pokazaćemo to analitičkim putem. Zadatak koji treba rešiti ima oblik:

$$(\min)\,\Phi(x) = |2 - x_1| + |3 - x_2|$$

p.o.

$$x_1 \le 1$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$



Slika 3.15.

Kada smo u rešavanju konkretnog zadatka sigurni da vrednosti kriterijumskih funkcija neće biti veće od zadatih željenih vrednosti, možemo slobodno da zanemarimo operatore apsolutne vrednosti jer je $|f_k^z - f_k(x)| = f_k^z - f_k(x)$. U konkretnom primeru to znači da bismo rešavali zadatak (min) $[5 - x_1 - x_2]$ na datom dopustivom skupu. Rešenje ovog zadatka je $x^* = (1, 1)$ i ono je istovremeno rešenje polaznog nelinearnog modela. Međutim, opisani postupak zanemarivanja apsolutnih vrednosti u opštem slučaju ne bi bio korektan. Zato se koristi sledeći način za oslobađanje od apsolutnih vrednosti:

- Najpre se definišu promenljive $y_k = f_k^z - f_k(x)$,k=1,...,p, koje predstavljaju odstupanja funkcija cilja od željenih vrednosti. U ovom slučaju uvode se smene $y_1 = 2 - x_1$ i $y_2 = 3 - x_2$, tako da se dobija model:

$$
\begin{aligned}
(\min) F(x,y) &= |y_1| + |y_2| \\
p.o. & \\
x_1 + y_1 &= 2 \\
x_2 + y_2 &= 3 \\
0 \leq x_1 &\leq 1 \\
0 \leq x_2 &\leq 1
\end{aligned}
$$

Treba primetiti da je $F(x,y)$ u stvari funkcija od y a time implicitno i funkcija od x.

- Odstupanje y_k može biti pozitivno ili negativno. Kada je pozitivno, pokazuje za koliko je $f_k(x)$ veća od željene vrednosti f^z i zato se naziva se *prebačaj* i obeležava sa y_k^+. Kada je odstupanje negativno, ono pokazuje za koliko je $f_k(x)$ manje od željene vrednosti f^z i zato se naziva se *podbačaj* i obeležava sa y_k^-. Jasno je da važi $y_k = y_k^+ - y_k^-$ i $y_k^+ \times y_k^- = 0$, jer za jedan kriterijum ne možemo istovrmeno imati i prebačaj i podbačaj. Prema tome, u konkretnom zadatku uvodimo sledeće smene: $y_1 = y_1^- - y_1^+$ i $y_2 = y_2^- - y_2^+$. Apsolutne vrednosti mogu se napisati kao: $|y_1| = y_1^+ + y_1^-$ i $|y_2| = y_2^+ + y_2^-$, jer je $y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0$. Na ovaj način se polazni zadatak metode rastojanja transformiše u sledeći oblik:

$$
\begin{aligned}
(\min) F(x,y) &= y_1^+ + y_1^- + y_2^+ + y_2^- \\
p.o. & \\
x_1 - y_1^+ + y_1^- &= 2 \\
x_2 - y_2^+ + y_2^- &= 3 \\
x_1, x_2 &\leq 1 \\
x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- &\geq 0
\end{aligned}
$$

Ovo je klasičan zadatak LP čije se rešenje može dobiti simpleks algoritmom i ono je: $y_1^+ = 0$, $y_1^- = 1$, $y_2^+ = 0$, $y_2^- = 2$, $f_1^* = x_1^* = 1$, $f_2^* = x_2^* = 1$.

<u>Zaključak:</u> Vidimo da smo analitičkim putem ponovo dobili isto rešenje. Ni jedan od kriterijum ne dostiže željene vrednosti a podbačaji su $y_1^- = 1$ i $y_2^- = 2$.

<u>Napomena:</u> Objašnjene transformacije su osnova za formulaciju zadatka višekriterijumskog linearnog programiranja (VLP) u oblik koji se

naziva *ciljno programiranja*. Prema tome, zadatak ciljnog programiranja je poseban oblik zadatka metode rastojanja u VKO. Dodatno je moguće kriterijumima dodeliti prioritete dostizanja željenih vrednosti i težinske koeficijente. ■

Rešenje zadatka VKO dobijeno metodom rastojanja, kada skupu vrednosti kriterijuma ne pripada željena vrednost, predstavlja slabi Pareto optimum, a ako je jedinstveno, onda je i Pareto optimalno.

Primer 3.12. Dat je zadatak VLP (slika 3.16):

$$(\max)\ [f_1(x), f_2(x), f_3(x)]$$

p.o.

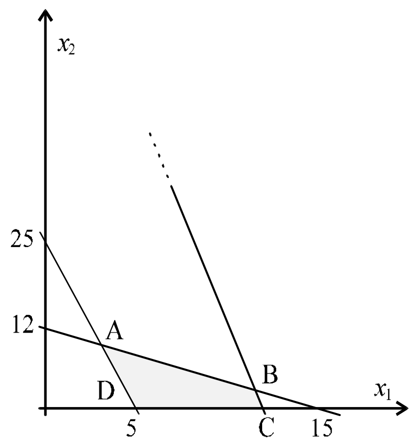
$$35x_1 + 7x_2 \geq 175$$
$$136x_1 + 170x_2 \leq 2040$$
$$20x_1 + 3x_2 \leq 240$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

gde su:

$$f_1(x) = 4x_1 + 5x_2$$
$$f_2(x) = x_1 + x_2$$
$$f_3(x) = 40x_1 + 6x_2$$

a) Rešiti zadatak metodom rastojanja sa pravougaonom metrikom, ako se želi dostići idealna tačka.

b) Koja rešenja predstavljaju Pareto, a koja slabi Pareto optimum polaznog zadatka.



Slika 3.16.

Rešenje: a) U ovom zadatku DO je odredio da su željene vrednosti kriterijumskih funkcija idealne vrednosti tih funkcija. Zato je najpre potrebno odrediti marginalna rešenja i odgovarajuće idealne vrednosti funkcija:

$f_1^* = 60$ za višestruko rešenje koje pripada duži **AB** sa krajnjim tačkama: $x_1^{(1)*'} = 3{,}09$, $x_2^{(1)*'} = 9{,}52$ i $x_1^{(1)*''} = 11{,}59$, $x_2^{(1)*''} = 2{,}73$,

$f_2^* = 14{,}32$ za: $x_1^{(2)*} = 11{,}59$, $x_2^{(2)*} = 2{,}73$ (tačka **B**),

$f_3^* = 480$ za višestruko rešenje koje pripada duži **BC** sa krajnjim tačkama: $x_1^{(3)*'} = 11{,}59$, $x_2^{(3)*'} = 2{,}73$ i $x_1^{(3)*''} = 12$, $x_2^{(3)*''} = 0$.

Zadatak VKO prilagođen za rešavanje metodom rastojanja sada ima oblik:

$$(\min)\Phi(x) = |f_1^* - f_1(x)| + |f_2^* - f_2(x)| + |f_3^* - f_3(x)|$$

pri istim ograničenjima.

Pošto sve kriterijume treba maksimizirati, a po definiciji marginalnih rešenja je $f_k^* \geq f_k(x)$, može se staviti da je $|f_k^* - f_k(x)| = f_k^* - f_k(x)$, $k=1, 2, 3$. Tada se umesto polaznog zadatka može rešavati zadatak minimizacije funkcije $\Phi(x) = 554{,}32 - 45x_1 - 12x_2$, pri istim ograničenjima.

Pokazaćemo kako se ovaj zadatak rešava opštim postupkom koji koristi definiciju prebačaja i podbačaja. U tom slučaju matematički model ima oblik:

$$(\min) F(x,y) = y_1^+ + y_1^- + y_2^+ + y_2^- + y_3^+ + y_3^-$$

p.o.

$$4x_1 + 5x_2 - y_1^+ + y_1^- = 60$$

$$x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 14.32$$

$$40x_1 + 6x_2 - y_3^+ + y_3^- = 480$$

$$35x_1 + 7x_2 \geq 175$$

$$136x_1 + 170x_2 \le 2040$$

$$20x_1 + 3x_2 \le 240$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1^+,\ y_1^-,\ y_2^+,\ y_2^-,\ y_3^+,\ y_3^- \ \ge\ 0$$

Rešavanjem ovog zadatka dobija se jedinstveno rešenje: $F^* = 0$, $x_1^* = 11{,}59$, $x_2^* = 2{,}73$.

To što je vrednost funkcije cilja jednaka nuli ukazuje da je dobijeno rešenje savršeno jer nema ni prebačaja ni podbačaja vrednosti funkcija cilja od idealne tačke. Ovo je očigledno i na grafiku; vidimo da u tački **B** sve tri funkcije cilja dostižu svoju najveću vrednost.

b) Jedino je tačka **B**(11,59, 2,73) Pareto optimalna. Sve tačke na duži **AB** na jednu stranu i **BC** na drugu stranu su slabi Pareto optimumi. ■

3.8. Interaktivno kompromisno programiranje

Interaktivne metode za rešavanje zadataka VKO podrazumevaju aktivno učešće DO u procesu modeliranja problema, generisanja mogućih rešenja, njihove analize i konačnog usvajanja. Razvoj pogodnih metoda zahteva korišćenje odgovarajućih matematičkih modela i poznavanje čovekovog ponašanja u procesu odlučivanja. Algoritam koji će ovde biti prikazan kao predstavnik ovih metoda razvijen je na osnovu sledećih ideja.

Uočeno je da DO lakše može da poredi alternative ako se uz vrednosti kriterijuma iskaže i koliko je koje rešenje blizu svoje idealne vrednosti. Pri tome je pogodno da se rastojanja predstave na skali od 0 do 1.

Kako god da izražava svoje stavove prema konkretnim rešenjima ili kriterijumima, u velikom broju zadataka DO se eksplicitno ili implicitno ponaša kao da kriterijumima dodeljuje težinske koeficijente. Nevolja je što DO ne može unapred da zna kakve će posledice imati određivanje težina, odnosno, ne može svoje osećaje i namere da iz prvog pokušaja iskaže pomoću brojeva koji predstavljaju težinske koeficijente. Zato mu treba pomoći da iterativno dođe do onih vrednosti koje mu najviše odgovaraju.

Posmatrajmo zadatak VLP

$$(\max)\ [f_1(x), \dots , f_p(x)]$$

p.o.

$$x \in X = \{x \in R^n \mid x \ge 0,\ A\,x \le\ b,\ b\ \in R^m\}$$

gde su $f_1(x)$, ... , $f_p(x)$ linearne funkcije.

U ovom algoritmu se umesto rastojanja od idealne tačke, koje je korišćeno u prethodnim modelima, koristi koncept *stepena bliskosti*. Stepen bliskosti $d_k(x)$ koji ima rešenje x ka optimalnoj vrednosti po kriterijumu k je:

$$d_k(x) = \frac{f_k(x) - f_k^L}{f_k^U - f_k^L}, \quad k = 1, \dots, p$$

gde su:

$f_k(x)$ - vrednost kriterijumske funkcije za rešenje x,

f_k^U - maksimalna moguća vrednost kriterijumske funkcije f_k na dopustivom skupu X,

f_k^L - minimalna moguća vrednost kriterijumske funkcije f_k na dopustivom skupu X.

Očigledno da $d_k(x)$ uzima vrednosti između 0 i 1. Stepen bliskosti konkretnog rešenja pokazuje koliko je to rešenje blisko maksimalno mogućoj vrednosti kriterijumske funkcije f_k na dopustivom skupu X.

Umesto originalnog problema sada se rešava sledeći:

$$(\max)\ d^{p+1}(x) = \sum_{k=1}^{p} w_k d_k(x)$$

$$p.o.$$

$$x \in X$$

Kriterijumska funkcija $d^{p+1}(x)$ ovako definisanog problema naziva se agregatna ili kompozitna funkcija. Ona predstavlja *ukupnu bliskost* između vrednosti kriterijuma za rešenje x i idealne tačke.

Oslanjanjući se na rezultate teorije igara, razvijen je sledeći proces rešavanja zadatka višekriterijumskog linearnog programiranja. Počinje se rešavanjem $2p$ jednostavnih problema linearnog programiranja kojima se nalaze maksimalne (f_k^U) i minimalne (f_k^L) vrednosti za svaku kriterijumsku funkciju, $f_k(x)$, $k = 1, \dots, p$, na dopustivom skupu X. Zapamte se marginalna rešenja i izračunaju njihovi stepeni bliskosti po svakom kriterijumu. Jasno je da je stepen bliskosti marginalnog rešenja x^{k*} po kriterijumu k jednak jedinici dok je po drugim kriterijumima, po pravilu manji od jedan. U saradnji sa donosiocem odluke analiziraju se tekuća rešenja i po potrebi generišu nova.

Algoritam interaktivnog kompromisnog programiranja (IKP) [36; 38] ima sledeće korake:

1° Inicijalizacija, odrediti:

a) f_k^U, $k = 1, \dots, p$, kao marginalna rešenja originalnog zadatka, tj. rešiti p jednokriterijumskih zadataka:

$$(\max)\ f_k$$

$$p.o.$$

$$x \in X.$$

Rešenja su x^{kU} i f_k^U, tj. vektor $(f_1^U, \dots, f_p^U)$ je idealna tačka.

b) f_k^L, $k = 1, \dots, p$, kao rešenja p jednokriterijumskih zadataka:

$$\begin{aligned} &(\min)\ f_k \\ &p.o. \\ &x \in X. \end{aligned}$$

Rešenja su x^{kL} i f_k^L, a vektor $(f_1^L, \dots, f_p^L)$ se naziva *anti-idealna tačka*.

2° Usvojiti rešenja x^{jU} kao početna rešenja x^j, $j = 1, \dots, p$, i odrediti stepene bliskosti po formuli

$$d_k(x^j) = \frac{f_k(x^j) - f_k^L}{f_k^U - f_k^L}, \quad k = 1, \dots, p$$

Rezultati se mogu urediti u tabelu oblika:

f	x				f^U
	x^1	x^2	...	x^p	
f_1	d_1^1	d_1^2	...	d_1^p	f_1^U
f_2	d_2^1	d_2^2	...	d_2^p	f_2^U
...	...	...	...	...	...
f_p	d_p^1	d_p^2	...	d_p^p	f_p^U

gde su $d_k^j = d_k(x^j)$ stepeni bliskosti rešenja x^j maksimalno mogućoj vrednosti f_k^U kriterijuma k, $k = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, p$.

3° Rešiti sledeći zadatak LP kojim se nalaze optimalne težine stepena bliskosti:

$$\begin{aligned} &(\max)\ d^{p+1} \\ &p.o. \\ &\sum_{k=1}^{p} w_k d_k^j \geq d^{p+1}, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Rešenje ovog zadatka su težinski koeficijenti w_k dodeljeni stepenima bliskosti kojima bi odgovarala maksimalna vrednost kompozitne funkcije, odnosno ukupnog stepena bliskosti izračunatog kao otežani zbir pojedinih stepena bliskosti.

Treba primetiti da su promenljive koje se određuju u ovom zadatku w_k, $k = 1, \dots, p$, i da one ne zavise od x niti su eksplicitno sadržane u kriterijumskoj funkciji.

4° Formirati novu kompozitnu funkciju koristeći optimalne težinske koeficijente dobijene na koraku 3° algoritma a zatim rešiti sledeći zadatak linearnog programiranja da bi se dobilo novo kompromisno rešenje koje maksimizira kompozitnu funkciju:

$$(\max)\ d^{p+1}(x) = \sum_{k=1}^{p} w_k d_k(x)$$

$$p.o.$$

$$x \in X$$

Rešenje zadatka je x^{p+1}.

5° Odrediti stepene bliskosti d_k^{p+1}, $k = 1, \ldots, p$, idealnoj tački koje odgovaraju rešenju x^{p+1}. Dodati ovu kolonu tabeli koja je pripremljena u koraku 2° i dobiti sledeću tabelu.

f	x					f^U
	x^1	x^2	...	x^p	x^{p+1}	
f_1	d_1^1	d_1^2	...	d_1^p	d_1^{p+1}	f_1^U
f_2	d_2^1	d_2^2	...	d_2^p	d_2^{p+1}	f_2^U
...	...	...	...	...	...	...
f_p	d_p^1	d_p^2	...	d_p^p	d_p^{p+1}	f_p^U

6° Pokazati DO tabelu i zatražiti od njega da kaže da li postoji rešenje koje je za njega bolje u odnosu na sva druga rešenja u tabeli. Ako postoji, to je prihvatljivo rešenje i algoritam se završava. U suprotnom, DO treba da kaže koje je rešenje iz tabele za njega najmanje prihvatljivo. Zatim, to rešenje zameniti novim nađenim u koraku 5° i vratiti se na korak 3°. ■

<u>Primer 3.13.</u> Potrebno je rešiti sledeći višekriterijumski problem:

$$(\max)\ [f_1(x), f_2(x)]$$

$$p.o.$$

$$2x_1+x_2 \leq 11$$

$$2x_1+3x_2 \leq 21$$

$$-2x_1+x_2 \leq 3$$

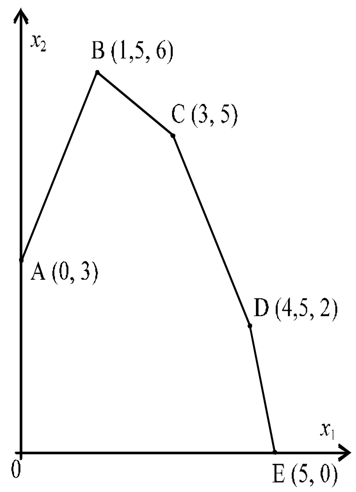
$$4x_1+x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

gde su:

$$f_1 = 3x_1 - x_2$$
$$f_2 = -5x_1 + 2x_2$$

1° Skup dopustivih rešenja prikazan je na slici 3.17.



Slika 3.17.

Lako se računa:

$f_1^L = f_1(\text{A}) = -3$
$f_2^L = f_2(\text{E}) = -25$
$f_1^U = f_1(\text{E}) = 15$
$f_2^U = f_2(\text{A}) = 6.$

Stepeni bliskosti pojedinih rešenja računaju se po formulama

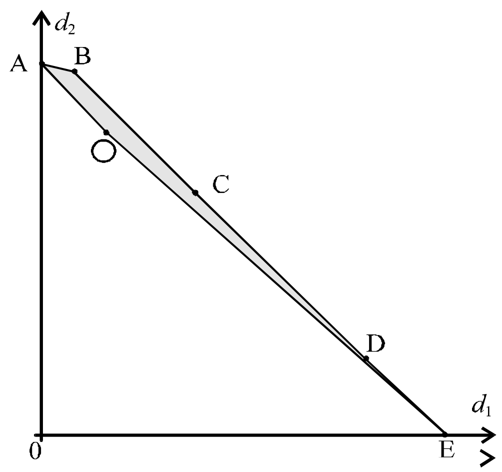
$$d_1(x) = \frac{f_1(x) - f_1^L}{f_1^U - f_1^L} = \frac{f_1(x) + 3}{15 + 3}$$

$$d_2(x) = \frac{f_2(x) - f_2^L}{f_2^U - f_2^L} = \frac{f_2(x) + 25}{6 + 25}$$

Tako se dobija:

	A	B	C	D	E	O
$d_1(x)$	0	0,083	0,389	0,805	1	0,167
$d_2(x)$	1	0,952	0,645	0,210	0	0,806

Skup dopustivih rešenja se na taj način transformiše u skup stepena bliskosti koji se može prikazati i u ravni d_1 O d_2 (slika 3.18).



Slika 3.18.

2° Početna rešenja $x^1 = x(\mathrm{E})$ i $x^2 = x(\mathrm{A})$ prikazuju se u tabeli:

d_i^k	x^1	x^2	f^U
f_1	1	0	15
f_2	0	1	6

3º Sada se rešava sledeći optimizacioni zadatak:

$$(\max)\ d^3$$

$$p.o.$$

$$\begin{aligned} &w_1 \geq d^3 \\ &w_2 \geq d^3 \\ &w_1 + w_2 = 1 \\ &w_1, w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Rešenje je w_1=0,5 i w_2=0,5.

4º Formira se funkcija bliskosti

$$d^3(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_1(x) - f_1^L}{f_1^U - f_1^L}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{f_2(x) - f_2^L}{f_2^U - f_2^L}\right) =$$

$$= \frac{1}{1116}(3x_1 + 5x_2 + 543)$$

Sada se maksimizira ovako definisana funkcija bliskosti

$$(\max)\ d^3 = \frac{1}{1116}(3x_1 + 5x_2 + 543)$$

$$p.o.$$

$$\begin{aligned} &2x_1+x_2 \leq 11 \\ &2x_1+3x_2 \leq 21 \\ &-2x_1+x_2 \leq 3 \\ &4x_1+x_2 \leq 20 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Rešenje je tačka B: x^* = (1, 5, 6) ; f(B) = (- 1,5, 4,5).

5º Računa se bliskost $d^3 = d$ (B) = (0,083, 0,952) i formira nova tabela:

d_i^k	x^1	x^2	x^3	f^U
f_1	1	0	0,083	15
f_2	0	1	0,952	6

6º Tabela se pokazuje DO. Recimo da DO smatra da je najgore od ponuđenih rešenja x^2, $x^2 = x(\mathrm{A})$. Rešenje x^2 se zamenjuje rešenjem x^3.

3º Rešava se sledeći problem:

$$(\max)\ d^3$$

p.o.

$$0{,}083w_1+0{,}952\ w_2 \geq d^3$$
$$w_1 \geq d^3$$
$$w_1 + w_2 = 1$$
$$w_1,\ w_2 \geq 0.$$

Rešenje je $w_1 = 0{,}509$ i $w_2 = 0{,}491$.

4º Formira se funkcija bliskosti

$$d^3(\mathrm{x}) = 0{,}0056x_1+0{,}0034x_2+0{,}481$$

Sada se maksimizira

$$(\max)\ d^3(x) = 0{,}0056x_1+0{,}0034x_2+0{,}481$$

p.o.

$$2x_1+x_2 \leq 11$$
$$2x_1+3x_2 \leq 21$$
$$-2x_1+x_2 \leq 3$$
$$4x_1+x_2 \leq 20$$
$$x_1,x_2 \geq 0$$

Rešenje je tačka C: $x^3 = x(\mathrm{C}) = (3,\ 5)$; $f(\mathrm{C}) = (4,\ -5)$.

5º Računa se bliskost $d^3 = d\ (\mathrm{C}) = (0{,}339,\ 0{,}645)$ i formira nova tabela

d_i^k	x^1	x^2	x^3	f^U
f_1	1	0,083	0,339	18
f_2	0	0,952	0,645	6

6° Tabela se pokazuje DO i recimo da on prihvata ponuđeno rešenje x^2. ■

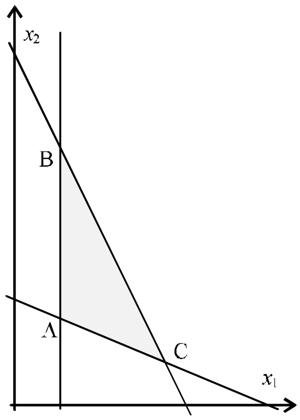
3.9. Rešeni zadaci

Zadatak 3.1. Rešiti zadatak VLP u kome je potrebno minimizirati funkciju $f_1(x) = x_1 + x_2$, maksimizirati funkciju $f_2(x) = x_1 + 2x_2$ i minimizirati funkciju $f_3(x) = x_1 + 3x_2$, pri ograničenjima:

$$x_1 + 2x_2 \geq 12$$
$$2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_2 \geq 0$$

a) primenom leksikografske metode, ako je redosled značajnosti kriterijuma jednak njihovim indeksima;
b) primenom relaksirane leksikografske metode uz isti redosled značajnosti, ako su koeficijenti odstupanja za kriterijume: $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 2$;
c) primenom metode težinskih koeficijenata ako su težine kriterijuma: $w_1 = 1$, $w_2 = 3$ i $w_3 = 2$;
d) primenom metode rastojanja ako se želi dostići idealna vrednost svih kriterijuma.

Rešenje: Ovaj zadatak VKO (slika 3.19.) je karakterističan po tome što su sva dopustiva rešenja (sve tačke koje pripadaju trouglu A (2, 5), B (2, 12), C (6,67, 2,67)) Pareto optimalna.



Slika 3.19.

a) Rešenje se dobija u prvom koraku: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 5$, $f_1^* = 7$, $f_2^* = 12$, $f_3^* = 17$.

b) $x_1^* = 4$, $x_2^* = 4$, $f_1^* = 8$, $f_2^* = 12$, $f_3^* = 16$.

c) $x_1^* = 6{,}67$, $x_2^* = 2{,}67$, $f_1^* = 9{,}33$, $f_2^* = 12$, $f_3^* = 14{,}67$.

d) Rešenje je isto kao i pod (c), a suma odstupanja svih funkcija cilja od svojih idealnih vrednosti je 16,33. ■

Zadatak 3.2. Novinska agencija izdaje dva mesečna časopisa A i B koje štampa u sopstvenoj štampariji. Mesečna količina papira koju štamparija može da nabavi iznosi 10.000 tabaka. Od jednog tabaka može da se odštampa 1,25 časopisa A ili 2,5 časopisa B. Časopis A se štampa u jednoj boji (crnoj), a B u 4 boje. Po primerku časopisa A se potroši 5 g boje, a po primerku časopisa B 3 g od svake boje. Kilogram boje košta 55 din, a zna se da je žuta boja deficitarna i da je ima na raspolaganju samo 9 kg mesečno. Primerak časopisa A košta 8 din, a časopisa B 20 din. Smatra se, da je neisplativo štampati časopis ako je tiraž manji od 1500 primeraka.

a) Formulisati matematički model problema kojim će se odrediti optimalan tiraž ovih časopisa, tako da se maksimizira zarada štamparije i minimizira novac potrošen na boju.

b) Koliki treba da bude tiraž ovih časopisa ako je direktor agencije odredio da je zarada firme od 70.000 din dovoljana, a da je primarni kriterijum, pri određivanju tiraža, smanjenje potrošnje boje.

<u>Rešenje:</u> a) Matematički model se može formulisati na sledeći način:

$$(\max) f_1(x) = 8x_1 + 20x_2$$

$$(\min) f_2(x) = 0{,}275x_1 + 0{,}660x_2$$

p.o.

$$0{,}8x_1 + 0{,}4x_2 \leq 10000$$

$$3x_2 \leq 9000$$

$$x_1 \geq 1500$$

$$x_2 \geq 1500$$

b) Sa raspoloživim podacima možemo primeniti metodu ε ograničenja i dobićemo sledeće rešenje: časopis A treba štampati u tiražu 1500, a časopis B u tiražu 2900 primeraka; pri tome će zarada agencije iznositi predviđenih 70.000 din, a na boju će biti potrošeno 2326,50 din. ■