

**Univerzitet u Nišu**  
**Elektronski Fakultet**

# **STATISTIKE PRVOG I DRUGOG REDA SIGNALA U KANALIMA SA FADINGOM**

**Mentor:**

**Dr Mihajlo Č. Stefanović,**  
**redovni profesor**

**Kandidat:**

**Marko D. Petković,**  
**DexterOfNis@gmail.com**

# 1 Uvod

- Život savremenog čoveka ne može se zamisliti bez korišćenja bežičnih komunikacija, po principu **AAA** (**A**ny time, **A**ny where, **A**ny how).
- Zavisnost čoveka od mobilnih komunikacija ogleda se u svim sferama života kako po pitanju prenosa informacija i upravljanja tako i u sferi zabave.
- Veliki je broj korisnika mreža mobilne telefonije, satelitske televizije, bežičnog interneta, itd.



- Uspostavljanje brze i pouzdane komunikacije kroz bežični radio kanal predstavlja veliki izazov zato što ovaj kanal nije podložen samo šumu, interferenciji i drugim smetnjama već se te smetnje **menjaju vremenom na nepredvidive načine usled kretanja korisnika.**
- Pod **fedingom** se upravo podrazumevaju brze promene amplitude i faze signala na malim rastojanjima.
- Razvijaju se modeli za opisivanje različitih efekata kao što su **prostranje po više putanja** (*multipath propagation*) i **efekat senke** (*shadowing*).
- Zbog slučajnog karaktera ovih pojava, u prisustvu šumova i smetnji signal na ulazu u prijemnik bežičnog telekomunikacionog digitalnog sistema je **slučajni proces.**

- Opisivanje i modelovanje kanala sa fadingom je od naročitog značaja u mobilnim komunikacijama kako za samo projektovanje primopredajnog sistema tako i za analizu performansi.
- Tokom dugog perioda razvoja bežičnih komunikacija konstruisan je veliki broj različitih modela kanala sa fadingom. Primeri takvih modela su Rayleigh-jev, Rice-ov, Nakagami-q, Nakagami-m, Weibull-ov, Beckmannov, itd.
- Cilj ovog rada je proučavanje statističkih osobina prvog i drugog reda anvelope i faze u ovim modelima, sa posebnim osvrtom na Nakagami-q (Hoytov) model i Rayleigh-ev model.

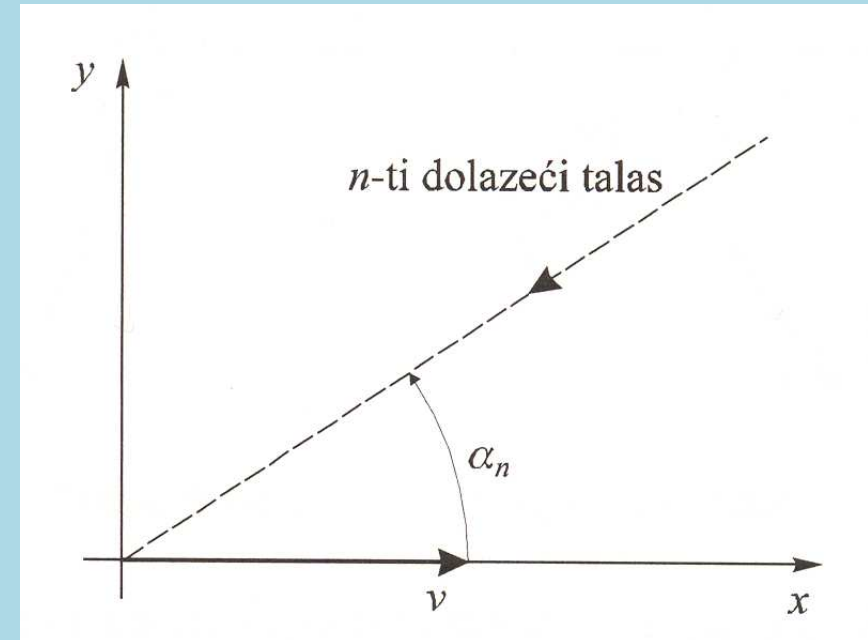
## 2 Prenos signala u kanalima sa fedingom

- Definisaćemo **geometrijsko-analitički model kanala** koji je veoma korisan za dobijanje prave slike o mehanizmu fedinga i statističkim karakteristikama primljenog signala.
- Opisaćemo nekoliko modela fedinga (**Rayleigh-ev**, **Rice-ov**, **Nakagami-q** i **Nakagami-m**) koji se u praksi najčešće koriste za modeliranje prijemnog signala.
- Za svaki model detaljno ćemo izvesti **statistike prvog reda** i dati oblasti moguće primene.

## 2.1 Model rasejanja radio talasa

Najkorišćeniji i najcitiraniji model u literaturi zasnovan na rasejanju talasa je **Clarke-ov model**.

Clarke je pretpostavio da je dolazeći talas sastavljen od horizontalnih, vertikalno polarisanih ravanskih talasa sa **slučajnom fazom**. Faza ima **uniformnu raspodelu u intervalu  $[0, 2\pi)$** .



SLIKA 2.1 *Prikaz dolazećeg ravanskog talasa, kada se prijemnik kreće*

Komponente električnog i magnetnog polja na prijemu mogu da se predstavljaju na sledeći način

$$E_z = E_0 \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_c t + \theta_n),$$

$$H_x = -\frac{E_0}{\eta} \sum_{n=1}^N C_n \sin \alpha_n \cos(\omega_c t + \theta_n),$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \sum_{n=1}^N C_n \cos \alpha_n \cos(\omega_c t + \theta_n),$$

Pritom je  $\theta_n = \omega_n t + \phi_n$ , gde je  $\omega_n$  **Doppler-ova frekvencija** a  $\phi_n$  **faza  $n$ -te komponente prijemnog signala**.

Veličine  $C_n, \omega_n, \alpha_n$  i  $\phi_n$  posmatramo kao **slučajne promenljive**, pri čemu je  $\phi_n$  **uniformno raspodeljena na segmentu  $[0, 2\pi]$** .

Napišimo sada izraz za  $z$  komponentu električnog polja na drugačiji način

$$E_z = X_1(t) \cos(\omega_c t) - X_2(t) \sin(\omega_c t)$$

gde je

$$X_1(t) = \sum_{n=1}^N E_0 C_n \cos(\omega_n t + \phi_n),$$

$$X_2(t) = \sum_{n=1}^N E_0 C_n \sin(\omega_n t + \phi_n).$$

Ako su sve veličine  $C_n$  kao i  $\omega_n$  imaju **istu raspodelu**, primenom **centralne granične teoreme** dobijamo da su  $X_1(t)$  i  $X_2(t)$  **Gauss-ovi slučajni procesi**. Pritom je srednja vrednost ovih procesa **nula** a disperzije su im **jednake**.



## 2.2 Veličine koje opisuju kanal sa fadingom

- Funkcija gustine raspodele (**PDF** - *Probability Density Function*) -  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ .
- Funkcija raspodele (**CDF** - *Cumulative Distribution Function*) -  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ .
- Združena funkcija gustine raspodele (**JPDF** - *Joint Probability Density Function*) -  $p_{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2}(x_1, x_2)$ .
- Združena funkcija raspodele (**JCDF** - *Joint Cumulative Distribution Function*) -  $F_{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2}(x_1, x_2)$ .

Slučajni proces oblika

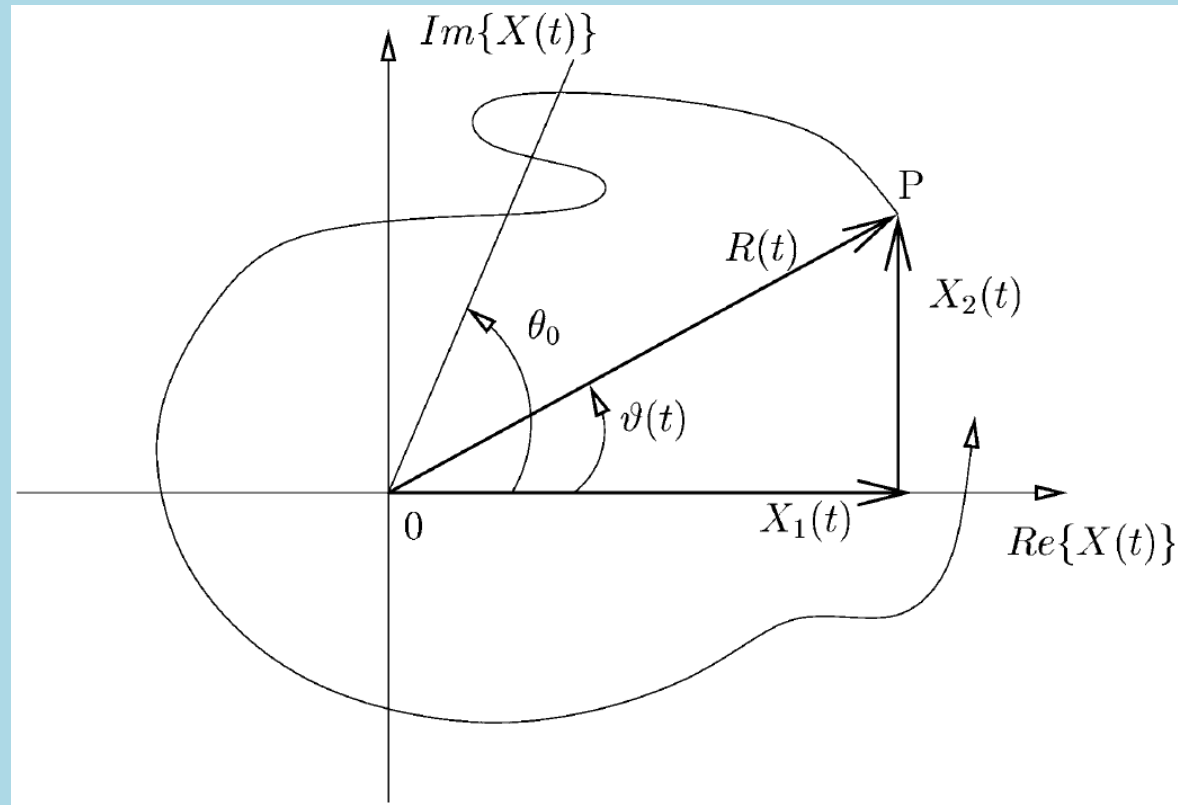
$$X(t) = X_1(t) \cos(\omega_c t) - X_2(t) \sin(\omega_c t)$$

predstavićemo preko kompleksnog predstavnika

$$X(t) = X_1(t) + jX_2(t).$$

**Anvelopu  $R(t)$  i fazu  $\vartheta(t)$  definišemo na uobičajen način**

$$R(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2}, \quad \vartheta(t) = \arctan(X_2(t)/X_1(t)).$$



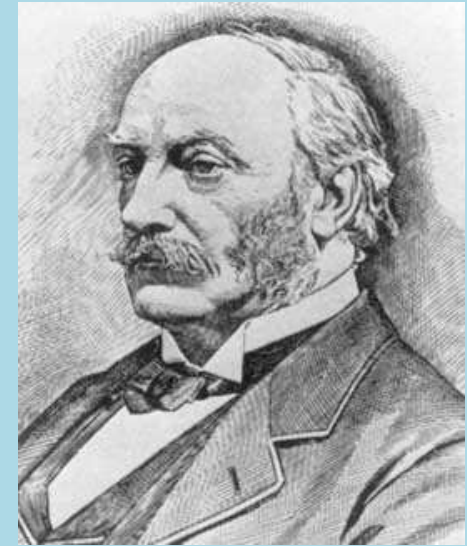
SLIKA 2.2 Trajektorija slučajnog procesa  $X(t)$  u fazorskom dijagramu. Ugao  $\theta_0$  predstavlja proizvoljni nivo faze.

## 2.3 Rayleigh-ev model fedinga

Rayleigh-ev model kanala najčešće se koristi kada **ne postoji optička vidljivost izmedju predajnika i prijemnika**.

Uspešno se primenjuje u slučaju reflektovanih i refraktovanih talasa koji se prenose kroz troposferu i jonosferu kao i u radio komunikacijama izmedju brodova.

Pogodan je za opis komunikacionih kanala u urbanim područjima, kao što su **gradske oblasti sa visokim zgradama**.



John William Strutt-  
Lord Rayleigh (1842-1919)



Signal koji se dobija na prijemu kanala sa Rayleigh-evim fadingom, u kompleksnom domenu ima sledeći oblik

$$X(t) = X_1(t) + jX_2(t),$$

gde su  $X_1(t)$  i  $X_2(t)$  **Gauss-ovi procesi** čija je srednja vrednost **nula** a varijansa jednaka  $\sigma^2$ . Ova dva procesa su **statistički nezavisna**.

Pokazaćemo da anvelopa ovog procesa  $R(t) = \sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t)}$  ima **Rayleigh-evu raspodelu**

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right),$$

dok je faza  $\vartheta(t)$  **uniformno raspodeljena**.

## 2.4 Nakagami-q (Hoyt-ov) model

Originalna namena ovog modela je opis raspodele anvelope signala snimljenog na satelitu pod uticajem **jonosferske scintilacije**. Sve češće se primenjuje u mobilnim komunikacijama za analizu performansi primopredajnih sistema.

Predstavlja generalizaciju **Rayleigh-evog modela**, pogodan je za primenu kada ne postoji optička vidljivost između prijemnika i predajnika.

Signal na prijemu u kompleksnom domenu možemo prikazati na sledeći način

$$X(t) = X_1(t) + jX_2(t),$$

gde su  $X_1(t)$  i  $X_2(t)$  **nekorelisani Gauss-ovi procesi** čije su **varijanse redom jednake  $\sigma_1^2$  i  $\sigma_2^2$** .

## 2.5 Statistike prvog reda za Nakagami- $q$ i Rayleigh-ev model fedinga

Pošto su  $X_1$  i  $X_2$  nekorelisani Gauss-ovi procesi imamo da je njihova združena gustina raspodele (JPDF) data sledećim izrazom

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right).$$

Uvedimo transformaciju  $X_1 = R \cos \vartheta$ ,  $X_2 = R \sin \vartheta$ . Jakobijan ove transformacije je  $J = R$ . Prema tome JPDF procesa  $R(t)$  i  $\vartheta(t)$  dobijamo kao

$$\begin{aligned} p_{R\vartheta}(r, \varphi) &= |J| \cdot p_{X_1 X_2}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{r^2}{4} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Integracijom po  $r$  izraza za  $p_{R\vartheta}(r, \varphi)$  dobijamo PDF faze

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \int_0^{+\infty} p_{R\vartheta}(r, \varphi) dr = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\pi(\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi)}.$$

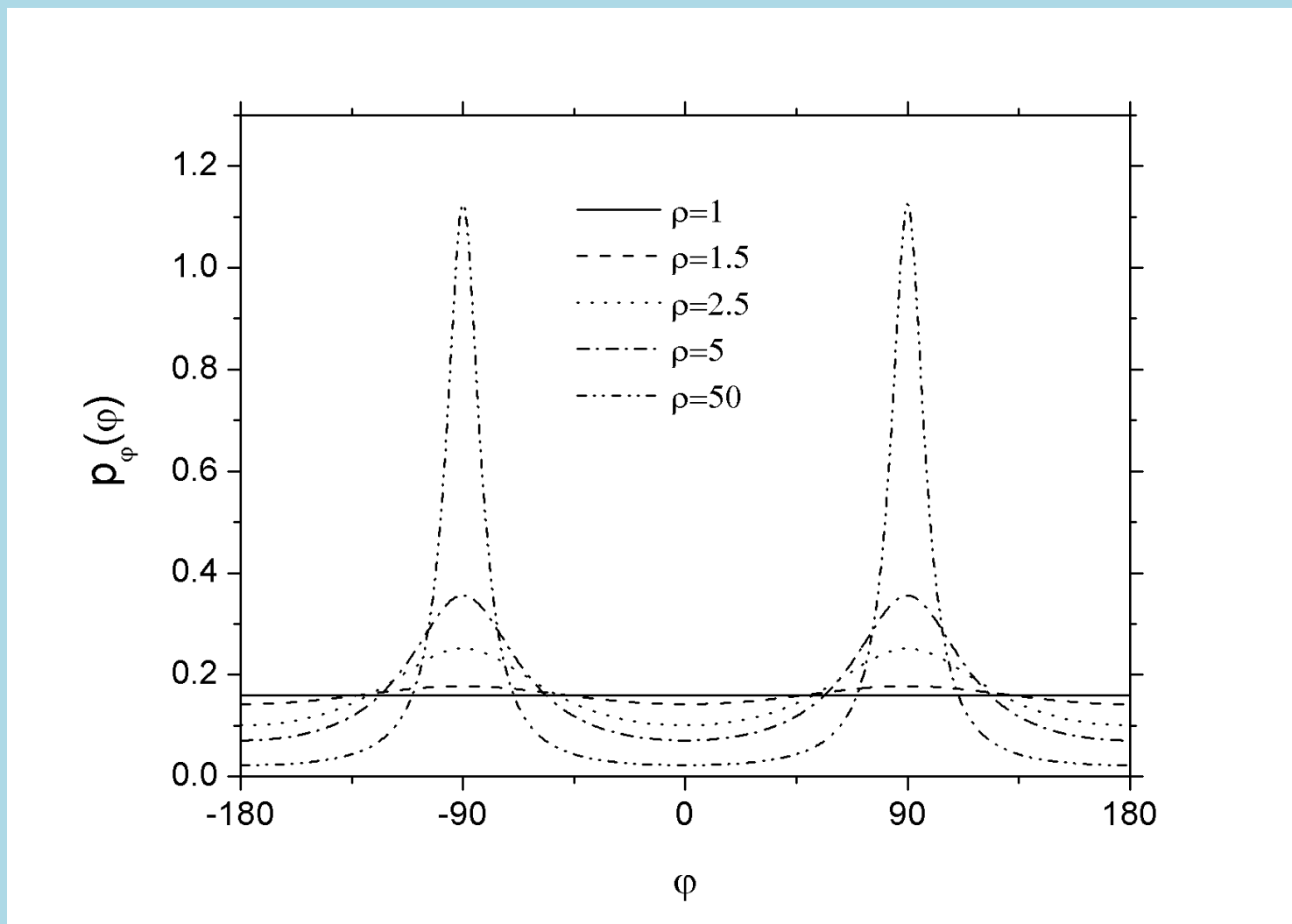
Za slučaj **Rayleigh-evog fedinga** kada je  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  dobijamo da je  $p_{\vartheta}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ , odnosno da je faza  $\vartheta(t)$  **uniformno raspodeljena**.

U graničnom slučaju kada  $\sigma_1^2 \rightarrow 0$  dobijamo

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \frac{1}{2}(\delta(\varphi - \pi/2) + \delta(\varphi + \pi/2)),$$

dok se u slučaju  $\sigma_2^2 \rightarrow 0$  dobija

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \frac{1}{2}(\delta(\varphi) + \delta(\varphi + \pi)).$$



SLIKA 2.3 Grafik funkcije  $p_\phi(\phi)$  za različite vrednosti parametra  $\rho = \sigma_2^2/\sigma_1^2$  i  $\sigma_1 = 1$ .

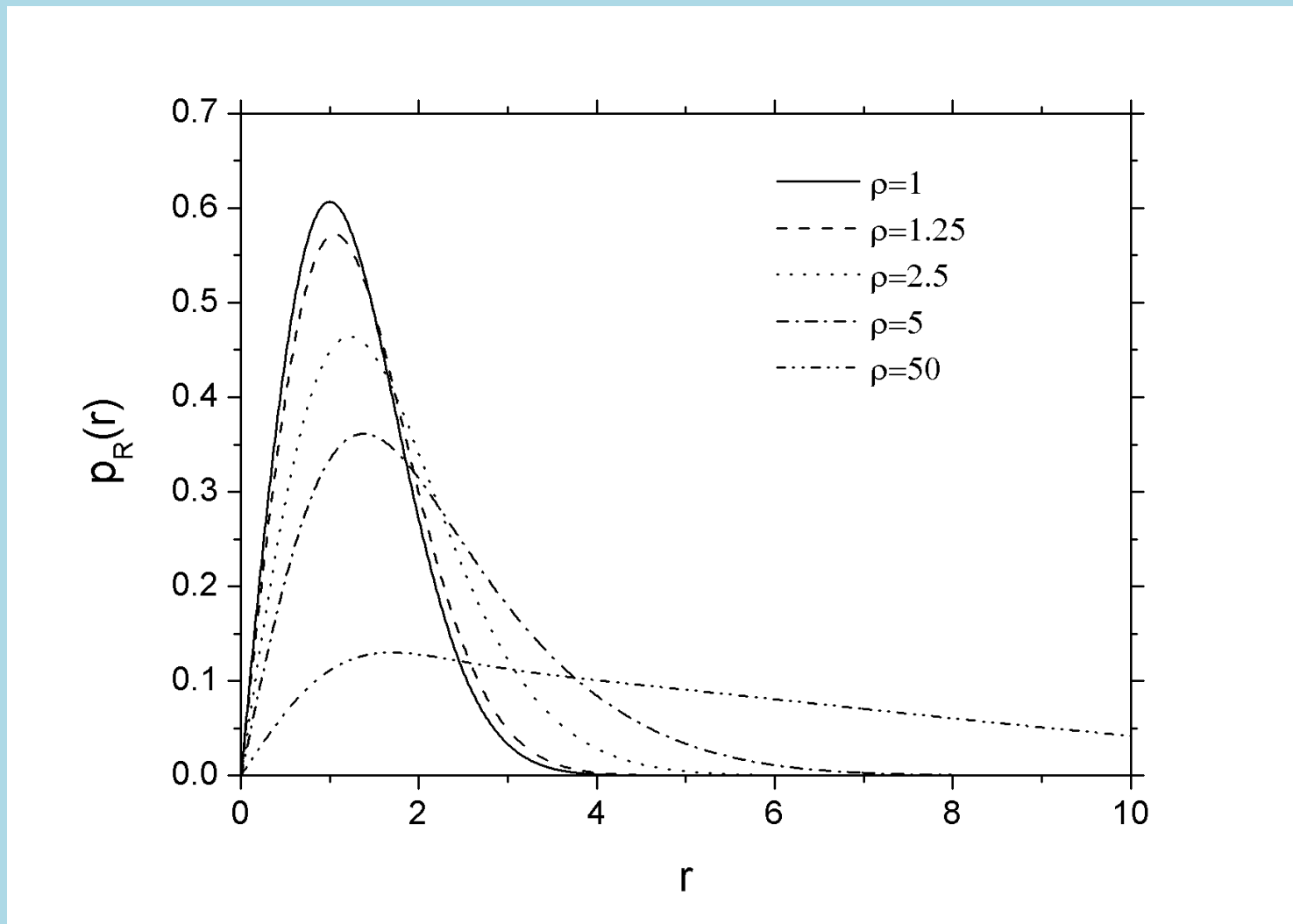


Gustinu raspodele anvelope  $R(t)$  računamo integracijom izraza  $p_{R\vartheta}(r, \varphi)$  po promenljivoj  $\varphi$

$$\begin{aligned} p_R(r) &= \int_{-\pi}^{\pi} p_{R\vartheta}(r, \varphi) d\varphi \\ &= \frac{r}{\sigma_1 \sigma_2} \exp \left( -\frac{r^2}{4} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \right) I_0 \left( \frac{r^2}{4} \left( \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Sa  $I_0(\cdot)$  označili smo **modifikovanu Bessel-ovu funkciju nultog reda**. Ukoliko je  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  dobijamo raspodelu anvelope za **Rayleigh-ev fading**

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp \left( -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right).$$



SLIKA 2.4 Grafik funkcije  $p_R(r)$  za različite vrednosti parametra  $\rho = \sigma_2^2/\sigma_1^2$  i  $\sigma_1 = 1$ .

## 2.6 Rice-ov model fedinga

Rice-ov model fedinga se koristi za opisivanje signala u okruženjima gde **postoji optička vidljivost između predajnika i prijemnika**.

Ovaj model se koristi za opisivanje zemaljskih mobilnih kanala u slabo naseljenim mestima i predgradjima gradova kao i za opisivanje satelitskih kanala.

Podsetimo se da je primljeni signal u Clarke-ovom modelu oblika

$$E_z = X_1(t) \cos(\omega_c t) - X_2(t) \sin(\omega_c t)$$



Stephen O. Rice

(1907-1986)

Predpostavimo da postoji linija optičke vidljivosti duž koje se prostire nulta komponenta signala koja ima značajno veću amplitudu  $C_0$  od ostalih komponenti. Prema tome važi

$$X_1(t) = m_1(t) + \sum_{n=1}^N E_0 C_n \cos(\omega_n t + \phi_n),$$

$$m_1(t) = E_0 C_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$X_2(t) = m_2(t) + \sum_{n=1}^N E_0 C_n \sin(\omega_n t + \phi_n),$$

$$m_2(t) = E_0 C_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

Dalja razmatranja izvodićemo pod pretpostavkom da je Doppler-ova frekvencija nulte komponente  $f_0$  jednaka nuli. To znači da je dolazeći direktan talas normalan na pravac kretanja prijemnika (predajnika).

Sada su  $X_1(t)$  i  $X_2(t)$  **Gauss-ovi slučajni procesi** jednakih varijansi  $\sigma^2$  pri čemu su im srednje vrednosti redom jednake  $m_1$  i  $m_2$ . Prema tome dobijamo da je njihova JPDF jednaka

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma^2} - \frac{(x_2 - m_2)^2}{2\sigma^2} \right)$$

Uvodjenjem transformacije  $X_1 = R \cos \vartheta$ ,  $X_2 = R \sin \vartheta$  dobijamo JPDF anvelope i faze

$$p_{R\vartheta}(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{r^2 - 2r(m_1 \cos \varphi + m_2 \sin \varphi) + m_1^2 + m_2^2}{2\sigma^2} \right)$$

Integracijom po  $\varphi$  predhodnog izraza dobijamo PDF anvelope

$$p_R(r) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{r^2 + m_1^2 + m_2^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left( \frac{r \sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{\sigma^2} \right).$$

## 2.7 Nakagami- $m$ model fedinga

Za opisivanje mobilnog radio kanala često se koristi **Nakagami- $m$**  model.

Iako je za razliku od predhodnih modela ovaj model **empirijski**, prilično je elegantan i u praksi se dokazao korisnim.

Gustina raspodele anvelope je

$$p_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right).$$

Parametar  $m \in (1/2, +\infty)$  se naziva *parametar fedinga* (*fading figure*).

Parametar  $\Omega$  predstavlja moment drugog reda raspodele anvelope.

Raspodela anvelope, za različite vrednosti parametara  $m$  i  $\Omega$ , svodi se na (ili aproksimira) **Rayleigh-evu**, **Rice-ovu**, **Nakagami- $q$**  ili **jednostranu Gauss-ovu raspodelu**.

## Izvodjenje Nakagami- $m$ raspodele

Predpostavimo da je prijemni signal u kompleksnom domenu oblika

$$X(t) = X_1(t) + jX_2(t)$$

gde je

$$X_i^2(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^m X_{1i}^2(t)}, \quad i = 1, 2$$

pri čemu su  $X_{11}(t), \dots, X_{1m}(t), X_{21}(t), \dots, X_{2m}(t)$  za  $i = 1, \dots, m$  statistički nezavisni Gauss-ovi slučajni procesi nulte srednje vrednosti i varijanse  $\sigma^2$ .

Slučajni proces  $Z(t) = R^2(t) = X_1^2(t) + X_2^2(t)$  jednak je zbiru kvadrata  $n = 2m$  uzajamno nezavisnih Gauss-ovih slučajnih procesa. Dakle  $Z(t)$  ima  $\chi^2$  gustinu raspodele sa  $m$  stepeni slobode

$$p_Z(z) = \frac{m^m z^{m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mz}{\Omega}\right).$$

Primenom transformacione formule  $R = \sqrt{Z}$  dobija se trazena raspodela anvelope.

Združenu gustinu raspodele anvelope i faze možemo da odredimo iz predhodnog izraza pomoću transformacije  $X_1 = R \cos \vartheta$ ,  $X_2 = R \sin \vartheta$ .

$$\begin{aligned} p_{R\vartheta}(r, \varphi) &= r p_{X_1 X_2}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r p_{X_1}(r \cos \varphi) p_{X_2}(r \sin \varphi) \\ &= \frac{m^m r^{2m-1} |\sin^{m-1}(2\varphi)|}{2^m \Omega^m \Gamma^2(m/2)} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right) \end{aligned}$$



Integraljenjem po  $r$  odnosno  $\vartheta$  predhodnog izraza dobijamo PDF faze

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \frac{\Gamma(m) |\sin^{m-1}(2\varphi)|}{2^m \Gamma^2(m/2)}.$$

Na osnovu izračunatih izraza za  $p_{\vartheta}(\varphi)$ ,  $p_R(r)$  kao i  $p_{R\vartheta}(r, \varphi)$  dobijamo da su faza i anvelopa kod Nakagami- $m$  fedinga **nezavisni**, odnosno da važi

$$p_{R\vartheta}(r, \varphi) = p_R(r)p_{\vartheta}(\varphi).$$

Ovakav rezultat imamo i u slučaju **Rayleigh-evog fedinga**. Napomenimo da je za  $m = 1$  vrednost  $p_{\vartheta}(\varphi)$  konstantna i jednaka  $(2\pi)^{-1}$ , što predstavlja gustinu raspodele faze kod **Rayleigh-evog modela**. Ovo poklapanje potvrđuje ispravnost izloženog modela.

### 3 Statistike drugog reda Nakagami- $q$ signala

- Opisaćemo statistike drugog reda prijemnog signala na izlazu kanala sa Nakagami- $q$  fedingom.
- Izvešćemo izraze za srednji broj osnih preseka anvelope (LCR), faze (PLCR) kao i srednje vreme trajanja fedinga (ADF).
- Odredićemo uslovne PDF anvelope i izvoda faze za datu vrednost faze.
- Osim opšteg slučaja **Nakagami- $q$  fedinga**, razmatraćemo i nekoliko specijalnih slučaja a posebno slučaj **Rayleigh-evog fedinga**.

Rezultati prikazani u ovoj glavi su novijeg datuma. Ima i nekoliko originalnih rezultata.

### 3.1 Definicije statistika drugog reda i osnovna svojstva

Statistike drugog reda kanala sa fedingom su

- Srednji broj osnih preseka (LCR - *Level Crossing Rate*)
- Srednje vreme trajanja fedinga (ADF - *Average Duration of Fades*)

Ove veličine su korisne u projektovanju mobilnih radio komunikacionih sistema i za analizu performansi istih.

U digitalnim telekomunikacijama nagli pad vrednosti anvelope primljenog signala direktno vodi do drastičnog povećanja verovatnoće greške.

LCR i ADF koriste se prilikom optimizacije sistema kodovanja koji su potrebni za korekciju grešaka.

Za razna pitanja sistem inženjeringa kao što su

- izbor dužine bloka za kodovanje paketskih sistema,
- projektovanje metoda kodovanja sa konkatencijom sa i bez inter-livinga,
- optimizacija veličine interlivera,
- izbor kapaciteta bafera za šeme adaptivne modulacije i procena komunikacionih protokola,

potrebno je poznavati LCR i ADF.

**Srednji broj osnih preseka signala**  $X(t)$ , u oznaci  $N_X^+(x)$  definiše se kao brzina kojom signal preseca nivo  $x$  sa pozitivnim izvodom u tački preseka  $x$ .

Očekivano vreme za koje vrednost signala pripada intervalu  $(x, x + dx)$ , za dati nagib  $\dot{x}$  i vreme  $dt$  jednako je  $p(x, \dot{x})dx d\dot{x}dt$ . Potrebno vreme za jedan prelazak nivoa  $x$  je  $dx/\dot{x}$ .

Odnos ove dve veličine daje očekivani broj prelazaka nivoa  $x$ , signala  $X$  za dati nagib  $\dot{x}$  i vreme  $dt$

$$\dot{x}p_{X\dot{X}}(x, \dot{x})d\dot{x}dt.$$

Deljenjem sa  $dt$  i integracijom po  $\dot{x}$  dobijamo sledeći izraz

$$N_X^+(x) = \int_0^{+\infty} \dot{x}p_{X\dot{X}}(x, \dot{x})d\dot{x}.$$

**Srednje vreme trajanja fedinga**, u oznaci  $T_{X-}(x)$  je takodje važna statistička karakteristika drugog reda i predstavlja **srednje vreme za koje se anvelopa signala nalazi ispod zadatog nivoa  $x$** .

Neka je duži vremenski interval u kome se posmatra anvelopa  $T$  i neka je  $t_i$  trajanje  $i$ -tog boravka signala ispod nivoa  $x$ . Tada je verovatnoća da je nivo signala  $X(t)$  manji od nivoa  $x$

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X(t) \leq x] = \frac{1}{T} \sum_i t_i.$$

Srednje vreme trajanja fedinga je

$$T_{X-}(x) = \frac{1}{TN_X^+(x)} \cdot \sum_i t_i = \frac{F_X(x)}{N_X^+(x)}.$$

## 3.2 JPDF faze i slučajnog FM šuma kod Nakagami- $q$ fedinga

Izvod procesa faze  $\dot{\vartheta}(t)$  naziva se **slučajni FM šum**.

Polazimo od JPDF procesa  $X_1(t), X_2(t), \dot{X}_1(t), \dot{X}_2(t)$  date sledećim izrazom

$$p_{X_1 \dot{X}_1 X_2 \dot{X}_2}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{\exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} - \frac{\dot{x}_1^2}{2\beta_1} - \frac{\dot{x}_2^2}{2\beta_2}\right)}{4\pi^2\sigma_1\sigma_2\sqrt{\beta_1\beta_2}}$$

Varijanse  $\beta_i$  procesa  $\dot{X}_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) jednake su  $\beta_i = 2(\pi\sigma_i f_{max_i})$ , gde je  $f_{max_i}$  maksimalna Doppler-ova frekvencija procesa  $X_i(t)$ .

Primenićemo sledeću transformaciju slučajnih promenljivih

$$X_1 = R \cos \vartheta, \quad \dot{X}_1 = \dot{R} \cos \vartheta - R \dot{\vartheta} \sin \vartheta,$$

$$X_2 = R \sin \vartheta, \quad \dot{X}_2 = \dot{R} \sin \vartheta + R \dot{\vartheta} \cos \vartheta.$$

Primenom transformacije dobijamo JPDF procesa  $R(t), \dot{R}(t), \vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)$

$$\begin{aligned} p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = & \frac{r^2}{4\pi^2 \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \beta_2}} \exp \left\{ -r^2 \left( \frac{\cos^2 \varphi}{2\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2} \right) \right. \\ & - \dot{r}^2 \left( \frac{\cos^2 \varphi}{2\beta_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\beta_2} \right) - \dot{r}^2 \dot{\varphi}^2 \left( \frac{\cos^2 \varphi}{2\beta_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\beta_1} \right) \\ & \left. - r \dot{r} \dot{\varphi} \left( \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1} \right) \sin \varphi \cos \varphi \right\}. \end{aligned}$$



Integracijom predhodnog izraza po promenljivoj  $\dot{r}$  dobijamo

$$p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) d\dot{r}$$

$$= \frac{r^2 \exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} \right) \right\}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}}$$

Dalje integracijom po promenljivoj  $r$  dobijamo sledeći izraz za JPDP procesa procesa  $\vartheta(t)$  i  $\dot{\vartheta}(t)$  u zatvorenom obliku

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\left( \frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right)^{-3/2}}{4\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}}.$$

Za slučaj Rayleigh-evog fedinga ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  i  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ) imamo da je

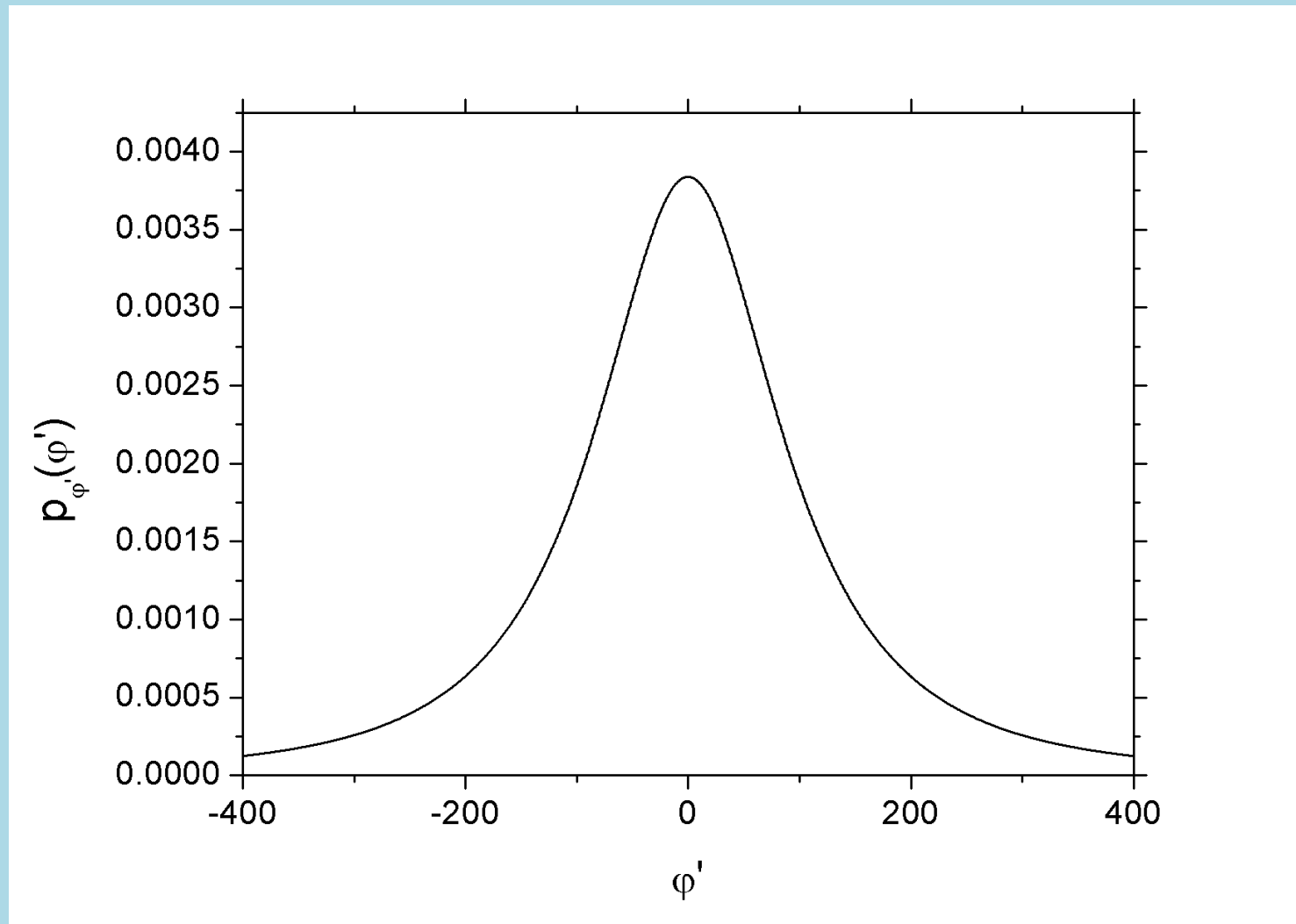
$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-3/2}}{4\pi\sigma^2\sqrt{\beta}}.$$

Predhodni izraz ne zavisi od  $\varphi$ , pa se PDF slučajnog FM šuma dobija kao  $p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi}) = 2\pi p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$ . Za opšti slučaj Nakagami- $q$  fedinga **nije moguće** odrediti izraz za  $p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi})$  u zatvorenom obliku.

Imamo da u opštem slučaju važi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi} p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} = 0, \quad \mathbb{E}\dot{\vartheta}(t) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi}^2 p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} = +\infty, \quad \mathbb{E}\dot{\vartheta}^2(t) = 0$$



SLIKA 3.1 Grafik funkcije gustine raspodele  $p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi})$  izvoda faze  $\dot{\vartheta}(t)$ .

### 3.3 Srednji broj osnih preseka faze kod Nakagami- $q$ fedinga

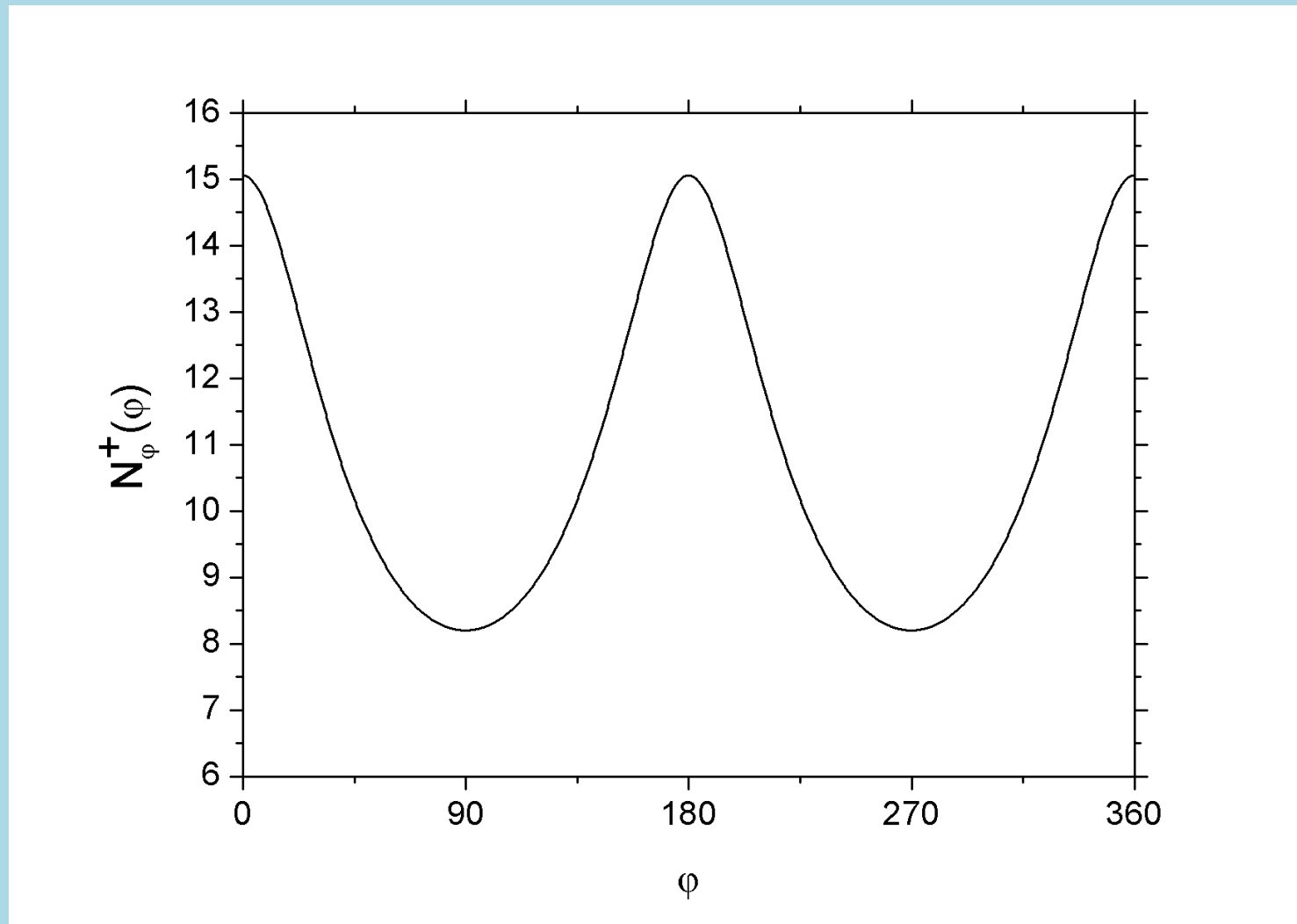
Srednji broj osnih preseka faze  $\vartheta(t)$  (PLCR) u oznaci  $N_{\vartheta}^{+}(\varphi)$  je očekivan broj prolazaka signala, u jedinici vremena, kroz zadati nivo  $\varphi$  u pozitivnom (ili negativnom) smeru.

Imamo da važi

$$N_{\vartheta}^{+}(\varphi) = \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}}.$$

U slučaju Rayleigh-evog fedinga, predhodni izraz se umnogome uprošćava

$$N_{\vartheta}^{+}(\varphi) = \frac{\gamma}{4\pi}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\beta}}{\sigma}$$



SLIKA 3.2 Grafik funkcije srednjeg broja osnih preseka faze (PLCR)  $N_{\vartheta}^{+}(\varphi)$ .

### 3.4 Uslovne gustine raspodele anvelope i izvoda faze

Izvešćemo izraze za **uslovne gustine raspodele anvelope**  $R(t)$  i **izvoda faze**  $\dot{\vartheta}(t)$  (FM šuma) **pod uslovom**  $\vartheta(t) = \varphi$ , gde je  $\varphi$  proizvoljni nivo faze. Koriste se za proučavanje statistike šuma koji nastaje kod **FM prijemnika**.

Uslovnu JCDF anvelope i izvoda faze računamo na osnovu sledećeg izraza

$$\begin{aligned} F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(r_0, \dot{\varphi}_0) &= \frac{\mathbb{P}[R(t) \leq r_0, \dot{\vartheta}(t) \leq \dot{\varphi}_0, \vartheta(t) \text{ seče } \varphi_0 \text{ za vreme } dt]}{\mathbb{P}[\vartheta(t) \text{ seče } \varphi_0 \text{ za vreme } dt]} \\ &= \frac{\int_0^{r_0} \int_0^{\dot{\varphi}_0} \dot{\varphi} p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi_0, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} dr}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)} \end{aligned}$$

Neka je

$$I(r, \varphi; \dot{\varphi}_0) = \int_0^{\dot{\varphi}_0} \dot{\varphi} p_{R\vartheta\dot{\varphi}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}, \quad I(r, \varphi) = I(r, \varphi; +\infty).$$

Sada možemo uslovne PDF za  $R(t)$  i  $\dot{\varphi}(t)$  kao i uslovnu JPDF ova dva procesa izraziti na sledeći način

$$p_{R|\varphi_0+}(r_0) = \frac{d}{dr_0} F_{R\dot{\varphi}|\varphi_0+}(r_0, +\infty) = \frac{I(r_0, \varphi_0)}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)},$$

$$p_{\dot{\varphi}|\varphi_0+}(\dot{\varphi}_0) = \frac{d}{d\dot{\varphi}_0} F_{R\dot{\varphi}|\varphi_0+}(+\infty, \dot{\varphi}_0) = \frac{\dot{\varphi}_0 p_{\vartheta\dot{\varphi}}(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)},$$

$$p_{R\dot{\varphi}|\varphi_0+}(r_0, \dot{\varphi}_0) = \frac{d}{dr_0} F_{R\dot{\varphi}|\varphi_0+}(r_0, \dot{\varphi}_0) = \frac{I(r_0, \varphi_0; \dot{\varphi}_0)}{N_{\vartheta}^+(\varphi)}.$$

Najpre ćemo odrediti izraze za  $I(r, \varphi; \dot{\varphi}_0)$  i  $I(r, \varphi)$  u zatvorenom obliku.

$$I(r, \varphi; \dot{\varphi}_0) = \frac{r^2 \exp \left( -\frac{r^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right)}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}} \\ \times \int_0^{\dot{\varphi}_0} \dot{\varphi} \exp \left( -\frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} \right) d\dot{\varphi}.$$

Rešavanjem integrala dobijamo

$$I(r, \varphi; \dot{\varphi}_0) = \frac{\exp \left( -\frac{r^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right)}{2(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2} \\ \times \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{r^2 \dot{\varphi}_0^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} \right) \right\} \\ \times \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}$$



Zamenom  $\varphi_0 = +\infty$  u predhodnom izrazu dobijamo

$$I(r, \varphi) = \frac{\exp \left( -\frac{r^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right) \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2}.$$

Sada možemo odrediti tražene uslovne raspodele.

$$p_{R|\varphi+}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right)} \exp \left( -\frac{r^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right),$$

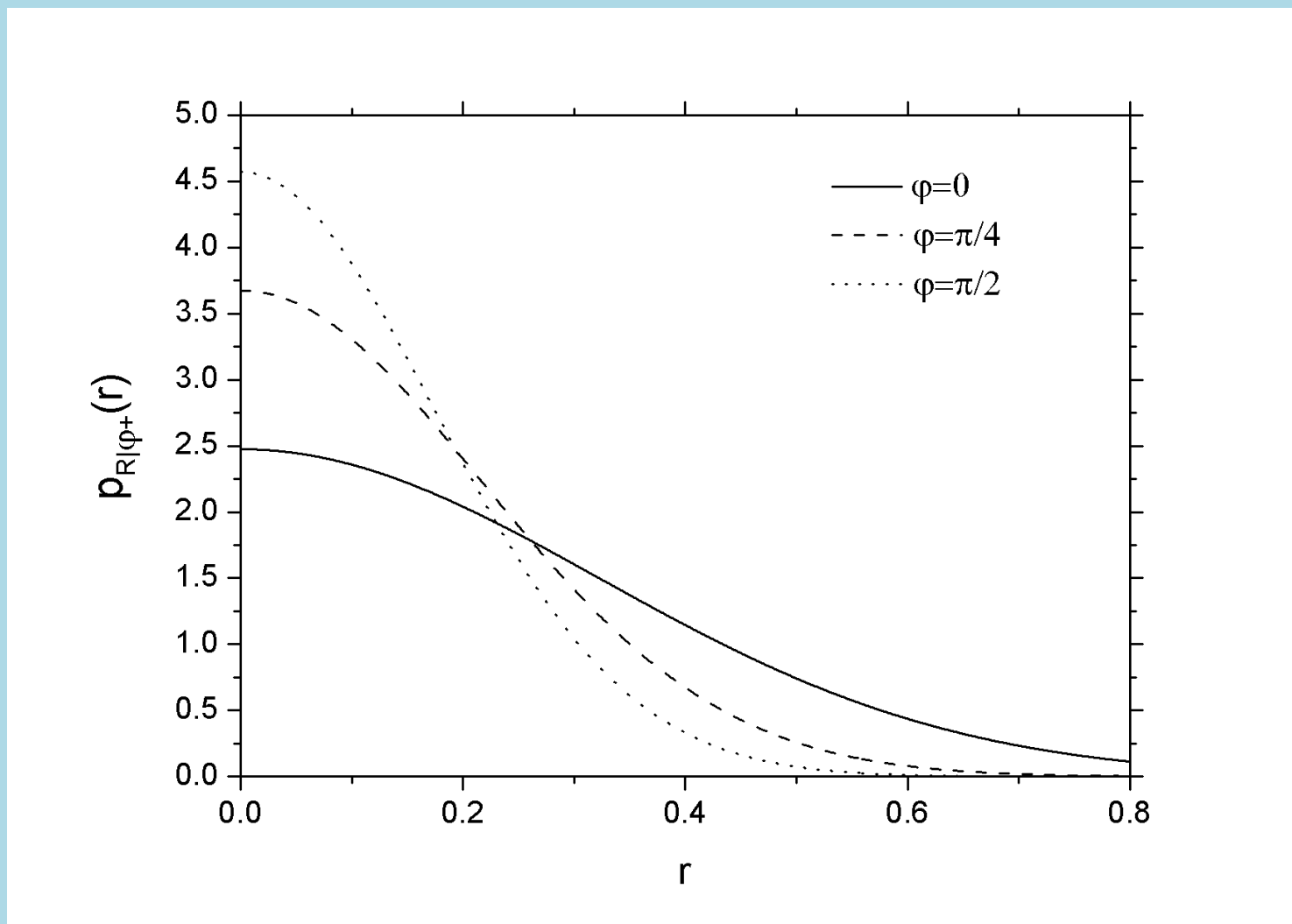
Možemo da zaključimo da je  $p_{R|\varphi+}(r)$  **jednostrana Gauss-ova gustina raspodele** pri čemu su srednja vrednost  $m$  a varijansa  $\sigma^2$  redom jednaki

$$m = 0, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}.$$

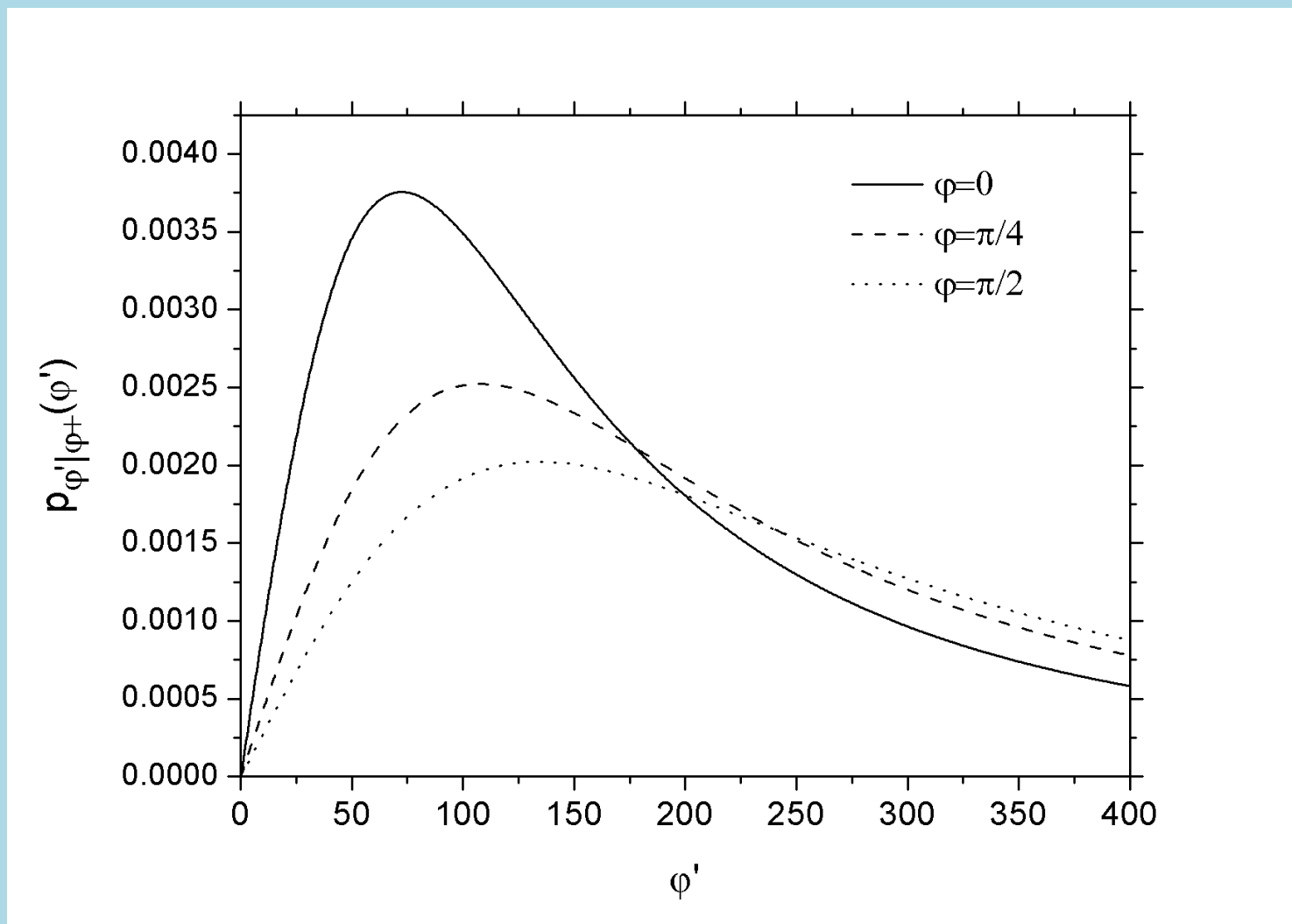
Analogno dobijamo i preostale dve uslovne PDF.

$$p_{\dot{\vartheta}|\varphi+}(\dot{\vartheta}) = \frac{\dot{\vartheta} \sqrt{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}}{2\sigma_1\sigma_2(\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi)} \\ \times \left( \frac{\dot{\vartheta}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right)^{-3/2},$$

$$p_{R\dot{\vartheta}|\varphi+}(r, \dot{\vartheta}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right)} \exp \left( -\frac{r^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right) \\ \times \left[ 1 - \exp \left( -\frac{r^2 \dot{\vartheta}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} \right) \right].$$



SLIKA 3.3 Grafik uslovne gustine raspodele anvelope  $p_{R|\varphi+}(r)$  za nivoe faze  $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2$ .



SLIKA 3.4 Grafik uslovne gustine raspodele izvoda faze  $p_{\dot{\varphi}'|\varphi_+}(\varphi')$  za nivoe faze  $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2$ .

### 3.5 JPDF anvelope i izvoda

Razmotrićemo statistike drugog reda anvelope  $R(t)$  za kanal sa Nakagami- $q$  fadingom.

Da bi odredili LCR i ADF potrebno je izračunati združenu gustinu raspodele  $p_{R\dot{R}}(r, \dot{r})$ .

Najpre odredjujemo JPDF procesa  $R(t), \dot{R}(t), \vartheta(t)$  rešavanjem sledećeg integrala

$$p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}.$$

Rešavanjem se dobija

$$p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) = \frac{r \exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) - \frac{\dot{r}^2}{2(\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi)} \right\}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}}.$$

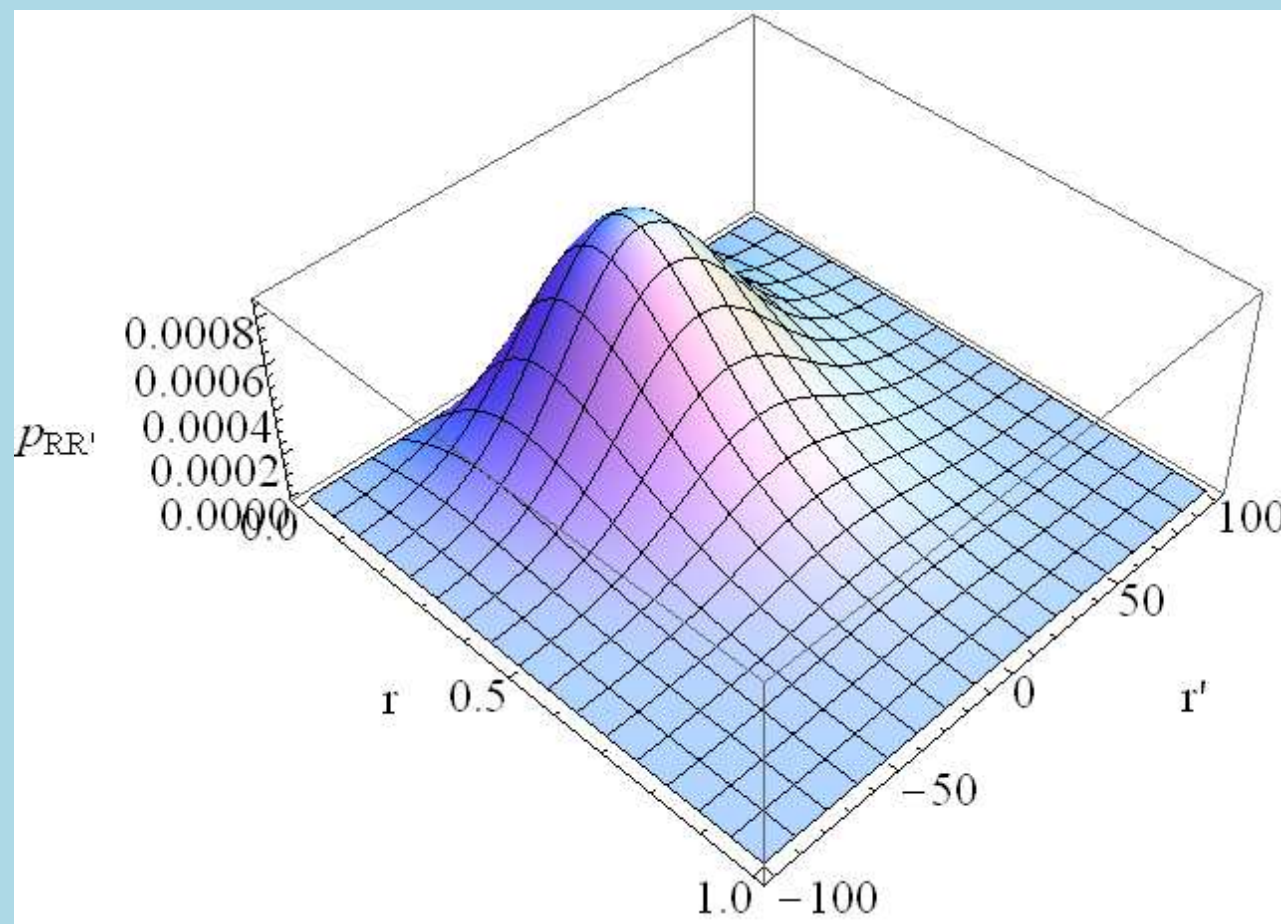
Sledeći korak je integracija predhodnog izraza po promenljivoj  $\varphi$ , odnosno potrebno je izračunati integral

$$p_{R\dot{R}}(r, \dot{r}) = \int_0^{2\pi} p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) d\varphi.$$

Medjutim, ovaj integral **nije moguće** odrediti u zatvorenom obliku.

Kada je u pitanju **Rayleigh-ev fading**, predhodni integral se trivijalno rešava i dobija se

$$p_{R\dot{R}}(r, \dot{r}) = \frac{r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{\dot{r}^2}{2\beta}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma^2\sqrt{\beta}}.$$



SLIKA 3.5 3D grafik funkcije  $p_{RR'}(r, \dot{r})$ . Integral u izrazu za  $p_{RR'}(r, \dot{r})$  je računat numerički.



### 3.6 Srednji broj osnih preseka i vreme trajanja fedinga

Podsetimo se definicionih izraza za  $N_R^+(r)$  (LCR) i  $T_{R-}(r)$  (ADF)

$$N_R^+(r) = \int_0^{+\infty} \dot{r} p_{R\dot{R}}(r, \dot{r}) d\dot{r}, \quad T_{R-}(r) = \frac{F_R(r)}{N_R^+(r)}$$

Zamenom izraza za  $p_{R\dot{R}}(r, \dot{r})$  i integracijom po  $\dot{r}$  dobijamo

$$N_R^+(r) = \frac{r}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \times \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2}\right)\right) \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Nažalost ni predhodni integral **nije moguće** rešiti u zatvorenom obliku u opštem slučaju.

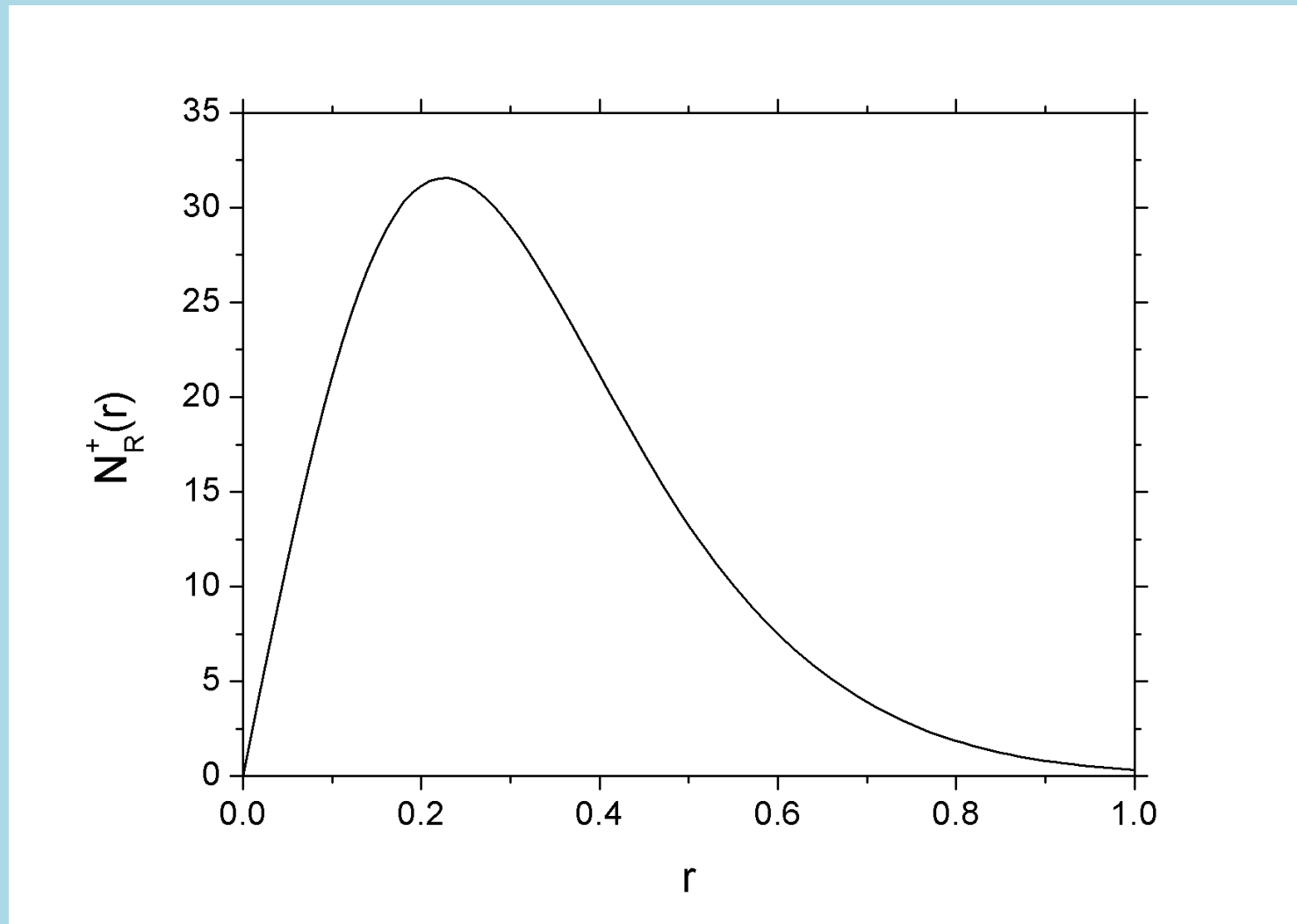
U slučaju **Rayleigh-evog fedinga** izraz pod integralom ne zavisi od  $\varphi$  pa je integral trivijalno rešiv.

$$N_R^+(r) = \frac{\beta r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma^2}.$$

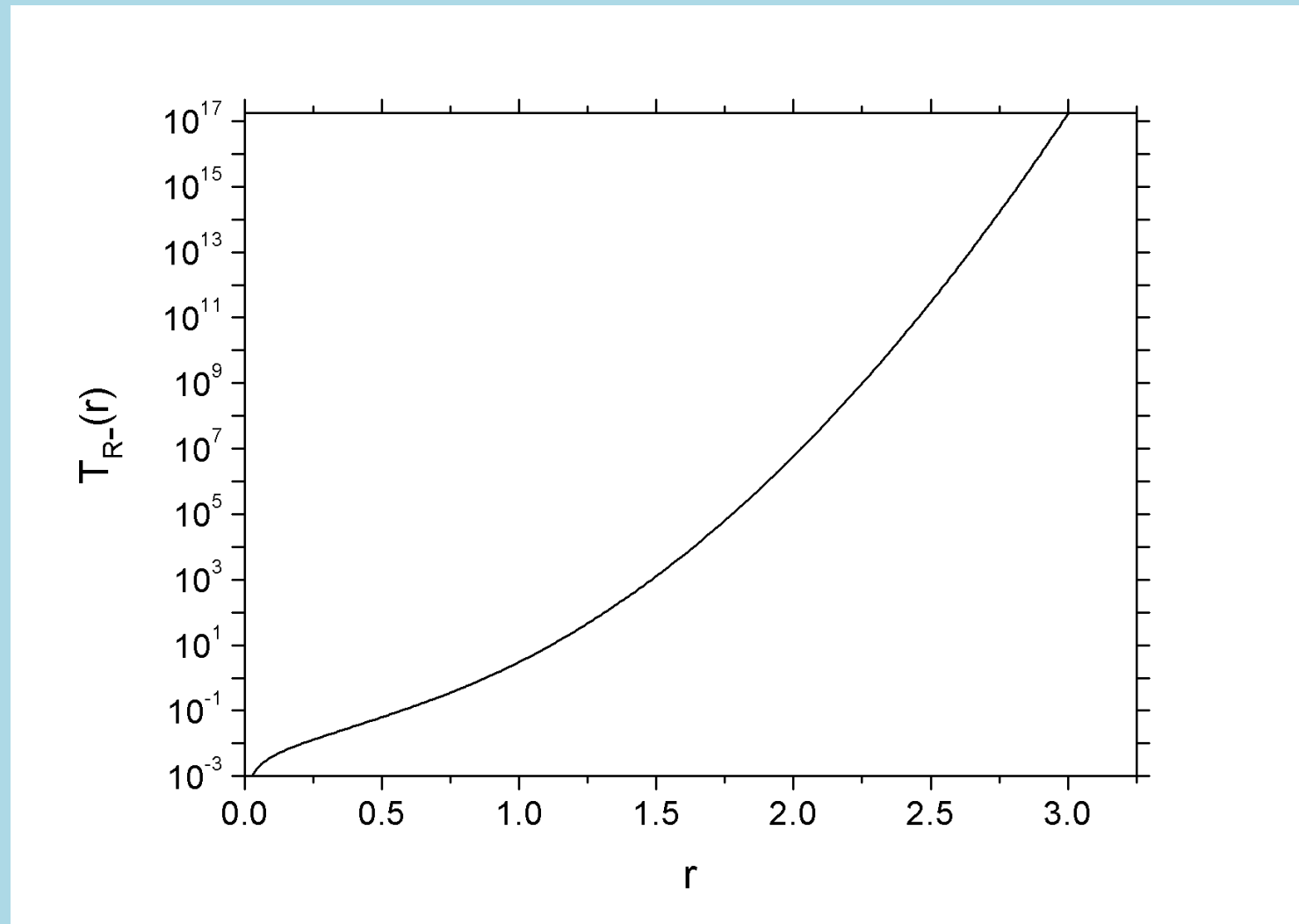
Funkcija raspodele procesa  $R(t)$  data je sledećim izrazom

$$\begin{aligned} F_R(r_0) &= \int_0^{r_0} p_R(r) dr \\ &= \int_0^{r_0} \frac{r}{\sigma_1 \sigma_2} \exp\left(-\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right) I_0\left(\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right) dr \end{aligned}$$

Na osnovu predhodnog izraza i izraza za LCR računamo ADF.



SLIKA 3.6 Grafik funkcije  $N_R^+(r)$  za slučaj Nakagami- $q$  fedinga.



SLIKA 3.7 Grafik funkcije  $T_{R-}(r)$  u logaritamskoj razmeri.

## 4 Statistike prvog i drugog reda zbira kosinusnog talasa i Nakagami- $q$ signala

Razmatraćemo statistike drugog reda složenog signala koji se sastoji od dve komponente. Prva komponenta predstavlja signal na prijemu iz kanala sa Nakagami- $q$  fadingom dok je druga kosinusni talas.

- Izvešćemo izraze za statistike prvog i drugog reda (PDF anvelope i faze, LCR, ADF, PLCR).
- Razmotrićemo nekoliko specijalnih i graničnih slučajeva uključujući i slučaj kada se Nakagami- $q$  signal svodi na Rayleigh-ev.
- Najpre su sve veličine izvedene za slučaj konstantne vrednosti amplitude kosinusnog signala  $a$  i izvoda  $\dot{a}$ . Nakon toga posmatran je slučaj kada je  $A(t)$  Rayleigh-ev proces.

Rezultati izloženi u ovom delu su **originalni** i preuzeti iz naših radova

[1] M. Stefanović, **M.D. Petković**, *Envelope Level Crossing Rate of Cosine Signal With Nakagami- $q$  Interference*, **TELSIKS 2007, Proceedings of papers, Vol. 2, pp. 533–536, Niš, Serbia, 2007.**

[2] M. Stefanović, **M.D. Petković**, *Phase level-crossing rate of cosine wave plus Nakagami- $q$  signal*, **biće objavljeno.**

[3] M. Stefanović, **M.D. Petković**, M. Milošević, *Envelope and phase derivative conditional PDFs of cosine wave plus Nakagami- $q$  signal*, **biće objavljeno.**

## 4.1 Opis modela i statistike prvog reda

Posmatraćemo sledeći signal

$$x(t) = X_1(t) \cos(\omega t) + X_2(t) \sin(\omega t) + A(t) \cos(\omega t),$$

gde su  $X_1(t)$  i  $X_2(t)$  **nekorelisani Gauss-ovi procesi** nulte srednje vrednosti čije su varijanse redom jednake  $\sigma_1^2$  i  $\sigma_2^2$ .

Amplituda kosinusnog talasa  $A(t)$  je u opštem slučaju takodje **slučajni proces**.

Najpre ćemo sve veličine odrediti pod uslovom da su amplituda  $A(t)$  i izvod  $\dot{A}(t)$  konstantni i jednaki redom  $a$  i  $\dot{a}$ . Iako ovaj slučaj ne postoji u praksi (osim za  $\dot{a} = 0$ ), potreban je za razmatranje opšteg slučaja.

Odredićemo JPDF procesa  $R(t)$  i  $\vartheta(t)$ . Polazimo od

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right).$$

Primenom transformacionih formula

$$X_1 = R \cos \vartheta - A,$$

$$X_2 = R \sin \vartheta.$$

dobijamo traženi izraz za  $p_{R\vartheta}(r, \varphi)$

$$\begin{aligned} p_{R\vartheta}(r, \varphi) &= r p_{X_1 X_2}(r \cos \varphi - a, r \sin \varphi) \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(r \cos \varphi - a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2}\right). \end{aligned}$$



Integracijom predhodnog izraza najpre po  $r$  dobijamo PDF faze

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \int_0^{+\infty} p_{R\vartheta}(r, \varphi) dr = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\pi \sigma_{\varphi}^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) g\left(\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_{\varphi} \sigma_1 \sqrt{2}}\right).$$

gde je

$$g(s) = 1 + \sqrt{\pi} s \exp(s^2)(1 + \operatorname{erf}(s)),$$

$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}.$$

Za slučaj Rayleigh-evog fedinga imamo da je

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) g\left(\frac{a \cos \varphi}{\sigma \sqrt{2}}\right).$$

Vidimo da  $p_{\vartheta}(\varphi)$  nije konstantna kao što je to bio slučaj za  $a = 0$ .

Sada ćemo razmotriti granične slučajeve kada jedna od varijansi  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ) teži nuli.

**1.** Neka  $\sigma_2 \rightarrow 0$ . Tada važi

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} p_{\vartheta}(\varphi) = & \frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + \sqrt{\pi} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma_1\sqrt{2}}\right)\right)}{2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + 2\sqrt{\pi}} \delta(\varphi) \\ & + \frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + \sqrt{\pi} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma_1\sqrt{2}}\right)\right)}{2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + 2\sqrt{\pi}} \delta(\varphi - \pi) \end{aligned}$$

gde je  $\delta(x)$  **Dirac-ova delta funkcija**.

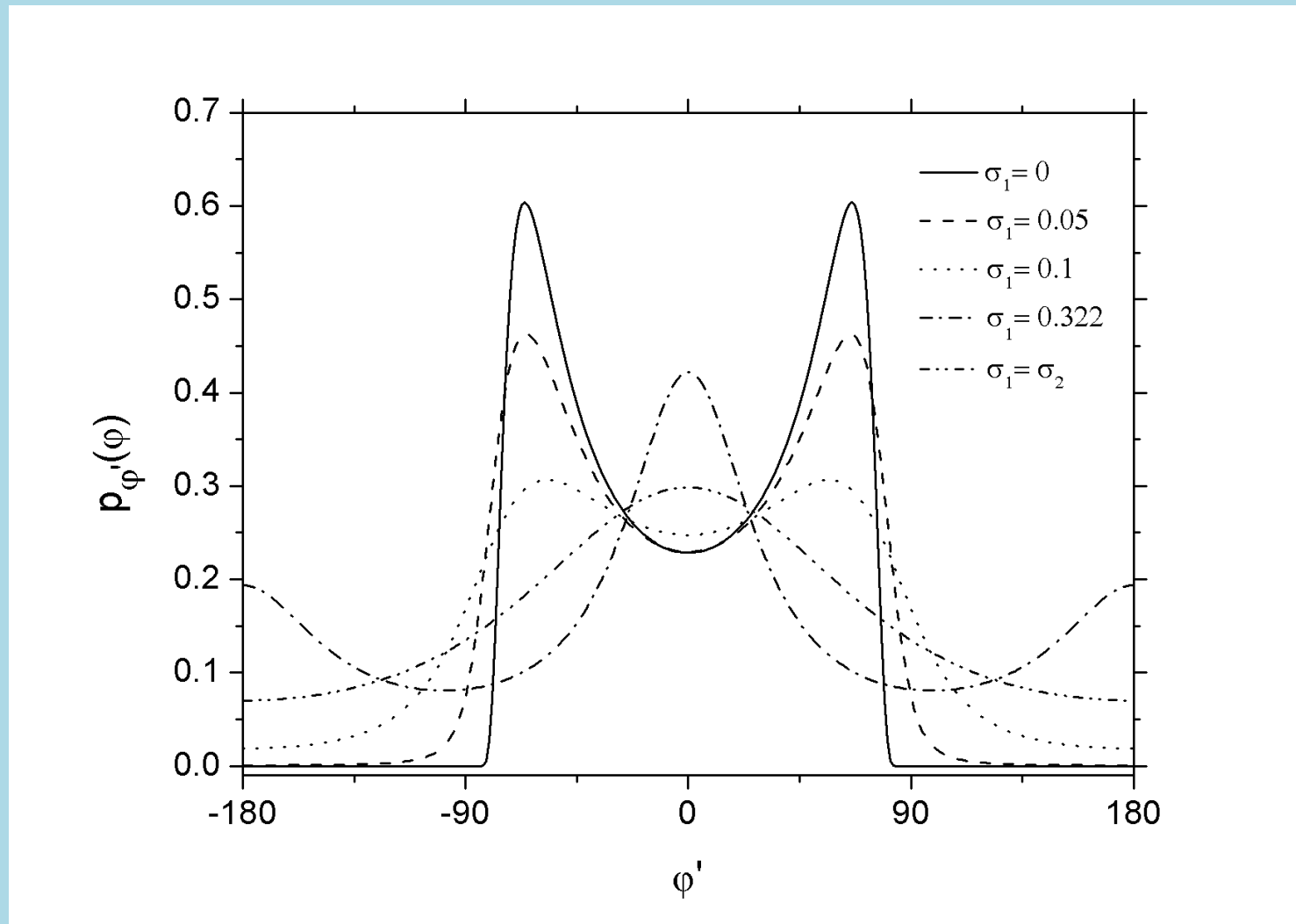
2. Neka sada  $\sigma_1 \rightarrow 0$ . Može se pokazati da tada važi

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} p_{\vartheta}(\varphi) = \begin{cases} \frac{a \exp\left(-\frac{a^2 \tan^2 \varphi}{2\sigma_2^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2 \cos^2 \varphi}, & \varphi \in [0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi) \\ 0, & \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases}$$

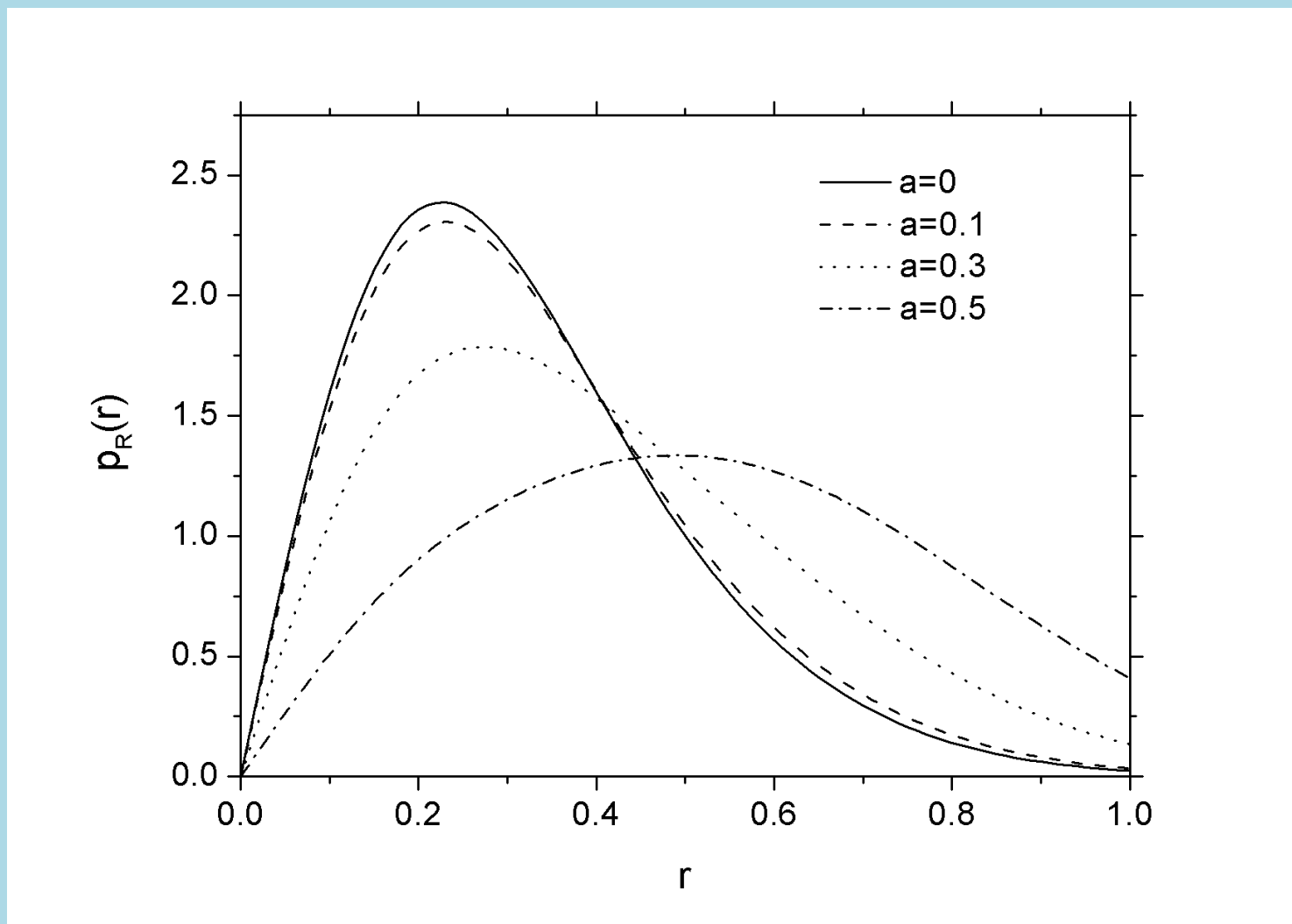
Na sličan način se dobija PDF anvelope

$$p_R(r) = \int_0^{2\pi} p_{R\vartheta}(r, \varphi) dr.$$

Nažalost ovaj integral **nije moguće odrediti u zatvorenom obliku.**



SLIKA 4.1 Grafik funkcije  $p_{\varphi'}(\varphi)$  u zavisnosti od parametra  $\sigma_1$ . Za  $\sigma_1 = 0$  korišćen je granični izraz.



SLIKA 4.2 Grafik funkcije  $p_R(r)$  za različite vrednosti amplitude kosinusnog talasa  $a$ .

## 4.2 JPDF faze i FM šuma za konstantne vrednosti amplitude kosinusnog signala i izvoda

Podsetimo se da je JPDF procesa  $X_1(t), X_2(t), \dot{X}_1(t), \dot{X}_2(t)$  data sledećim izrazom

$$p_{X_1, X_2, \dot{X}_1, \dot{X}_2}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{4\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{\beta_1\beta_2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} - \frac{\dot{x}_1^2}{2\beta_1} - \frac{\dot{x}_2^2}{2\beta_2}\right).$$

Uvešćemo sledeću transformaciju

$$X_1 = R \cos \vartheta - A, \quad X_2 = R \sin \vartheta,$$

$$\dot{X}_1 = \dot{R} \cos \vartheta - R\dot{\vartheta} \sin \vartheta - \dot{A},$$

$$\dot{X}_2 = \dot{R} \sin \vartheta + R\dot{\vartheta} \cos \vartheta.$$

Primenom transformacionih formula dobijamo

$$p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{r^2}{4\pi^2\sigma_1\sigma_2\sqrt{\beta_1\beta_2}} \exp \left\{ -\frac{(r \cos \varphi - a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2} - \frac{(\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{a})^2}{2\beta_1} - \frac{(\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi)^2}{2\beta_2} \right\}.$$

Potrebno je integraliti predhodni izraz najpre po  $\dot{r}$  a zatim po  $r$ . Uvedimo sledeću oznaku

$$\beta_\varphi = \beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi.$$

Integracijom po  $\dot{r}$  dobijamo

$$p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{r^2}{(2\pi)^{3/2}\sigma_1\sigma_2\sqrt{\beta_\varphi}} \exp \left( -\frac{(a - r \cos \varphi)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2} - \frac{(r\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{a})^2}{2\beta_1} - \frac{r\dot{\varphi} \cos \varphi}{2\beta_2} + \frac{[r(\beta_2 - \beta_1)\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{a}]^2 \cos^2 \varphi}{2\beta_1\beta_2\beta_\varphi} \right).$$

Daljom integracijom predhodnog izraza po promenljivoj  $r$  dobijamo

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \int_0^{+\infty} p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) dr = \frac{1}{4(\pi a_{\varphi, \dot{\varphi}})^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \beta_\varphi} \\ \times \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_\varphi}\right) f\left(\frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2 a_{\varphi\dot{\varphi}}^{1/2} \sqrt{2}} - \frac{\dot{a}\dot{\varphi} \sin \varphi}{\beta_\varphi a_{\varphi\dot{\varphi}}^{1/2} \sqrt{2}}\right).$$

gde je

$$f(s) = 2s + \sqrt{\pi}(1 + 2s^2) \exp(s^2)(1 + \operatorname{erf}(s)),$$

$$a_{\varphi\dot{\varphi}} = \frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_\varphi} + \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}.$$

Zamenom  $a = \dot{a} = 0$  predhodni izraz se svodi na već odredjen za Nakagami- $q$  fading

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}00}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{f(0)}{4(\pi a_{\varphi, \dot{\varphi}})^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \beta_\varphi} = \frac{\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_\varphi} + \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}\right)^{-3/2}}{4\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_\varphi}}.$$



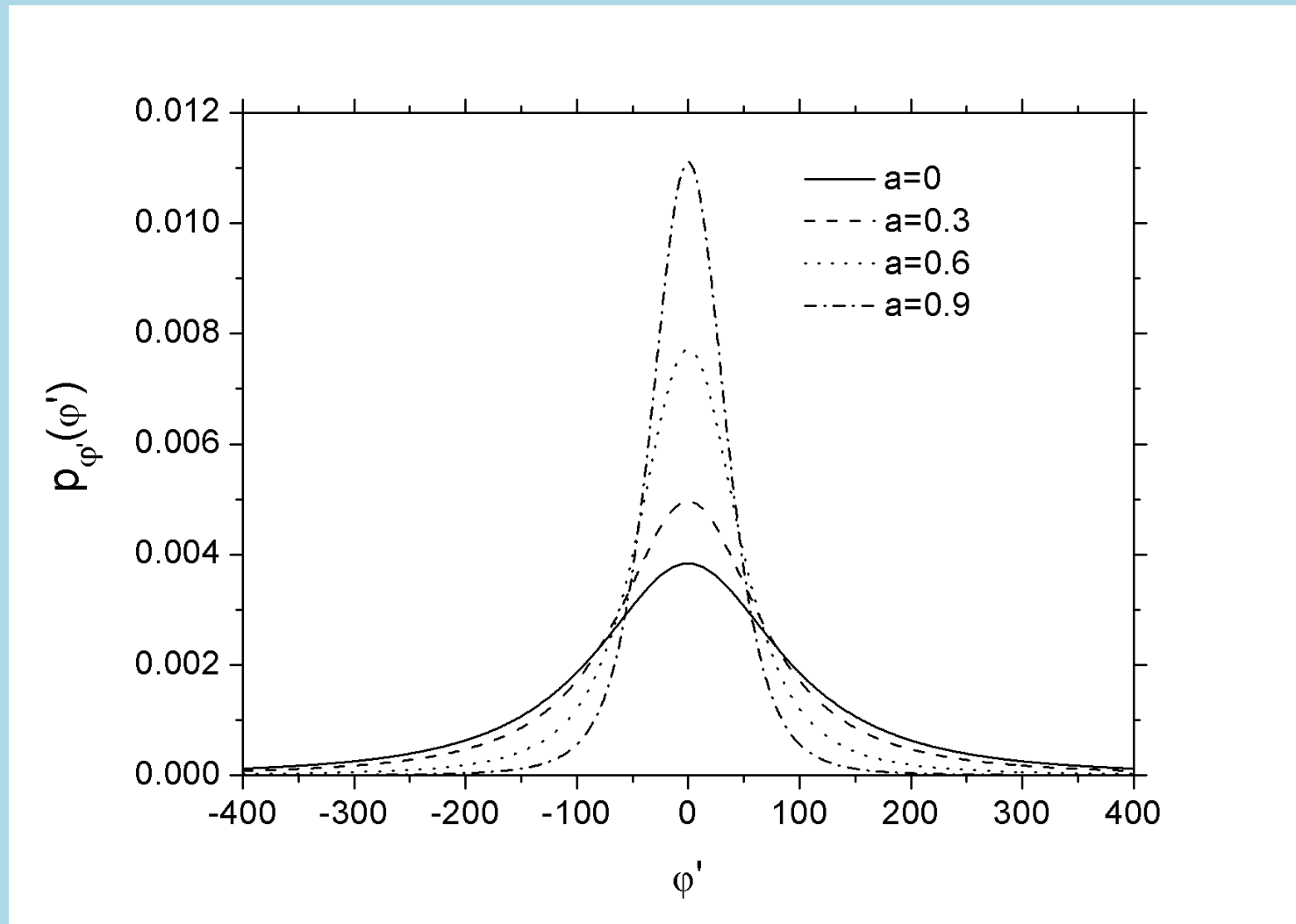
Predpostavimo da je amplituda kosinusnog signala konstantna, odnosno da je ispunjeno  $a \neq 0$  i  $\dot{a} = 0$ . Tada važi

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}0}(\varphi, \dot{\varphi}) = p_{\vartheta\dot{\vartheta}00}(\varphi, \dot{\varphi}) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) f\left(\frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2 a_{\varphi\dot{\varphi}}^{1/2} \sqrt{2}}\right).$$

Gustina raspodele izvoda faze odredjena je vrednošću sledećeg integrala

$$p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi}) = \int_0^{+\infty} p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\varphi,$$

koji nažalost **nije moguće** izračunati u zatvorenom obliku čak ni u specijalnim slučajevima.



SLIKA 4.3 Grafik funkcije  $p_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi})$  za konstantnu vrednost amplitude kosinusnog signala  $a$  ( $\dot{a} = 0$ ).

Napomenimo neka svojstva PDF izvoda faze  $\dot{\varphi}(t)$ .

- U slučaju  $\dot{a} = 0$ , srednja vrednost ovog procesa je nula, tj. važi  $\mathbb{E}(\dot{\vartheta}(t)) = 0$ .
- U opštem slučaju kada je  $\dot{a} \neq 0$  važi  $\mathbb{E}\dot{\vartheta}(t) \neq 0$ . Ovaj zaključak još jednom potvrđuje činjenicu da je slučaj  $\dot{a} = 0$  fizički neostvariv.
- Za  $\dot{a} = 0$  može se dokazati da je  $\mathbb{E}\dot{\vartheta}^2(t) = +\infty$ .
- Ukoliko želimo da opišemo stepen rasturanja vrednosti  $\dot{\vartheta}(t)$  oko srednje vrednosti  $\mathbb{E}\dot{\vartheta}(t) = 0$  moramo da koristimo neku drugu veličinu, na primer

$$\mathbb{E}|\dot{\vartheta}(t)| = 2 \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi}) d\dot{\varphi} = \int_0^{2\pi} N_{\dot{\vartheta}}^+(\varphi) d\varphi.$$

### 4.3 Srednji broj osnih preseka faze

Podsetimo se da je

$$N_{\vartheta}^{+}(\varphi) = \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{\vartheta\dot{\varphi}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}$$

Kao funkcija promenljive  $\dot{\varphi}$ , JPDF procesa  $\vartheta(t)$  i  $\dot{\vartheta}(t)$  može da se zapiše kao

$$p_{\vartheta\dot{\varphi}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{M'}{(P + Q\dot{\varphi}^2)^{3/2}} f\left(\frac{b' + b''\dot{\varphi}}{\sqrt{P + Q\dot{\varphi}^2}}\right).$$

Predhodni izraz **nije pogodan** za integraciju po promenljivoj  $\dot{\varphi}$ .

Zato ćemo iskoristiti sledeću transformaciju i zameniti redosled integrala

$$\begin{aligned}
 N_{\vartheta}^{+}(\varphi) &= \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{\vartheta\dot{\varphi}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} \\
 &= \int_0^{+\infty} d\dot{\varphi} \dot{\varphi} \int_0^{+\infty} p_{R\vartheta\dot{\varphi}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) dr \\
 &= \int_0^{+\infty} dr \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{R\vartheta\dot{\varphi}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} = \int_0^{+\infty} I(r, \varphi) dr
 \end{aligned}$$

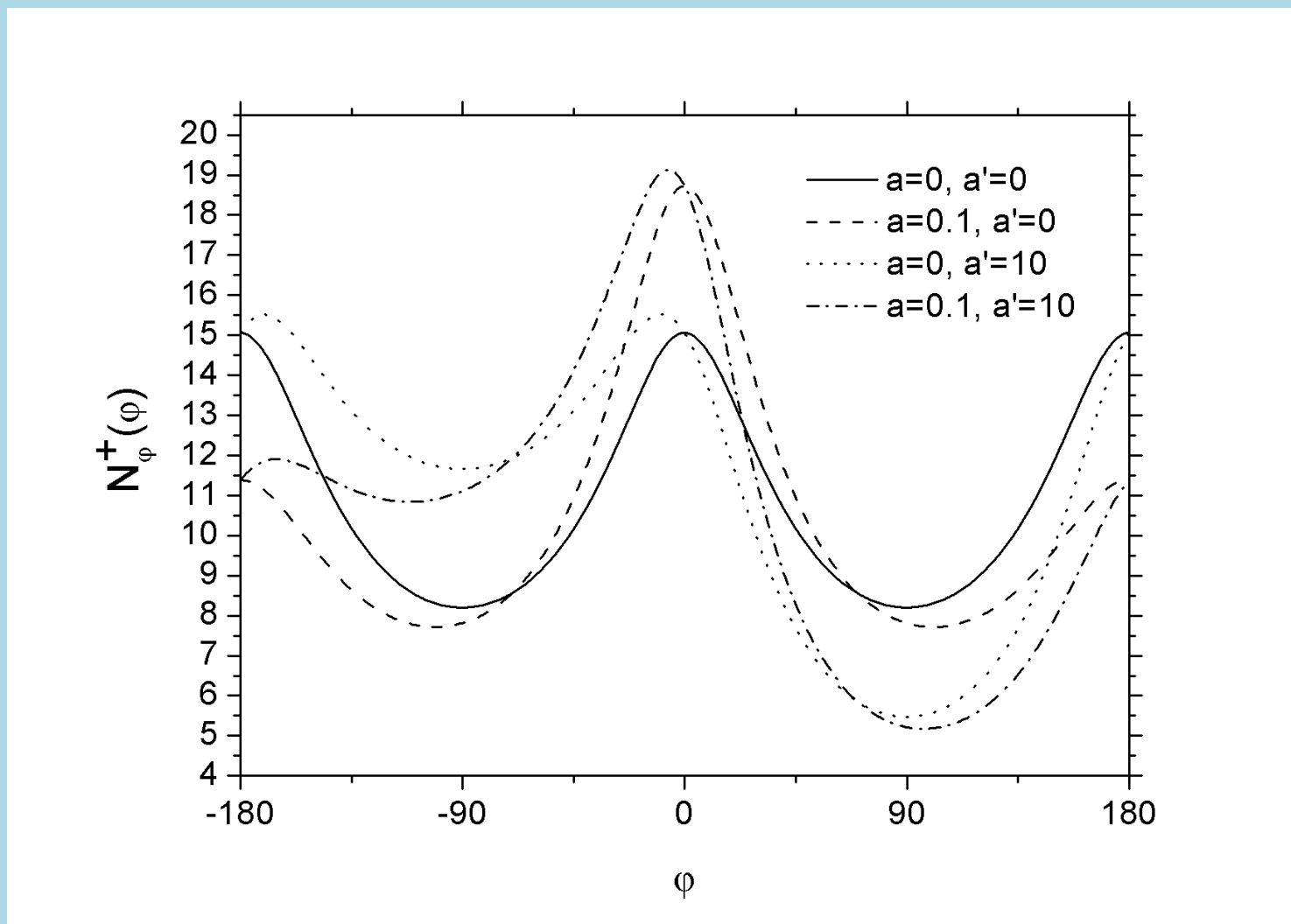
Najpre ćemo naći  $I(r, \varphi)$  u zatvorenom obliku a onda ćemo taj izraz integraliti po promenljivoj  $r$ .

Na ovaj način dobijamo da je

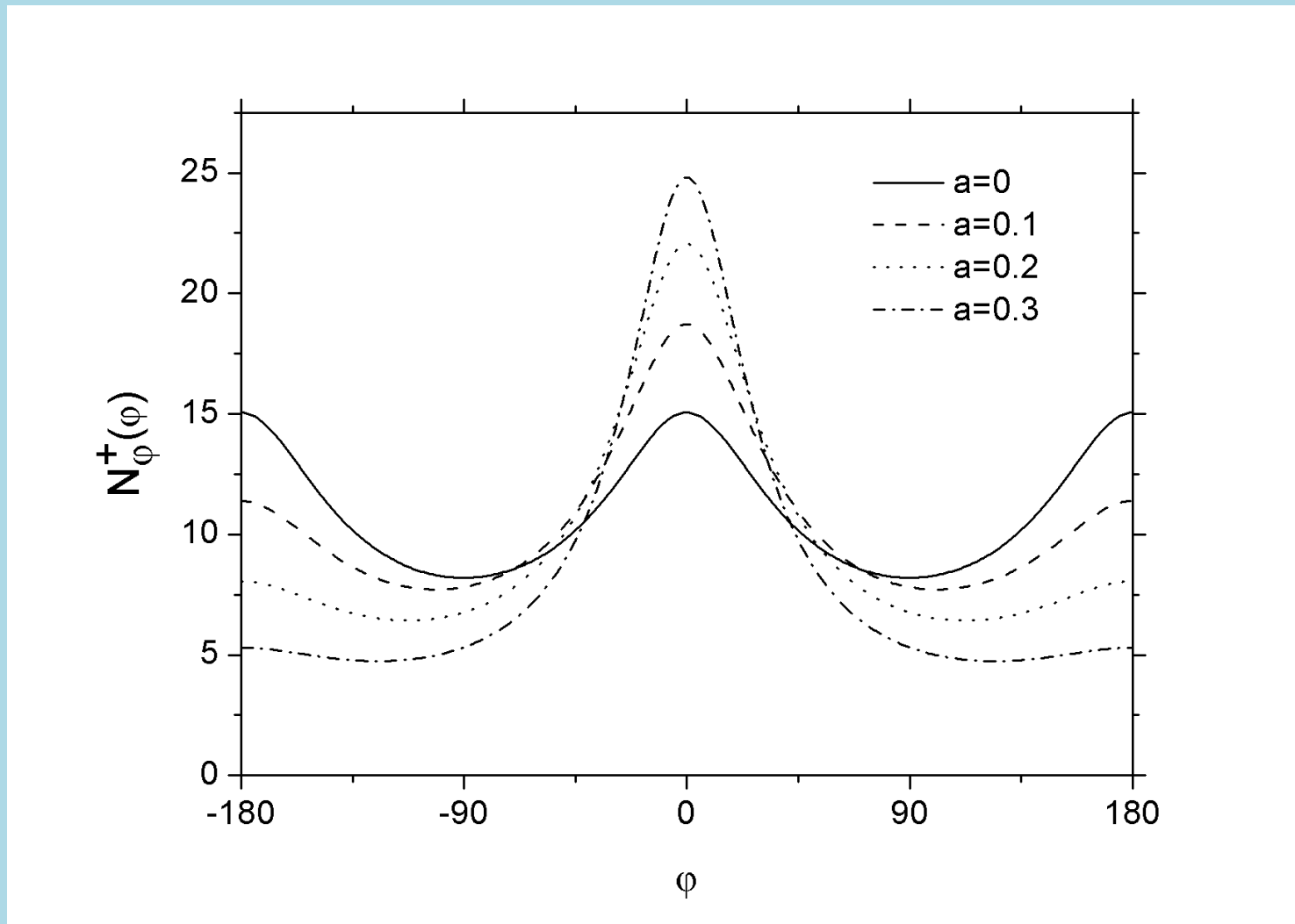
$$I(r, \varphi) = \frac{\beta_{\varphi}^{1/2}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2} g \left( -\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_{\varphi}}} \right) \\ \times \exp \left( -\frac{\sigma_{\varphi}^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} r^2 + \frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2} r - \frac{a^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_{\varphi}} \right).$$

Predhodni izraz je pogodan za integraciju po promenljivoj  $r$ . Integracijom konačno dobijamo

$$N_{\vartheta}^{+}(\varphi) = \frac{\sqrt{\beta_{\varphi}}}{4\pi \sigma_{\varphi}} g \left( -\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_{\varphi}}} \right) \exp \left( -\frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_{\varphi}^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_{\varphi}} \right) \\ \times \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{a \sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_{\varphi} \sqrt{2}} \right) \right]$$



SLIKA 4.4 *Grafik funkcije  $N_{\vartheta}^{+}(\varphi)$ .*



SLIKA 4.5 Grafik funkcije  $N_\vartheta^+(\varphi)$  za različite vrednosti parametra  $a$  i  $\dot{a} = 0$ .



## 4.4 Uslovne gustine raspodele anvelope i izvoda faze

Podsetimo se da je uslovna JCDF procesa  $R(t), \dot{\vartheta}(t)$  definisana na sledeći način

$$F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(r_0, \dot{\varphi}_0) = \frac{\int_0^{r_0} dr \int_0^{\dot{\varphi}_0} \dot{\varphi} p_{R\dot{\vartheta}}(r, \varphi_0, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}}{N_{\dot{\vartheta}}^+(\varphi_0)}$$

Iz predhodnog izraza dobijamo uslovnu PDF anvelope  $p_{R|\varphi_0+}(r_0)$  kao

$$\begin{aligned} p_{R|\varphi_0+}(r_0) &= \left. \frac{d}{dr} F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(r, +\infty) \right|_{r=r_0} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{R\dot{\vartheta}}(r_0, \varphi_0, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}}{N_{\dot{\vartheta}}^+(\varphi_0)} = \frac{I(r_0, \varphi_0)}{N_{\dot{\vartheta}}^+(\varphi_0)} \end{aligned}$$

Zamenom izraza za  $I(r, \varphi)$  i  $N_{\vartheta}^{+}(\varphi_0)$  dobijamo traženu uslovnu PDF u zatvorenom obliku.

$$p_{R|\varphi_0+}(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{(r-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{1 + \operatorname{erf}(m)}.$$

gde je

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{\varphi}}, \quad m = -\frac{a \sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_{\varphi} \sqrt{2}}.$$

Primetimo da je  $p_{R|\varphi_0+}(r)$  **odsečena Gauss-ova funkcija raspodele** sa parametrima  $m$  i  $\sigma$ .

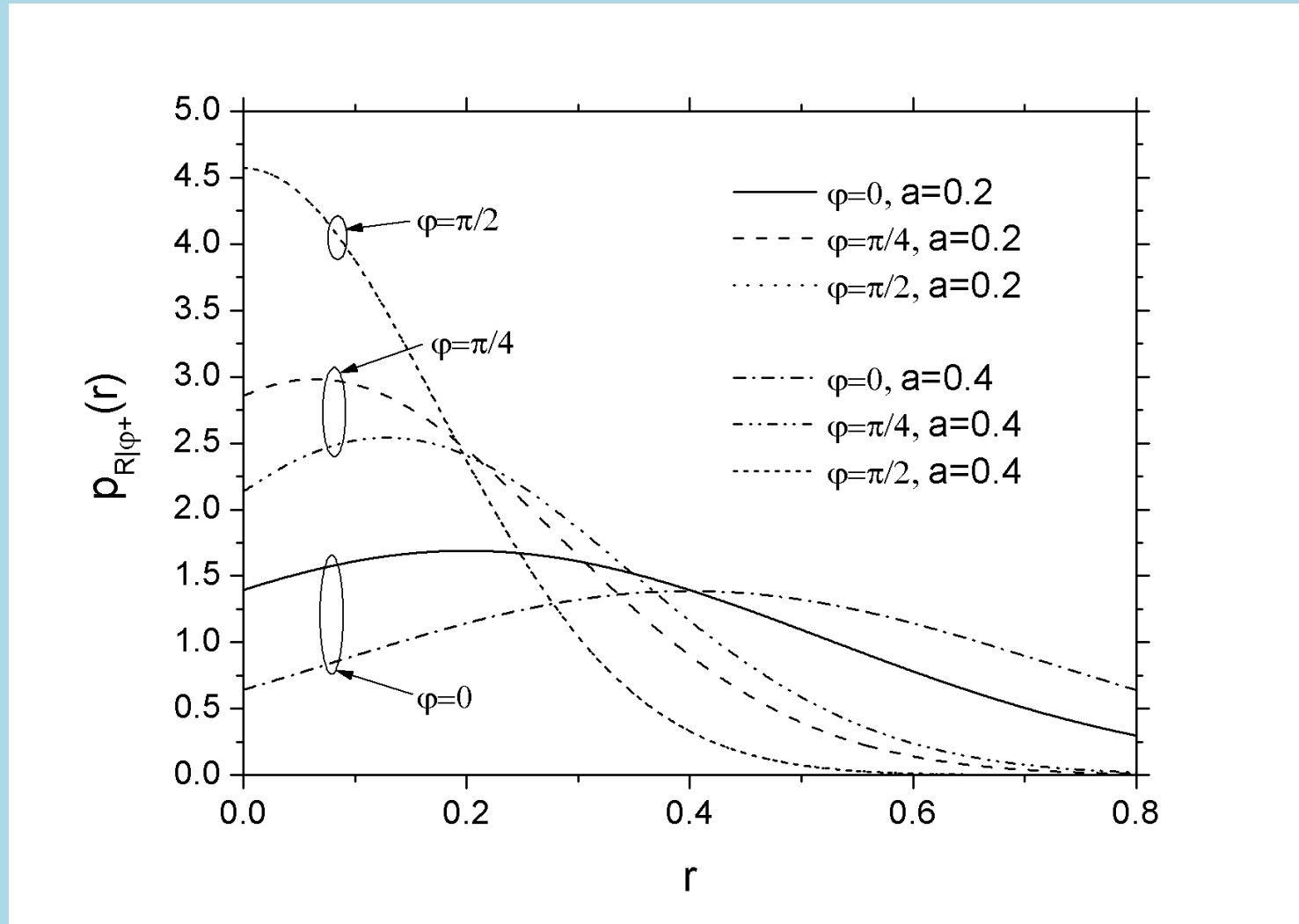
Možemo da zaključimo da  $p_{R|\varphi+}(r)$  **ne zavisi** od  $\dot{a}$ . Takodje veličina  $a$  utiče samo na srednju vrednost  $m$  a ne i na varijansu  $\sigma^2$ .

Na sličan način računamo i drugu uslovnu PDF

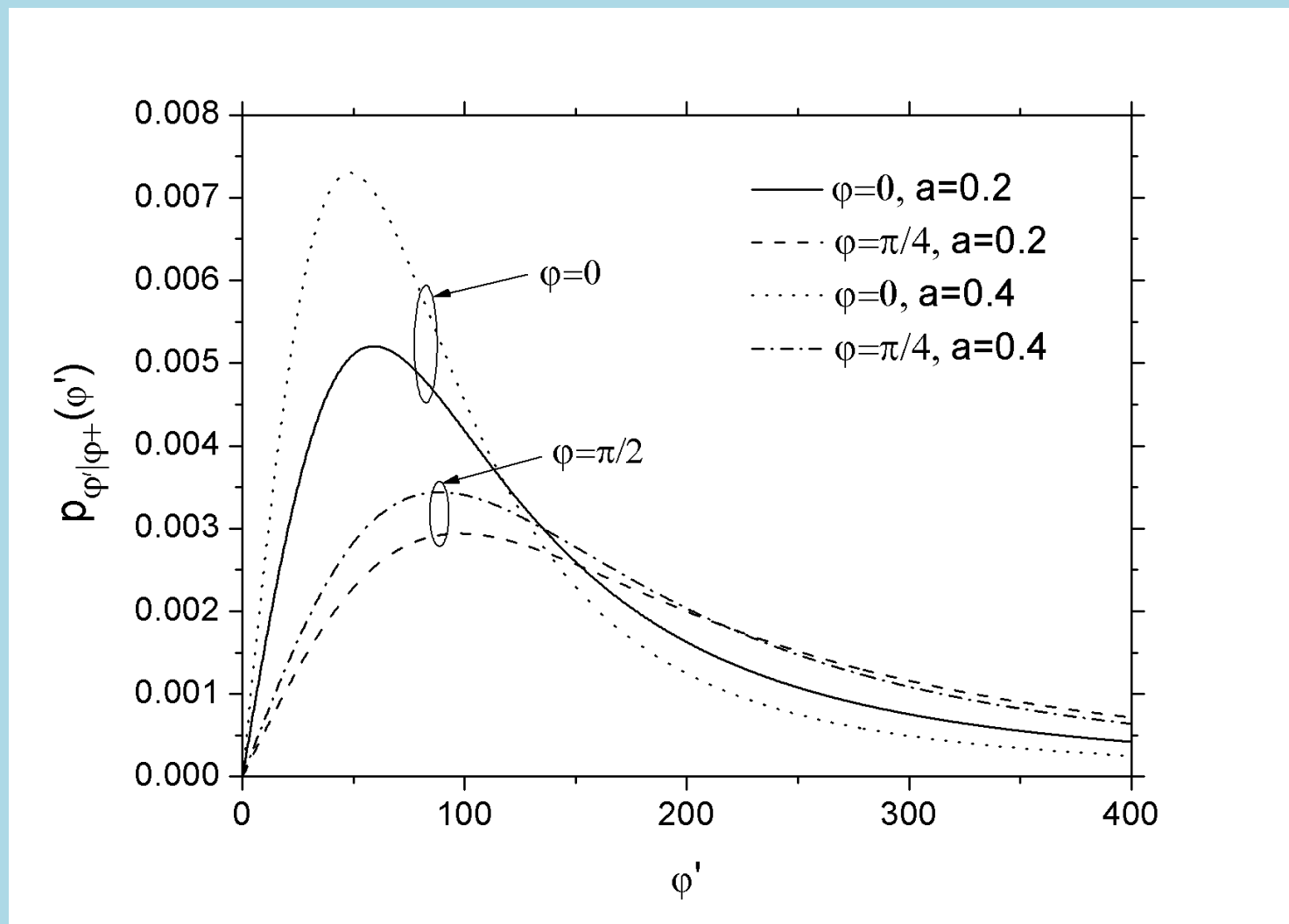
$$\begin{aligned} p_{\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(\dot{\vartheta}_0) &= \left. \frac{d}{d\dot{\vartheta}} F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(\infty, \dot{\vartheta}_0) \right|_{\varphi=\varphi_0} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} \dot{\vartheta}_0 p_{R\dot{\vartheta}}(r, \varphi_0, \dot{\vartheta}_0) dr}{N_{\varphi}^+(\varphi_0)} = \frac{\dot{\vartheta}_0 p_{\dot{\vartheta}}(\varphi_0, \dot{\vartheta}_0)}{N_{\varphi}^+(\varphi_0)} \end{aligned}$$

Zamenom izraza za  $N_{\varphi}^+(\varphi_0)$  i  $p_{\dot{\vartheta}}(\varphi_0, \dot{\vartheta}_0)$  konačno dobijamo

$$p_{\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(\dot{\vartheta}) = \frac{\sigma_{\varphi} \dot{\vartheta} f \left( \frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2 a_{\varphi\dot{\vartheta}}^{1/2} \sqrt{2}} - \frac{\dot{a}^2 \dot{\vartheta} \sin \varphi}{\beta_{\varphi} a_{\varphi\dot{\vartheta}}^{1/2} \sqrt{2}} \right)}{2\sqrt{2\pi} \sigma_1 \sigma_2 (\beta_{\varphi} a_{\varphi\dot{\vartheta}})^{3/2} g \left( -\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_{\varphi}}} \right) \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{a \sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_{\varphi} \sqrt{2}} \right) \right]}$$



SLIKA 4.6 Grafik funkcije  $p_{R|\varphi+}(r)$  za  $\dot{a} = 0$  i različite vrednosti  $\varphi$  i  $a$ .



SLIKA 4.7 Grafik funkcije  $p_{\dot{\varphi}|\varphi+}(\dot{\varphi})$  za  $\dot{a} = 0$  i različite vrendosti  $\varphi$  i  $a$ .

## 4.5 Srednji broj osnih preseka faze kada je amplituda $A(t)$ Rayleigh-ev proces

U naredna dva odeljka pretpostavićemo da je amplituda kosinusnog signala zavisna od vremena i da je slučajni proces.

Takodje smatraćemo da  $A(t)$  ima **Rayleigh-evu raspodelu** a  $\dot{A}(t)$  **Gauss-ovu raspodelu**.

Sva ova svojstva ima anvelopa signala u kanalu sa Rayleigh-evim fedin-  
gom.

Prema tome, odgovarajuća JPDP procesa  $A(t)$  i  $\dot{A}(t)$  ima sledeći oblik

$$p_{A\dot{A}}(a, \dot{a}) = p_A(a)p_{\dot{A}}(\dot{a}) = \frac{a}{\sqrt{2\pi\beta_a}\sigma_a^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_a^2} - \frac{\dot{a}^2}{2\beta_a}\right).$$

Srednji broj osnih preseka  $N_{\vartheta}^{+}(\varphi)$  u ovom slučaju možemo odrediti na osnovu sledećeg izraza

$$N_{\vartheta}^{+}(\varphi) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\vartheta|A,\dot{A}}^{+}(\varphi \mid a, \dot{a}) p_{A\dot{A}}(a, \dot{a}) da d\dot{a},$$

gde je  $N_{\vartheta|A,\dot{A}}^{+}(\varphi \mid a, \dot{a})$  predhodno odredjen PLCR za **konstantne vrednosti**  $A$  i  $\dot{A}$ .

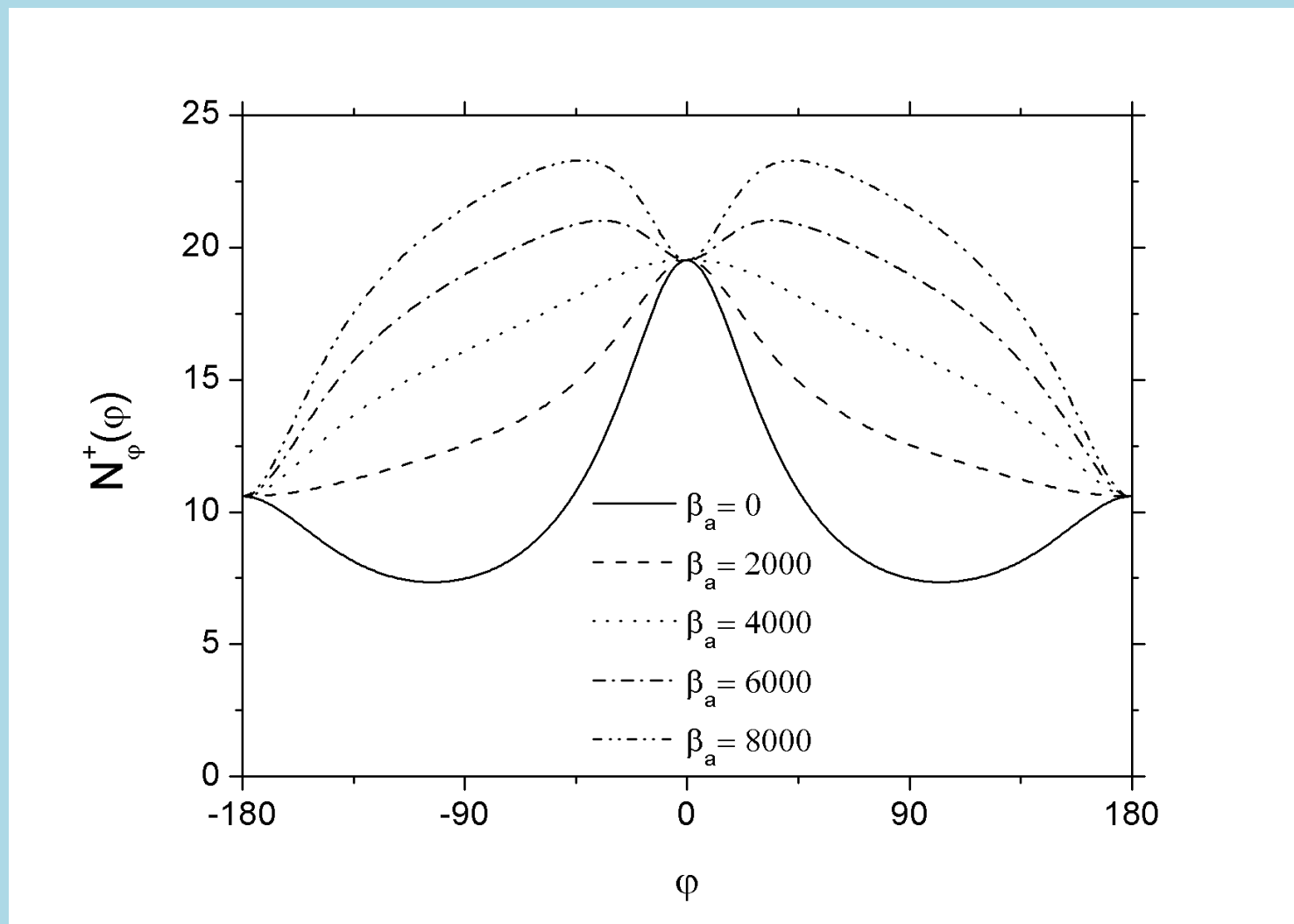
Prema tome, imamo da važi

$$\begin{aligned}
 N_{\vartheta}^{+}(\varphi) &= \frac{\sqrt{\beta_{\varphi}}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\beta_a} \sigma_a^2 \sigma_{\varphi}} \\
 &\times \int_0^{+\infty} a \exp \left[ -a^2 \left( \frac{1}{2\sigma_a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\sigma_{\varphi}^2} \right) \right] \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_{\varphi} \sqrt{2}} \right) \right] da \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\dot{a}^2 \left( \frac{1}{2\beta_a} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\beta_{\varphi}} \right) \right] g \left( -\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_{\varphi}}} \right) d\dot{a}.
 \end{aligned}$$

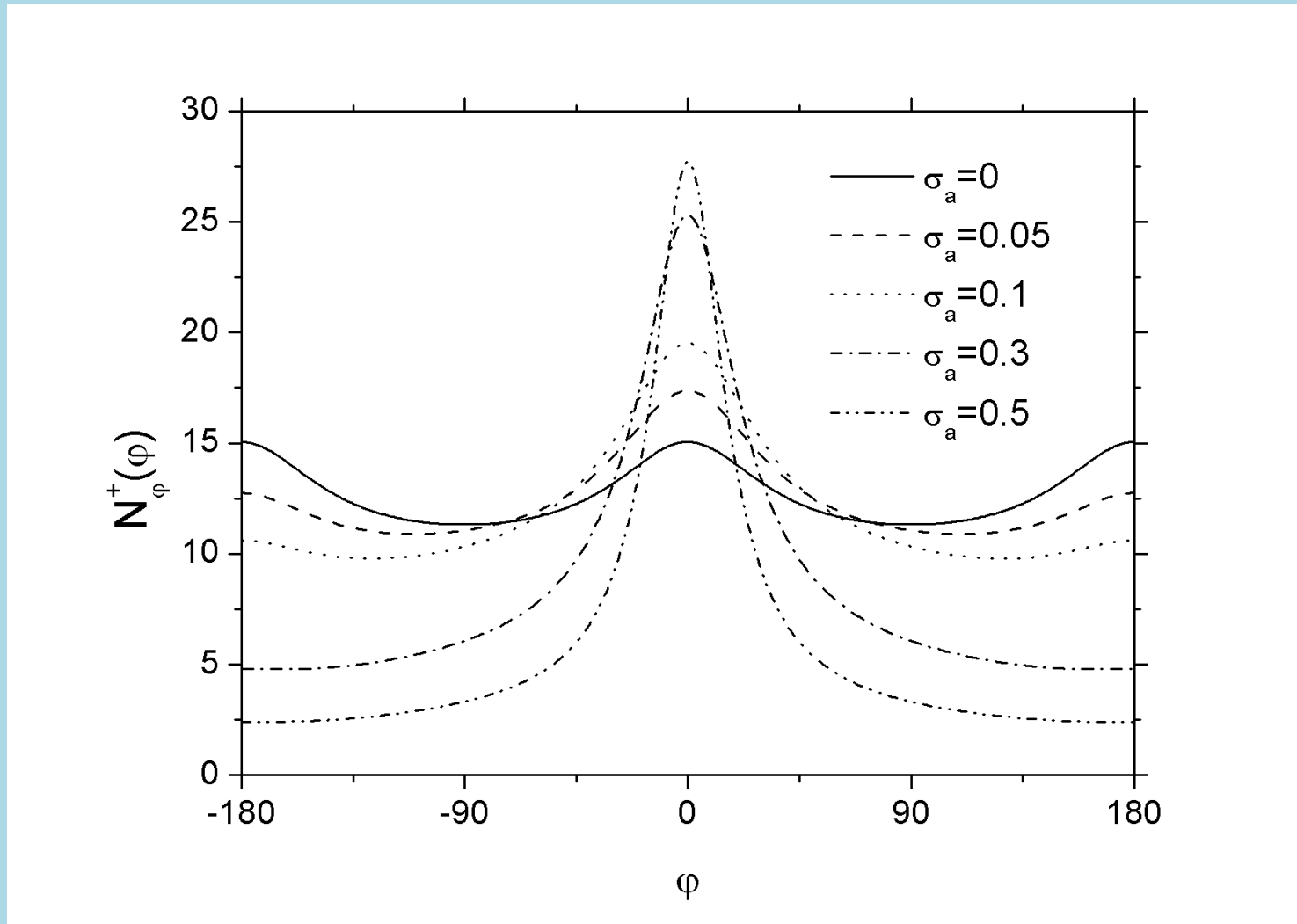
Rešavanjem ovih integrala dobijamo sledeći izraz za PLCR

$$N_{\vartheta}^{+}(\varphi) = \frac{\sqrt{\beta_{\varphi} + \beta_a \sin^2 \varphi}}{4\pi \sigma_{\varphi}} \left( 1 + \frac{\sigma_2 \sigma_a}{\sigma_{\varphi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_a^2}} \cos \varphi \right) \left( 1 + \frac{\sigma_a^2 \sin^2 \varphi}{\sigma_{\varphi}^2} \right)^{-1}$$





SLIKA 4.8 Grafik funkcije  $N_{\vartheta}^{+}(\varphi)$  za različite vrednosti  $\sigma_a$  i  $\beta_a = 1000$ .



SLIKA 4.9 Grafik funkcije  $N_{\vartheta}^{+}(\varphi)$  za različite vrednosti  $\beta_a$  i  $\sigma_a = 0.1$ .

Podsetimo se da uslovnu PDF  $p_{R|\varphi_0+}(r_0)$  možemo odrediti na sledeći način

$$p_{R|\varphi_0+}(r_0) = \frac{\int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{R\vartheta\dot{\varphi}}(r_0, \varphi_0, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)} = \frac{I(r_0, \varphi_0)}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)}.$$

Pritom je

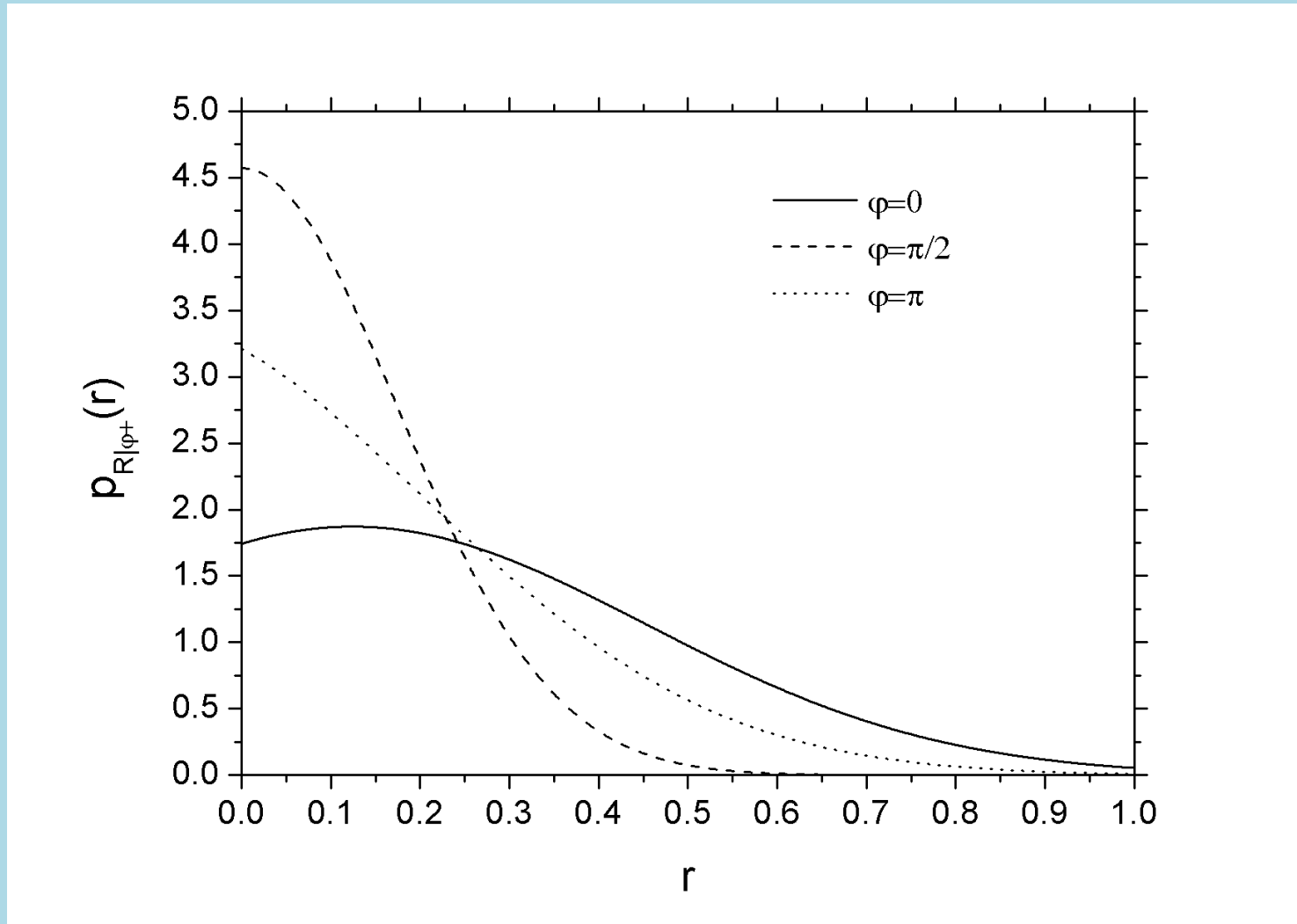
$$I(r, \varphi) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(r, \varphi|a, \dot{a}) p_{A,\dot{A}}(a, \dot{a}) da d\dot{a}$$

Zamenom dobijamo sledeći izraz

$$\begin{aligned}
 I(r, \varphi) = & \frac{\beta_{\varphi}^{1/2}}{(2\pi)^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_a^2 \sqrt{\beta_a}} \exp \left( -\frac{\sigma_{\varphi}^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} r^2 \right) \\
 & \times \int_0^{+\infty} a \exp \left( \frac{r \cos \varphi}{\sigma_1^2} a - \frac{a^2}{2\sigma_{1a}^2} \right) da \\
 & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_{\varphi}} - \frac{\dot{a}^2}{2\beta_a} \right) g \left( -\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_{\varphi}}} \right) d\dot{a}.
 \end{aligned}$$

Predhodni integrali mogu da se reše u zatvorenom obliku. Njihovim rešavanjem dobijamo

$$\begin{aligned}
 p_{R|\varphi+}(r) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_1 (\sigma_{\varphi}^2 + \sigma_a^2 \sin^2 \varphi)}{\sigma_2 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_a^2} (\sigma_{\varphi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_a^2} + \sigma_2 \sigma_a \cos \varphi)} \\
 & \times \exp \left( -\frac{\sigma_{\varphi}^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} r^2 \right) g \left( \frac{r \sigma_a \cos \varphi}{\sigma_1 \sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_a^2)}} \right).
 \end{aligned}$$



SLIKA 4.10 Grafik funkcije  $p_{R|\varphi+}(r)$  za  $\sigma_a = 0.1$ .

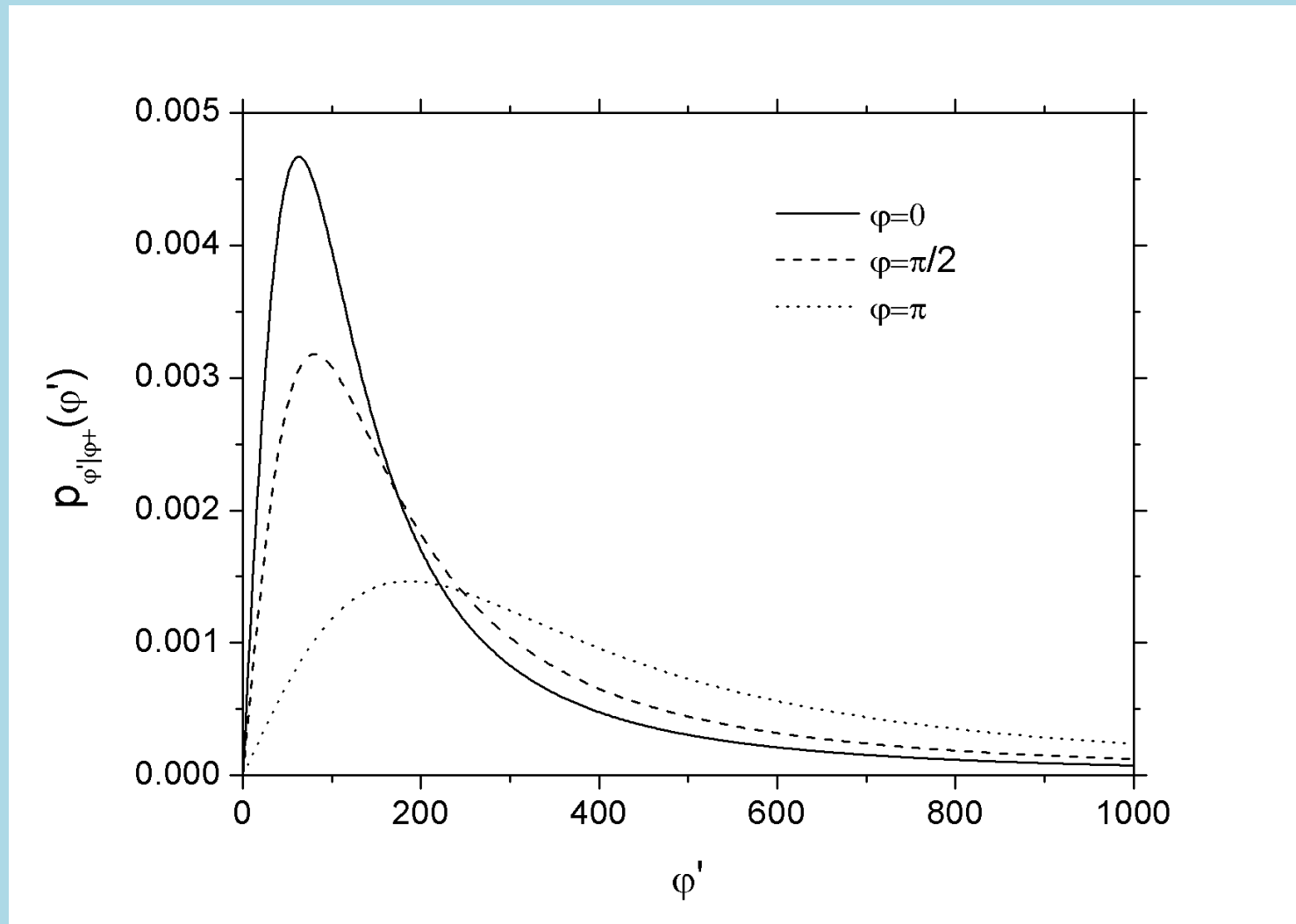
Preostaje nam da odredimo uslovnu PDF  $p_{\dot{\vartheta}|\varphi+}(\dot{\varphi})$  izvoda faze  $\vartheta(t)$ .  
Videli smo da važi

$$p_{\dot{\vartheta}|\varphi+}(\dot{\varphi}) = \frac{\dot{\varphi} p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})}{N_{\vartheta}^{+}(\varphi)},$$

gde je

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\vartheta\dot{\vartheta}|A,\dot{A}}(\varphi, \dot{\varphi}|a, \dot{a}) p_{A,\dot{A}}(a, \dot{a}) da d\dot{a}.$$

Nažalost, ovaj integral **nije moguće** izračunati u zatvorenom obliku, a samim tim ni traženu uslovnu PDF.



SLIKA 4.11 Grafik funkcije  $p_{\dot{\varphi}|\varphi+}(\dot{\varphi})$ , za  $\sigma_a = 0.1$  i  $\beta_a = 1000$ .

## 4.6 Srednji broj osnih preseka anvelope

U naredna dva odeljka računaćemo statistike drugog reda procesa **anvelope**  $R(t)$  **složenog signala**.

Ograničićemo se na slučaj kada je amplituda kosinusnog signala  $A$  **konstantna i jednaka**  $a$ . Tada je  $\dot{a} = 0$ . Ova pretpostavka će važiti kako u ovom tako i u narednom odeljku.

Koristićemo sledeći izraz

$$N_R^+(r) = \int_{-\pi}^{\pi} I_1(r, \varphi) d\varphi,$$

gde je  $I_1(r, \varphi)$  definisano na sledeći način

$$I_1(r, \varphi) = \int_0^{+\infty} \dot{r} p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) d\dot{r}.$$



Najpre računamo JPDF procesa  $R(t)$ ,  $\dot{R}(t)$  i  $\vartheta(t)$ .

$$\begin{aligned}
 p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} \\
 &= \frac{r \exp \left( -\frac{a^2}{2\sigma_1^2} + \frac{ar \cos \varphi}{\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} - \frac{\dot{r}^2}{2\beta_\varphi} \right)}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_\varphi}}.
 \end{aligned}$$

Na osnovu predhodnog izraza odredjujemo

$$I_1(r, \varphi) = \frac{\sqrt{\beta_\varphi} r \exp \left( -\frac{a^2}{2\sigma_1^2} + \frac{ar \cos \varphi}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right)}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2}.$$

Nažalost integral predhodnog izraza po  $\varphi$  (LCR) **nije moguće** odrediti u zatvorenom obliku.

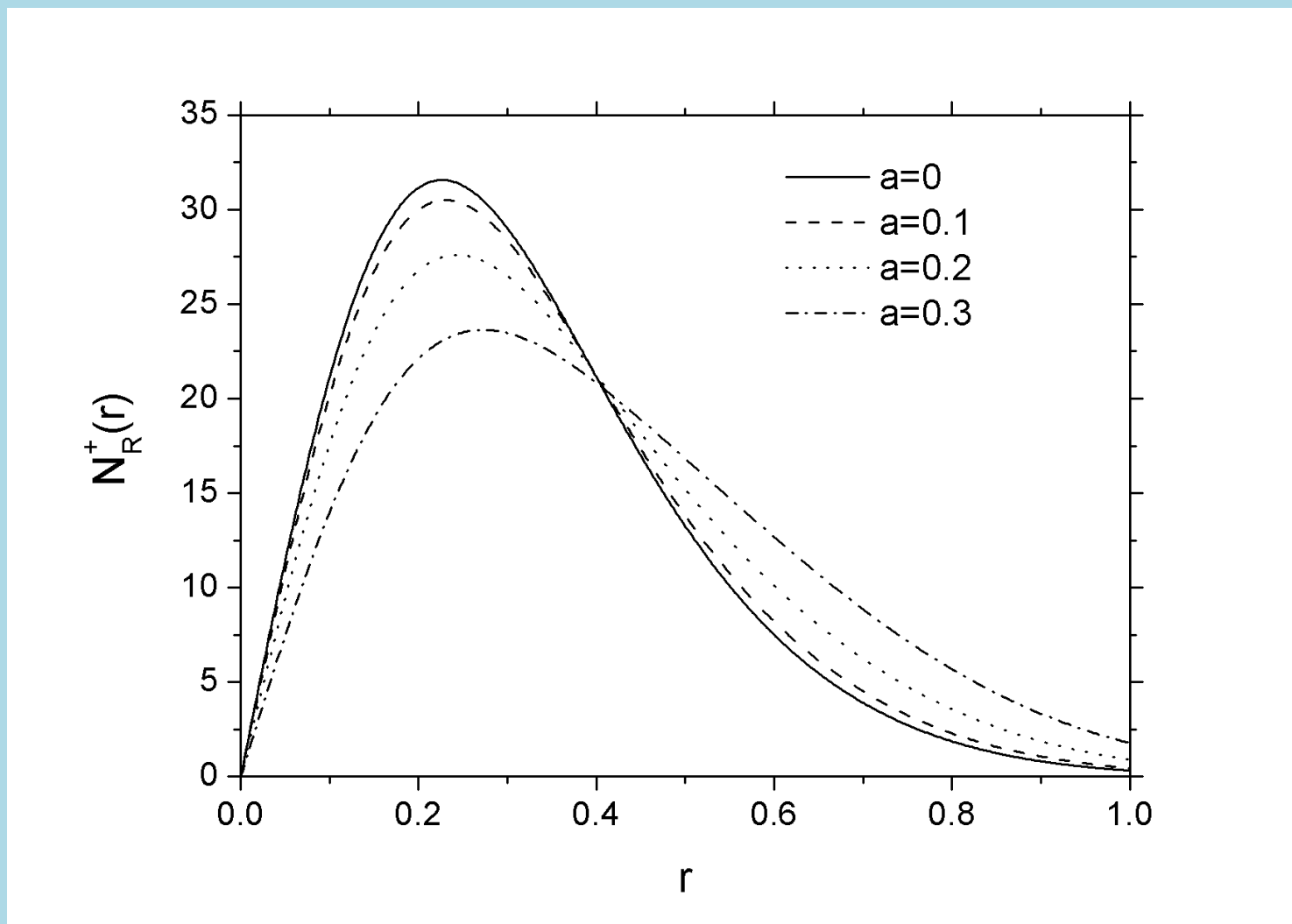
Medjutim, u nekim specijalnim slučajevima ipak je moguće odrediti LCR u zatvorenom obliku.

1. Neka je  $a = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ .

$$\begin{aligned} N_R^+(r) &= \frac{r\sqrt{\beta}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}\sigma_1\sigma_2} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2}\right) d\varphi \\ &= \frac{r\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{r^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{4\sigma_1^2\sigma_2^2}\right\} I_0\left(\frac{r^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}{4\sigma_1^2\sigma_2^2}\right). \end{aligned}$$

2. Neka je  $a = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ .

$$\begin{aligned} N_R^+(r) &= \frac{r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}\sigma^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi)} d\varphi \\ &= \frac{r\sqrt{2\beta_2}}{\pi^{3/2}\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) E\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right). \end{aligned}$$



SLIKA 4.12 Grafik funkcije  $N_R^+(r)$  za različite vrednosti parametra  $a$ .

## 4.7 Generalisani srednji broj osnih preseka anvelope

Srednji broj osnih preseka anvelope  $R(t)$  predstavlja srednji broj preseka trajektorije ovog procesa sa pravom  $y = r$  u pozitivnom smeru u jedinici vremena.

Posmatraćemo srednji broj preseka trajektorije procesa  $R(t)$  sa pravom  $y = r$  u jedinici vremena pri čemu je **u trenutku preseka** faza  $\vartheta(t)$  **u tačno definisanim granicama tj**  $\varphi_1 \leq \vartheta(t) \leq \varphi_2$ .

Ovaj broj označićemo sa  $N_{R|\vartheta}^+(r; \varphi_1, \varphi_2)$  i nazvaćemo ga **generalisani srednji broj osnih preseka (GLCR - Generalized Level Crossing Rate)**.

Imamo da se GLCR anvelope izračunava primenom sledećeg izraza

$$N_{R|\vartheta}(r; \varphi_1, \varphi_2) = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{+\infty} \dot{r} p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) d\dot{r} d\varphi}{F_{\vartheta}(\varphi_2) - F_{\vartheta}(\varphi_1)} = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I_1(r, \varphi) d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p_{\vartheta}(\varphi) d\varphi}$$

Nažalost, nijedan od integrala u predhodnom izrazu nije moguće odrediti u zatvorenom obliku.

U zatvorenom obliku možemo da izračunamo malo drugačiju generalizaciju srednjeg broja osnih preseka. Posmatrajmo vrednost GLCR kada  $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1 = \varphi$ . To je zapravo **uslovni LCR procesa anvelope  $R(t)$  uslovljen vrednošću faze  $\vartheta(t) = \varphi$** .

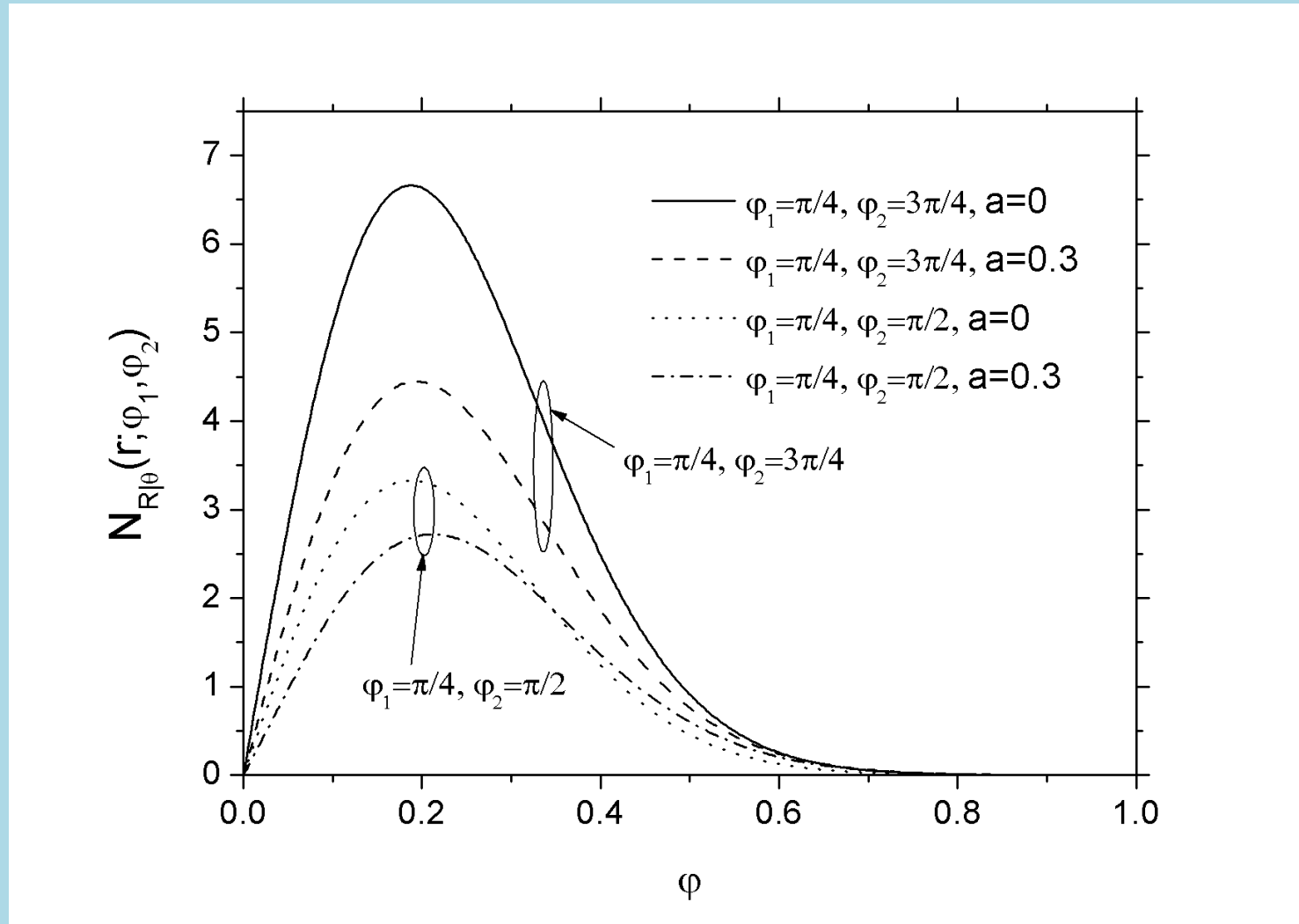
$$N_{R|\vartheta}(r | \varphi) = \lim_{\varphi_2 \rightarrow \varphi} \frac{\int_{\varphi}^{\varphi_2} I_1(r, u) du}{F_{\vartheta}(\varphi_2) - F_{\vartheta}(\varphi)} = \frac{I_1(r, \varphi)}{p_{\vartheta}(\varphi)}.$$

Sada zamenom izračunatih izraza dobijamo

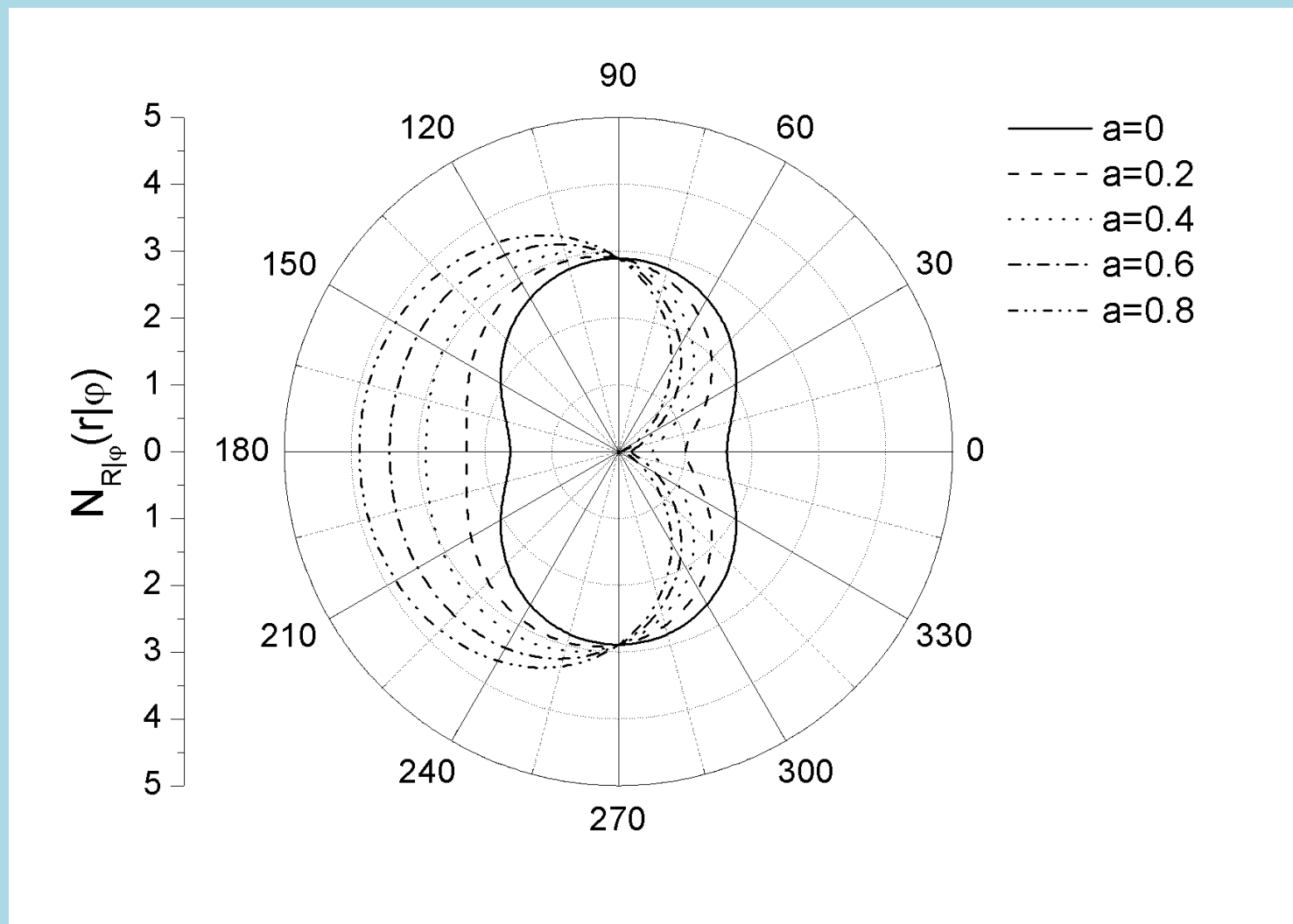
$$N_{R|\vartheta}(r | \varphi) = \frac{r \sigma_{\varphi} \sqrt{\beta_{\varphi}} \exp \left( -\frac{(a - r \cos \varphi)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_{\varphi}^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2} \right)}{\sigma_1 \sigma_2 \pi \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{a \sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sqrt{2} \sigma_{\varphi}} \right) \right)}.$$

U slučaju Rayleigh-evog fedinga, predhodni izraz se umnogome uprošćava

$$N_{R|\vartheta}(r | \varphi) = \frac{r \sqrt{\beta} \exp \left( -\frac{(a \cos \varphi - r)^2}{2\sigma^2} \right)}{\pi \sigma \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{a}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right)}$$

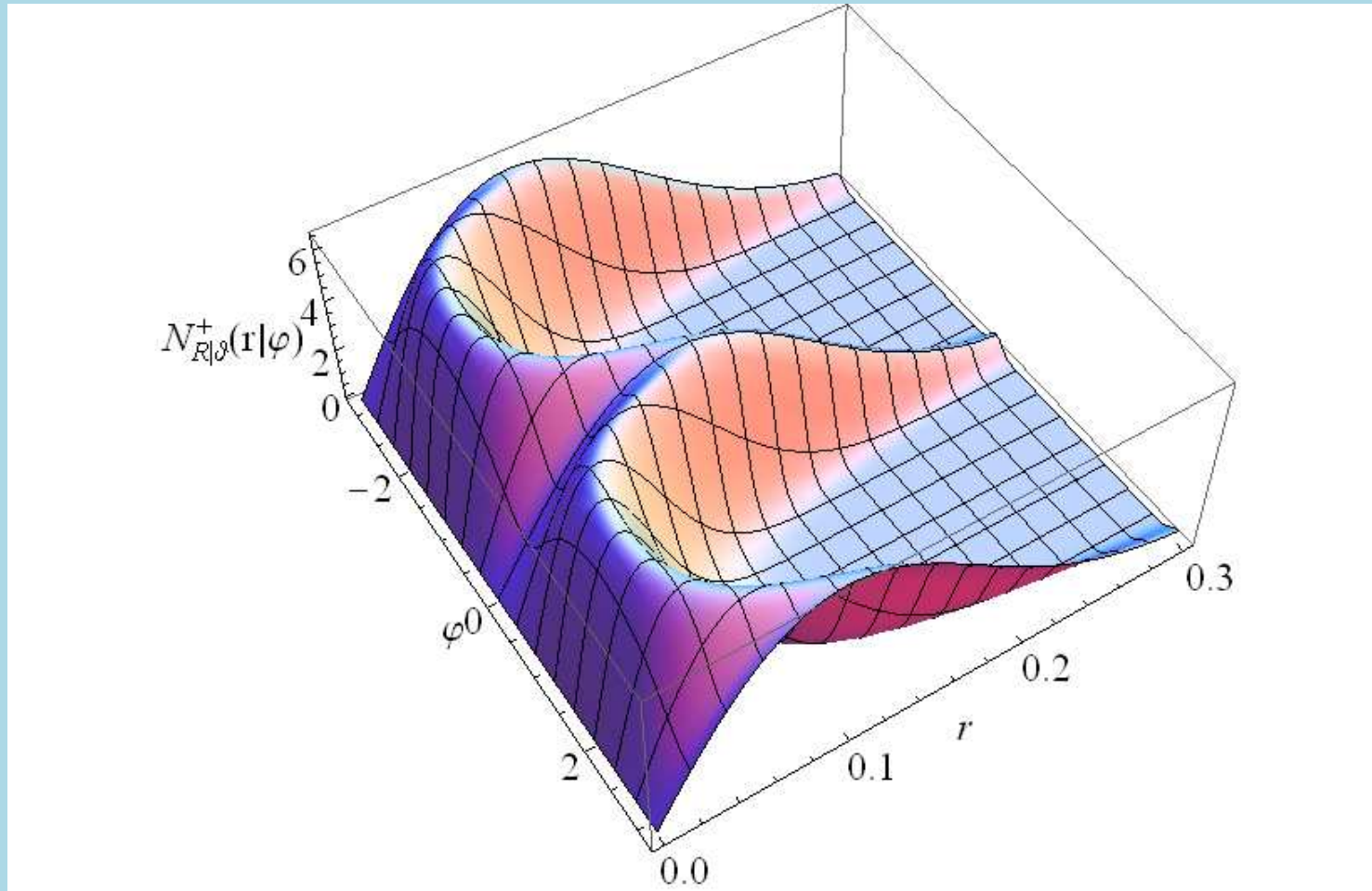


SLIKA 4.13 Grafik funkcije  $N_{R|\vartheta}(r \mid \varphi_1, \varphi_2)$ .



SLIKA 4.14 Grafik funkcije  $N_{R|\varphi}(r | \varphi)$  za  $a = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ ,  $r = 0.05$  u polarnom koordinatnom sistemu.





SLIKA 4.15 3D grafik funkcije  $N_{R|\vartheta}(r | \varphi)$  za  $a = 0.1$ .

## 5 Zaključak

Rezultati izoženi u ovom radu mogu se sistematizovati na sledeći način:

- A. Detaljno je opisan prenos signala u kanalima sa fedingom. Definisani su najvažniji modeli kanala sa fedingom i detaljno opisane njihove statističke karakteristike.
- B. Izvedeni su izrazi za statistike drugog reda faze i anvelope za kanal sa Nakagami- $q$  fedingom. Svi dobijeni izrazi dati su i za slučaj Rayleigh-evog fedinga. Ovi rezultati su novijeg datuma a ima i jedan broj originalnih rezultata.
- C. Statistike prvog i drugog reda su računate za zbir kosinusnog talasa i Nakagami- $q$  signala. Ovi rezultati su originalni i preuzeti iz naših radova.

# Predlozi za dalja istraživanja

1. Računanje statistika drugog reda anvelope za slučaj promenljive amplitude kosinusnog signala.
2. Izvodjenje statistika drugog reda za slučaj kada amplituda kosinusnog talasa i njen izvod imaju drugačije raspodele (npr. lognormalnu, itd.).
3. Analiza složenog signala koji se dobija kao zbir kosinusnog talasa i signala na izlazu kanala modeliranog nekim drugim modelom fedinga (npr. Nakagami- $m$ , Weibull, itd.).
4. Izvodjenje statistika drugog reda za diverziti sisteme, pri čemu su sve grane kanali sa Nakagami- $q$  fedingom.
5. Analiza statistika drugog reda za složeni signal i diverziti sisteme.

# Zahvalnost

- Sa posebnim zadovoljstvom zahvaljujem se mom mentoru, **Prof. Dr Mihajlu Stefanoviću**, ne samo na pomoći pri izradi ovog rada, već i na velikoj pažnji i vremenu koje mi je posvetio uvodeći me u ovu naučnu oblast.
- Zahvaljujem se i **Prof. Dr Zoranu Periću** koji mi je takodje pružio nesebičnu pomoć i uveo me u jednu drugu oblast (teoriju informacija i izvorno kodovanje).
- Zahvalnost dugujem i **Prof. Dr Vanči Litovskom**, pod čijim sam mentorstvom napisao i objavio svoj prvi naučni rad iz oblasti elektronike.
- Najtoplije se zahvaljujem **članovima svoje porodice**, koji su u granicama svojih mogućnosti takodje doprineli izradi ovog rada.

**Hvala na pažnji!**