Univerzitet u Nišu
Prirodno-Matematički fakultet

Marko D. Petković

SIMBOLIČKO IZRAČUNAVANJE HANKELOVIH DETERMINANTI I GENERALISANIH INVERZA MATRICA

Doktorska disertacija

mentor: Prof. Dr Predrag S. Stanimirović

Sadržaj

Sadržaj

Uvod

- Simboličko izračunavanje (računanje) predstavlja upotrebu računara za manipulisanje matematičkim izrazima u simboličkoj formi.
- Danas postoji više programskih paketa koji podržavaju simboličko računanje, npr. MATHEMATICA, MATLAB, MAPLE, MUPAD, itd.
- Hankelove determinante imaju veliku primenu u teoriji ortogonalnih polinoma, numeričkoj matematici a takođe i u drugim oblastima matematike i tehničkim naukama. Naročito je važno izračunavanje ovih determinanti u zatvorenom obliku.
- Generalisani (uopšteni) inverzi matrica predstavljaju uopštenja pojma običnog matričnog inverza.
- Ova disertacija predstavlja doprinos simboličkom računanju Hankelovih determinanti i generalisanih inverza matrica. Većina razmatranih metoda implementirana je u programskom paketu MATHEMATICA. Sve implementacije su besplatne i mogu se preuzeti sa internet adrese:

  http://tesla.pmf.ni.ac.yu/people/dexter

Sadržaj

Nizovi celih i realnih brojeva

Niz realnih brojeva je svaka funkcija $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. Sa $a_n = a(n)$ obeležavamo opšti član a sa $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sam niz.

Funkcija generatrisa niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Primer (Fibonaccijevi brojevi)

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ $\qquad 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 \ldots$

Primer (Centralni trinomni koeficijenti)

$t_n = [x^n](1 + x + x^2)^n$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$ $\qquad 1, 1, 3, 7, 19, \ldots$

- N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, http://www.research.att.com/~njas/sequences/.

Binomna transformacija

Definicija (Binomna transformacija)

Binomna transformacija datog niza $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je niz* $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *definisan sa*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Binomnu transformaciju označavaćemo sa $\mathbf{B}$ *i pisaćemo* $b = \mathbf{B}(a)$.

Lema

Binomna transformacija je invertibilna. Ako važi $b = \mathbf{B}(a)$ *onda je*

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

Primer (Centralni trinomni koeficijenti)

Binomna transformacija niza $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz $\mathbf{B}\left(\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\right) = \left\{\binom{2n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Invert transformacija

Definicija (Invert transformacija)

Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *niz koji zadovoljava uslove* $a_0 = 0$ *i* $a_1 = 1$ *i neka je* $f(x)$ *funkcija generatrisa ovog niza. Invert transformacija niza* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je niz* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *čija je funkcija generatrisa* $g(x)$ *definisana na sledeći način*

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 - f(x)}.$$

Invert transformaciju ćemo označavati sa **INV** *i pisaćemo* $b = \mathbf{INV}(a)$.

Hankelova transformacija

- J.W. LAYMAN, *The Hankel Transform and Some of its Properties*, Journal of Integer Sequences, Article 01.1.5, Volume 4, 2001.

Definicija (Hankelova transformacija)

Hankelova transformacija datog niza $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz determinanti Hankelovih matrica $h = \mathbf{H}(a) = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gde je $h_n = \det[a_{i+j-2}]_{i,j=1}^{n}$, tj.

$$a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \stackrel{\mathbf{H}}{\Longrightarrow} \quad h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} : \quad h_n = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & & a_{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & a_{n+1} & & a_{2n} \end{bmatrix}$$

Primer (Catalanovi brojevi)

Hankelova transformacija niza Catalanovih brojeva $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz $\{1\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

$$|1| = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{vmatrix} = 1, \qquad \ldots$$

Hankelova transformacija i ortogonalni polinomi

Neka je $d\mu$ proizvoljna mera sa znakom na $\mathbb{R}$, $\{\pi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz moničnih ortogonalnih polinoma u odnosu na meru $d\mu$ i $\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu$ niz momenata. Posmatrajmo tročlanu rekurentnu relaciju

$$\pi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\pi_n(x) - \beta_n \pi_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Teorema (Heilermann)

Hankelova determinanta $\det[\mu_{i+j}]_{0\le i,j\le n-1}$ *jednaka je*

$$\det_{0\le i,j\le n-1}[\mu_{i+j}] = \mu_0^n \beta_1^{n-1} \beta_2^{n-2} \ldots \beta_{n-2}^2 \beta_{n-1}.$$

Važi za sve nizove čija Hankelova transformacija ne sadrži nule.

Pozitivna Hankelova transformacija - Hamburgerov momentni problem.

Neka je $\mathcal{G}(x)$ funkcija generatrisa niza $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Tada je

$$\mathcal{G}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n x^n=\cfrac{\mu_0}{1-\alpha_0 x-\cfrac{\beta_1 x^2}{1-\alpha_1 x-\cfrac{\beta_2 x^2}{1-\alpha_2 x-\cdots}}}.$$

Primer (Pomereni Bernoullijevi brojevi)

Funkcija generatrisa pomerenih Bernoullijevih brojeva $B''=\{B_{n+2}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jednaka je

$$\mathcal{G}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n+2}x^n=\cfrac{1/6}{1-\cfrac{\beta_1 x^2}{1-\cfrac{\beta_2 x^2}{1-\cdots}}},\quad \beta_i=\frac{i(i+1)^2(i+2)}{4(2i+1)(2i+3)},$$

Zamenom se dobija sledeći izraz u zatvorenom obliku za $h=\mathbf{H}(B'')$:

$$h_n=(-1)^{\binom{n}{2}}\frac{1}{6}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{i!(i+1)!^4(i+2)!}{(2i+2)!(2i+3)!}.$$

Stieltjes-Perronova inverziona formula

Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz čija Hankelova transformacija ne sadrži nule. Neka je

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\qquad g(z)=\tfrac{1}{z}f(\tfrac{1}{z}).$$

Teorema (Stieltjes-Perronova inverziona formula)

Imamo da je $a_n=\int_{\mathbb{R}}x^n d\lambda$, pri čemu je mera $d\lambda$ definisana sa

$$\lambda(t)-\lambda(0)=-\frac{1}{2\pi i}\lim_{y\to 0^+}\int_0^t\Big[g(x+iy)-g(x-iy)\Big]dx.$$

Težinska funkcija $w(t)$ definisana je kao $w(t)=\lambda'(t)$.

Transformacije težinske funkcije

Teorema (Transformaciona teorema 1)

(1) *Ako je* $\tilde{w}(x) = Cw(x)$ *gde je* $C \neq 0$ *onda važi* $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n$ *za* $n \in \mathbb{N}_0$ *kao i* $\tilde{\beta}_0 = C\beta_0$, $\tilde{\beta}_n = \beta_n$ *za* $n \in \mathbb{N}$. *Dodatno važi* $\tilde{\pi}_n(x) = \pi_n(x)$ *for all* $n \in \mathbb{N}_0$.

(2) *Ako je* $\tilde{w}(x) = w(ax+b)$ *gde su* $a, b \in \mathbb{R}$ *i* $a \neq 0$ *tada je* $\tilde{\alpha}_n = \frac{\alpha_n - b}{a}$ *za* $n \in \mathbb{N}_0$ *kao i* $\tilde{\beta}_0 = \frac{\beta_0}{|a|}$ *i* $\tilde{\beta}_n = \frac{\beta_n}{a^2}$ *za* $n \in \mathbb{N}$. *Dodatno važi* $\tilde{\pi}_n(x) = \frac{1}{a^n}\pi_n(ax+b)$.

- W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Clarendon Press - Oxford, 2003.

Teorema (Transformaciona teorema 2)

Neka je $c < \inf \operatorname{supp}(w)$ *i niz* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *definisan sa*

$$\lambda_{-1} = 0, \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_{n+1} = (c - \alpha_n)\lambda_n - \beta_n\lambda_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(3) *Ako važi* $\tilde{w}(x) = (x - c)w(x)$ *imamo da je*

$$\tilde{\beta}_0 = \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x)dx, \qquad \tilde{\beta}_n = \beta_n \frac{\lambda_{n+1}\lambda_{n-1}}{\lambda_n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\tilde{\alpha}_n = c - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - \beta_{n+1}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Teorema (Transformaciona teorema 3)

Neka je niz $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *definisan sa*

$$r_{-1} = -\int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x)\,dx, \qquad r_n = c - \alpha_n - \frac{\beta_n}{r_{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(4) *Ako je* $\tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{x-c}$ *gde je* $c < \inf \operatorname{supp}(w)$ *tada važi*

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0 &= \alpha_0 + r_0, & \tilde{\alpha}_n &= \alpha_n + r_n - r_{n-1}, & \\ \tilde{\beta}_0 &= -r_{-1}, & \tilde{\beta}_n &= \beta_{n-1}\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, & (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(5) *Ako je* $\tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{c-x}$ *gde je* $c > \sup \operatorname{supp}(w)$, *tada važe predhodne relacije pri čemu je* $\tilde{\beta}_0 = r_{-1}$ *kao i*

$$r_{-1} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x)\,dx.$$

Sadržaj

Hankelova transformacija sume dva uzastopna generalisana Catalanova broja

- P.M. Rajković, M.D. Petković, P. Barry, *The Hankel Transform of the Sum of Consecutive Generalized Catalan Numbers*, Integral Transforms and Special Functions, Vol **18/4** (January 2007), 285 – 296.

Motivacija:

- A. Cvetković, P. Rajković, M. Ivković, *Catalan Numbers, the Hankel Transform and Fibonacci Numbers*, Journal of Integer Sequences, **5**, May 2002, Article 02.1.3.

Teorema (Cvetković, Rajković, Ivković 2002)

Neka je $a_n = C_n + C_{n+1}$ gde je sa C_n označen n-ti Catalanov broj. Tada je $\mathbf{H}(a) = \{F_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, gde je sa F_n označen n-ti Fibonaccijev broj.

- P. Barry, *On Integer Sequences Based Constructions of Generalized Pascal Triangles*, Preprint, Waterford Institute of Technology, 2005.

Definicija (Generalisani binomni koeficijenti i Catalanovi brojevi)

Generalisani binomni koeficijenti, u oznaci $T(n,k;L)$, definisani su sledećim izrazom

$$T(n,k;L) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{j} L^j.$$

Generalisani Catalanovi brojevi, u oznaci $C(n;L)$, definišu se sa

$$c(n;L) = T(2n,n;L) - T(2n,n-1;L).$$

Trivijalno važi $T(n,k;1) = \binom{n}{k}$ kao i $c(n;1) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = C(n)$.

Sledeća teorema predstavlja glavni rezultat ovog odeljka.

Teorema (Rajković, Petković, Barry 2007)

Hankelova transformacija $\{h_n(L)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, *niza* $\{a_n(L)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *definisanog sa* $a_n(L) = c(n; L) + c(n+1; L)$ *data je sledećim izrazom*

$$h_n(L) = \frac{L^{(n^2-n)/2}}{2^{n+1}\sqrt{L^2+4}}$$
$$\times \left\{(\sqrt{L^2+4}+L)(\sqrt{L^2+4}+L+2)^n + (\sqrt{L^2+4}-L)(L+2-\sqrt{L^2+4})^n\right\}.$$

Paul Barry je formulisao ovaj rezultat za $L = 2$ u obliku hipoteze.

Funkcija generatrisa

Jacobijevi polinomi:

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+a}{k} \binom{n+b}{n-k} (x-1)^{n-k} (x+1)^k \quad (a,b>-1),$$

$$G^{(a,b)}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(a,b)}(x) t^n = \frac{2^{a+b}}{\phi \cdot (1-t+\phi)^a \cdot (1+t+\phi)^b}, \ \phi = \sqrt{1-2xt+t^2}.$$

Teorema

Funkcija generatrisa $\mathcal{G}(t;L)$ *niza* $\{a_n(L)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *jednaka je*

$$\mathcal{G}(t;L) = \frac{t+1}{\rho(t;L)} \left\{ \frac{1}{t} - \frac{4}{(1-(L-1)t+\rho(t;L))^2} \right\} - \frac{1}{t},$$

gde je

$$\rho(t;L) = \phi\left(\tfrac{L+1}{L-1}, (L-1)t\right) = \sqrt{1-2(L+1)t+(L-1)^2t^2}$$

Težinska funkcija

Teorema

Težinska funkcija $\omega(x;L)$ *čiji je niz momenata* $\{a_n(L)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *data je sledećim izrazom*

$$\omega(x;L)=\begin{cases}\frac{\sqrt{L}}{\pi}\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x-L-1}{2\sqrt{L}}\right)^2}, & x\in((\sqrt{L}-1)^2,(\sqrt{L}+1)^2)\\ 0, & inače\end{cases}$$

Dokaz (Skica).

Neka je

$$F(z;L)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(L)z^{-k-1}=z^{-1}\mathcal{G}(z^{-1};L)=-1+\frac{2(z+1)}{L-1+z(1+z\rho(z^{-1},L))}.$$

Funkcija

$$R(z;L)=z\rho(z^{-1},L)=\sqrt{L^2+(z-1)^2-2L(z+1)}$$

ima dve tačke grananja $(\sqrt{L}-1)^2$ i $(\sqrt{L}+1)^2$. $\square$

Dokaz (Skica) - nastavak.

$$\mathcal{F}(z;L) = \int F(z;L)dz = \frac{1}{4}\Big[z^2 - 2Lz - (z-L+1)R(z;L) - l_1(z) + l_2(z)\Big],$$

$$l_1(z) = 2(3L+1)\log\Big[z-(L+1)+R(z;L)\Big],$$

$$l_2(z) = 2(L-1)\log\left[\frac{-(L-1)R(z;L)-(L-1)^2+z(L+1)}{z^2(L-1)^3}\right]$$

Funkcije $l_1(z)$ i $l_2(z)$ imaju još jednu tačku grananja, $z = L+1$. Dalje je

$$\mathrm{Im}\, l_1(x) = \begin{cases} 2(3L+1)\arctan\frac{\sqrt{4L-(x-L-1)^2}}{x-(L+1)}, & x \geq L+1; \\ 2(3L+1)\left(\pi + \arctan\frac{\sqrt{4L-(x-L-1)^2}}{x-(L+1)}\right), & x < L+1 \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\, l_2(x) = \begin{cases} 2(L-1)\left(2\pi + \arctan\frac{x(L+1)-(L-1)^2}{\sqrt{4L-(x-L-1)^2}}\right), & x \geq \frac{(L-1)^2}{L+1}; \\ 2(L-1)\left(\pi + \arctan\frac{x(L+1)-(L-1)^2}{\sqrt{4L-(x-L-1)^2}}\right), & x < \frac{(L-1)^2}{L+1} \end{cases}$$

$$\lim_{y\to 0+} \mathrm{Im}\,\mathcal{F}(x+iy;L) = \mathrm{Im}\, l_2(x) - \mathrm{Im}\, l_1(x) - (x-L+1)\sqrt{4L-(x-L-1)^2}$$

Rezultat sada sledi direktno iz Stieltjes-Perronove inverzione formule. $\square$

Tročlana rekurentna relacija

$$\omega(x;L) = \begin{cases} \frac{\sqrt{L}}{\pi}\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x-L-1}{2\sqrt{L}}\right)^2}, & x \in ((\sqrt{L}-1)^2, (\sqrt{L}+1)^2) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Potrebno je naći koeficijente $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ tročlane rekurentne relacije. Primenjujemo niz transformacija

$$\begin{aligned} w^*(x) &= p^{(1/2,1/2)}(x) = \sqrt{1-x^2}, \\ \hat{w}(x) &= \left(x + \frac{L+2}{2\sqrt{L}}\right) w^*(x), \\ \tilde{w}(x) &= \hat{w}\left(\frac{x}{2\sqrt{L}} - \frac{L+1}{2\sqrt{L}}\right), \\ \breve{w}(x) &= \frac{2L}{\pi}\tilde{w}(x), \\ \omega(x;L) &= \frac{\breve{w}(x)}{x}. \end{aligned}$$

Transformacija $\hat{w}(x) = \left(x + \frac{L+2}{2\sqrt{L}}\right) w^*(x)$

Razmotrimo niz Chebyshevljevih polinoma druge vrste koji su ortogonalni u odnosu na težinsku funkciju $p^{(1/2,1/2)}(x) = \sqrt{1-x^2}$. Koeficijenti tročlane rekurentne relacije su:

$$\alpha_n^* = 0 \quad (n \geq 0) \qquad \text{i} \qquad \beta_0^* = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_n^* = \frac{1}{4} \qquad (n \geq 1).$$

Neka je $\hat{w}(x) = (x-c)\, p^{(1/2,1/2)}(x)$. Koeficijente $\hat{\alpha}_n$ i $\hat{\beta}_n$ računamo primenom Transformacione teoreme 2:

$$\lambda_n = S_n(c), \quad \lambda_{n+1} = (c - \alpha_n^*)\lambda_n - \beta_n^* \lambda_{n-1}, \quad \lambda_{-1} = -1, \quad \lambda_0 = 1$$

$$\hat{\alpha}_n = c - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - \beta_{n+1}^* \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}, \qquad \hat{\beta}_n = \beta_n^* \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n+1}}{\lambda_n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

gde je $c = -\frac{L+2}{2\sqrt{L}}$. Rešavanjem diferencne jednačine po λ_n dobijamo

$$\lambda_n = \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4^n L^{\frac{n}{2}} \sqrt{L^2+4}}\, \psi_{n+1} \quad (n = -1, 0, 1, \ldots).$$

gde je

$$\psi_n = \left(L + 2 + \sqrt{L^2+4}\right)^n - \left(L + 2 - \sqrt{L^2+4}\right)^n.$$

Transformacija $\omega(x;L) = \frac{\breve{w}(x)}{x}$

Polazimo od

$$\breve{\beta}_0 = L(L+2), \quad \breve{\beta}_n = L\frac{\psi_n\psi_{n+2}}{\psi_{n+1}^2} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \breve{\alpha}_n = -1 + \frac{\psi_{n+2}}{2\psi_{n+1}} + 2L\frac{\psi_{n+1}}{\psi_{n+2}}.$$

Primenjujemo Transformacionu teoremu 3.

$$r_{-1} = -(L+1), \qquad r_n = -\left(\breve{\alpha}_n + \frac{\breve{\beta}_n}{r_{n-1}}\right) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Lema

Niz r_n je zadat sledećim izrazom

$$r_n = -\frac{\psi_{n+1}}{\psi_{n+2}} \cdot \frac{L\psi_{n+2} + \xi\varphi_{n+2}}{L\psi_{n+1} + \xi\varphi_{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad \xi = \sqrt{L^2+4}$$

$$\varphi_n = \left(L+2+\sqrt{L^2+4}\right)^n - \left(L+2-\sqrt{L^2+4}\right)^n,$$

$$\psi_n = \left(L+2+\sqrt{L^2+4}\right)^n + \left(L+2-\sqrt{L^2+4}\right)^n.$$

Dokaz glavne teoreme

Dokaz (Skica).

Primenom Heilermannove formule dobijamo

$$h_1(L) = a_0(L), \qquad h_n(L) = \beta_0\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-2}\beta_{n-1}\cdot h_{n-1}(L).$$

Imamo da je

$$\|Q_{n-1}\|^2 = \beta_0\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-2}\beta_{n-1} = \beta_0\frac{r_{n-2}}{r_{-1}}\prod_{k=0}^{n-2}\breve{\beta}_k = \frac{L^{n-1}}{2}\cdot\frac{L\psi_n+\xi\varphi_n}{L\psi_{n-1}+\xi\varphi_{n-1}}$$

Dalje matematičkom indukcijom dokazujemo

$$h_n(L) = \frac{L^{n(n-1)/2}}{2^{n+1}\xi}\cdot\left(L\psi_n+\xi\varphi_n\right).$$

čime je dokaz završen. $\square$

Binomna transformacija i generalizacije

- M.Z. Spivey, L.L. Steil, *The k-Binomial Transforms and the Hankel Transform*, Journal of Integer Sequences, Vol. **9** (2006), Article 06.1.1.

Definicija (Spivey, Stail 2006)

Rastuća i opadajuća k-binomna transformacija niza $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ su nizovi $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{Br}(a;k)$ i $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{Bf}(a;k)$ definisani sa

$$r_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i a_i; \qquad f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i} a_i.$$

Ukoliko je $k = 1$, rastuća i opadajuća k-binomna transformacija svode se na binomnu transformaciju: $B(\cdot) = Bf(\cdot;1) = Br(\cdot;1)$.

Generalisane binomne transformacije i Hankelova transformacija

Teorema (Spivey, Stail 2006)

Neka je dat niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *i neka je* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{H}(a)$. *Tada važi:*

a) $\mathbf{H}(a) = \mathbf{H}(\mathbf{Bf}(a;k)) = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$,

b) $\mathbf{H}(\mathbf{Br}(a;k)) = \left\{k^{n(n+1)}h_n\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Posledica (Layman 2001)

Hankelova transformacija je invarijantna u odnosu na binomnu transformaciju, tj. $\mathbf{H}(\mathbf{B}(a)) = \mathbf{H}(a)$ *važi za svaki niz a.*

Glavni rezultat ovog odeljka je alternativni dokaz rezultata Spiveyja i Staila za nizove čija Hankelova transformacija ne sadrži nule.
Drugim rečima važi $a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu$ gde je $d\mu$ mera sa znakom.

Dokaz, deo a) (Skica).

Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{Bf}(a;k)$. Niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ predstavlja niz momenata u odnosu na težinsku funkciju $w_f(x) = w(x-k)$.

$$f_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{n-i}\int_{\mathbb{R}} x^i w(x)dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{n-i}x^i\right)dx = \int_{\mathbb{R}}(x+k)^n w(x)dx$$

Primenom Transformacione teoreme 1 dobijamo $\beta_{f,n} = \beta_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Na osnovu Heilermannove formule sada važi $\mathbf{H}(a) = \mathbf{H}(f)$. $\square$

Dokaz, deo b) (Skica).

Neka je $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{Br}(a;k)$. Niz $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ predstavlja niz momenata u odnosu na težinsku funkciju $w_r(x) = w\left(\frac{x-1}{k}\right)$.

$$r_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i \int_{\mathbb{R}} x^i w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i x^i \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (1+kx)^n w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x^n w\left(\frac{x-1}{k}\right) dx$$

Primenom Transformacione teoreme 1 dobijamo $\beta_{r,n} = k^2\beta_n$ pa na osnovu Heilermannove formule važi $\mathbf{H}(\mathbf{Br}(a;k)) = \left\{k^{n(n+1)}h_n\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. $\square$

Generalisani centralni trinomni koeficijenti

- T. D. Noe, *On the Divisibility of Generalized Central Trinomial Coefficients*, Journal of Integer Sequences, Vol. 9 (2006), Article 06.2.7..

$$T_n(a,b,c) = [t^n](a+bt+ct^2)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{n}{2k} b^{n-2k}(ac)^k$$

Prvih nekoliko članova niza su

$$1, b, b^2+2ac, b^3+6abc, b^4+12ab^2c+6a^2c^2, \ldots$$

Važi $t_n = \tau_n(1,1,1)$.

Teorema (Rajković, Petković, Barry)

Hankelova transformacija niza $\{T_n(a,b,c)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *jednaka je*
$\left\{2^n(ac)^{\binom{n+1}{2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Primene Hankelove transformacije

1. Prebrojavanje Astečkih dijamanata

- R. Brualdi, S. Kirkland, *Aztec diamonds and digraphs, and Hankel determinants of Schroder numbers*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **94** (2005) 334 - 351.

2. Square ice model.

- F. Colomo, A.G. Pronko, *Square ice, alternating sign matrices, and classical orthogonal polynomials*, J. Stat. Mech. (2005) P01005.

3. Sistemi kompjuterske algebre.

- J.R. Sendra, *Hankel Matrices and Computer Algebra*, ACM SIGSAM Bulletin, Vol **24**, Issue 3, (July 1990), 17 – 26.

4. Rešavanje Toda jednačine.

- K. Kajiwara, M. Mazzocco, Y. Ohta, *A Remark on the Hankel Determinant Formula for Solutions of the Toda Equation*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol **40** (2007), Issue 42, 12661–12675.

Rešavanje Toda jednačine

Posmatramo prost model nelinearnog jednodimenzionog kristala u kome čestice interaguju samo sa najbližim susedima.

$q_n(t)$: Pomeraj n-te čestice iz svog ravnotežnog položaja,
$p_n(t)$: Impuls čestice,
$V(r)$: Potencijal interakcije.

Hamiltonijan sistema i jednačine kretanja:

$$\mathcal{H}(p,q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p_n^2}{2} + V(q_{n+1} - q_n) \right),$$

$$p_n' = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} = V(q_n - q_{n-1}) - V(q_{n+1} - q_n), \quad q_n' = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} = p_n.$$

Eliminacijom p_n dobijamo sledeći beskonačni sistem diferencijalnih jednačina drugog reda

$$q_n'' = V'(q_n - q_{n-1}) - V'(q_{n+1} - q_n).$$

Morikazu Toda je uveo potencijal $V(r) = e^{-r} + r - 1$.

Zamenom dobijamo Toda jednačinu:

$$q_n'' = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n - q_{n+1}}.$$

Uvodeći smenu promenljivih $\tau_n = \log(q_{n+1}/q_n)$, Toda jednačina se svodi na

$$\tau_n''\tau_n - (\tau_n')^2 = \tau_{n+1}\tau_{n-1}.$$

Za semi-beskonačnu rešetku, sa graničnim uslovima $\tau_{-1} = 0$ i $\tau_0 = 1$, rešenje je dato Hankelovom determinantom

$$\tau_n = \det[a_{i+j-2}]_{i,j=1,\dots,n}, \quad a_0 = \tau_1,\ a_i = a_{i-1}', \quad i,n \in \mathbb{N}.$$

Sadržaj

Uvod

- Koncept generalisane inverzije je prvi uveo I. Fredholm, 1903 godine.
- Ideja o generalisanim inverzima je implicitno sadržana još u radovima C. F. Gaussa iz 1809 (u vezi sa principom najmanjih kvadrata).

  kod nekonzistentnih linearnih sistema jednačina.
- Generalisani inverz matrice je prvi definisao E. Moore, 1920 godine.
- Kasnije, 1955 godine, R. Penrose je pokazao da je Mooreov inverz jedinstveno rešenje sistema četiri matrične jednačine.
- Ovaj rezultat je pobudio pravi interes za izučavanje ove problematike.

Teorema (Moore 1920)

$$\mathfrak{U}^{C}\mathfrak{B}^{1\ II}\mathfrak{B}^{2\ II}\kappa^{12}\cdot)\cdot$$

$$\exists \mid \lambda^{21\ type\ \mathfrak{M}^{\cdot}_{\kappa*}\overline{\mathfrak{M}^{\cdot}_{\kappa}}} \ni \cdot S^{2}\kappa^{12}\lambda^{21} = \delta^{11}_{\mathfrak{M}^{\cdot}_{\kappa}} \cdot S^{1}\lambda^{21}\kappa^{12} = \delta^{22}_{\mathfrak{M}^{\cdot}_{\kappa*}} \cdot$$

Moore-Penrose-ov i $\{i, j, \dots, k\}$

- R. PENROSE, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51** (1955), 406-413.

Teorema (Penrose 1955)

Za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, sistem matričnih jednačina

$$\begin{array}{ll} (1)\ AXA = A, & (3)\ (AX)^* = AX, \\ (2)\ XAX = X, & (4)\ (XA)^* = XA. \end{array}$$

ima jedinstveno rešenje $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Ovo rešenje je poznato kao Moore-Penroseov inverz (generalisani inverz, uopšteni inverz, pseudoinverz) matrice A i označava se sa $A^\dagger$.

Ako je A kvadratna regularna matrica, onda je $A^\dagger = A^{-1}$.

Definicija

Neka je $A\{i, j, \dots, k\}$ skup matrica koje zadovoljavaju jednačine $(i), (j), \dots, (k)$ među jednačinama $(1), \dots, (4)$. Ovakve matrice nazivaju se $\{i, j, \dots, k\}$ inverzi i označavaju sa $A^{(i,j,\dots,k)}$.

Teorema (Penrose 1955)

Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i neka je $b \in \mathbb{C}^{m\times 1}$. Minimalno srednjekvadratno rešenje sistema $Ax = b$ dato je pomoću $x^* = A^\dagger b$. Sva ostala srednjekvadratna rešenja data su sledećim izrazom

$$x = A^\dagger b + (I_n - A^\dagger A)z, \quad z \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

Lema

Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ proizvoljna matrica. Tada je

(1) $(A^\dagger)^\dagger = A$, $(A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger$;

(2) $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$, *gde je* $\lambda \in \mathbb{C}$ *i* $\lambda^\dagger = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$;

(3) $(AA^*)^\dagger = (A^*)^\dagger A^\dagger$; $(A^*A)^\dagger = A^\dagger (A^*)^\dagger$;

(4) $A^\dagger A A^* = A^* = A^* A A^\dagger$; $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$;

(5) $N(AA^\dagger) = N(A^\dagger) = N(A^*) = R(A)$

(6) $R(AA^*) = R(AA^{(1)}) = R(A)$; $\mathrm{rank}(AA^{(1)}) = \mathrm{rank}(A^{(1)}A) = \mathrm{rank} A$;

Drazinov inverz

- M.P. DRAZIN, *Pseudo inverses in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly **65**, (1958), 506-514.

Teorema (Drazin 1958)

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ proizvoljna matrica i $k = \mathrm{ind}(A)$. Tada sledeći sistem matričnih jednačina

$$(1^k)\ A^k XA = A^k, \quad (2)\ XAX = X, \quad (5)\ AX = XA,$$

ima jedinstveno rešenje. Ovo rešenje se naziva Drazinov inverz matrice A i označava sa A^D.

Lema

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $k = \mathrm{ind}(A)$. Tada važi

(1) $(A^*)^D = (A^D)^*$, $(A^T)^D = (A^D)^T$, $(A^n)^D = (A^D)^n$ *za svako* $n = 1, 2, \ldots$,

(2) $((A^D)^D)^D = A^D$, $(A^D)^D = A$ *ako i samo ako je* $k = 1$,

(3) $R(A^D) = R(A^l)$ *i* $N(A^D) = N(A^l)$ *za svako* $l \geq k$,

Osnovni metodi za izračunavanje generalisanih inverza

(1) Metodi bazirani na faktorizacijama potpunog ranga.

(2) Blokovske reprezentacije generalisanih inverza.

(3) Metod Žukovskog.

(4) Leverrier-Faddev metod.

(5) Metod pregradjivanja.

(6) Metod baziran na generalisanoj Cholesky faktorizaciji.

Izračunavanje generalisanih inverza u vremenu množenja matrica

- M.D. Petković, P.S. Stanimirović, *Generalized inversion is not harder than matrix multiplication*, submitted for publication.

- Formulisan je rekurzivni algoritam za računanje generalisane Cholesky faktorizacije date simetrične, pozitivno semi- definitne matrice.
- Ovaj algoritam zajedno sa Strassenovim metodom za inverziju matrica daje algoritam za računanje generalisanih inverza u vremenu množenja matrica.
- Složenost ovih metoda je manja od $\Theta(n^3)$ i oni ujedno predstavljaju vremenski najefikasnije algoritme za računanje generalisanih inverza matrica

- P. Courrieu, *Straight monotonic embedding of data sets in Euclidean spaces*, Neural Network, **15** (2002) 1185–1196.

Teorema (Courrieu 2002)

Neka je A Hermitska (regularna ili singularna) pozitivno semi-definitna matrica reda $n \times n$. Tada postoji gornje trougaona matrica $U = [u_{ij}]$ takva da je $U^*U = A$ i $u_{ii} \geq 0$ za svako $i = 1, \dots, n$. Ako za neki indeks i važi $u_{ii} = 0$, onda važi $u_{ij} = 0$ za svako $j = 1, \dots, n$. Štaviše, matrica U je jedinstvena.

Faktorizacija $A = U^*U$ naziva se generalisana Cholesky faktorizacija. Ako je A regularna ova faktorizacija se svodi na Cholesky faktorizaciju.

Primer

$$A = \begin{bmatrix} 429 & 429 & 109 & 109 \\ 429 & 429 & 109 & 109 \\ 109 & 109 & 30 & 30 \\ 109 & 109 & 30 & 30 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \sqrt{429} & \sqrt{429} & \frac{109}{\sqrt{429}} & \frac{109}{\sqrt{429}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{989}{429}} & \sqrt{\frac{989}{429}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rekurzivna Cholesky faktorizacija (Regularni slučaj)

Posmatrajmo blok reprezentacije matrica A i U:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbb{O} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad U_{11}, A_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}.$$

Jednačina $A = U^T U$ je ekvivalentna sledećem sistemu matričnih jednačina:

$$A_{11} = U_{11}^* U_{11}, \quad A_{12} = U_{11}^* U_{12}, \quad A_{22} = U_{12}^* U_{12} + U_{22}^* U_{22}.$$

Posmatrajmo identičnu blok reprezentaciju matrice $Y = U^{-1}$. Tada važi:

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbb{O} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ \mathbb{O} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} Y_{11} & U_{11} Y_{12} + U_{12} Y_{22} \\ \mathbb{O} & U_{22} Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I_{n-k} \end{bmatrix},$$

Drugim rečima:

$$Y_{11} = U_{11}^{-1}, \quad Y_{22} = U_{22}^{-1}, \quad Y_{12} = -Y_{11} U_{12} Y_{22}.$$

Na ovaj način dobijamo rekurzivni algoritam za računanje matrica U i $Y = U^{-1}$.

Algoritam **Chol** (Rekurzivna Cholesky faktorizacija)

Input: *Regularna, Hermitska, pozitivno definitna matrica A formata $n \times n$.*

if $n = 1$ ***then***

  return $U := [\sqrt{a_{11}}]$, $Y := \left[\sqrt{a_{11}^{-1}}\right]$

end if

Izvršiti blok dekompoziciju $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ *tako da važi* $A_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}$*, gde je* $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$*.*

Izračunati rekurzivno Cholesky faktorizaciju matrice U_{11} *i njenog inverza* Y_{11} *korišćenjem istog algoritma za ulaznu matricu* A_{11}*.*

$U_{12} := Y_{11}^{*} A_{12}$

$T_1 := U_{12}^{*} U_{12}$

$T_2 := A_{22} - T_1$

Izračunati rekurzivno Cholesky faktorizaciju matrice U_{22} *i njenog inverza* Y_{22} *korišćenjem istog algoritma za ulaznu matricu* T_2*.*

$T_3 := -Y_{11} U_{12}$; $Y_{12} := T_3 Y_{22}$

return $U := \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbb{O} & U_{22} \end{bmatrix}$ *i* $Y := \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ \mathbb{O} & Y_{22} \end{bmatrix}$.

Rekurzivna generalisana Cholesky faktorizacija (Singularni slučaj)

Ako je $\mathrm{add}(n) = \mathcal{O}(n^2)$ and $\mathrm{mul}(n) = \Theta(n^{2+\epsilon})$ za $0 < \epsilon < 1$, važi $\mathrm{Chol}(n) = \Theta(\mathrm{mul}(n)) = \Theta(n^{2+\epsilon})$.

Ukoliko je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ singularna, predhodni algoritam neće moći da izvrši korak 2, ako je $a_{11}^{-1} = 0$.

Algoritam GenChol (Rekurzivna generalisana Cholesky faktorizacija)

Input: *Hermitska, pozitivno semi-definitna matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1: ***if*** $n = 1$ ***then***
2: ***if*** $a_{11} \neq 0$ ***then***
3: **return** $U := [\sqrt{a_{11}}]$, $Y := \left[\sqrt{a_{11}^{-1}}\right]$
4: ***else***
5: **return** $U := [0]$, $Y := [0]$
6: ***end if***
7: ***end if***
8: *Nastaviti sa koracima 4-12 algoritma* **Chol**.

Teorema (Glavna teorema; Petković, Stanimirović 2008)

Posmatrajmo Hermitsku, pozitivnu semi-definitnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Izlazna matrica U algoritma **GenChol** *zadovoljava $A = U^*U$. Štaviše, izlazna matrica Y je $\{1,2,3\}$ inverz matrice U, matrica UY je dijagonalna pri čemu su elementi glavne dijagonale jednaki 0 ili 1.*

Lema (Courrieu 2005)

Neka je A proizvoljna matrica formata $m \times n$ i neka je S^*S generalisana Cholesky faktorizacija matrice A^*A. Takodje, neka je matrica L takva da se L^* sastoji od vrsta matrice S koje su različite od nula vrste. Tada MP inverz matrice A zadovoljava sledeću relaciju

$$A^\dagger = L(L^*L)^{-1}(L^*L)^{-1}L^*A^*.$$

Lema (Strassen 1969)

Ako je A data $n \times n$ matrica razložena na sledeći način

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}$$

i važi da su A i A_{11} regularne matrice, tada inverznu matricu $X = A^{-1}$ možemo izračunati na sledeći način

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} S^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} S^{-1} \\ -S^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}.$$

Matrice X_{11}, X_{12}, X_{21} i X_{22} u predhodnom izrazu možemo izračunati pomoću sledećih relacija:

1. $R_1 = A_{11}^{-1}$
2. $R_2 = A_{21} R_1$
3. $R_3 = R_1 A_{12}$
4. $R_4 = A_{21} R_3$
5. $R_5 = R_4 - A_{22}$
6. $R_6 = R_5^{-1}$
7. $X_{12} = R_3 R_6$
8. $X_{21} = R_6 R_2$
9. $R_7 = R_3 X_{21}$
10. $X_{11} = R_1 - R_7$
11. $X_{22} = -R_6$,

Algoritam **RapidMP** (Izračunavanje MP inverza u vremenu množenja matrica)

Input: *Matrica* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

1: $A' := A^*A$
2: *Naći generalisanu Cholesky faktorizaciju* $A' = U^*U$ *matrice* A' *primenom algoritma* **CholGen**.
3: *Formirati matricu* L^* *izbacivanjem svih nula vrsta matrice* U.
4: $T := L^*L$
5: *Naći inverznu matricu* $M := T^{-1}$.
6: **return** $A^\dagger := LM^2L^*A^*$.

Složenost : $\Theta(\mathrm{mul}(n))$. Ako se koristi metod za množenje matrica koji radi u vremenu $\mathcal{O}(n^{2+\epsilon})$ (Strassen, Coppersmith i Winograd,...), složenost algoritma **RapidMP** je $\mathcal{O}(n^{2+\epsilon})$.

Ovaj rezultat može da se uopšti na $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,3\}_s$ i $\{2,4\}_s$ inverze (Stanimirović, Tasić 2007).

Rezultati testiranja implementacije u prog. paketu MATHEMATICA

Svi algoritmi su implementirani u programskom paketu MATHEMATICA 6.0. Složenost algoritama **CholGen** i **RapidMP** je $\mathcal{O}(n^3)$ zato što je u MATHEMATICA-i složenost množenja matrica $\mathcal{O}(n^3)$.

n	CholGen	CholPivot
16	0.0047	0.0031
23	0.016	0.023
32	0.0256	0.0171
45	0.031	0.047
64	0.042	0.1232
90	0.078	0.328
128	0.1498	0.9207
180	0.265	2.481
256	3.24	10.5428
362	8.83	348.6
512	25.9895	1959.15

$\mathrm{rank} A = n/2$

n	CholGen	CholPivot
16	0.0	0.0
23	0.003	0.0062
32	0.0094	0.0188
45	0.0094	0.0436
64	0.0378	0.1308
90	0.0346	0.3306
128	0.078	0.9422
180	0.195	2.5895
256	0.5616	7.9872
362	1.17	197.622
512	12.32	983.4

$\mathrm{rank} A = n/10$

Sadržaj

Generalisani inverzi racionalnih i polinomijalnih matrica

Predhodni rezultati: Karampetakis 1997a, 1997b, 1997c, Stanimirović i Karampetakis 2000, Karampetakis i Tzekis 2001, Stanimirović 2003, Stanimirović i Tasić 2001, 2003, 2004.

Metodi bazirani na

- Leverrier-Faddeevom metodu,
- Metodu pregradjivanja (Partitioning method).

Definicija

Za datu polinomijalnu matricu $A(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times m}$ definišemo njen maksimalni stepen (stepen) kao maksimalni stepen svih njenih elemenata

$$\deg A(s) = \max\{\mathrm{dg}(A(s))_{ij} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}.$$

Definicija

Matrica stepena polinomijalne matrice $A(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times m}$ je matrica definisana sa $\mathrm{dg}A(s) = [\mathrm{dg}A(s)_{ij}]_{m\times n}$.

Izračunavanje MP inverza polinomijalnih matrica interpolacijom

Algoritam **LFMP** (Leverrier-Faddeev metod za računanje MP inverza)

Input: *Konstantna, polinomijalna ili racionalna matrica* A *formata* $m \times n$.

$a_0 := 1$
$A_0 := \mathbb{O}$
$B_0 := I_n$
for $i := 1$ *to* n **do**
    $A_i := AA^* B_{i-1}$
    $a_i := -\,\mathrm{tr}(A_i)/i$
    $B_i := A_i + a_i I_n$
end for
$k := \max\{i \mid a_i \neq 0, i = 0, \ldots, n\}$
if $k = 0$ **then**
    return $A^\dagger := \mathbb{O}$
else
    return $A^\dagger := a_k^{-1} A^* B_{k-1}$
end if

Glavna teorema

- P.S. Stanimirović, M.D. Petković, *Computation of generalized inverses of polynomial matrices by interpolation*, Applied Mathematics and Computation, **172/1** (2006), 508–523.

Definicija

Neka su k^A, a_i^A i B_i^A, vrednosti k, a_i i B_i za $i = 0, \ldots, n$, izračunate Algoritmom **LFMP**, *kada je ulazna matrica A. Takođe označimo $a^A = a_{k^A}^A$ i $B^A = B_{k^A-1}^A$.*

Teorema (Glavna teorema; Stanimirović, Petković 2006)

Neka je $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$, $A'(s) = A(s)A(s)^T$, $d' = \deg A'(s)$ i $\kappa = k^{A(s)}$. Sledeća tvrđenja su ispunjena:

(a) $\kappa = \max\{k^{A(s')} \mid s' \in \mathbb{R}\}$.

(b) *Neka su s_i, $i = 0, \ldots, n \cdot d'$ međusobno različiti brojevi. Tada važi* $\kappa = \max\{k^{A(s_i)} \mid i = 0, \ldots, n \cdot d'\}$.

(c) *Polinomi $B^{A(s)}$ i $a^{A(s)}$ mogu da se izračunaju koristeći skup vrednosti $B^{A(s_i)}$ i $a^{A(s_i)}$, $i = 0, \ldots, k^{A(s)} \cdot d'$.*

Algoritam **LFMPint**(Interpolacioni algoritam za izračunavanje MP inverza)

Input: *Polinomijalna matrica* $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times m}$

$A'(s) := A(s)A(s)^T$; $d' := \deg A'(s)$

Odrediti međusobno različite brojeve $s_0, s_1, \ldots, s_{nd'} \in \mathbb{R}$

for $i := 0$ *to* $n \cdot d'$ ***do***

  Primeni Algoritam **LFMP** *na ulaznu matricu* $A_i := A(s_i)$*, bez izvršavanja koraka 10.*

  $\kappa_i := k^{A_i}$; $B'_i := B^{A_i}_{\kappa_i - 1}$; $a'_i := a^{A_i}_{\kappa_i}$

end for

$\kappa := \max\{\kappa_i \mid i = 0, \ldots, d\}$

if $\kappa = 0$ ***then***

  return $A^\dagger(s) := \mathbb{O}$

else

  for $i := 0$ *to* $\kappa \cdot d'$ ***do***

    $A'_i := A'(s_i)$

    $$B_i := \begin{cases} {A'_i}^{\kappa-\kappa_i-1}\left(A'_i B'_i + a'_i I_n\right), & \kappa > \kappa_i \\ B'_i, & \kappa = \kappa_i \end{cases}$$

    $$a_i := \begin{cases} 0, & \kappa > \kappa_i \\ a'_i, & \kappa = \kappa_i \end{cases}$$

  end for

  Interpolirati polinom $a^{A(s)}_\kappa$ *i polinomijalnu matricu* $B^{A(s)}_{\kappa-1}$ *koristeći parove* (s_i, a_i) *i* (s_i, B_i)*,* $i = 0, \ldots, \kappa \cdot d'$ *kao interpolacione tačke.*

  return $A^\dagger(s) := -\frac{1}{a^{A(s)}_\kappa(s)} A(s)^T B^{A(s)}_{\kappa-1}(s)$

Složenost i procena stepena

Složenost alg. **LFMP** je $\mathcal{O}(n^4)$ za konst. i $\mathcal{O}(n^5 d'^2)$ za pol. matrice.

Neka je $d' = \deg A'(s)$. Odredimo složenost algoritma **LFMPint**. Algoritam **LFMP** primenjujemo nd' puta. Složenost interpolacije je $\mathcal{O}((nd')^2)$ a ona se primenjuje n^2 puta. Ukupna složenost algoritma **LFMPint** je $\mathcal{O}(n^4 \cdot d'^2 + n^5 \cdot d')$.

Algoritam (Procena stepena $\mathrm{dg} B_t^{A(s)}(s)$ i $\mathrm{dg}\left(a_t^{A(s)}\right)$)

Input: *Matrica* $A(s) \in \mathbb{R}^{n\times m}[s]$

$A'(s) = A(s)A(s)^T$

Stavi $(D_0^B)_{ii} := 0$ *za svako* $i = 1,\dots,n$

Stavi $(D_0^B)_{ij} := -\infty$ *za svako* $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,n$, $i \neq j$

$Q := \mathrm{dg} A'(s)$

$d_0 := 0$

for $t = 1$ *to* n ***do***

  $(D_t^A)_{ij} := \max\{Q_{ik} + (D_{t-1}^B)_{kj} \mid k = 1,\dots,n\}$, *za* $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,n$

  $d_t := \max\{(D_t^A)_{ii} \mid i = 1,\dots,n\}$; $(D_t^B)_{ii} := \max\{(D_t^A)_{ii}, d_t\}$ *za svako* $i = 1,\dots,n$

  $(D_t^B)_{ij} := (D_t^A)_{ij}$ *za svako* $i = 1,\dots n$, $j = 1,\dots n$, $i \neq j$.

end for

return $\{D_t^B\}_{0\le t\le n}$ *i* $\{d_t\}_{0\le t\le n}$

Implementacija i rezultati testiranja

Definicija

$$sp_1(A(s)) = \frac{\#\{(i,j) \mid a_{ij}(s) \neq 0\}}{m \cdot n}, \quad sp_2(A(s)) = \frac{\#\{(i,j,k) \mid [s^k]a_{ij}(s) \neq 0\}}{(1 + \deg A(s)) \cdot m \cdot n}.$$

n	$\deg A$	Alg **LFMP**	Alg **LFMPint**
9	3	3.6376	1.4844
9	4	6.1846	2.3528
9	5	8.6374	3.4846
10	3	6.2002	2.275
10	4	10.0246	3.6346
10	5	14.8842	5.425
11	3	10.1686	3.3718
11	4	16.5126	5.4312
11	5	24.603	8.116

$sp_1(A) = sp_2(A) = 1$

n	$\deg A$	Alg **LFMP**	Alg **LFMPint**
9	3	2.2064	1.1594
9	4	4.35	2.1096
9	5	6.3814	2.928
10	3	4.7216	2.0752
10	4	6.6312	3.072
10	5	11.6094	4.878
11	3	7.8282	3.05
11	4	12.797	4.8532
11	5	19.869	7.45

$sp_1(A) = sp_2(A) = 0.5$

Izračunavanje Drazinovog inverza polinomijalnih matrica interpolacijom

Algoritam LFD (Leverrier-Faddeev method za računanje Drazinovog inverza)

Input: *Konstantna, polinomijalna ili racionalna matrica A formata $n \times n$.*

1: $a_0 := 1$
2: $A_0 := \mathbb{O}$
3: $B_0 := I_n$
4: **for** $i := 1$ *to* n **do**
5: $\quad A_i := AB_{i-1}$
6: $\quad a_i := -\operatorname{tr}(A_i)/i$
7: $\quad B_i := A_i + a_i I_n$
8: **end for**
9: $k := \max\{i \mid a_i \neq 0, i = 0, \ldots, n\}$
10: $t := \min\{i \mid B_i = \mathbb{O}, i = 0, \ldots, n\}$
11: $r := t - k$
12: **return** $A^D := (-1)^{r+1} a_k^{-r-1} A^r B_{k-1}^{r+1}$

Glavna teorema

- M.D. Petković, P.S. Stanimirović, *Interpolation algorithm for computing Drazin inverse of polynomial matrices*, Linear Algebra and its applications, **422** (2007), 526–539.

Lema

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konstantna, racionalna ili polinomijalna matrica. Tada važi

(a) $B^A_{t^A+i} = 0$ *za svako* $i = 0, \dots, n - t^A - 1$,

(b) $B^A_{k^A+i-1} = A^{i-1}\left(AB^A + a^A I_n\right)$ *za svako* $i = 1, \dots, t^A - k^A$,

(c) $a^A_{t^A+i} = 0$ *za svako* $i = 0, \dots, n - t^A$ *ili ekvivalentno* $k^A \leq t^A$.

(d) *Ako je* $A = A(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ *tada važi* $\deg B_i(s) \leq i \cdot \deg A(s)$ *i* $\mathrm{dg} a_i(s) \leq i \cdot \deg A(s)$ *za svako* $i = 0, \dots, n$.

Teorema (Glavna teorema; Petković, Stanimirović 2007)

Neka je $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$, $d = \deg A(s)$, $\tau = t^{A(s)}$ *i* $\kappa = k^{A(s)}$. *Neka su* s_i, $i = 0, \dots, n \cdot d$ *međusobno različiti realni brojevi. Tada važe sledeća tvrđenja:*

- **(a)** *Ako označimo* $f(j) = \max\{t^{A(s_i)} \mid i = 0, \dots, j \cdot d\}$ *za* $j = 1, \dots, n$, *tada je* τ *je jedinstven broj koji zadovoljava* $\tau = f(\tau)$, *i takođe važi* $\tau = f(n)$.
- **(b)** $\kappa = \max\{k^{A(s_i)} \mid i = 0, \dots, \tau \cdot d\}$.
- **(c)** *Polinomijalna matrica* $B^{A(s)}$ *i polinom* $a^{A(s)}$ *mogu da se izračunaju koristeći skup konstantnih matrica* $B^{A(s_i)}$ *i vrednosti* $a^{A(s_i)}$ *respektivno, za* $i = 0, \dots, \kappa \cdot d$.

Algoritam **LFDint** (Interpolacioni alg. za računanje Drazinovog inverza)

Input: *Matrica* $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$

$d := \deg A(s)$; $d' := n \cdot d$; $i := -1$; $\tau := -1$
Odrediti različite realne brojeve $s_0, s_1, \cdots, s_{d'} \in \mathbb{R}$
repeat
  $i := i + 1$; $A_i := A(s_i)$
  Primeniti Algoritam **LFD** *na ulaznu matricu* A_i, *bez izvršavanja koraka 12*
  $\kappa_i := k^{A_i}$; $\tau_i := t^{A_i}$; $B_i' := B_{\kappa_i - 1}^{A_i}$; $a_i' := a_{\kappa_i}^{A_i}$; $\tau := \max\{\tau_i, \tau\}$
until $(i = \tau d)$ *ili* $(i = d')$
$\kappa := \max\{\kappa_i \mid i = 0, \ldots, \tau \cdot d\}$
if $\kappa = 0$ ***then***
  return $A^D(s) := \mathbb{O}$
else
  for $i = 0$ *to* $\kappa \cdot d$ ***do***
    $$B_i := \begin{cases} A_i^{\kappa - \kappa_i - 1}\left(A_i B_i' + a_i' I_n\right), & \kappa > \kappa_i \\ B_i' & \kappa = \kappa_i \end{cases}$$
    $$a_i := \begin{cases} 0, & \kappa > \kappa_i \\ a_i', & \kappa = \kappa_i \end{cases}$$
  end for
  Interpolirati polinom $a_\kappa(s)$ *i polinomijalnu matricu* $B_{\kappa-1}(s)$ *koristeći parove* (s_i, a_i) *i* (s_i, B_i), $i = 0, \ldots, \kappa \cdot d$ *kao interpolacione tačke.*
  return $A^D(s) := (-1)^{r+1} a_\kappa(s)^{-r-1} A(s)^r B_{\kappa-1}(s)^{r+1}$
end if

Složenost algoritma **LFD** je $\mathcal{O}(n^4)$ za konstantne i $\mathcal{O}(n^5 d'^2)$ za polinomijalne matrice.
Složenost algoritma **LFDint** je $\mathcal{O}(n^4 d'^2 + n^5 d')$.

deg A	Alg **LFD**	Alg **LFDint**
5	4.475	1.7188
6	6.0092	2.3158
7	7.6874	2.9034
8	9.5314	3.6876
9	11.85	4.5624
10	14.1814	5.4844
11	16.5938	6.5156
12	19.516	7.6904
13	22.5784	8.9282
14	26.0284	10.3498
15	29.6314	11.9126

$sp_1(A) = sp_2(A) = 1$
$n = 10, \mathrm{rank} A = 10$

deg A	Alg **LFD**	Alg **LFDint**
5	2.615	1.625
6	3.604	2.182
7	4.407	2.765
8	5.447	3.479
9	7.020	4.318
10	7.995	5.208
11	9.370	6.182
12	10.510	7.234
13	12.844	8.489
14	14.161	9.791
15	15.937	11.197

$sp_1(A) = sp_2(A) = 0.7$
$n = 10, \mathrm{rank} A = 10$

Interpolacioni metod za računanje različitih klasa generalisanih inverza polinomijalnih matrica

- M.D. PETKOVIĆ, P.S. STANIMIROVIĆ, *Interpolation algorithm of Leverrier-Faddeev type for polynomial matrices*, Numerical Algorithms, **42** (2006), 345–361.
- P.S. STANIMIROVIĆ, *A finite algorithm for generalized inverses of polynomial and rational matrices*, Appl. Math. Comput. **144** (2003) 199–214.

Interpolacioni metod za računanje ranga i indeksa polinomijalnih matrica.

Metod pregradjivanja

Greville 1960

Algoritam PartMP (Metod pregradjivanja za računanje MP inverza)

Input: *Matrica* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

$A_1^\dagger := a_1^\dagger := \begin{cases} (a_1^* a_1)^{-1} a_1^*, & a_1 \neq \mathbb{O} \\ \mathbb{O}, & a_1 = \mathbb{O} \end{cases}$

for $k := 2$ *to* n **do**

    $d_k := A_{k-1}^\dagger a_k$

    $c_k := a_k - A_{k-1} d_k$

    if $c_k \neq \mathbb{O}$ **then**

        $b_k^* := (c_k^* c_k)^{-1} c_k^*$

    else

        $b_k^* := (1 + d_k^* d_k)^{-1} d_k^* A_{k-1}^\dagger$

    end if

    $A_k^\dagger := \begin{bmatrix} A_{k-1}^\dagger - d_k b_k^* \\ b_k^* \end{bmatrix},$

end for

return $A^\dagger := A_n^\dagger$

- M.D. PETKOVIĆ, P.S. STANIMIROVIĆ, *Partitioning method for two-variable rational and polynomial matrices*, Mathematica Balcanica vol. 19, 2005, pp. 185–194.
- M.D. PETKOVIĆ, P.S. STANIMIROVIĆ, *Symbolic computation of the Moore-Penrose inverse using partitioning method*, International Journal of Computer Mathematics, 82(March 2005), pp. 355–367.

Neka je $s_3 = \overline{s_2}$ i $s_4 = \overline{s_1}$.

$$A(s_1, s_2) = A(S) = \sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} \sum_{j_3=0}^{q_3} \sum_{j_4=0}^{q_4} A_{j_1,j_2,j_3,j_4} s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3} s_4^{j_4} = \sum_{J=0}^{Q} A_J S^J$$

Glavna teorema

Teorema (Glavna teorema; Petković, Stanimirović 2004)

Neka je $A(S) \in \mathbb{C}^{m\times n}[S]$. MP inverz $A_i^\dagger \in \mathbb{C}^{i\times m}[S]$ prvih i kolona matrice A je oblika

$$A_i^\dagger(S) = \frac{X_i(S)}{y_i(S)} = \frac{\sum\limits_{J=0}^{Q_i} X_{i,J} S^J}{\sum\limits_{J=0}^{P_i} y_{i,J} S^J}$$

gde je $P_i = Q_i + Q$ i $X_i \in \mathbb{C}^{i\times m}[S]$, $y_i \in \mathbb{C}[S]$ može da se izračuna iz X_{i-1}, y_{i-1}, A_{i-1} i A_i koristeći egzaktne rekurentne relacije.

Algoritam **PartMPpol2** (Metod pregradjivanja za pol. matrice dve prom.)

Input: *Polinomijalna matrica sa dve promenljive* $A(S) \in \mathbb{C}^{m\times n}[S]$.

$X_{1,J} := a^*_{1,J}$, *za svako* $0 \le J \le Q_1 = Q$

$y_{1,J} := \sum_{K=0}^{J} a^*_{i,J-\overline{K}} a_{i,K}$, *za svako* $0 \le J \le P_1 = Q + \overline{Q}$

for $i := 2$ to n **do**

$d_{i,J} := \sum_{K=0}^{J} X_{i-1,J-K} A_{i,K}$, *za svako* $0 \le J \le \deg d_i = Q_{i-1} + Q$

$c_{i,J} := \sum_{K=0}^{J} (y_{i-1,J-K} a_{i,K} - A_{i-1,J-K} d_{i,K})$, *za svako* $0 \le J \le \deg c_i = Q_{i-1} + 2Q$.

if *postoji* $c_{i,J} \neq 0$ **then**

$w_{i,J} := \sum_{K=0}^{J} c_{i,J-K} y^*_{i-1,\overline{K}}$, *za svako* $0 \le J \le \deg w_i = Q_{i-1} + \overline{Q_{i-1}} + 2Q + \overline{Q}$

$v_{i,J} := \sum_{K=0}^{J} c^*_{i,J-K} c_{i-1,\overline{K}}$, *za svako* $0 \le J \le \deg v_i = \deg w_i + \overline{Q}$

else

$w_{i,J} := \sum_{K=0}^{\overline{J}} X^*_{i-1,J-K} d_{i,\overline{K}}$, *za svako* $0 \le J \le \deg w_i = Q_{i-1} + \overline{Q_{i-1}} + Q + \overline{Q}$

$v_{i,J} = \sum_{K=0}^{\overline{J}} (y^*_{i-1,J-K} y_{i,\overline{K}} + d^*_{i,J-K} d_{i,\overline{K}})$, *za svako*
$0 \le J \le \deg v_i = Q_{i-1} + \overline{Q_{i-1}} + Q + \overline{Q}$

end if

$\Theta_{i,J} := \sum_{K=0}^{J} v^*_{i,K} X_{i-1,J-\overline{K}} - d_{i,J-\overline{K}} w^*_{i,K}$, *za svako* $0 \le J \le \deg \Theta_i = \overline{\deg w_i} + Q + Q_{i-1}$

$\phi_{i,J} := \sum_{K=0}^{J} v^*_{i,K} y_{i-1,J-\overline{K}}$, *za svako* $0 \le J \le \deg \phi_i = \overline{\deg v_i} + Q + Q_{i-1}$

$X_{i,J} := \begin{bmatrix} \sum_{K=0}^{J} v^*_{i,K} \Theta_{i,J-\overline{K}} \\ \sum_{K=0}^{J} \phi_{i,J-\overline{K}} w^*_{i,K} \end{bmatrix}$, *za svako* $0 \le J \le Q_i = Q_{i-1} + Q + \overline{\deg w_i} + \overline{\deg v_i}$

$y_{i,J} := \sum_{K=0}^{J} v^*_{i,K} \phi_{i,J-\overline{K}}$, *za svako* $0 \le J \le P_i = Q_i + \overline{Q}$

end for

Metod pregradjivanja za težinski MP inverz

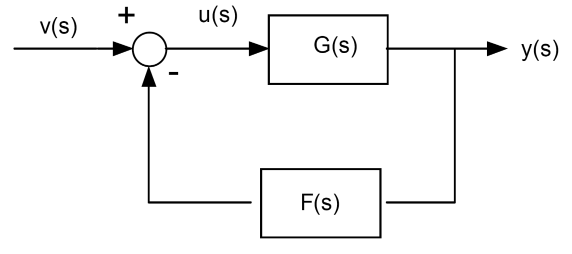
Wang i Chen 1989

Polinomijalne i racionalne matrice:

- M.B. Tasić, P.S. Stanimirović, M.D. Petković, *Symbolic computation of weighted Moore-Penrose inverse using partitioning method*, Applied Mathematics and Computation, **189** (2007) 615–640.
- M.D. Petković, P.S. Stanimirović, M.B. Tasić, *Effective partitioning method for computing weighted Moore-Penrose inverse*, Computers & Mathematics with Applications, **55** (2008), Issue 8, 1720–1734.

Primene generalisanih inverza

- Linearna regresija,
- Problem projektovanja sistema sa povratnom vezom.



$$V(s) = \int_0^{+\infty} v(t)e^{-st}dt, \quad Y(s) = \int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt, \quad H(s)V(s) = Y(s).$$

Problem: Odrediti (ukoliko postoji) matricu $F(s)$ tako da sistem sa povratnom vezom prikazan na slici ima željenu prenosnu matricu $H(s) \in \mathbb{C}^{m\times n}(s)$.

$$G(s)F(s)H(s) = G(s) - H(s),$$

Teorema (Petković, Stanimirović)

Potreban i dovoljan uslov da problem ima rešenje dat je sa

$$G(s) = G(s)H(s)^{\dagger}H(s), \quad H(s) = G(s)G(s)^{\dagger}H(s).$$

Ako važe uslovi predhodne teoreme onda je

$$F(s) = G(s)^{\dagger}(G(s) - H(s))H(s)^{\dagger} + Z(s) - G(s)^{\dagger}G(s)Z(s)H(s)H(s)^{\dagger}.$$

gde je $Z(s)$ proizvoljna matrica.

Sadržaj

Zaključak

U ovoj doktorskoj disertaciji analizirane su dve primene metoda simboličkog izračunavanja:

(1) Simboličko izračunavanje Hankelovih determinanti (tj Hankelove transformacije) i

(2) Simboličko izračunavanje generalisanih inverza konstantnih, racionalnih i polinomijalnih matrica.

A. Metodi za izračunavanje Hankelove transformacije nizova. Hankelova transformacija niza čiji je opšti član jednak zbiru dva uzastopna Catalanova broja. Veza izmedju Hankelove i k-binomnih transformacija. Hankelova transformacija niza centralnih trinomnih koeficijenata.

- P.M. Rajković, M.D. Petković, P. Barry, *The Hankel Transform of the Sum of Consecutive Generalized Catalan Numbers*, Integral Transforms and Special Functions, Vol **18/4** (January 2007), 285 – 296.

B. Metodi za izračunavanje generalisanih inverza konstantnih matrica. Izračunavanje Moore-Penroseovog kao i $\{i, j, \ldots, k\}$ inverza u vremenu množenja matrica.

- M.D. PETKOVIĆ, P.S. STANIMIROVIĆ, *Generalized inversion is not harder than matrix multiplication*, unpublished manuscript.

C. Metodi za izračunavanje generalisanih inverza racionalnih i polinomijalnih matrica.

C.1. Metodi bazirani na Leverrier-Faddevom metodu i interpolaciji.

- P.S. STANIMIROVIĆ, M.D. PETKOVIĆ, *Computation of generalized inverses of polynomial matrices by interpolation*, Applied Mathematics and Computation, **172/1** (2006), 508–523.

- M.D. PETKOVIĆ, P.S. STANIMIROVIĆ, *Interpolation algorithm of Leverrier-Faddev type for polynomial matrices*, Numerical Algorithms, **42** (2006), 345–361.

- M.D. PETKOVIĆ, P.S. STANIMIROVIĆ, *Interpolation algorithm for computing Drazin inverse of polynomial matrices*, Linear Algebra and its applications, **422** (2007), 526–539.

C.2. Metodi bazirani na metodu pregradjivanja.

- M.D. Petković, P.S. Stanimirović, *Partitioning method for two-variable rational and polynomial matrices*, Mathematica Balcanica vol. 19, 2005, pp. 185–194.
- M.D. Petković, P.S. Stanimirović, *Symbolic computation of the Moore-Penrose inverse using partitioning method*, International Journal of Computer Mathematics, 82(March 2005), pp. 355–367.
- M.B. Tasić, P.S. Stanimirović, M.D. Petković, *Symbolic computation of weighted Moore-Penrose inverse using partitioning method*, Applied Mathematics and Computation, **189** (2007) 615–640.
- M.D. Petković, P.S. Stanimirović, M.B. Tasić, *Effective partitioning method for computing weighted Moore-Penrose inverse*, Computers & Mathematics with Applications, **55** (2008), Issue 8, 1720–1734.

Predlozi za dalja istraživanja

(1) Konstrukcija metoda (tj. implementacija) kojim se potpuno automatizuje primena metoda baziranog na ortogonalnim polinomima za računanje Hankelove transformacije. Neki delovi ovog softvera su već napisani.

(2) Uspostavljanje veze između nekih drugih nizovnih transformacija i Hankelove transformacije, kao što je to bio slučaj sa k-binomnim transformacijama.

(3) Izračunavanje Hankelovih transformacija još nekih nizova (niz Narayaninih polinoma, zatvorenih šetnji regularnih stabala, itd...).

(4) Konstrukcija metoda za računanje Drazinovog i još nekih generalisanih inverza u vremenu množenja matrica.

(5) Konstrukcija interpolacionih metoda za računanje generalisanih inverza racionalnih matrica.

Zahvalnost

Sa posebnim zadovoljstvom zahvaljujem se mom mentoru, Prof. Dr Predragu Stanimiroviću, ne samo na pomoći pri izradi ovog rada, već i na velikoj pažnji i vremenu koje mi je posvetio, još od vremena kada mi je kao učeniku gimnazije dao da rešavam prvi naučni problem iz oblasti linearnog programiranja.

Veliku zahvalnost dugujem i Dr Predragu Rajkoviću, kako na nesebičnoj pomoći pri izradi ovog rada, tako i na stalnoj motivaciji i inspiraciji za naučno-istraživački rad.

Zahvaljujem se i Dr Nebojši Stojkoviću koji je pročitao ovu disertaciju i dao niz korisnih sugestija i čiji su mi prijateljski saveti uvek bili dobrodošli.

Takodje, zahvaljujem se i Prof. Dr Draganu Djordjeviću na strpljenju i pomoći pri rešavanju problema na koje sam nailazio tokom doktorskih studija.

Hvala na pažnji!