2. LOKACIJSKI PROBLEMI

2.1. Uvod

Posebnu klasu zadataka optimizacije čine problemi lokacije, koji u savremenim operacionim istraživanjima izazivaju značajno interesovanje [30]. U opštem slučaju, lokacijski problem je određivanje položaja (lokacije) nekih novih objekata u postojećem prostoru u kome se već nalaze drugi relevantni objekti. Novi objekti su obično neka vrsta centara koji pružaju usluge i mi ćemo ih zvati *snabdevači*. Postojeći objekti su korisnici usluga ili klijenti i mi ćemo ih zvati *korisnici*.

Moguće su različite klasifikacije lokacijskih problema. Kao kriterijumi klasifikacije obično koriste se sledeći:

a) broj novih objekata koje treba razmestiti - jedan ili više;
b) karakter objekta - da li je željen ili neželjen;
c) mogući položaj objekta - da li postoji predodređeni diskretni skup potencijalnih lokacija ili se objekat može postaviti u bilo koju tačku datog kontinualnog skupa;
d) karakter prostora u koji se locira objekat - da li je u pitanju ravan, mreža ili nešto treće;
e) metrika koja se koristi za računanje rastojanja između dve tačke u posmatranom prostoru.

Pošto na rešenje lokacijskog problema značajno utiče način na koji se računa rastojanje između dve tačke u posmatranom prostoru, najpre ćemo izložiti različite pristupe tom zadatku.

Metrika

Metrika je način na koji se određuje rastojanje između dva elementa nekog skupa. U lokacijskim problemima je potrebno odrediti rastojanje između dve tačke u posmatranom prostoru na osnovu poznavanja njihovih koordinata. U tu svrhu se koriste tzv. l_p metrike gde je p realni broj takav da je $1 \le p \le \infty$. Ove metrike se u opštem slučaju definišu nad tačkama prostora R^n (tj. skupa svih uređenih n-torki realnih brojeva).

Neka su u prostoru R^n date dve tačke $A = (x_1^A, \ldots, x_j^A, \ldots, x_n^A)$ i $B = (x_1^B, \ldots, x_j^B, \ldots, x_n^B)$. Rastojanje između tačaka A i B u l_p metrici za $1 \le p < \infty$ se računa po obrascu:

$$d_{l_p}(A, B) = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} |x_j^A - x_j^B|^p} \ ,$$

dok je za $p = \infty$:

$$d_{l_\infty}(A, B) = \lim_{p \to \infty} d_{l_p}(A, B)$$

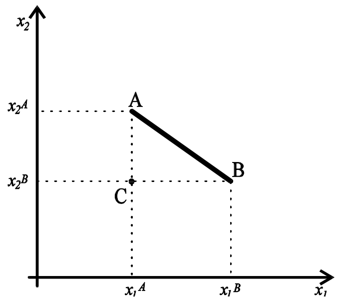
Mada teorijski ima beskonačno mnogo metrika l_p tipa, najznačajnije su i najviše se koriste u praksi sledeće:

- l_1 (pravougaona) metrika: $$d_{l_1}(A, B) = \sum_{j=1}^{n} |x_j^A - x_j^B|$$
- l_2 (Euklidova) metrika: $$d_{l_2}(A, B) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^A - x_j^B\right)^2}$$
- l_∞ (Čebiševljeva) metrika: $$d_{l_\infty}(A, B) = \max_{1 \le j \le n} |x_j^A - x_j^B|$$

Tumačenje ovih metrika i razlike između njih daćemo na primeru prostora R^2 sa slike 2.1. U l_1 metrici, rastojanje između tačaka A i B jednako je zbiru dužina kateta $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, tj.

$$d_{l_1}(A,B) = x_1^B - x_1^A + x_2^A - x_2^B.$$

Ovo rastojanje se naziva i *Menhetn* rastojanje jer podseća na rastojanja u ovoj njujorškoj četvrti u kojoj su ulice i avenije pod pravim uglom.



Slika 2.1.

U l_2 metrici rastojanje između tačaka A i B je jednako hipotenuzi trougla ABC, tj.

$$d_{l_2}(A,B) = \sqrt{(x_1^B - x_1^A)^2 + (x_2^A - x_2^B)^2} \; .$$

Ovo rastojanje se naziva Euklidsko jer se u klasičnoj Euklidskoj geometriji rastojanje između dve tačke definiše upravo na ovakav način. Na kraju, u l_∞ metrici, rastojanje između tačaka A i B je duža od kateta $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, što je u ovom slučaju $\overline{BC}$, tj.

$$d_{l_\infty}(A,B) = x_1^B - x_1^A.$$

U praktičnim primerima, obično se usvaja da za $p \geq 7$ važi $d_{l_p} \approx d_{l_\infty}$.

Za bilo koje dve tačke važi da je $d_{l_1} \geq d_{l_2} \geq d_{l_\infty}$, odnosno, u opštem slučaju se može dokazati sledeće tvrđenje: ako p, $q \in R$ i p, $q \geq 1$ tada je $p > q \Leftrightarrow d_{l_p} \leq d_{l_q}$.

Izbor l_p metrike zavisi od više faktora, od kojih su najznačajniji:

1. Priroda problema: korišćenje određene l_p metrike daje manje ili više dobru aproksimaciju realnog rastojanja u zavisnosti od prirode prostora u kome se tačke nalaze. Na primer, ako je moguće kretati se pravolinijski između dve tačke, tačno rastojanje između njih se dobija Euklidovom metrikom, ali u gradovima u kojima su ulice pod pravim uglom, dužina puta između dve tačke najbolje će se aproksimirati pravougaonom metrikom.

2. Računska složenost: ako je neki model bitno lakše rešiti primenom određene metrike, a preciznost dobijenog rezultata nije od presudnog značaja (tj. ako se manja odstupanja mogu tolerisati), tada će ta metrika biti upotrebljena.

Pri rešavanju lokacijskih problema važno je naglasiti koja metrika se koristiti, pogotovu kada se one razlikuju od Euklidove.

U daljem tekstu isključivo će se razmatrati problemi lokacije u ravni, tj. u prostoru R^2.

2.2. Diskretni lokacijski problemi

Kada su tačke, na koje se može postaviti novi objekat, elementi konačnog skupa, radi se o diskretnom lokacijskom problemu.

Neka je dato m tačaka u ravni $A_1, \dots, A_i, \dots, A_m$ na kojima se nalaze postojeći objekti (korisnci) i r potencijalnih lokacija $B_1, \dots, B_k, \dots, B_r$ na koje je moguće postaviti novi željeni objekat (snabdevač). *Suma otežanih* (*težinskih*) *rastojanja* od potencijalne lokacije snabdevača B_k do korisnika je:

$$W_k = \sum_{i=1}^{m} w_i\, d(A_i, B_k)$$

gde su:

w_i - težinski koeficijent i-te zadate tačke (npr. broj stanara neke zgrade, važnost tačke itd.);

$d(A_i, B_k)$ - rastojanje između i-te zadate tačke i k-te potencijalne lokacije u odgovarajućoj metrici.

Zadatak je da se odredi ona lokacija B_k^* za koje je suma otežanih rastojanja minimalna, tj.

$$W_{k^*} = \min_{1 \le k \le r} \{W_k\}$$

Postavljeni zadatak se rešava tako što se za svaku potencijalnu lokaciju $B_k \in \{B_1, \dots, B_r\}$ izračuna suma otežanih rastojanja, a za rešenje se bira ona tačka za koju je ova suma najmanja. Za „merenje“ rastojanja se može usvojiti bilo koja metrika, a najčešće se koristi Euklidova.

Primer 2.1. Date su koordinate pet postojećih objekata: A (1, 2), B (2, 5), C (3, 4), D (6, 0) i E (5, 5). Moguće su tri lokacije za novi objekat: N_1 (2, 3), N_2 (3, 2) i N_3 (6, 3). Težinski koficijenti su: $w_A = w_D = 2$, $w_B = w_C = 1$, a $w_E = 3$. Koristeći Euklidovu metriku odrediti koordinate novog objekta.

Rešenje:

$W_1 = 2[(1\text{-}2)^2 + (2\text{-}3)^2]^{½} + 1[(2\text{-}2)^2 + (5\text{-}3)^2]^{½} + 1[(3\text{-}2)^2 + (4\text{-}3)^2]^{½} + 2[(6\text{-}2)^2 + (0\text{-}3)^2]^{½} + 3[(5\text{-}2)^2 + (5\text{-}3)^2]^{½} = \underline{27{,}06}$

$W_2 = 2[(1\text{-}3)^2 + (2\text{-}2)^2]^{½} + 1[(2\text{-}3)^2 + (5\text{-}2)^2]^{½} + 1[(3\text{-}3)^2 + (4\text{-}2)^2]^{½} + 2[(6\text{-}3)^2 + (0\text{-}2)^2]^{½} + 3[(5\text{-}3)^2 + (5\text{-}2)^2]^{½} = 27{,}19$

$W_3 = 2[(1\text{-}6)^2 + (2\text{-}3)^2]^{½} + 1[(2\text{-}6)^2 + (5\text{-}3)^2]^{½} + 1[(3\text{-}6)^2 + (4\text{-}3)^2]^{½} + 2[(6\text{-}6)^2 + (0\text{-}3)^2]^{½} + 3[(5\text{-}6)^2 + (5\text{-}3)^2]^{½} = 30{,}54$

Zaključak: Novi objekat će se graditi na lokaciji N_1, tj. na lokaciji čije su koordinate (2, 3). Suma otežanih rastojanja za tu tačku iznosi 27,06. ■

Primer 2.2. Rešiti prethodni zadatak koristeći Čebiševljevu metriku.

Rešenje:

$W_1 = 2 \max\{|1\text{-}2|, |2\text{-}3|\} + 1 \max\{|2\text{-}2|, |5\text{-}3|\} + 1 \max\{|3\text{-}2|, |4\text{-}3|\} + 2 \max\{|6\text{-}2|, |0\text{-}3|\} + + 3 \max\{|5\text{-}2|, |5\text{-}3|\} = 2 + 2 + 1 + 8 + 9 = \underline{22}$

$W_2 = 2 \max\{|1\text{-}3|, |2\text{-}2|\} + 1 \max\{|2\text{-}3|, |5\text{-}2|\} + 1 \max\{|3\text{-}3|, |4\text{-}2|\} + 2 \max\{|6\text{-}3|, |0\text{-}2|\} + + 3 \max\{|5\text{-}3|, |5\text{-}2|\} = 4 + 3 + 2 + 6 + 9 = 24$

$W_3 = 2 \max\{|1\text{-}6|, |2\text{-}3|\} + 1 \max\{|2\text{-}6|, |5\text{-}3|\} + 1 \max\{|3\text{-}6|, |4\text{-}3|\} + 2 \max\{|6\text{-}6|, |0\text{-}3|\} + + 3 \max\{|5\text{-}6|, |5\text{-}3|\} = 10 + 4 + 3 + 6 + 6 = 29$

Zaključak: I u Čebiševljevoj metrici se dobija da novi objekat treba izgraditi na lokaciji N_1, ali sada suma otežanih rastojanja iznosi 22. ■

Primer 2.3. Trgovinsko preduzeće ima 5 prodavnica nameštaja u jednom regionu. Imajući u vidu troškove dopremanja robe, rukovodstvo je odlučilo da sagradi objekat koji će biti skladište robe za ove prodavnice. Dobijene su dozvole za gradnju na tri lokacije. Koordinate ovih lokacija su: S_1 (2, 1), S_2 (6, 5) i S_3 (4, 7). Koordinate prodavnica su: P_1 (1, 6), P_2 (2, 7), P_3 (1, 0), P_4 (6, 7) i P_5 (6, 1), a na osnovu njihovog poslovanja dodeljeni su im težinski koeficijenti: 2, 3, 3, 2 i 5 respektivno.
Potrebno je odrediti lokaciju skladišta tako da suma otežanih

rastojanja između njega i svih prodavnica bude minimalna. Za merenje rastojanja između objekata koristiti l_1 metriku.

Rešenje:

W_1 = 2 (|1-2| + |6-1|) + 3 (|2-2| + |7-1|) + + 3 (|1-2| + |0-1|) + 2 (|6-2| + |7-1|) + + 5 (|6-2| + |1-1|) = 76

W_2 = 2 (|1-6| + |6-5|) + 3 (|2-6| + |7-5|) + + 3 (|1-6| + |0-5|) + 2 (|6-6| + |7-5|) + 5 (|6-6| + |1-5|) = 69

W_3 = 2 (|1-4| + |6-7|) + 3 (|2-4| + |7-7|) + 3 (|1-4| + |0-7|) + 2 (|6-4| + |7-7|) + 5 (|6-4| + |1-7|) = 88

Zaključak:

Preduzeće treba da sagradi skladište na lokaciji S_2 na koordinatama (6, 5) da bi suma otežanih rastojanja bila minimalna. Ona iznosi 69. ■

2.3. Kontinualni lokacijski problemi

Veberov problem

Neka je dato m tačaka u ravni $A_1, A_2, \dots, A_m$, gde je $A_i = (a_1^i, a_2^i)$, $i = 1, \dots, m$. Potrebno je naći tačku $X = (x_1, x_2)$ za koju je suma otežanih rastojanja do datih tačaka minimalna, tj. treba rešiti sledeći problem bezuslovne optimizacije:

$$(\min)\ f(X) = \sum_{i=1}^{m} w_i d_i(X)$$

gde su:

w_i - težinski koeficijent tačke A_i;

$d_i(X) = d(A_i, X)$ - rastojanje tačke A_i od lokacije X;

Ovako postavljen problem [46] se naziva problem tipa *minisum* ili *minisum* problem.

Najčešći je slučaj da se usvoji Euklidova metrika. Tada matematički model ima sledeći oblik:

$$(\min)\ f(X) = \sum_{i=1}^{m} w_i \sqrt{(x_1 - a_1^i)^2 + (x_2 - a_2^i)^2}$$

Ovaj zadatak bezuslovne nelinearne optimizacije u opštem slučaju nije moguće rešiti analitički. *Vajsfeldov algoritam* [47; 48] je iterativna numerička metoda za rešavanje Veberovog problema za Euklidovu metriku i njime se dobija približno rešenje problema.

Vajsfeldov algoritam za rešavanje Veberovog problema

Dato je m tačaka $A_i = (a_1^i, a_2^i)$, njihove težine w_i, $i = 1, \ldots, m$ i koeficijent kriterijuma zaustavljanja numeričkog postupka $\varepsilon > 0$; potrebno je odrediti lokaciju (koordinate) nove tačke koristeći kao kriterijum sumu otežanih rastojanja (*minisum* problem).

Pošto se zna da ovaj algoritam jako sporo konvergira kada se optimalno rešenje poklapa sa jednom od zadatih tačaka, najpre se proverava da li je neka od postojećih tačaka optimalna lokacija za novi objekat. Tek ako se utvrdi da nije, prelazi se na iterativni deo algoritma.

Algoritam

1° Izračunati međusobna rastojanja između svih m tačaka:

$$d(A_r, A_l) = \sqrt{(a_1^r - a_1^l)^2 + (a_2^r - a_2^l)^2} \quad , \forall\, r, l \in \{1, \ldots, m\}.$$

2° Proveriti da li za neku tačku $r \in \{1, \ldots, m\}$ važi:

$$c_r = \sqrt{\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{w_i(a_1^r - a_1^i)}{d(A_r, A_i)}\right)^2 + \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{w_i(a_2^r - a_2^i)}{d(A_r, A_i)}\right)^2} \leq w_r$$

Ako je ovaj uslov ispunjen za neko r => KRAJ. Rešenje se nalazi u tački A_r.

U suprotnom, ići na sledeći korak.

3° Stavimo da je $k = 0$ i odredimo početno rešenje $X^o = (x_1^o, x_2^o)$ po formuli:

$$x_j^o = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_j^i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \quad , \quad j = 1,\ 2$$

4° Izračunati rastojanja između $X^k = (x_1^k, x_2^k)$ i zadatih tačaka:

$$d(X^k, A_i) = \sqrt{(x_1^k - a_1^i)^2 + (x_2^k - a_2^i)^2} \quad , \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}.$$

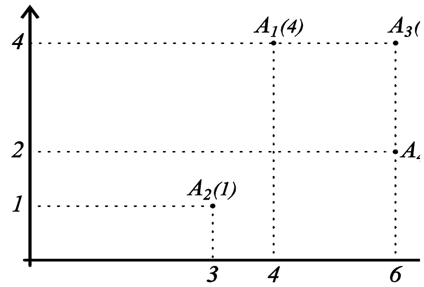
5° Računamo po iterativnoj formuli:

$$x_j^{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i a_j^i}{d(X^k,\ A_i)}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d(X^k,\ A_i)}} \quad , \quad j = 1,\ 2$$

6° Ako je $|x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon$, $\forall\, j \in \{1, 2\}$ => KRAJ. X^{k+1} se usvaja kao „dovoljno dobro“ rešenje.
U suprotnom, staviti $k = k + 1$ i ići na korak 4°. ■

Primer 2.4. Date su koordinate i težinski koeficijenti za četiri tačke. Potrebno je odrediti koordinate nove tačke čija će suma otežanih rastojanja od zadatih tačaka biti minimalna. Koristiti Euklidovu metriku, a za koeficijent kriterijuma zaustavljanja uzeti $\varepsilon = 0{,}05$.

$A_1(4, 4)$, $w_1 = 4$
$A_2(3, 1)$, $w_2 = 1$
$A_3(6, 4)$, $w_3 = 2$
$A_4(6, 2)$, $w_4 = 4$



Slika 2.2.

Rešenje:

1° Određujemo međusobna rastojanja između zadatih tačaka:

$$d(A_1,\ A_2) = \sqrt{(4-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10} = 3{,}162$$

$$d(A_1,\ A_3) = \sqrt{(6-4)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$d(A_1,\ A_4) = 2{,}828$$

$$d(A_2,\ A_3) = 4{,}243$$

$$d(A_2,\ A_4) = 3{,}162$$

$$d(A_3,\ A_4) = 2$$

2º Proveravamo da li je rešenje u nekoj od zadatih tačaka:

$$_1 = \left[\left(\frac{1(4-3)}{3{,}162} + \frac{2(4-6)}{2} + \frac{4(4-6)}{2{,}828}\right)^2 + \left(\frac{1(4-1)}{3{,}162} + \frac{2(4-4)}{2} + \frac{4(4-2)}{2{,}828}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 5{,}884 \geq$$

$c_2 = 9{,}155 > 1$
$c_3 = 6{,}657 > 2$
$c_4 = 5{,}884 > 4$
Rešenje se ne nalazi ni u jednoj od zadatih tačaka. Prelazimo na iterativni deo.

3º Određujemo početno rešenje X^o:

$$x_1^o = \frac{4\cdot 4 + 1\cdot 3 + 2\cdot 6 + 4\cdot 6}{4 + 1 + 2 + 4} = 5$$

$$x_2^o = \frac{4\cdot 4 + 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 4\cdot 2}{4 + 1 + 2 + 4} = 3$$

4º Izračunavamo rastojanja od početnog rešenja do zadatih tačaka:

$$d(X^o,\ A_1) = \sqrt{(5-4)^2 + (3-4)^2} = 1{,}414$$

$$d(X^o,\ A_2) = 2{,}828$$

$$d(X^o,\ A_3) = 1{,}414$$

$$d(X^o,\ A_4) = 1{,}414$$

5º Određivanje novog rešenja X^1:

$$x_1^1 = \frac{\dfrac{4\cdot 4}{1{,}414} + \dfrac{1\cdot 3}{2{,}828} + \dfrac{2\cdot 6}{1{,}414} + \dfrac{4\cdot 6}{1{,}414}}{\dfrac{4}{1{,}414} + \dfrac{1}{2{,}828} + \dfrac{2}{1{,}414} + \dfrac{4}{1{,}414}} = 5{,}0952$$

$$x_2^1 = \frac{\frac{4\cdot 4}{1{,}414} + \frac{1\cdot 1}{2{,}828} + \frac{2\cdot 4}{1{,}414} + \frac{4\cdot 2}{1{,}414}}{\frac{4}{1{,}414} + \frac{1}{2{,}828} + \frac{2}{1{,}414} + \frac{4}{1{,}414}} = 3{,}0952$$

6º Proveravamo da li je zadovoljen kriterijum zaustavljanja:
$|5 - 5{,}095| = 0{,}095 > \varepsilon \Rightarrow k = 1$, nova iteracija.

4º $d(X^1, A_1) = 1{,}421$

$d(X^1, A_2) = 2{,}963$

$d(X^1, A_3) = 1{,}275$

$d(X^1, A_4) = 1{,}421$

5º $x_1^2 = 5{,}118$
$x_2^2 = 3{,}118$

6º $|5{,}0952 - 5{,}118| = 0{,}023 < \varepsilon$
$|3{,}0952 - 3{,}118| = 0{,}023 < \varepsilon$
=> KRAJ.

Zaključak: $\overline{X} = (5{,}118,\ 3{,}118)$ je „dovoljno dobro“ rešenje postavljenog zadatka. ■

Primer 2.5. U jednoj opštini se nalaze četiri naseljena mesta. Potrebno je sagraditi osnovnu školu u koju bu išla deca iz sva četiri naselja. Da bi se odredila lokacija nove škole, u obzir se uzimaju položaji tih naselja i broj stanovnika (smatra se da je broj đaka proporcionalan broju stanovnika). Lokacije mesta (koordinate zadate u kilometrima) i broj stanovnika (u hiljadama) je dat u sledećoj tabeli:

Mesta:	M1	M2	M3	M4
X	3	8	10	12
Y	7	1	5	1
Broj stanovnika	80	30	25	40

Potrebno je odrediti mesto gradnje nove škole, tako da ukupan put svih đaka od kuće do škole bude minimalan. Smatra se da je put od naselja do škole pravolinijski i da je rezultat dovoljno dobar ako je razlika obe koordinate između dve uzastopne iteracije manja od 20 metara.

Rešenje: Na osnovu teksta zadatka se zaključuje da se radi o Veberovom problemu i Euklidovoj metrici, dakle primenićemo Vajsfeldov algoritam s tim da je **ε** = 0,02 km.

Udaljenost između tačaka je:

$$d(M_1,\ M_2) = \sqrt{(3-8)^2 + (7-1)^2} = 7{,}810$$

$$d(M_1,\ M_3) = 7{,}280$$

$$d(M_1,\ M_4) = 10{,}817$$

$$d(M_2,\ M_3) = 4{,}472$$

$$d(M_2,\ M_4) = 4{,}0$$

$$d(M_3,\ M_4) = 4{,}472$$

2° Proveravamo da li je rešenje u nekoj od zadatih tačaka:

$$c_1 = \left[\left(\frac{30(3-8)}{7{,}81} + \frac{25(3-10)}{7{,}28} + \frac{40(3-12)}{10{,}817}\right)^2 + \left(\frac{30(7-1)}{7{,}81} + \frac{25(7-5)}{7{,}28} + \frac{40(7-1)}{10{,}817}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$c_1 = 92{,}58 > 80$
$c_2 = 83{,}82 > 30$
$c_3 = 83{,}07 > 25$
$c_4 = 126{,}7 > 40$.

Rešenje se ne nalazi ni u jednoj od zadatih tačaka. Prelazimo na iterativni deo.

3° Određujemo početno rešenje X^o:

$x_1^o = 6{,}914$
$x_2^o = 4{,}314$

4° Izračunavamo udaljenosti od početnog rešenja do zadatih tačaka:

$$d(X^o,\ M_1) = 4{,}747$$

$d(X^o, M_2) = 3{,}488$

$d(X^o, M_3) = 3{,}161$

$d(X^o, M_4) = 6{,}070$

5° Određivanje novog rešenja X^1:
$x_1^1 = 6{,}947$
$x_2^1 = 4{,}323$

6° Pošto je $|6{,}914 - 6{,}947| = 0{,}033 > \varepsilon$ => $k = 1$, nova iteracija.

4° $d(X^1, M_1) = 4{,}769$

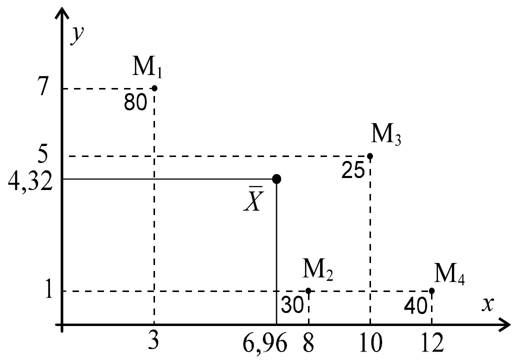
$d(X^1, M_2) = 3{,}486$

$d(X^1, M_3) = 3{,}128$

$d(X^1, M_4) = 6{,}048$

5° $x_1^2 = 6{,}964$
$x_2^2 = 4{,}317$

6° $|6{,}947 - 6{,}964| = 0{,}017 < \varepsilon$
$|4{,}323 - 4{,}317| = 0{,}006 < \varepsilon$
=> KRAJ.



Slika 2.3.

Zaključak: Za lokaciju gradnje škole se usvaja tačka $\bar{X}$ na koordinatama (6,964, 4,317) (slika 2.3.). ■

Rešavanje Veberovog problema sa pravougaonom metrikom

Potrebno je rešiti sledeći problem:

$$\begin{aligned}(min)\ f(x) &= \sum_{i=1}^{m} w_i d_i(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i\left(|x_1 - a_1^i| + |x_2 - a_2^i|\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{m} w_i|x_1 - a_1^i| + \sum_{i=1}^{m} w_i|x_2 - a_2^i| = \\ &= f_1(x_1) + f_2(x_2)\end{aligned}$$

Pošto je minimum zbira u ovom slučaju jednak zbiru minimuma, tj:

$$(\min)\ f(x) = (\min)\ f_1(x_1) + (\min)\ f_2(x_2) =$$
$$(\min) \sum_{i=1}^{m} w_i|x_1 - a_1^i| + (\min) \sum_{i=1}^{m} w_i|x_2 - a_2^i|$$

rešenje polaznog modela se može dobiti rešavanjem sledeća dva zadatka:

$$(\min)\ f_1(x_1) = \sum_{i=1}^{m} w_i|x_1 - a_1^i|$$
$$(\min)\ f_2(x_2) = \sum_{i=1}^{m} w_i|x_2 - a_2^i|$$

Na taj način rešavanje originalnog problema sa dve promenljive svedeno je na rešavanje dva nezavisna, ali po strukturi identična zadatka sa po jednom promenljivom. Znači, prvo se rešava problem za jednu koordinatu: (min) $f_1(x_1)$ odakle se dobija x_1^*, a zatim za drugu: (min) $f_2(x_2)$ odakle se dobija x_2^*. Tačka $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ predstavlja rešenje polaznog Veberovog problema.

Neka su, kao i u prethodnom slučaju, zadate tačake $A_i = (a_1^i, a_2^i)$ i težinski koficijenti tih tačaka w_i, $i = 1, \dots, m$.

Algoritam za određivanje j-te koordinate

1° Sortirati koordinate tačaka A_i, $i = 1, \dots, m$ u neopadajući niz. Nadalje ćemo smatrati da indeks i raste po sortiranom redosledu, tj.

$$a_j^1 \le a_j^2 \le \dots \le a_j^m.$$

Moguća su dva slučaja:

2° Ako za neko $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ važi: $\sum_{i=1}^{k-1} w_i < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i < \sum_{i=1}^{k} w_i$ pri

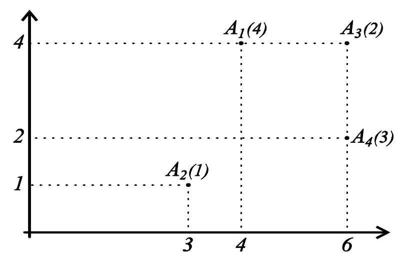
čemu je za $k = 1$ leva strana nejednakosti jednaka 0, tada je tražena j-ta koordinata $x_j^* = a_j^k$.

3° Ako za neko $k \in \{1, 2, ..., m\}$ važi: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i = \sum_{i=1}^{k} w_i$, tada je rešenje višestruko, tj. tražena koordinata x_j^* može da ima bilo koju vrednost iz intervala $[a_j^k, a_j^{k+1}]$. ■

Primenjujući ovaj algoritam za $j = 1$, a zatim za $j = 2$ dobijaju se obe koordinate tražene tačke X^*.

Primer 2.6. Rešiti zadatak iz prethodnog primera koristeći pravougaonu metriku uz izmenu da je težina tačke A_4 jednaka 3. Znači:

$A_1(4, 4)$, $w_1 = 4$
$A_2(3, 1)$, $w_2 = 1$
$A_3(6, 4)$, $w_3 = 2$
$A_4(6, 2)$, $w_4 = 3$



Slika 2.4.

Rešenje: *Koordinata x_1*:
Sortiraju se tačke po prvoj koordinati i posmatramo njihove težine.

Koordinate (a_1^j)	3	4	6	6
Težine (w_j)	1	4	2	3
k	1	2	3	4
$\sum_{i=1}^{k} w_i$	1	5	7	10

↑

Pošto je $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i = 5$, za $k = 2$ je zadovoljen uslov da je

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i = \sum_{i=1}^{k} w_i$. Znači da koordinata x_1^* može imati bilo

koju vrednost između 4 i 6, tj. $4 \le x_1^* \le 6$.

Koordinata x_2:
Na isti način se sortiraju tačke po drugoj koordinati:

Koordinate (a_2^j)	1	2	4	4
Težine (w_j)	1	3	2	4
k	1	2	3	4
$\sum_{i=1}^{k} w_i$	1	4	6	10

↑

Ovde važi da je $\sum_{i=1}^{k-1} w_i < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i < \sum_{i=1}^{k} w_i$ za $k = 3$, odnosno

$x_2^* = a_2^3 = 6$. Ovaj zadatak ima beskonačno mnogo rešenja, tj. $X^* = (x_1^*, 6)$, gde je $x_1^* \in [4, 6]$. ■

Primer 2.7. Rešiti sledeći Veberov problem koristeći pravougaonu metriku:

Lokacije		L1	L2	L3	L4	L5	L6
Koordinate	x	500	400	200	500	300	100
	y	200	300	400	500	100	200
Tež. koeficijenti		0,08	0,04	0,22	0,10	0,12	0,44

Rešenje: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i = 0,5$

a_1^i	100	200	300	400	500	500
w_i	0,44	0,22	0,12	0,04	0,08	0,10
$\sum w_i$	0,44	0,66	0,78	0,82	0,90	1,0

↑

$x_1^* = 200.$

a_2^i	100	200	200	300	400	500
w_i	0,12	0,08	0,44	0,04	0,22	0,10
$\sum w_i$	0,12	0,20	0,64	0,68	0,90	1,0

↑

$x_2^* = 200.$

Zaključak: Rešenje zadatka je tačka $X^* = (200, 200)$. ■

Raulsov problem

U nekim situacijama lokacijski model u kome se kao kriterijum koristi suma otežanih rastojanja (Veberov, odnosno *minisum* problem) nije pogodan jer se dešava da su u optimalnom rešenju najudaljenije tačke preterano zapostavljene. Ovo može biti neprihvatljivo pri rešavanju nekih praktičnih problema kao što su raspoređivanje radio i televizijskih predajnika, projektovanje mreže repetitora, određivanja rasporeda radara i sl. U takvim slučajevima se zahteva da novi objekat bude što je moguće bliži najudaljenijoj lokaciji. Kao kriterijum se onda koristi rastojanje do najudaljenijeg objekta. Takvi problemi se zovu problemi tipa *minimax* ili *minimax* problemi.

Matematički model ima oblik:

$$(\min)\ f(X) = \max_{1 \le i \le m} \left\{ w_i d_i(X) \right\}$$

gde $d_i(X)$ i w_i imaju isto značenje kao i kod Veberovog problema.

Kod većine praktičnih problema ovog tipa težinski koeficijenti su jednaki jedinici, pa se matematički model svodi na:

$$(\min)\ f(X) = \max_{1 \le i \le m}\ d_i(X)$$

Rešenje zadatka X^* je u slučaju Euklidove metrike centar kruga minimalnog prečnika koji sadrži sve zadate tačke A_i , i = 1, ... , m. Za nalaženje ove tačke koristi se *algoritam Elzinga i Herna* [15; 16]. Ovaj algoritam je konstrukciono geometrijskog tipa, ali se lako može prevesti u analitički oblik.

Algoritam Elzinga i Herna

1° Izabrati bilo koje dve tačke iz skupa $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ i obeležiti ih sa $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$.

2° Kroz tačke $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ konstruisati kružnicu čiji je prečnik duž $\overline{\boldsymbol{AB}}$. Ako sve tačke iz A pripadaju krugu $\boldsymbol{K}$ određenom ovom kružnicom, tada je centar tog kruga rešenje problema, tj. $X^* = \dfrac{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}}{2}$, KRAJ.

U suprotnom izabrati proizvoljnu tačku iz skupa A koja je van kruga $\boldsymbol{K}$ i obeležiti je sa $\boldsymbol{C}$.

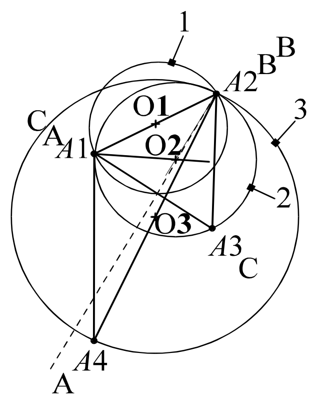
3° Ako je trougao $\boldsymbol{ABC}$ pravougli ili tupougli, obeležiti temena najduže stranice sa $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ i ići na korak 2°.
U suprotnom opisati kružnicu oko trougla $\boldsymbol{ABC}$ i sa $\boldsymbol{K}$ obeležiti krug određen ovom kružnicom.

4° Ako sve tačke iz skupa A pripadaju krugu $\boldsymbol{K}$, KRAJ. Centar ovog kruga je rešenje zadatka X^*.
U suprotnom ići na sledeći korak.

5° Izabrati proizvoljnu tačku iz skupa A koja je van kruga $\boldsymbol{K}$ i obeležiti je sa $\boldsymbol{A}$, a sa $\boldsymbol{B}$ označiti tačku trougla najudaljeniju od $\boldsymbol{A}$. Povući pravu kroz tačke $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{O}$ (centar kruga $\boldsymbol{K}$). Sa $\boldsymbol{C}$ označiti tačku trougla koja se nalazi sa suprotne strane ove prave u odnosu na tačku $\boldsymbol{A}$. Ići na korak 3°. ■

Primer 2.8. Pronaći tačku koja predstavlja rešenje Raulsovog problema za zadate tačke $A1$, $A2$, $A3$ i $A4$ (vidi sliku 2.5.).

Rešenje: Uzećemo npr. tačke $A1$ i $A2$ i označiti ih sa $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$. Konstruisaćemo krug **1** čija kružnica prolazi kroz ove dve tačke, čiji je centar u sredini duži $\overline{\boldsymbol{AB}}$, tj. u tački $\boldsymbol{O}$**1**.



Slika 2.5.

Pošto sve zadate tačke ne pripadaju ovom krugu, odabraćemo proizvoljnu tačku van kruga, npr. $A3$ i označiti je sa $\boldsymbol{C}$. Pošto je trougao $\boldsymbol{ABC}$ oštrougli, konstruisaćemo krug **2** sa centrom u $\boldsymbol{O2}$ koji je opisan oko trougla $\boldsymbol{ABC}$. Kako sve tačke opet ne pripadaju krugu, biramo tačku izvan kruga, ovog puta to je preostala tačka $A4$. Ovu tačku označavamo sa $\boldsymbol{A}$, a sa $\boldsymbol{B}$ ponovo označavamo tačku $A2$, povlačimo pravu kroz tačke $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{O2}$. Pošto se tačka $\boldsymbol{A}$ ($A4$) nalazi desno od ove prave, između tačaka $A1$ i $A3$, za tačku $\boldsymbol{C}$ ćemo izabrati $A1$ jer se ona nalazi suprotno, tj. levo od povučene prave. Sada opet imamo trougao $\boldsymbol{ABC}$ ($A1$ $A2$ $A4$) koji je ovog puta tupougli. Zbog toga, oko duži $\overline{\boldsymbol{AB}}$ opisujemo krug **3** sa centrom u $\boldsymbol{O3}$. Pošto sada sve tačke pripadaju krugu **3**, dobili smo konačno rešenje, a to je tačka $\boldsymbol{O3}$, tj. $X^* = \boldsymbol{O3}$.

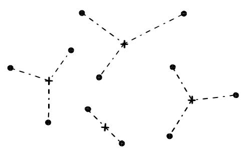
■

2.4. Lokacijsko - alokacijski problem

Neka je dato m tačaka $A_i = (a_1^i, a_2^i)$ koje predstavljaju lokacije korisnika (postojeći objekti) i njihovi težinski koeficijenti w_i, $i = 1, \ldots, m$. Potrebno je naći lokacije za p snabdevača (novi objekti) $X_k = (x_1^k, x_2^k)$, $k = 1, \ldots, p$, tako da suma otežanih rastojanja od njih do korisnika bude minimalna (lokacijski problem), kao i odrediti koji snabdevač će biti pridružen kom korisniku (alokacijski, tj.

asignacijski problem).

Ovom problemu odgovara sledeći realni zadatak: u nekom naselju postoji m stambenih zgrada, a potrebno je rasporediti p prodavnica tako da budu što bliže stanovnicima naselja. Osim mesta (lokacija) na kojima bi prodavnice trebalo sagraditi, ovaj zadatak podrazumeva i to da je potrebno odrediti u kojim će se prodavnicama snabdevati stanovnici kojih zgrada (slika 2.6.).



• - postojeći objekti
+ - novi objekti

Slika 2.6.

Matematički model ovog problema ima sledeći oblik:

$$\textbf{\textit{(min)}}\ f(C, X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} c_{ik} w_i d_i(X_k)$$

$p.o.$

$$\sum_{k=1}^{p} c_{ik} = 1 , \quad i = 1, \dots , m$$

$$c_{ik} \geq 0 , \quad i = 1, \dots , m , \quad k = 1, \dots , p$$

gde su:

m - broj postojećih objekata (korisnika);

p - broj novih objekata (snabdevača);

$C = (c_{ik})_{m\times p}$, gde je $c_{ik} \in [0, 1]$ alokacijska promenljiva koja predstavlja deo potreba koje i-ti korisnik zadovoljava kod k-tog snabdevača;

$X = (X_1, X_2, \dots , X_p)$, gde je $X_k = (x_1^k, x_2^k)$ lokacija k-tog snabdevača koju treba odrediti;

$d_i(X_k) = d(A_i, X_k)$ - rastojanje od i-tog korisnika do k-tog snabdevača;

w_i - težinski koeficijent i-tog korisnika (npr. broj stanara zgrade).

Razmatraju se dve varijante ovog problema:

1) Kapaciteti snabdevača su neograničeni, tj. proizvoljan broj korisnika

može se dodeliti svakom od snabdevača; tada se dobija rešenje u kome promenljiva c_{ik} uzima vrednosti iz skupa $\{0, 1\}$.

2) Kapaciteti snabdevača su ograničeni; optimalne vrednosti promenljive c_{ik} mogu imati bilo koju realnu vrednost iz intervala [0, 1]. U ovom slučaju, polazni matematički model je potrebno proširiti sledećim skupom ograničenja:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ik} q_i \leq Q_k \,, \quad k = 1, \ldots, p$$

gde su:

q_i - potrebe korisnika u tački A_i;
Q_k - kapacitet snabdevača u X_k.

Bez obzira da li se radi o prvoj ili drugoj varijanti, ovaj problem je analitički teško rešiti. Zbog toga se predlaže jedna heuristička metoda [11] za unapred zadat broj snabdevača p.

Kuperov algoritam

U slučaju kada kapacitet snabdevača nije ograničen, Kuperov algoritam ima sledeće korake:

1° Proizvoljno izabrati p tačaka $X_1, X_2, \ldots, X_p$.

2° Rešiti alokacijski problem, tj. svakom korisniku dodeliti najbližeg od snabdevača lociranih u tačkama $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Ovaj postupak se svodi na rešavanje p diskretnih lokacijskih problema. (Izračunava se matrica rastojanja $D = (d_i(X_k))_{m\times p}$ i nađe minimum po svakoj vrsti. Tako se odrede elementi matrice $C = (c_{ik})$, $c_{ik} \in \{0, 1\}$.)

3° Za svako $k \in \{1, \ldots, p\}$ rešiti Veberov problem u odnosu na sve korisnike vezane za snabdevača X_k. Tako dobijena tačka postaje novo X_k.

4° Rešiti alokacijski problem kao u koraku 2°.

5° Ako nema promena u alociranju u odnosu na prethodnu iteraciju KRAJ. Zadnje dobijeno rešenje je i konačno rešenje problema.
U suprotnom, vratiti se na korak 3°. ■

Napomene:

1) Za Euklidovu metriku Kuperov algoritam daje tačno rešenje.

2) U slučaju ograničenih kapaciteta snabdevača, takođe se može primeniti ovaj algoritam s tim što se u koracima 2° i 4° umesto proste alokacije na najbliže objekte rešava transportni problem tako da matrica D predstavlja jediničnu cenu transporta, Q_k - raspoloživu količinu robe u

ishodištima, a q_i - količinu robe koja je potrebna u odredištima.

Primer 2.9. U novoizgrađenom naselju potrebno je izgraditi tri prodavnice za robu široke potrošnje. Naselje se sastoji od 10 solitera, a njihove koordinate i broj stanovnika svakog solitera dati su u tabeli:

Soliteri	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
X	50	250	400	450	750	300	100	600	300	600
Y	650	550	800	600	550	400	350	400	150	150
Br. st.	110	140	125	175	100	180	80	50	150	90

Smatra se da se svaka prodavnica može snabdeti robom u neograničenim količinama.
Potrebno je odrediti mesta izgradnje ovih prodavnica tako, da ukupno pređeni put stanara od kuće do prodavnice i nazad bude minimalan, kao i opterećenje svake prodavnice, tj. koliko će se stanara snabdevati u svakoj od njih.
Za merenje rastojanja koristiti Euklidovu metriku, a za korak zaustavljanja kod Vajsfeldovog algoritma $\varepsilon = 0{,}1$.

Rešenje: U ovakvim slučajevima se za težinske koeficijente uzima broj stanara. Usvojićemo sledeća (proizvoljna) početna rešenja: $X_1 = (100, 500)$, $X_2 = (400, 300)$ i $X_3 = (600, 800)$.
Matrica rastojanja solitera od prodavnica lociranih u tačkama X_1, X_2 i X_3 ima vrednosti date u tabeli:

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
P1	<u>158,1</u>	<u>158,1</u>	424,3	364,0	651,9	223,6	<u>150,0</u>	509,9	403,1	610,3
P2	495,0	291,5	500,0	304,1	430,1	<u>141,4</u>	304,1	<u>223,6</u>	<u>180,2</u>	<u>250,0</u>
P3	570,1	430,1	<u>200,0</u>	<u>250,0</u>	<u>291,5</u>	500,0	672,7	400,0	715,9	650,0

Podvučene vrednosti u tabeli predstavljaju rastojanja od solitera do najbliže prodavnice. Za svako podvučeno polje u ovoj (transponovanoj) matrici, odgovarajuća promenljiva c_{ik} će imati vrednost **1**, a sve ostale će imati vrednost **0**.
Sada ćemo rešiti tri Veberova problema i to: za solitere S1, S2 i S7 vezane za prodavnicu P1, solitere S6, S8, S9 i S10 vezane

za prodavnicu P2 i za solitere S3, S4 i S5 vezane za prodavnicu P3. Koristićemo Vajsfeldov algoritam.
Rešenje ovog koraka su nove lokacije prodavnica:
P1: X_1 = (227,7, 548)
P2: X_2 = (350, 288)
P3: X_3 = (450, 600) = S4 (u ovom slučaju bi se prodavnica nalazila npr. u prizemlju solitera S4).

Sada ponovo rešavamo alokacijski problem, formirajući matricu rastojanja solitera od novih pozicija prodavnica:

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
P1	<u>204,9</u>	<u>22,4</u>	305,3	228,3	522,3	164,7	<u>235,6</u>	400,6	404,5	545,0
P2	470,2	280,4	514,4	327,6	478,2	<u>122,7</u>	257,6	273,9	<u>146,8</u>	<u>285,6</u>
P3	403,1	206,2	<u>206,2</u>	<u>0</u>	<u>304,1</u>	250	430,1	<u>250</u>	474,3	474,3

Vidimo da su svi soliteri osim S8 ostali alocirani prodavnicama kao u prethodnoj iteraciji, a stanovnicima solitera S8 je sada bliže (za 24 m) da kupuju u prodavnici P3. Pošto je došlo do izmene u matrici $C = (c_{ik})$, ponovo pristupamo rešavanju Veberovih problema, s tim da sada Soliter S8 utiče na položaj prodavnice P3 umesto P2. Nove lokacije prodavnica su:
P1: X_1 = (227,7, 548)
P2: X_2 = (332,5, 254,3)
P3: X_3 = (450, 600)
Vidimo da se promenila samo lokacija prodavnice P2, ali moramo da proverimo da li sada dolazi do promene alokacije. Zato ponavljamo računanje matrice rastojanja:

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
P1	<u>204,9</u>	<u>22,4</u>	305,3	228,3	522,3	164,7	<u>235,6</u>	400,6	404,5	545
P2	486,2	307	549,9	365,1	511,6	<u>149,3</u>	251,4	304,6	<u>109,2</u>	<u>287,1</u>
P3	403,1	206,1	<u>206,1</u>	<u>0</u>	<u>304,1</u>	250	430,1	<u>250</u>	474,3	474,3

Pošto nije došlo do promene u alokaciji prodavnica, zaključujemo da je dobijeno rešenje konačno. KRAJ algoritma.
Rešenje glasi: nove prodavnice ćemo graditi na lokacijama:

P1: $X_1 = (227{,}7,\ 548)$,
P2: $X_2 = (332{,}5,\ 254{,}3)$ i
P3: $X_3 = (450,\ 600)$.

U prvoj prodavnici će se snabdevati 330 (110 + 140 + 80) stanovnika iz solitera S1, S2 i S7; u drugoj 420 (180 + 150 + 90) stanovnika iz solitera S6, S9 i S10; a u trećoj 450 (125 + 175 + 100 + 50) stanovnika solitera S3, S4, S5 i S8. ■

Primer 2.10. U jednom ravničarskom regionu postoji 7 kombinata za proizvodnju pšenice. Rešeno je da se izgrade mlinovi za preradu žita kako bi se na tržištu nastupalo sa proizvodom višeg stepena prerade. Da bi se pokrila proizvodnja svih sedam kombinata, kupljena su postrojenja za dva mlina čiji su kapaciteti 80 i 150 hiljada tona godišnje. Koordinate kombinata (u km) i njihova očekivana godišnja proizvodnja žita (u hiljadama tona) dati su u sledećoj tabeli:

Kombinat	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
X	110	10	40	80	20	50	80
Y	40	10	20	80	50	60	20
Godiš. proiz.	30	55	34	40	29	18	24

Potrebno je odrediti lokacije za izgradnju mlinova, tako da ukupan prevoz žita bude što kraći. Takođe je potrebno odrediti koliko će se žita prevoziti od kog kombinata do kog mlina.

Rešenje: Iz teksta zadatka se može zaključiti da se radi o lokacijsko-alokacijskom problemu sa ograničenim kapacitetima. Najbolje je koristiti Euklidovu metriku (teren je ravničarski, pa se transport može vršiti približno pravolinijski). Očekivana godišnja proizvodnja kombinata će se koristiti kao težinski koeficijenti u Veberovom problemu, a kao kapaciteti ishodišta u alokacijskom (transportnom) problemu.

Usvojićemo trivijalno početno rešenje $X_1^o = X_2^o = (0,\ 0)$ i odrediti matricu udaljenosti kombinata od ove tačke D čije su kolone jednake: $d(X_1) = d(X_2) = (117{,}05,\ 14{,}14,\ 44{,}72,\ 113{,}14,\ 53{,}85,\ 78{,}10,\ 82{,}46)$.

Sledeći korak se sastoji u rešavanju transportnog problema sa sledećom (transponovanom) matricom jediničnih troškova:

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	Potraž.
M1	117,05	14,14	44,72	113,14	53,85	78,10	82,46	80
M2	117,05	14,14	44,72	113,14	53,85	78,10	82,46	150
Ponud.	30	55	34	40	29	18	24	

Rešenje ovog transportnog problema je višestruko, a jedno od rešenja je:

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
M1	30	0	0	0	8	18	24
M2	0	55	34	40	21	0	0

Iz rešenja transportnog problema se mogu dobiti i vrednosti elemenata matrice C, tj. $c_{ik} = \frac{t_{ik}}{q_i}$, gde su sa t_{ik} obeležena količina robe koja se transportuje iz i-tog kombinata u k-ti mlin. U sledećem koraku rešavamo dva Veberova problema u kojima se raspoređuju mlinovi na kombinate kojima su dodeljeni u prethodnom koraku. U prvom problemu raspoređujemo prvi mlin između tačaka K1, K5, K6 i K7 sa težinskim koeficijentima $w_1 = 30$, $w_5 = 8$, $w_6 = 18$ i $w_7 = 24$, a u drugom, drugi mlin između tačaka K2, K3, K4 i K5 sa težinskim koeficijentima $w_2 = 55$, $w_3 = 34$, $w_4 = 40$ i $w_5 = 21$. Rešenje ovih problema sa usvojenom vrednošću koraka zaustavljanja $\varepsilon = 0{,}05$, tj. 50 metara je: $X_1^1 = (83{,}68,\ 31{,}70)$, $X_2^1 = (32{,}15,\ 25{,}01)$. Izračunavamo udaljenosti od ovih tačaka do kombinata i rešavamo transportni problem:

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	Potraž.
M1	27,60	76,81	45,22	48,44	66,26	43,99	12,27	80
M2	79,28	26,76	9,31	72,89	27,79	39,28	48,11	150
Ponud.	30	55	34	40	29	18	24	

Ovaj zadatak opet ima višestruko rešenje. Jedno od njih je:

30	0	0	26	0	0	24
0	55	34	14	29	18	0

Pošto je došlo do promene alokacije, rešavamo novi Veberov problem: prvom mlinu pridružujemo kombinate K1, K4 i K7, sa težinama 30, 26 i 24, a drugom mlinu K2, K3, K4, K5 i K6, sa težinama 55, 34, 14, 29 i 18. Rešenja ovih problema su u tačkama: $X_1^2 = (101{,}11, 41{,}89)$, $X_2^2 = (27{,}89, 26{,}30)$. Udaljenosti između mlinova i kombinata, odnosno transportni problem koji sledeći rešavamo:

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	Potraž.
M1	9,05	96,46	64,85	43,74	81,53	54,29	30,27	80
M2	83,25	24,20	13,65	74,83	24,98	40,31	52,49	150
Ponud.	30	55	34	40	29	18	24	

Rešenje transportnog problema:

30	0	0	40	0	0	10
0	55	34	0	29	18	14

Rešenje sledećih Veberovih problema su tačke:
$X_1^3 = (80, 80)$ (poklapa se sa tačkom K4) i
$X_2^3 = (29{,}54, 23{,}51)$.
Slede naizmenično tabele za transportni problem i njegova rešenja i rešenja Veberovih problema:

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	Potraž.
M1	50	98,99	72,11	0	67,08	36,06	60	80
M2	82,13	23,76	11,03	75,75	28,16	41,83	50,58	150
Ponud.	30	55	34	40	29	18	24	

30	0	0	40	0	10	0
0	55	34	0	29	8	24

$X_1^4 = (80, 80)$, $X_2^4 = (32{,}28, 21{,}72)$

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	Potraž.
M1	50	98,99	72,11	0	67,08	36,06	60	80
M2	79,84	25,17	7,91	75,32	30,83	42,18	47,75	150
Ponud.	30	55	34	40	29	18	24	

30	0	0	40	0	10	0
0	55	34	0	29	8	24

Pošto nije došlo do promene u alokaciji objekata, konstatujemo da smo dobili optimalno rešenje, tj. mlinovi će se graditi na lokacijama $X_1^* = (80, 80)$ i $X_2^* = (32{,}28, 21{,}72)$, a pri tome će se snabdevati žitom iz kombinata u količinama prikazanim u prethodnoj tabeli. ■

2.5. Lokacija na mrežama

Slično modelima optimizacije za rešavanje lokacijskih problema u ravni, formulišu se različiti modeli za rešavanje problema lokacije na mrežama. U ovim modelima se koristi pojam *rastojanja između dva čvora* mreže. To rastojanje je po definiciji dužina najkraćeg puta između posmatranih čvorova. Treba primetiti da je pri računanju dužine puta, u nesimetričnim mrežama, važno koji je početni, a koji krajnji čvor puta. Prema tome, za jedan par čvorova mogu postojati dva rastojanja.

Čvorovima se pripisuju brojevi koji se koriste kao težinski koeficijenti pri računanju otežanih rastojanja. Kao kriterijum može da se koristi otežano rastojanje od novog objekta do najdaljeg čvora ili zbir otežanih rastojanja od novog objekta do čvorova mreže. U prvom slučaju radi se o problemima tipa *minimax* koji se u teoriji grafova nazivaju problemi određivanja *centra grafa*. U drugom slučaju u pitanju su problemi tipa *minisum*, odnosno problemi određivanja *medijane grafa*.

Lokacijski problemi na mrežama mogu da se klasifikuju i prema tome da li je novi objekat moguće postaviti samo u čvor grafa ili je to moguće učiniti i na granu grafa. Na kraju, zadaci se mogu uopštiti za slučajeve kada se razmešta više objekata.

Ponovo ćemo mrežu predstavljati grafom $G = (N, L)$, $N=\{1, \dots , n\}$, $L=\{(i, j) \mid i \in N, j \in N\}$, pri čemu se granama $(i, j) \in L$ pridružuju dužine $c_{ij} \geq 0$, a svakom čvoru $i \in N$ težina w_i. Rastojanje između čvorova i i j označavaćemo sa $d(i, j)$.

Problem lokacije službe za hitne intervencije u čvoru mreže

Pretpostavimo da je za jednu službu koja pruža hitne usluge stanovništvu nekoliko naselja potrebno odabrati lokaciju i da zbog nekih razloga ta služba treba da se nalazi u naselju. Kao kriterijum je moguće koristiti:

a) Rastojanje od službe do najdaljeg čvora (što može da odgovara vremenu putovanja od mesta službe do mesta gde je potrebna pomoć, npr. vatrogasna služba);
b) Rastojanje od najdaljeg čvora do službe (kada klijent sam treba da dođe u službu za pružanje pomoći);
c) Rastojanje od mesta službe do najdaljeg čvora i nazad (kada se putuje od službe do mesta za pomoć i nazad kao u primeru hitne pomoći koja treba da ode po bolesnika i doveze ga u bolnicu).

Svako rastojanje može se otežati brojem stanovnika naselja ili verovatnoćom da će baš to naselje zatražiti uslugu. Zadatak je naći lokaciju službe za pomoć tako da otežano rastojanje bude što je moguće manje.

Ako se kao kriterijum koristi rastojanje od mesta službe do najdaljeg čvora, tada se zadatak lokacije formuliše na sledeći način:

Odrediti čvor i_o^* takav da je

$$\sigma_o(i_o^*) = \min_{i \in N} [\max_{j \in N} w_j d(i, j)].$$

Čvor i_o^* naziva se *spoljašnji centar* težinskog grafa G, a vrednost $\rho_o = \sigma_o(i_o^*)$ *spoljašnji radijus* grafa. Jedan graf može imati više spoljašnjih centara.

U slučaju da se kao kriterijum koristi rastojanje od najdaljeg čvora do mesta novog objekta, tada se zadatak lokacije formuliše na sledeći način:

Odrediti čvor i_t^* takav da je

$$\sigma_t(i_t^*) = \min_{i\in N} [\max_{j\in N} w_j\, d(j, i)].$$

Čvor i_t^* naziva se *unutrašnji centar* težinskog grafa G, a vrednost $\rho_t = \sigma_t(i_t^*)$ *unutrašnji radijus* grafa. Jedan graf može imati više unutrašnjih centara.

Kada se računa ukupno rastojanje od mesta lokacije do najdaljeg čvora i nazad, zadatak lokacije je:

Odrediti čvor i_{ot}^* takav da je

$$\sigma_{ot}(i_{ot}^*) = \min_{i\in N} [\max_{j\in N} w_j\, (d(i, j) + d(j, i))]$$

Čvor i_{ot}^* naziva se *unutrašnjo-spoljašnji centar* težinskog grafa G, a vrednost $\rho_{ot}= s_{ot}(i_{ot}^*)$ *unutrašnjo-spoljašnji radijus* grafa.

Primetimo da u mrežama za koje važi da je $c_{ij} = c_{ji}$ za svako $(i, j) \in L$ važi i $d(i, j) = d(j, i)$ pa se unutrašnji, spoljašnji i unutrašnjo-spoljašnji centri grafa poklapaju.

Algoritam za određivanje spoljašnjeg centra grafa ima sledeće osnovne korake:

1° Naći rastojanja između svaka dva čvora u mreži i formirati matricu rastojanja $D = (d(i, j))$ čiji su elementi rastojanja između čvorova i i j, $i, j = 1, \dots , n$.

2° Svaku kolonu j matrice D pomnožiti težinom čvora w_j, tj. formirati matricu otežanih rastojanja D'.

3° Naći maksimalni element (najveću vrednost) $\sigma_o(i)$ za svaki red matrice D', tj. odrediti

$$\sigma_o(i) = \max_{j\in N} \{w_j\, d(i, j)\},\ i=1, \dots , n.$$

4° Od svih $\sigma_o(i)$ određenih u prethodnom koraku naći najmanje, tj.

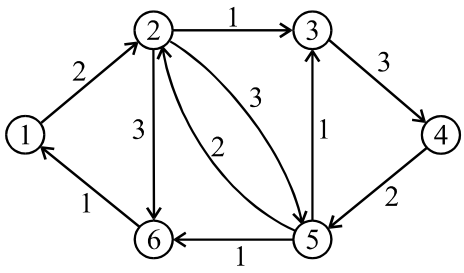
$$\sigma_o(i_o^*) = \min_{i\in N} \{\sigma_o(i)\}.$$ ■

Za nalaženje unutrašnjeg i unutrašnjo-spoljašnjeg centra i poluprečnika grafa ovaj algoritam se neznatno modifikuje.

Primer 2.10. Za graf prikazan na slici 2.7. odrediti:

a) spoljašnji,
b) unutrašnji i
c) unutrašnjo-spoljašnji

centar ako težine čvorova iznose $w_1 = w_3 = w_5 = 2$ i $w_2 = w_4 = w_6 = 1$.



Slika 2.7.

Rešenje: a) 1° Najpre formiramo matricu rastojanja između svaka dva čvora:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 0 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

2° Kolone matrice pomnožimo odgovarajućim težinama i dobijemo matricu otežanih rastojanja:

$$D' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 6 & 10 & 5 \\ 8 & 0 & 2 & 4 & 6 & 3 \\ 14 & 7 & 0 & 3 & 10 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 7 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

3° Odredimo maksimalne elemente za svaki red matrice D':

$\sigma_o(1) = 10$, $\sigma_o(2) = 8$, $\sigma_o(3) = 14$,

$\sigma_o(4) = 8$, $\sigma_o(5) = 4$, $\sigma_o(6) = 12$.

4° Od prethodno izračunatih vrednosti $\sigma_o(i)$ najmanja je $\sigma_o(5) = 4$, što znači da je čvor 5 spoljašnji centar grafa.

b) Za određivanje unutrašnjeg centra grafa prva dva koraka su ista kao i u slučaju pod (a). U trećem koraku se računaju maksimalni elementi kolona matrice D'

$\sigma_t(1) = 14$, $\sigma_t(2) = 7$, $\sigma_t(3) = 8$,

$\sigma_t(4) = 7$, $\sigma_t(5) = 12$, $\sigma_t(6) = 6$.

Na osnovu ovih vrednosti se zaključuje da postoje dva unutrašnja centra grafa i da su to čvorovi 2 i 4.

c) Za određivanje unutrašnjo-spoljašnjeg centra grafa najpre se izračunaju ukupna rastojanja $\delta(i,j) = d(i,j) + d(j,i)$ i tako dobija sledeća matrica Δ:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 10 & 10 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 5 & 6 \\ 10 & 10 & 0 & 6 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 6 & 0 & 6 & 10 \\ 7 & 5 & 6 & 6 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 10 & 10 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolone ove matrice pomnože se težinama čvorova i dobije sledeća matrica otežanih rastojanja:

$$\Delta' = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 20 & 10 & 14 & 6 \\ 12 & 0 & 16 & 8 & 10 & 6 \\ 20 & 10 & 0 & 6 & 12 & 10 \\ 20 & 8 & 12 & 0 & 12 & 10 \\ 14 & 5 & 12 & 6 & 0 & 7 \\ 12 & 6 & 20 & 10 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

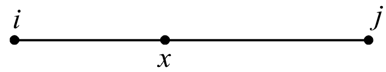
Za svaki red matrice odrede se maksimalni elementi:

$\sigma_{ot}(1) = 20$, $\sigma_{ot}(2) = 16$, $\sigma_{ot}(3) = 20$,
$\sigma_{ot}(4) = 20$, $\sigma_{ot}(5) = 14$, $\sigma_{ot}(6) = 20$

Najmanja vrednost je $\sigma_{ot}(5) = 14$ i unutrašnjo-spoljašnji centar grafa je čvor 5. ■

Problem lokacije službe za hitne intervencije na grani mreže

Posmatrajmo ponovo problem lokacije službe za hitne intervencije kada ne postoji ograničenje da ona mora da se nađe u naselju. Drugim rečima, ponovo se razmatra problem lokacije na mreži tipa *minimax* ali je novi objekat moguće postaviti u čvor ili na granu. Za modeliranje ovog problema koristi se pojam tačke koja pripada grafu, odnosno grani. Tačku x koja pripada grani (i,j) definiše dužina $\xi = c(i, x)$ dela (i, x), pri čemu je ispunjen uslov da je $c_{ij} = c(i, x) + c(x, j)$ (slika 2.8). U posebnim slučajevima kada je $c(i, x) = 0$ ili $c(i, x) = c_{ij}$, tačka x predstavlja krajnji čvor grane (i, j).



Slika 2.8.

Problem tipa *minimax* se formuliše kao zadatak nalaženja tačke grafa za koju važi da je rastojanje od nje do najdaljeg čvora (ili od najdaljeg čvora do nje) minimalno. Ovakvi zadaci se nazivaju problemi određivanja *apsolutnih centara* težinskog grafa. Nadalje će se razmatrati samo problem apsolutnog spoljašnjeg centra.

Obeležimo sa $d(x, i)$ rastojanje od neke tačke x koja pripada grafu G do proizvoljnog čvora $i \in N$ (tj. dužinu najkraćeg puta od tačke x, tretirane kao čvor, do čvora i). Zadatak određivanja apsolutnog spoljašnjeg centra je:

Odrediti x_o^* na grafu G tako da je

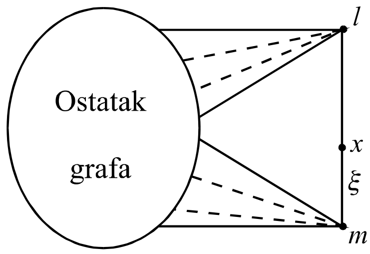
$$\sigma_o(x_o^*) = \min \left[\min_{i \in N} \{w_i \, d(x, i)\} \right]$$

gde se prvi minimum odnosi na sve tačke koje pripadaju grafu G.

Za rešavanje ovog zadatka prikazaćemo algoritam Hakimija [9] u slučaju kada se primenjuje na simetričnu mrežu.

U osnovnom obliku algoritam Hakimija ima dva koraka. U prvom se za svaku granu nađe tačka za koju važi da je otežano rastojanje od nje do najdaljeg čvora minimalno, tj. reše se problemi tipa *minimax* za svaku od grana. Ove tačke se nazivaju *lokalni centri*, a odgovarajuća rastojanja *lokalnim radijusima* grana grafa. U drugom koraku se od prethodno utvrđenih lokalnih centara izabere onaj koji daje najmanju vrednost radijusa.

Da bismo objasnili kako se realizuje prvi korak algoritma, uočimo neku granu (m, l) (slika 2.9) i na njoj proizvoljnu tačku x koja je definisana dužinom $\xi = c(m, x)$ dela grane (m, x). Da bi se izračunao lokalni radijus grane (m, l), koji ćemo označiti sa σ_{ml}^*, prvo treba izračunati rastojanje od proizvoljne tačke x na grani do najdaljeg čvora grafa.



Slika 2.9.

Od tačke x do proizvoljnog čvora $i \in N$ može se dospeti preko čvora m ili preko čvora l. Kada se ide preko čvora m, dužina $\tau_i(\xi)$ „puta“ od tačke x do čvora i je

$$\tau_i(\xi) = c(x, m) + d(m, i) = \xi + d(m, i),$$

a kada se ide preko čvora l, dužina „puta“ $\tau_i'(\xi)$ od tačke x do čvora i je

$$\tau_i'(\xi) = c_{ml} - c(x, m) + d(l, i) = c_{ml} - \xi + d(l, i).$$

Rastojanje $d(x, i)$ je dužina kraćeg od ova dva „puta“

$$d(x, i) = \min \{\tau_i(x), \tau_i'(x)\}.$$

Označimo sa $d'_i(\xi)$ otežano rastojanje od tačke x do čvora i. Ono ima oblik:

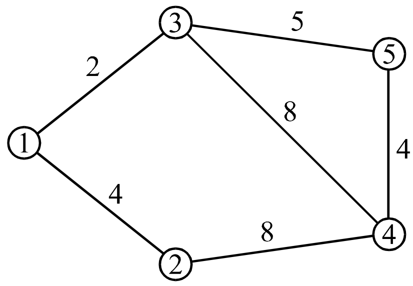
$$d'_i(\xi) = w_i \min \{\xi + d(m, i), c_{ml} - \xi + d(l, i)\}.$$

Najpre treba odrediti najdalji čvor za svako ξ, $0 \le \xi \le c_{ml}$; zatim se traži ono ξ^* za koje je rastojanje do najdaljeg čvora minimalno. Drugim rečima, za granu (m, l) rešava se sledeći minimax problem:

$$\sigma_{ml}^* = \min_{0 \le \xi \le c_{ml}} [\max_{i \in N} d_i(\xi)]$$

Pošto se za svaku granu odredi lokalni centar i lokalni radijus, izabere se onaj lokalni centar kome odgovara najmanji radijus. Ovo ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 2.11. Za graf prikazan na slici 2.10. odrediti apsolutni spoljašnji centar ako su težine svih čvorova jednake i iznose $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 1$.



Slika 2.10.

Rešenje: Najpre odredimo matricu rastojanja D, a onda množenjem odgovaraćih kolona težinama čvorova, matricu otežanih rastojanja D':

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 10 & 7 \\ 4 & 0 & 6 & 8 & 11 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 5 \\ 10 & 8 & 8 & 0 & 4 \\ 7 & 11 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Uzećemo da se na grani (m, l), ξ računa od čvora čiji je indeks manji, tj, ako je $m < l$, onda je $\xi = c(m, x)$, a u suprotnom, $\xi = c(l, x)$.

Ako se novi objekat postavi na granu (1, 2), tj. $m = 1$, $l = 2$, tada su rastojanja $\tau_i(\xi)$ i $\tau_i'(\xi)$ od tačke x do čvorova grafa:

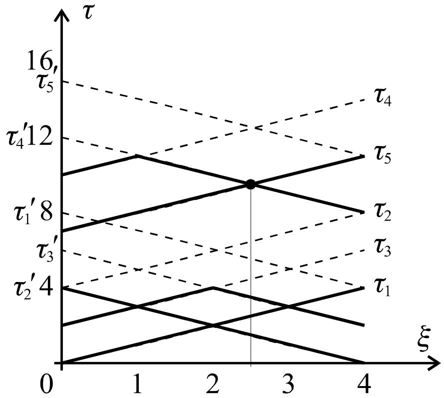
$\tau_1(\xi) = \xi + d(1, 1) = \xi$ $\quad$ $\tau_1'(\xi) = c_{12} - \xi + d(2, 1) = 8 - \xi$

$\tau_2(\xi) = \xi + d(1, 2) = \xi + 4$ $\quad$ $\tau_2'(\xi) = c_{12} - \xi + d(2, 2) = 4 - \xi$

$\tau_3(\xi) = \xi + d(1, 3) = \xi + 2$ $\quad$ $\tau_3'(\xi) = c_{12} - \xi + d(2, 3) = 6 - \xi$

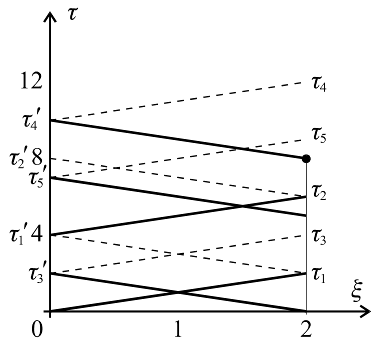
$\tau_4(\xi) = \xi + d(1, 4) = \xi + 10$ $\quad$ $\tau_4'(\xi) = c_{12} - \xi + d(2, 4) = 12 - \xi$

$\tau_5(\xi) = \xi + d(1, 5) = \xi + 7$ $\quad$ $\tau_5'(\xi) = c_{12} - \xi + d(2, 5) = 15 - \xi$

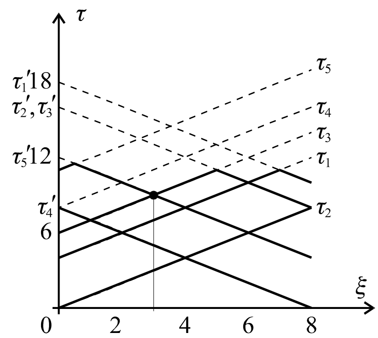


Slika 2.11.

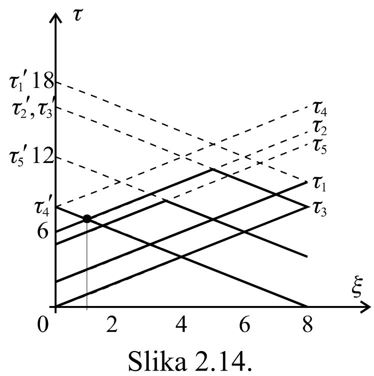
Grafici ovih funkcija prikazani su na slici 2.11. Debljom linijom su označene rastojanja $d'_i(\xi) = w_i \min\{\tau_i, \tau_i'\}$. Sa grafika se vidi da se lokalni centar dobija za $\xi = 2{,}5$ i da lokalni radijus iznosi $s_{12} = 9{,}5$.



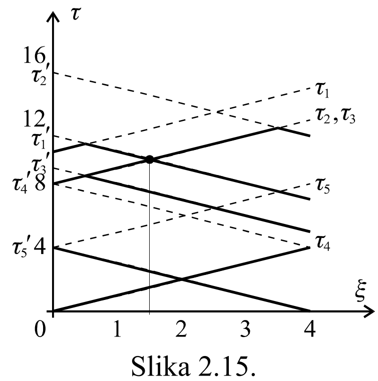
Slika 2.12.



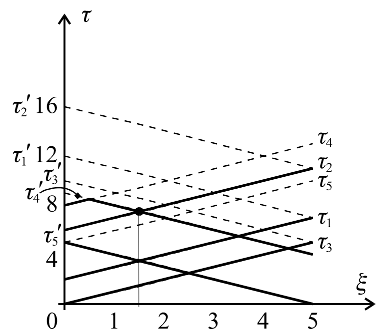
Slika 2.13.



Slika 2.14.



Slika 2.15.



Slika 2.16.

Analognim postupkom dobijaju se grafici i za grane (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5) i (4, 5) (prikazani redom na slikama 2.12. - 2.16.) i određuju lokalni centri i radijusi za ostale grane grafa. Rezultati su prikazani u sledećoj tabeli.

Grana	ξ	σ_{ml}
(1,2)	2,5	9,5
(1,3)	2	8
(2,4)	6	9
(3,4)	1	7
(3,5)	1,5	7,5
(4,5)	1,5	9,5

Prema tome, apsolutni centar grafa x_o* nalazi se na grani (3,4) na rastojanju $\xi^* = d(3, x_o^*) = 1$, a apsolutni radijus iznosi $\sigma_o(^{\xi*}) = 7$. ■

Algoritam Hakimija se modifikuje tako što se za svaku granu izračunaju gornja i donja granica između kojih se nalazi vrednost lokalnog radijusa. Potom se grane čija je donja granica lokalnog radijusa veća od gornje granice lokalnog radijusa neke druge grane, odstrane iz daljeg razmatranja. Na taj način se algoritam može ubrzati nekoliko puta.

Procene donjih i gornjih granica lokalnih radijusa određuju se na sledeći način.

U skladu sa slikom 2.9. i izrazom za $d_i(\xi)$, rastojanje od bilo koje tačke na grani (m, l) do nekog čvora i ne može biti manje od rastojanja od čvora m ili od čvora l do čvora i. Prema tome, procena $\underline{s}_{ml}(i)$ najmanjeg rastojanja od bilo koje tačke na grani (m, l) do čvora i je:

$$\underline{s}_{ml}(i) = \min \{w_i\, d(m, i),\, w_i\, d(l, i)\}.$$

Svakoj grani se tako može pridružiti lokalni radijus koji ne može biti manji od

$$\underline{s}_{ml} = \max_{i \in N} \underline{s}_{ml}(i).$$

Dakle, apsolutni radijus ne može biti manji od

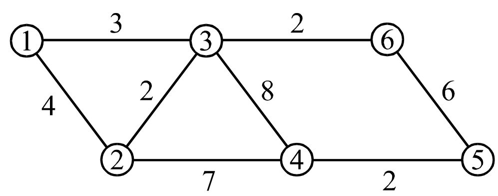
$$\underline{s} = \min_{(m,\, l) \in L} \underline{s}_{ml}.$$

S druge strane, rastojanje od bilo koje tačke na grani (m, l) do nekog čvora i ne može biti veće od ranije izračunatog lokalnog radijusa $\underline{s}_{ml}$ uvećanog za jednu polovinu dužine grane (m, l), tj. ne može biti veći od $\underline{s}_{ml} + \frac{1}{2} w_s c_{ml}$, gde je s čvor koji odgovara radijusu $\underline{s}_{ml}$. Apsolutni radijus ne može biti veći od $\overline{s}$,

$$\overline{s} = \min_{(m,\, l) \in L} \{\underline{s}_{ml} + \frac{1}{2} w_s c_{ml}\}.$$

Ako se za neku granu utvrdi da je donja granica za lokalni radijus $\underline{s}_{ml}$ veća od $\overline{s}$, nju dalje ne treba razmatrati.

Primer 2.12. Za graf na slici 2.17. odrediti apsolutni centar i radijus.



Slika 2.17.

Rešenje: Najpre formiramo matricu rastojanja:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 11 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 7 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 8 & 8 & 2 \\ 11 & 7 & 8 & 0 & 2 & 8 \\ 11 & 9 & 8 & 2 & 0 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 8 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Korišćenjem izraza za donju i gornju granicu lokalnog radijusa dobijamo:

$\underline{s}_{12} = \max(2, 7, 9, 4) = 9 \qquad \bar{s}_{12} = 9 + \frac{4}{2} = 11$

$\underline{s}_{13} = \max(2, 8, 8, 2) = 8 \qquad \bar{s}_{13} = 8 + 1{,}5 = 9{,}5$

$\underline{s}_{23} = \max(3, 7, 8, 2) = 8 \qquad \bar{s}_{23} = 8 + 1 = 9$

$\underline{s}_{24} = \max(4, 2, 2, 4) = 4 \qquad \bar{s}_{24} = 4 + 3{,}5 = 7{,}5$

$\underline{s}_{34} = \max(3, 2, 2, 2) = 3 \qquad \bar{s}_{34} = 3 + 4 = 7$

$\underline{s}_{36} = \max(3, 2, 8, 6) = 8 \qquad \bar{s}_{36} = 8 + 1 = 9$

$\underline{s}_{45} = \max(11, 7, 8, 6) = 11 \qquad \bar{s}_{45} = 11 + 1 = 12$

$\underline{s}_{56} = \max(5, 4, 2, 2) = 5 \qquad \bar{s}_{56} = 5 + 3 = 8$

Pošto je najmanja gornja granica za lokalni radijus $\bar{s}_{34} = 7$, iz daljeg razmatranja se mogu isključiti grane: (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 6) i (4, 5) jer su donje granice njihovih lokalnih radijusa veće od 7. Daljom primenom algoritma Hakimija kao u prethodnom primeru, dobija se da graf ima radijus koji iznosi 6,5 i tri apsolutna centra i to: na grani (2,4) za $\xi = 2{,}5$; na grani (3,4) za $\xi = 3{,}5$; i na grani (5,6) za $\xi = 4{,}5$. ■

Problem lokacije skladišta (snabdevača)

Pretpostavimo da od nekoliko naselja treba izabrati jedno u koje će se smestiti zajedničko skladište. Iz ovog skladišta snabdevaju se sva naselja tako da su troškovi transporta od izabranog do nekog drugog naselja proporcionalni njihovom rastojanju. Ukupni troškovi su jednaki otežanoj sumi ovih rastojanja gde se težinski koeficijenti pripisuju naseljima, tj. čvorovima grafa. I u ovom slučaju je, zavisno od načina računanja rastojanja, moguće postaviti sledeća tri optimizaciona zadatka:

Ako se kao kriterijum koristi rastojanje od mesta skladišta do mesta potrošača, tada se zadatak lokacije formuliše na sledeći način:

Odrediti čvor i_o^* takav da je:

$$\lambda_o(i_o^*) = \min_{i \in N}\left[\sum_{j \in N} w_j\, d(i,j)\right].$$

Čvor i_o^* naziva se *spoljašnja medijana* težinskog grafa G.

U slučaju da se kao kriterijum koristi rastojanje od potrošača do skladišta, tada se zadatak lokacije formuliše na sledeći način:

Odrediti čvor i_t^* takav da je:

$$\lambda_t(i_t^*) = \min_{i \in N}\left[\sum_{j \in N} w_j\, d(j,i)\right].$$

Čvor i_t^* naziva se *unutrašnja medijana* težinskog grafa G.

Kada se računa ukupno rastojanje od skladišta do potrošača i nazad, zadatak lokacije je:

Odrediti čvor i_{ot}^* takav da je:

$$\sigma_{ot}(i_{ot}^*) = \min_{i \in N}\left[\sum_{j \in N} w_j\left(d(j,i) + d(i,j)\right)\right].$$

Čvor i_{ot}^* naziva se *unutrašnjo-spoljašnja medijana* težinskog grafa G.

Zadaci određivanja medijane mogu da se formulišu i za slučaj kada je dopušteno da se skladište postavi u bilo koju tačku grafa. Pokazuje se, međutim, da se tačka koja odgovara medijani grafa i tada nalazi u nekom od čvorova. Na taj način se problemi lokacije na mrežama tipa minisum svode na diskretne lokacijske probleme. Prethodno je potrebno samo izračunati rastojanja između čvorova i njihove odgovarajuće sume.

Primer 2.13. Za graf prikazan na slici 2.7. odrediti unutrašnjo-spoljašnju medijanu ako su težine čvorova $w_1 = w_3 = w_5 = 1$ i $w_2 = w_4 = w_6 = 2$.

Rešenje: U primeru 2.10. je određena matrica rastojanja $D = (d_{ij})$ između čvorova i i j. Na osnovu nje odredićemo matricu $D = (d_{ij})$ čiji elementi predstavljaju zbir rastojanja od čvora i do čvora j i od čvora j do čvora i, tj. $d_{ij} = d_{ij} + d_{ji}$.

Tako dobijamo:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 10 & 10 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 5 & 6 \\ 10 & 8 & 0 & 6 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 6 & 0 & 6 & 10 \\ 7 & 5 & 6 & 6 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 10 & 10 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolonu j matrice D pomnožimo težinom čvora w_j i dobijemo matricu otežanih rastojanja

$$D' = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 10 & 20 & 7 & 12 \\ 6 & 0 & 8 & 16 & 5 & 12 \\ 10 & 16 & 0 & 12 & 6 & 20 \\ 10 & 16 & 6 & 0 & 6 & 20 \\ 7 & 10 & 6 & 12 & 0 & 14 \\ 6 & 12 & 10 & 20 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabiranjem elemenata redova matrice D' dobija se vektor S čija i-ta komponenta predstavlja sumu otežanih rastojanja $s_{ot}(i)$ od čvora i do svih čvorova grafa:

$$S = (61, 47, 64, 58, 49, 56).$$

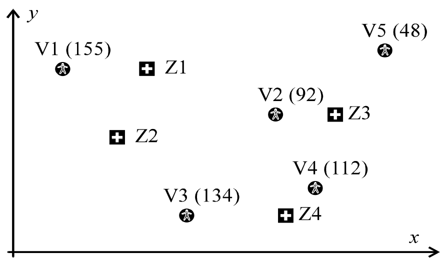
Najmanji element ovog vektora odgovara indeksu $i^* = 2$ i on predstavlja traženu medijanu. ■

2.6. Rešeni zadaci

<u>Zadatak 2.1.</u> Potrebno je organizovati sistematski pregled za predškolsku decu u opštini koja ima 5 vrtića. Ekipa zdravstvenog osoblja koja vrši sistematski pregled treba da odabere jednu od 4 zdravstvene ustanove u kojoj će pregled biti obavljen tako da ukupni troŠkovi prevoza dece (suma otežanih rastojanja) budu što manji (slika 2.7). Pošto se radi o urbanoj sredini, treba koristiti pravougaonu metriku. Koordinate zdravstvenih ustanova, vrtića i broj dece u njima dati su u tabelama:

Vrtići	V1	V2	V3	V4	V5
x	15	58	40	66	80
y	40	30	8	14	44
Br. dece	155	92	134	112	48

Zdr. ust.	Z1	Z2	Z3	Z4
x	32	26	70	60
y	40	25	30	8



Slika 2.18.

Rešenje: Sume otežanih rastojanja za zdravstvene ustanove Z1, Z2, Z3 i Z4 su: 20 523, 20 804, 21 539 i 20 855, respektivno, dakle zdravstvena ekipa treba da se locira u ustanovi Z1. ■

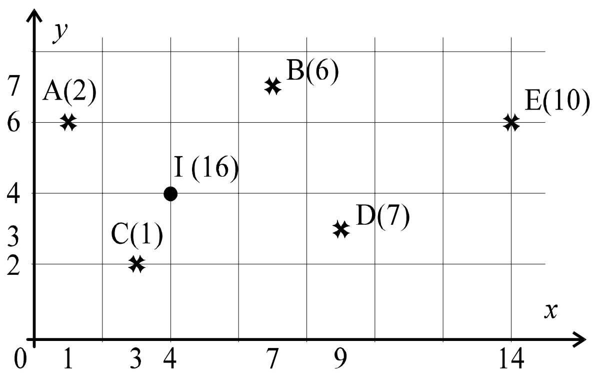
Zadatak 2.2. Odrediti lokaciju novog objekta koji treba da snabdeva korisnike koji stanuju u 5 postojećih objekata. koordinate ovih objekata su: A (1, 2), B (3, 1), C (7, 2), D (7, 7) i E (2, 6). Na osnovu broja stanara u njima, ovim objektima su dodeljeni sledeći težinski koeficijenti: 2 za A i D, 3 za B, 4 za C, a za E 5. Novi objekat trebalo bi postaviti na jednoj od sledeće 3 moguće lokacije: N1 (6, 1), N2 (5, 6) ili N3 (1, 5), tako da suma otežanih rastojanja od njega do postojećih objekata bude što manja. Za merenje rastojanja između objekata koristiti l_2 metriku.

Rešenje: $W_1 = 69{,}04$, $W_2 = \underline{64{,}83}$, $W_3 = 65{,}97$; novi objekat postaviti na lokaciju N2 (5, 6). ■

Zadatak 2.3. Istraživačka ekspedicija ispitivaće reon u kome se nalazi 5 arheoloških nalazišta, a u blizini se nalazi samo jedan izvor vode (na slici 2.8. nalazišta su obeležena krstićima, a izvor krugom). Članovi ekspedicije su odlučili da postave logor na jednom mestu, a da odatle ujutru odlaze do mesta na kojima se vrše iskopavanja, a uveče vraćaju. Za svako od nalazišta je određeno: koliko će dana biti potrebno vršiti istraživanja. Takođe je određeno koliko će puta biti potrebno, za to vreme, otići do izvora da bi se logor snabdeo vodom. Ovi podaci, kao i koordinate nalazišta i izvora (u km) dati su u tabeli:

Nalazište		A	B	C	D	E	izvor
Koordinata	x	1	7	3	9	14	4
	y	6	7	2	3	6	4
Broj odlazaka		2	6	1	7	10	18

Članovi ekspedicije treba da odrede lokaciju logora tako, da se što je moguće manje izgubi vremena na putu do nalazišta, ali i da izvor vode bude što bliži. Pošto je moguće kretati se pravolinijski između tačaka, za računanje udaljenosti koristićemo Euklidovu metriku, a za težinske koeficijente tačaka broj odlazaka do njih. Smatra se da su koordinate logora dovoljno precizne ako se za koeficijent zaustavljanja usvoji ε = 0,25 (250 m).



Slika 2.19.

Rešenje: Za zadat koeficijent zaustavljanja ε, zadovoljavajuće rešenje se dobija u trećoj iteraciji: $x^* = 6{,}24$, $y^* = 4{,}57$.

Napomena: Da je koeficijent zaustavljanja bio ε = 0,01 (10 m), rešenje bi se dobilo tek u 25. iteraciji i bilo bi više od kilometra bliže izvoru: $x = 5{,}21$, $y = 4{,}32$. ■

Zadatak 2.4. U naselju od 6 solitera je potrebno sagraditi prodavnicu robe široke potrošnje. Koordinate solitera, kao i broj stanara svakog od njih dati su u sledećoj tabeli:

Soliter		S1	S2	S3	S4	S5	S6
Koordinate	x	5	20	40	20	40	70
	y	20	30	35	10	15	20
Br. stanara		180	60	90	120	50	200

a) Odrediti lokaciju prodavnice tako da jedini kriterijum bude taj da suma otežanih rastojanja između nje i solitera bude minimalna. Koristiti pravougaonu metriku, a za težine usvojiti broj stanara solitera.

b) Naknadno je urbanističkim planom utvrđeno da se prodavnica mora nalaziti na jednoj od sledeće tri lokacije: P1 (15, 15), P2 (30, 25) ili P3 (50, 30). Koristeći isti kriterijum i istu metriku kao pod (a), utvrditi na kojoj od ove tri lokacije sagraditi prodavnicu.

Rešenje:

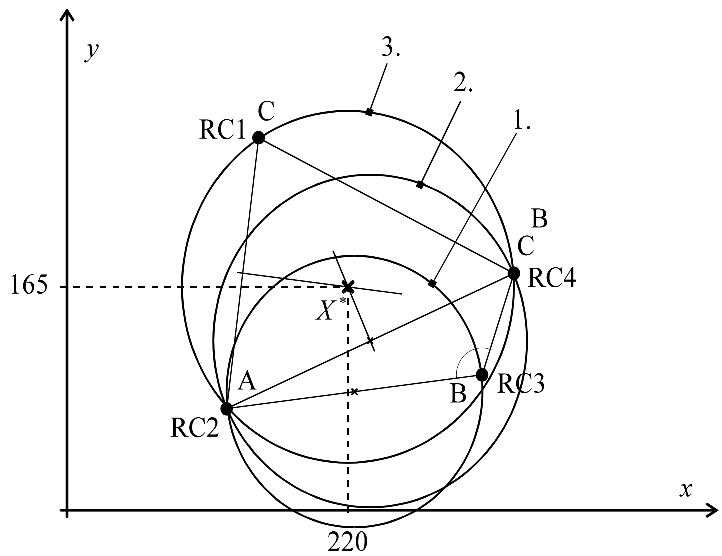
a) Radi se o Veberovom problemu sa pravougaonom metrikom. Rešenje je: $x = 20$, $y = 20$.

b) Ovo je diskretni lokacijski problem i potrebno je izračunati sumu otežanih rastojanja za svaku potencijalnu lokaciju: $W_1 = 22400$, $W_2 = 21100$, $W_3 = 26300$. Jasno je da prodavnicu treba sagraditi na lokaciji P2, tj. koordinatama (30, 25). ■

Zadatak 2.5. U fabričkom kompleksu postoje 4 nezavisna računska centra (RC) locirana na koordinatama (u metrima): RC1 (150, 275), RC2 (125, 75), RC3 (325, 100) i RC4 (350, 175). Odlučeno je da se uvede jedinstven informacioni sistem tako što bi postojao centralni RC gde bi bio server kome bi se pristupalo iz postojećih RC-a. Za novi RC bi se sagradio poseban objekat u fabričkom krugu.

Planira se da se postojeći RC-i umreže sa centralnim pomoću bežičnih mrežnih kartica. Poznato je da brzina transfera preko ovih kartica značajno opada što im je udaljenost veća (najviše 150 m). Pošto je komunikacija sa svakim od postojećeg RC-a podjednako važna, potrebno je postaviti zgradu novog RC-a tako da joj i najdalji postojeći RC bude što bliži. Odrediti lokaciju novog RC-a.

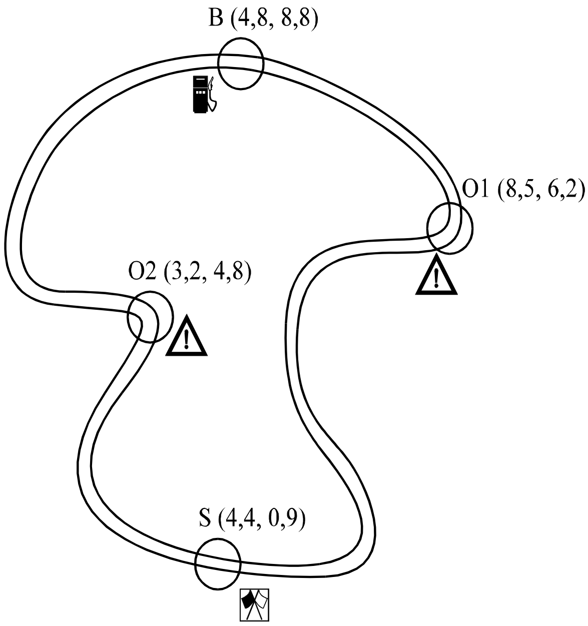
Rešenje: Ovo je Raulsov problem sa Euklidovom metrikom. Zadatak ćemo rešiti algoritmom Elzinga i Herna:



Slika 2.20.

Rešenje je dobijeno grafički: $X^* = (20, 165)$. Najudaljeniji računski centar od centralnog RC-a je RC2 i on se nalazi na približno 131 m. ■

Zadatak 2.6. TV-ekipa je dobila zadatak da prenosi automobilsku trku. Na stazi postoje 4 ključna mesta koja treba pokriti kamerama (start/cilj, boksovi i dve teške krivine). Skica staze i ključnih mesta data je na slici 2.10, a koordinate tih mesta su: S (4,4, 0,9), B (4,8, 8,8), O1 (8,5, 6,2) i O2 (3,2, 4,8). Za snimanje su dobijene samo dve kamere. Problem se sastoji u tome da se odredi položaj kamera tako da tačke snimanja budu što bliže i da se odredi kojom kamerom će se snimati koja ključna mesta. Smatra se da su sva mesta podjednako važna i da se jednom kamerom može snimati proizvoljan broj mesta.



Slika 2.21.

Rešenje: Ovaj zadatak rešavamo kao problem alokacije sa neograničenim kapacitetom i težinskim koeficijentima 1. Kamere će biti najbliže ključnim mestima ako se jedna kamera postavi na samom startu, tj. $X_1^* = (4{,}4,\ 0{,}9)$ i ona bi snimala samo tu tačku. Drugu kameru bi trebalo postaviti na koordinatama $X_2^* = (5{,}32,\ 6{,}98)$ i ona bi pokrivala ostale tri tačke. Udaljenost od druge kamere do boksova i krivina O1 i O2 će iznositi: 1,89, 3,27 i 3,04, respektivno.

■