

UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

STATISTIKE PRVOG I DRUGOG REDA SIGNALA U KANALIMA SA FEDINGOM

Diplomski rad

Kandidat
Marko D. Petković
br. indeksa: 10927

Mentor
Dr Mihajlo Č. Stefanović
redovni profesor

Niš, Februar 2008

Život savremenog čoveka ne može se zamisliti bez korišćenja bežičnih komunikacija, po principu AAA (Any time, Any where, Any how). Zavisnost čoveka od mobilnih komunikacija ogleda se u svim sferama života kako po pitanju prenosa informacija i upravljanja tako i u sferi zabave. Veliki je broj korisnika mreža mobilne telefonije, satelitske televizije, bežičnog interneta, itd. Broj usluga koje ove mreže nude je takodje veliki, npr. multimedijalni servisi na mobilnim telefonima, elektronsko bankarstvo, internet telefonija, itd.

Prilikom projektovanja bilo koje bežične mreže, jedan od osnovnih problema koji se javlja je problem fedinga. Signal se prostire po više putanja kroz bežični kanal što uzrokuje brze promene amplitude i faze signala na prijemu. Ovaj problem zahteva detaljnu analizu, a naročito su od značaja statistike drugog reda zato što daju mnogo više informacija o kvalitetu kanala nego verovatnoća greške.

Ovaj Diplomski rad je rezultat mog dvogodišnjeg bavljenja problemima prenosa signala u prisustvu fedinga što je dovelo do pisanja i objavljivanja 3 naučna rada.

Sa posebnim zadovoljstvom zahvaljujem se mom mentoru, Prof. Dr Mihajlu Stefanoviću, ne samo na pomoći pri izradi ovog rada, već i na velikoj pažnji i vremenu koje mi je posvetio uvodeći me u ovu naučnu oblast.

Zahvaljujem se i Prof. Dr Zoranu Periću koji mi je takodje pružio nesebičnu pomoć i uveo me u jednu drugu oblast (teoriju informacija i izvorno kodovanje).

Zahvalnost dugujem i Prof. Dr Vanči Litovskom, pod čijim sam mentorstvom napisao i objavio svoj prvi naučni rad iz oblasti elektronike.

Najtoplije se zahvaljujem članovima moje porodice, koji su u granicama svojih mogućnosti takodje doprineli izradi ovog rada.

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Prenos signala u kanalima sa fedingom	6
2.1	Model rasejanja radio talasa	6
2.2	Veličine koje opisuju kanal sa fedingom	10
2.3	Rayleigh-ev model fedinga	11
2.4	Nakagami- q model fedinga	12
2.5	Statistike prvog reda za Nakagami- q i Rayleigh-ev model fedinga	13
2.6	Rice-ov model fedinga	15
2.7	Nakagami- m model fedinga	17
3	Statistike drugog reda Nakagami-q signala	20
3.1	Definicije statistika drugog reda i osnovna svojstva	20
3.2	JPDF faze i slučajnog FM šuma kod Nakagami- q fedinga	21
3.3	Srednji broj osnih preseka faze kod Nakagami- q fedinga	25
3.4	Uslovne gustine raspodele anvelope i izvoda faze	27
3.5	JPDF anvelope i izvoda	29
3.6	Srednji broj osnih preseka i vreme trajanja fedinga	31
4	Statistike prvog i drugog reda zbira kosinusnog talasa i Nakagami-q signala	34
4.1	Opis modela i statistike prvog reda	34
4.2	JPDF faze i FM šuma za konstantne vrednosti amplitude kosinusnog signala i izvoda	38
4.3	Srednji broj osnih preseka faze	41
4.4	Uslovne gustine raspodele anvelope i izvoda faze	43
4.5	Srednji broj osnih preseka faze kada je amplituda $A(t)$ Rayleigh-ev proces	46
4.6	Uslovne gustine raspodele anvelope i izvoda faze kada je amplituda $A(t)$ Rayleigh-ev proces	48
4.7	Srednji broj osnih preseka anvelope	50
4.8	Generalisani srednji broj osnih preseka anvelope	54
5	Zaključak	58
A	Vrednosti korišćenih integrala	62

Spisak korišćenih skraćenica

LOS - *Line Of Sight* - Linija optičke vidljivosti

PDF - *Probability Density Function* - Funkcija gustine raspodele (gustina raspodele)

CDF - *Cumulative Distribution Function* - Funkcija raspodele

JPDF - *Joint Probability Density Function* - Združena funkcija gustine raspodele (združena gustina raspodele)

JCDF - *Joint Cumulative Distribution Function* - Združena funkcija raspodele

LCR - *Level Crossing Rate* - Srednji broj osnih preseka

ADF - *Average Duration of Fades* - Srednje vreme trajanja fedinga

PLCR - *Phase Level Crossing Rate* - Srednji broj osnih preseka faze

GLCR - *Generalized Level Crossing Rate* - Generalisani srednji broj osnih preska

GPLCR - *Generalized Phase Level Crossing Rate* - Generalisani srednji broj osnih preska faze

Glava 1

Uvod

Uspostavljanje brze i pouzdane komunikacije kroz bežični radio kanal predstavlja veliki izazov zato što ovaj kanal nije podložan samo šumu, interferenciji i drugim smetnjama već se te smetnje menjaju vremenom na nepredvidive načine usled kretanja korisnika. Mobilne komunikacije se poslednjih godina veoma brzo razvijaju kao i modeli bežičnih kanala koji se koriste za opisivanje različitih efekata kao što su prostiranje po više putanja (*multipath propagation*) i efekat senke (*shadowing*). Matematički opis ovih fenomena koristi se za analizu komunikacionih sistema i uloženi su veliki naponi da se razviju statistički modeli za bežične kanale koji zavise od propagacionog okruženja, odnosno prenosnog medijuma.

Pri prostiranju signala kroz bežični medijum (atmosfera) signal se prostire po više putanja usled refleksije, difrakcije i rasejanja signala od objekata koji se nalaze u okruženju između predajnika i prijemnika. Do refleksije talasa dolazi kada radio talas naidje na glatku površinu čije su dimenzije mnogo veće od njegove talasne dužine. Iza prepreke koja ima dimenzije mnogo veće od talasne dužine, formira se sekundarno zračenje koje omogućava da se komunikacija obavlja čak i u slučaju kada između predajnika i prijemnika ne postoji direktna linija optičke vidljivosti (LOS - *Line Of Sight*) i u tom slučaju je došlo do difrakcije talasa. Rasejavanje talasa nastaje kada se radio signal prostire kroz sredinu u kojoj se nalazi veliki broj objekata čije su dimenzije male u poredjenju sa talasnom dužinom. Svaka interakcija talasa sa objektima koji se nalaze u okruženju prostiranja uzrokuje da na izlaz prijemnika stiže veliki broj kopija poslatog signala sa različitim slabljenjem, faznim pomerajem i kašnjenjem na prijemu. Prostiranje signala po više putanja dovodi do širenja signala u vremenu usled različitih kašnjenja kopija signala na prijemu. Superpozicijom ovih kopija signala na prijemu usled kretanja predajnika i/ili prijemnika, dobija se signal čija se amplituda menja u vremenu. Zbog toga na prijemu dolazi do pojačanja ili slabljenja signala i tada se kaže da je signal *pod uticajem fedinga*. Pod fedingom se upravo podrazumevaju brze promene amplitude signala na malim rastojanjima kada se slabljenje usled prostiranja može zanemariti.

Kada se predajnik i/ili prijemnik kreću, feding dovodi do drastičnih i slučajnih fluktuacija amplitude prijemnog signala. Slabljenje od 30dB do 40dB u odnosu na srednju vrednost signala može se desiti i nekoliko puta u toku jedne sekunde, zavisno od brzine mobilne jedinice i frekvencije nosioca. Usled kretanja mobilne jedinice Doppler-ov efekat izaziva pomeranje frekvencije svakog pojedinačnog talasa koji stiže na ulaz prijemnika. Zbog Doppler-ovog efekta dolazi do širenja spektra poslatog signala pri prostiranju.

Pored efekta fedinga koji nastaje pri prostiranju signala po više putanja, javlja se i efekat senke

koji se odnosi na slučajne promene snage komponenti sa više putanja. Efekat senke izazivaju prepreke izmedju predajnika i prijemnika koje smanjuju snagu signala apsorpcijom, refleksijom, rasejanjem i difrakcijom, što može dovesti i do potpunog nestanka signala na prijemu. Feding predstavlja pojavu varijacije amplitude i faze signala pri čemu je srednja vrednost signala sve vreme konstantna na određenoj prostornoj lokaciji. Kada postoji i efekat senke dolazi do promene srednje vrednosti signala tj. snage. Pošto su mesto, veličina i dielektrične karakteristike objekata, koji se nalaze na putu signala kao i promene na reflektujućim površinama i objektima koji rasipaju i prouzrokuju slučajno slabljenje signala, uglavnom nepoznati, moraju se koristiti statistički modeli da bi se okarakterisalo ovo slabljenje. Najčešći model za varijaciju srednje snage je lognormalna raspodela. Empirijski je potvrđeno da ovaj model precizno modeluje promenu primljene snage.

Zbog slučajnog karaktera ovih pojava, u prisustvu šumova i smetnji, signal na ulazu u prijemnik bežičnog telekomunikacionog digitalnog sistema je slučajni proces i razvijeni su mnogi analitički modeli koji omogućavaju da se na osnovu statističkih karakteristika procene performanse bežičnih sistema.

Karakteristike mobilnih bežičnih kanala mogu se definisati u zavisnosti od promene snage u kanalu u vremenskom ili frekvencijskom domenu. Te promene snage mogu se grubo podeliti u dve grupe: feding srednje snage (*large-scale fading*) i feding anvelope (*small-scale fading*). Često se u literaturi feding srednje snage naziva *brzi* a feding anvelope *spori feding*. Trenutna snaga na prijemniku može se predvideti korišćenjem tradicionalnih large-scale i small-scale modela.

Large-scale modeli predviđaju prosečnu jačinu primljenog signala koja zavisi od rastojanja izmedju predajnika i prijemnika. Large-scale feding nastaje usled slabljenja signala u funkciji rastojanja i efekta senke od velikih objekata kao što su zgrade i brda. Ova vrsta fedinga takodje nastaje pri kretanju mobilne jedinice duž putanje reda veličine jedne ćelije i uglavnom je frekvencijski nezavisan. Pritom dolazi do slabljenja srednje snage signala usled gubitaka pri prostiranju ili kretanju po velikim oblastima. Slabljenje zavisi od specifičnog propagacionog okruženja. Za large-scale modele fedinga kažemo da nastaju kao posledica efekta senke.

Small-scale modeli kanala predstavljaju lokalnu promenu signala oko srednje vrednosti snage. Small-scale feding nastaje usled konstruktivne i destruktivne sume komponenti signala po više putanja izmedju predajnika i prijemnika. Dešava se u prostornom rasponu reda talasne dužine nosioca i frekvencijski je zavisao. Dovodi do promene amplitude i faze prijemnog signala usled malih promena rastojanja izmedju predajnika i prijemnika.

Opisivanje i modelovanje kanala sa fedingom je od naročitog značaja u mobilnim komunikacijama kako za samo projektovanje primopredajnog sistema tako i za analizu performansi. Tokom dugog perioda razvoja bežičnih komunikacija konstruisan je veliki broj različitih modela kanala sa fedingom za opis statistika anvelope i faze kanala gde se signal prostire po više putanja [2], [16], [7]. Primeri takvih modela su Rayleigh-jev, Rice-ov, Nakagami-q, Nakagami-m, Weibull-ov, Beckmannov, itd. Cilj ovog rada je proučavanje statističkih osobina prvog i drugog reda anvelope i faze u ovim modelima, sa posebnim osvrtom na Nakagami-q (Hoytov) model i Rayleigh-ev model kao njegov specijalni slučaj.

U drugoj glavi ovog rada razmotrićemo osnovne pojmove vezane za modeliranje kanala sa fedingom. Najpre ćemo definisati geometrijsko-analitički model (Clarke-ov model) koji je veoma koristan za dobijanje prave slike o mehanizmu fedinga i karakteristikama prijemnog signala. Pokazaćemo da se signal na prijemu kanala sa fedingom uspešno modelira pomoću slučajnog procesa (tj. slučajnim

procesima). Nakon toga definisaćemo nekoliko modela kanala sa fadingom i izvesti izraze za statistike prvog reda. Posebna pažnja biće posvećena Nakagami-q i Rayleigh-evom modelu.

U trećoj glavi razmatraćemo statistike drugog reda kanala sa Nakagami-q fadingom. Najpre ćemo izvesti izraze za združene gustine raspodela procesa anvelope, faze i njihovih izvoda. Nakon toga pristupićemo izvodjenju izraza za srednji broj osnih preseka faze (PLCR) kao i uslovne gustine raspodele anvelope i izvoda faze uslovljene vrednošću procesa faze. Nakon toga razmotrićemo statistike drugog reda anvelope, srednji broj osnih preseka (LCR) i srednje vreme trajanja fedinga (ADF).

U četvrtoj glavi izložićemo originalne rezultate vezane za statistike prvog i drugog reda zbira Nakagami-q signala i kosinusnog talasa. Pritom u opštem slučaju pretpostavićemo da je amplituda kosinusnog talasa promenljiva veličina koja se takodje modelira slučajnim procesom. Izvešćemo sve izraze pod pretpostavkom da su amplituda kosinusnog signala i njen izvod konstantni u vremenu. Iako ova pretpostavka ima praktičnog smisla samo u slučaju kada je vrednost izvoda jednaka nuli, dobijeni rezultati se koriste pri razmatranju slučaja kada je amplituda kosinusnog talasa promenljiva. Na početku ove glave poučićemo statistike prvog reda složenog signala. To su funkcije raspodele i gustine raspodele anvelope i faze. Nakon toga pristupićemo izvodjenju statistika drugog reda. Odredićemo združene funkcije gustine raspodele anvelope, faze i izvoda. Na osnovu ovih rezultata izvešćemo izraze za srednji broj osnih preseka anvelope i faze kao i uslovne gustine raspodele anvelope i izvoda faze. Dobijene rezultate upoređićemo sa odgovarajućim rezultatima za Nakagami-q fading (kada je amplituda kosinusnog talasa jednaka nuli), iz predhodne glave. Na kraju ćemo razmotriti dve generalizacije srednjeg broja osnih preseka anvelope. Sve dobijene rezultate predstavimo grafički, za vrednosti parametara dobijenih fitovanjem izmerenih podataka.

Glava 2

Prenos signala u kanalima sa fedingom

U ovoj glavi opisaćemo geometrijsko-analitički model kanala koji je veoma korisan za dobijanje prave slike o mehanizmu fedinga i statističkim karakteristikama primljenog signala. Varijacije signala u bežičnim sistemima mogu se povezati sa kretanjem prijemnika koji prolazi u okolini prepreka. Primenom izloženog modela pokazuje se da te varijacije mogu da se opišu pomoću slučajnih procesa. Statističke osobine ovih slučajnih procesa zavise od sredine u kojoj se prostiru elektromagnetni talasi.

U nastavku opisaćemo nekoliko modela koji se u praksi najčešće koriste za opisivanje prijemnog signala. Rayleigh-ev model praktično direktno sledi iz geometrijsko-analitičkog modela i koristi se kada ne postoji linija optičke vidljivosti između prijemnika i predajnika. U suprotnom koristi se Rice-ov model (koji se takodje dobija direktno iz geometrijsko-analitičkog modela). Ostala dva modela, Nakagami- q (Hoyt-ov) i Nakagami- m model, predstavljaju uopštenje Rayleigh-evog i Rice-ovog modela. Iako nemaju egzaktnu analitičku podlogu, ova dva metoda su se pokazala korisnim u praksi zbog svoje fleksibilnosti i činjenice da se Rayleigh-jev odnosno Rice-ov model dobijaju kao specijalni slučajevi Nakagami- q i Nakagami- m modela.

Za svaki model detaljno su izložene statistike prvog reda kao i oblasti moguće primene.

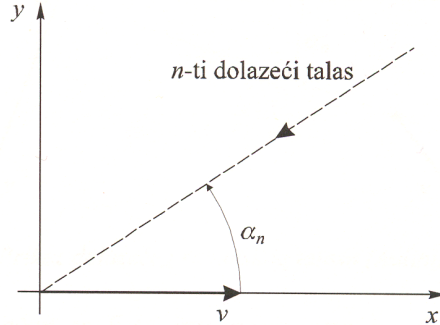
2.1 Model rasejanja radio talasa

Statističke karakteristike elektromagnetnog polja radio talasa kao i odgovarajuća anvelopa i faza signala mogu se objasniti korišćenjem više različitih modela. Modeli zasnovani na rasejanju talasa omogućavaju uspostavljanje nekoliko važnih veličina koje opisuju primljeni signal kao što su statistike prvog i drugog reda anvelope i faze ili spektralna gustina snage. Najkorišćeniji i najcitiraniji model u literaturi zasnovan na rasejanju talasa je Clarke-ov model koji uključuje rasejanje signala u okolini prijemnika [3]. Prvi ovakav model je predložio Osana [12] i on je specijalan slučaj Clarke-ovog modela.

Signali koje emituje bazna stanica najčešće su vertikalno polarisani kao i antene mobilne stanice. Pomeraj predajne ili prijemne antene dovodi do nevertikalne polarizacije. Polazeći od pretpostavke da su preneseni signali vertikalno polarisani kao i da je rastojanje između bazne i mobilne stanice dovoljno veliko, po Clarke-ovom modelu prostiranje radio signala može se modelovati u dve dimenzije.

Clarke je pretpostavio da je dolazeći talas sastavljen od horizontalnih ravanskih talasa sa slučajnom fazom pri čemu su ovi ravanski talasi vertikalno polarisani. Prostorni ugao dolaska i faza talasa su slučajne i statistički nezavisne veličine. Predpostavlja se da faza talasa ima uniformnu raspodelu u intervalu $[0, 2\pi)$. To je prihvatljivo u VHF području i iznad gde je talasna dužina dovoljno mala

tako da osigura da male promene u dužini putanja rezultuju značajnim promenama u fazi. Raspodela prostornog ugla dolazećeg talasa, po Clarke-ovom modelu (u smislu omnidirekcionog modela rasejanja) takodje je uniformna.



SLIKA 2.1. Prikaz dolazećeg ravanskog talasa (Clarke-ov model rasejanja)

Na slici 2.1 prikazana je xy ravan postavljena tako da se mobilna stanica kreće duž x ose brzinom v . Predpostavlja se da postoji vertikalna polarizacija u toj ravni tako da je vektor električnog polja poravnat sa z osom. Ravanski n -ti talas stiže na antenu mobilne stanice pod ulaznim uglom α_n . Ugao dolaska α_n određen je pravcem dolaska n -tog talasa i pravcem kretanja mobilne jedinice. Pomeranje antene mobilne stanice unosi Doppler-ov pomeraj ili frekvencijski pomeraj u n -tom dolazećem ravanskom talasu. Doppler-ov pomeraj za ovakav model dat je kao u [12]

$$f_n = f_{max} \cos \alpha_n [\text{Hz}], \quad \omega_n = 2\pi f_n$$

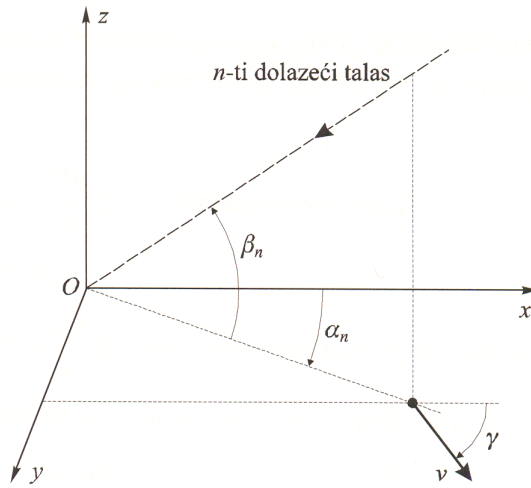
gde je $f_{max} = v/\lambda_c$ maksimalna Doppler-ova frekvencija dok je λ_c talasna dužina pristiglog talasa. Maksimalna Doppler-ova frekvencija zavisi od brzine mobilne jedinice i frekvencije nosioca. Svi ravanski talasi koji dolaze iz jednog pravca kretanja mobilne jedinice unose pozitivni Doppler-ov pomeraj dok oni koji dolaze suprotno od pravca kretanja unose negativan Doppler-ov pomeraj.

Doppler-ov efekat koji se javlja pri prostiranju signala dovodi do širenja spektra poslatog signala. Ova pojava se naziva disperzija frekvencije. Vrednost disperzije frekvencije uglavnom zavisi od maksimalne Doppler-ove frekvencije i amplitude primljenih talasa. U vremenskom domenu Doppler-ov efekat dovodi do toga da je impulsni odziv kanala vremenski promenljiv. Može se lako pokazati da je princip superpozicije zadovoljen kod mobilnih radio kanala i zbog toga su oni linearni sistemi.

Napomenimo da je Aulin predložio prošireni model kod koga se vertikalno polarisani talasi ne kreću obavezno horizontalno već u tri dimenzije (slika 2.2).

Medjutim zaključci koji se dobijaju primenom Aulin-ijevog modela, a koji su značajni za našu analizu podudaraju se sa zaključcima dobijenim primenom Clarke-ovog modela. Zato ćemo u nastavku izložiti osnove Clarke-ovog modela i na osnovu njega izvesti odgovarajuće zaključke koji su potrebni u daljoj analizi.

Komponente električnog i magnetnog polja na prijemu, u slučaju da je signal vertikalno polarisan



SLIKA 2.2. Prikaz dolazećeg ravanskog talasa (Aulin-ijev model rasejanja)

moгу da se predstave na sledeći način

$$E_z = E_0 \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_c t + \theta_n),$$

$$H_x = -\frac{E_0}{\eta} \sum_{n=1}^N C_n \sin \alpha_n \cos(\omega_c t + \theta_n),$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \sum_{n=1}^N C_n \cos \alpha_n \cos(\omega_c t + \theta_n),$$

gde je ω_c kružna frekvencija nosioca signala, η karakteristična impendansa slobodnog prostora dok je $E_0 C_n$ amplituda električnog polja n -te komponente prijemnog signala. Faza θ_n data sledećim izrazom

$$\theta_n = \omega_n t + \phi_n.$$

Ovde ω_n predstavlja Doppler-ovu frekvenciju (pomak usled Doppler-ovog efekta) dok je ϕ_n faza n -te komponente prijemnog signala. Faza ϕ_n predstavlja slučajnu promenljivu uniformno raspodeljenu u intervalu $[0, 2\pi)$. Veličine C_n, ω_n i α_n takodje posmatramo kao slučajne promenljive. Sve ove veličine su ustvari po prirodi determinističke. Medjutim usled same konfiguracije terena ove veličine su vremenski promenjive pri čemu ta promena ne može efikasno da se opiše nekim determinističkim modelom. Takodje veliki broj faktora utiče na promene ovih veličina. Pritom su one medjusobno nezavisne i sve su jednako raspodeljene. Napišimo sada izraz za z komponentu električnog polja (2.1) na drugačiji način

$$E_z = X_1(t) \cos(\omega_c t) - X_2(t) \sin(\omega_c t)$$

gde je

$$X_1(t) = \sum_{n=1}^N E_0 C_n \cos(\omega_n t + \phi_n),$$

$$X_2(t) = \sum_{n=1}^N E_0 C_n \sin(\omega_n t + \phi_n).$$

Primenom centralne granične teoreme [23] dobijamo da su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ Gauss-ovi slučajni procesi. Na osnovu predhodnih izraza možemo zaključiti neke dodatne osobine slučajnih procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$. Srednju vrednost ova dva procesa računamo na sledeći način

$$\mathbb{E}X_1(t) = \sum_{n=1}^N E_0 \cdot \mathbb{E}[C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)] = \sum_{n=1}^N E_0 \cdot \mathbb{E}[C_n] \cdot \mathbb{E}[\cos(\omega_n t + \phi_n)] = 0.$$

Koristili smo činjenicu da je ϕ_n uniformno raspodeljena slučajna promenljiva (pa je zato $\mathbb{E}[\cos(\omega_n t + \phi_n)] = 0$) kao i da su slučajne promenljive C_n i ϕ_n nezavisne. Analogno dokazujemo da je i $\mathbb{E}X_2(t) = 0$. Prema tome ovi procesi imaju nultu srednju vrednost.

Razmotrimo sada disperziju. Da bi dodatno uopštiti razmatranje, posmatraćemo autokorelacione funkcije $r_{X_i X_i}(\tau)$ ova dva procesa. Ujedno ćemo dokazati da su procesi $X_1(t)$ i $X_2(t)$ slabo stacionarni tj. da je autokorelaciona funkcija $r_{X_i X_i}$ funkcija samo jedne promenljive τ . Zaista, imamo da važi

$$\mathbb{E}[X_1(t)X_1(t + \tau)] = E_0^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[C_i C_j \cos(\omega_i t + \phi_i) \cos(\omega_j(t + \tau) + \phi_j)]. \quad (2.1)$$

Za $i \neq j$ imamo da je

$$\mathbb{E}[C_i C_j \cos(\omega_i t + \phi_i) \cos(\omega_j t + \phi_j)] = \mathbb{E}C_i \cdot \mathbb{E}C_j \cdot \mathbb{E} \cos(\omega_i t + \phi_i) \cdot \mathbb{E} \cos(\omega_j(t + \tau) + \phi_j) = 0.$$

Predhodna relacija važi zbog činjenice da su C_i, C_j, ϕ_i i ϕ_j nezavisne slučajne promenljive. Prema tome u izrazu (2.1) preostaju samo članovi za koje je $i = j$. Imamo da važi

$$\mathbb{E}[X_1(t)X_1(t + \tau)] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}C_i^2 \cdot \mathbb{E}[\cos(\omega_i t + \phi_i) \cos(\omega_i(t + \tau) + \phi_i)]. \quad (2.2)$$

Razvojem proizvoda kosinusnih funkcija po adicijom formulu dobijamo

$$\mathbb{E}[\cos(\omega_i t + \phi_i) \cos(\omega_i(t + \tau) + \phi_i)] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[\cos(\omega_i(2t + \tau) + 2\phi_i) + \cos(\omega_i \tau)] = 1/2 \mathbb{E} \cos(\omega_i \tau).$$

Zamenom u (2.2) dobijamo

$$r_{X_1 X_1}(\tau) = \mathbb{E}[X_1(t)X_1(t + \tau)] = \frac{E_0^2}{2} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}C_n^2 \cdot \mathbb{E}[\cos(\omega_n \tau)].$$

Neka su svi Doppler-ovi pomaci ω_n konstantni i približno jednaki ω (što je i fizički logično, zato što svi talasi putuju od predajnika do prijemnika, pa samim tim imaju isti Doppler-ov pomak). Ako još pretpostavimo da je $\sum_{n=1}^N \mathbb{E}C_n^2 = \frac{1}{N}$ dobijamo

$$r_{X_1 X_1}(\tau) = \frac{E_0^2}{2} \mathbb{E}[\cos(\omega \tau)]. \quad (2.3)$$

Isti izraz se dobija i za drugu autokorelacionu funkciju $r_{X_2 X_2}(\tau)$. Na osnovu ovoga možemo da zaključimo da su varijanse σ_1^2 i σ_2^2 procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ međusobno jednake i da važi $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = E_0^2/2$. Napomenimo da je za ovaj zaključak veoma važna pretpostavka da su amplitude svih talasa C_n približno jednake kao i da je faza ϕ_n uniformno raspodeljena. Ova dva uslova su npr. ispunjena ukoliko izmedju prijemnika i predajnika ne postoji linija optičke vidljivosti. Zato je u ovom slučaju veoma

pogodno koristiti Rayleigh-ev model fedinga kod koga upravo važi da je $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. O ovome će biti više reči u odeljku 2.3.

Na kraju ovog odeljka napomenimo samo da je u opštem slučaju za računanje autokorelacione funkcije $r_{X_i X_i}(\tau)$ potrebno poznavati raspodelu snage $p(\alpha)$ na prijemnoj anteni i pojačanje prijemne antene $G(\alpha)$ u zavisnosti od ugla dolazećeg talasa α . Opšti izraz za $r_{X_i X_i}(\tau)$ je

$$r_{X_1 X_1}(\tau) = \frac{E_0^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_{max} \tau \cos \alpha) p(\alpha) G(\alpha) d\alpha.$$

U slučaju 2D izotropnog rasejanja (kao kod Clarke-ovog modela) i izotropne prijemne antene za koju važi $G(\alpha) = 1$ dobijamo da je

$$r_{X_1 X_1}(\tau) = \frac{E_0^2}{2} J_0(2\pi f_{max} \tau),$$

gde je $J_0(\cdot)$ Bessel-ova funkcija nultog reda.

2.2 Veličine koje opisuju kanal sa fedingom

U ovom odeljku definisaćemo pojmove i veličine koje ćemo koristiti u daljem radu a vezane su za slučajne promenljive ili slučajne procese. U predhodnom odeljku videli smo da je za modeliranje signala na prijemu najpogodnije koristiti slučajne procese.

Nadalje ćemo sa $p_X(x)$ označavati funkciju gustine raspodele (PDF - *Probability Density Function*) slučajne promenljive X i/ili slučajnog procesa $X(t)$. Sa $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ označavaćemo združenu funkciju gustine raspodele (JPDF - *Joint Probability Density Function*) slučajnih promenljivih X_1 i X_2 odnosno procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$. Funkciju raspodele (CDF - *Cumulative Distribution Function*) slučajne promenljive X odnosno procesa $X(t)$ označavaćemo sa $F_X(x)$ dok ćemo sa $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ označavati združenu funkciju raspodele (JCDF - *Joint Cumulative Distribution Function*) promenljivih X_1 i X_2 odnosno procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$. Često ćemo umesto odgovarajućih pojmova koristiti skraćenice PDF, JPDF, CDF i JCDF.

Sa $\mathbb{E}X$ označavaćemo srednju vrednost (matematičko očekivanje) slučajne promenljive X . Istu oznaku koristićemo i za slučajni proces $X(t)$. Reći ćemo da je slučajni proces $X(t)$ *Gauss-ov* ukoliko $X(t)$ ima sledeću gustinu raspodele

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Veličina m predstavlja srednju vrednost Gauss-ovog slučajnog procesa (Gauss-ove slučajne promenljive), odnosno važi $\mathbb{E}X(t) = m$. Drugi parametar σ^2 predstavlja disperziju ovog procesa, tj važi

$$\mathbb{E}[X(t) - \mathbb{E}X(t)]^2 = \mathbb{E}X^2(t) - (\mathbb{E}X(t))^2 = \sigma^2.$$

Imamo da je CDF Gauss-ovog slučajnog procesa $X(t)$ jednaka

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right],$$

gde je funkcija $\operatorname{erf}(x)$ definisana na sledeći način

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Autokorelaciona funkcija slučajnog procesa $X(t)$ definiše se kao

$$r_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}X(t_1)X(t_2).$$

Ukoliko je slučajni proces stacionaran, tada je $r_{XX}(t_1, t_2)$ funkcija samo od $\tau = t_2 - t_1$, odnosno tada se autokorelaciona funkcija posmatra u sledećem obliku

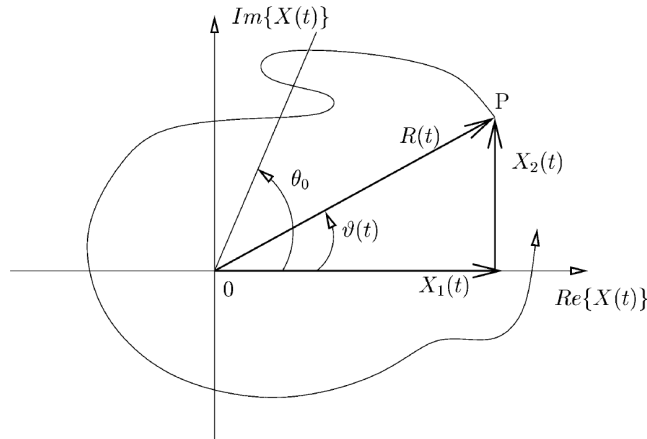
$$r_{XX}(\tau) = \mathbb{E}X(t)X(t + \tau).$$

Često ćemo u ovom radu posmatrati kompleksne predstavnike slučajnih procesa oblika $X(t) = X_1(t) + jX_2(t)$. Komponentu $X_1(t)$ nazivamo *komponentom u fazi* dok $X_2(t)$ nazivamo *komponentom u kvadraturi*. Za ovakav slučajni proces definišemo anvelopu $R(t)$ i fazu $\vartheta(t)$ pomoću sledećih izraza

$$X(t) = R(t) \exp(j\vartheta(t)), \quad R(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2}, \quad \vartheta(t) = \arctan(X_2(t)/X_1(t)). \quad (2.4)$$

Izvod po vremenu procesa faze $\dot{\vartheta}(t)$ u literaturi je poznat kao slučajni FM šum [8]. Izvod u vremenu funkcije ili slučajnog procesa $X(t)$ označavaćemo tačkom iznad simbola $\dot{X}(t)$.

Na slici 2.3 prikazana je jedna trajektorija kompleksnog slučajnog procesa $X(t)$. Može se uočiti odnos slučajnih procesa $X_1(t), X_2(t)$ sa jedne i $R(t), \vartheta(t)$ sa druge strane.



SLIKA 2.3. Trajektorija slučajnog procesa $X(t)$ u fazorskom dijagramu. Ugao θ_0 predstavlja proizvoljni nivo faze.

2.3 Rayleigh-ev model fedinga

Rayleigh-ev model kanala najčešće se koristi za modeliranje fedinga i statistike signala koji se prostire kroz radio kanal u okruženjima gde ne postoji optička vidljivost između predajnika i prijemnika. Ovaj model je pogodan za opis komunikacionih kanala u urbanim područjima, kao što su gradske oblasti sa visokim zgradama. Takodje ovaj model se uspešno primenjuje u slučaju reflektovanih i refraktovanih talasa koji se prenose kroz troposferu i jonosferu kao i u radio komunikacijama između brodova.

Signal koji se dobija na prijemu kanala sa Rayleigh-evim fedingom, u kompleksnom domenu ima sledeći oblik

$$X(t) = X_1(t) + jX_2(t),$$

gde su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ uskopojasni Gauss-ovi procesi čija je srednja vrednost nula a varijansa jednaka σ^2 . Ova dva procesa su statistički nezavisna.

Kao što ćemo pokazati u odeljku 2.5, anvelope ovog procesa $R(t) = \sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t)}$ ima Rayleigh-evu raspodelu

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.5)$$

dok je faza $\vartheta(t)$ uniformno raspodeljena.

Praktično, Rayleigh-ev feding se javlja kada se između predajnika i prijemnika nalazi veći broj objekata na kojima se signal rasejava. U tom slučaju na prijemu imamo veći broj komponenti istog signala različite amplitude i faze. Pritom imamo veći broj dominantnih talasa čije su amplitude približno jednake. Ovakav scenario se javlja u velikim gradovima naročito kada su prisutne visoke zgrade. Prilikom prostiranja signala kroz troposferu ili jonosferu, sitne čestice u ovim atmosferskim slojevima imaju ulogu rasejavača. Rasejanje signala na ovim objektima može vrlo uspešno da se modelira Rayleigh-evim fedingom.

Ukoliko postoji optička vidljivost između prijemnika i predajnika, tada je komponenta signala koja se prostire ovom linijom daleko intenzivnija od komponenti koje se dobijaju rasejanjem. U tom slučaju srednje vrednosti signala $X_i(t)$, $i = 1, 2$ više nisu jednake nuli. U ovakvoj situaciji primenjuje se Rice-ov model fedinga o kome će biti više reči u odeljku 2.6.

2.4 Nakagami- q model fedinga

Nakagami- q model kanala sa fedingom je jedan od najčešće korišćenih modela [7] za opis statistika anvelope i faze za uskopojasni mobilni kanal. Originalna namena ovog modela je opis raspodele anvelope signala snimljenog na satelitu pod uticajem jonosferske scintilacije [2]. U skorije vreme Nakagami- q model se sve češće primenjuje u mobilnim komunikacijama za analizu performansi primopredajnih sistema [16],[1]. Takodje primenjuje se za opis statistike anvelope mobilnog kanala [9],[22].

Ovaj model predstavlja generalizaciju Rayleigh-evog modela pa je samim tim pogodan za primenu u sistemima gde ne postoji optička vidljivost između prijemnika i predajnika. Zbog toga ćemo u nastavku ovog rada zajedno proučavati osobine Nakagami- q i Rayleigh-evog modela. Drugim rečima, kad god je to moguće izvodićemo izraze i zaključke vezane za Rayleigh-ev model iz odgovarajućih zaključaka i izraza dobijenih za Nakagami- q model.

Napomenimo da je Nakagami- q model konstruisao Nakagami [11] kao aproksimaciju Nakagami- m modela za vrednosti parametra m između 0.5 i 1. Nezavisno je ovaj model otkrio Hoyt u svom radu [7] i zato se on često naziva Hoyt-ovim ili Nakagami-Hoyt-ovim modelom [5].

Prilikom prenosa nemodulisanog nosioca kroz kanal sa Nakagami- q fedingom, signal na prijemu u kompleksnom domenu možemo prikazati na sledeći način

$$X(t) = X_1(t) + jX_2(t), \quad (2.6)$$

gde su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ nekorelisani uskopojasni Gauss-ovi procesi čije su varijanse redom jednake σ_1^2 i σ_2^2 . Ukoliko je $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ Nakagami- q model se svodi na Rayleigh-ev. Iako ova pretpostavka o različitosti disperzija procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ nema sasvim jasnu praktičnu podlogu (npr. ovo važi ukoliko faze ϕ_n nisu uniformno raspodeljene) ova pretpostavka povećava fleksibilnost modela i omogućava bolje poklapanje sa izmerenim vrednostima.

2.5 Statistike prvog reda za Nakagami- q i Rayleigh-ev model fedinga

Razmotrimo sada statistike prvog reda kanala sa Nakagami- q fedingom. Ove statistike je prvi put izračunao Hoyt 1947. godine u svom radu [7]. Pošto su X_1 i X_2 nekorelisani Gauss-ovi procesi imamo da je njihova združena gustina raspodele (JPDF) data sledećim izrazom

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right). \quad (2.7)$$

Združenu raspodelu anvelope i faze $p_{R\vartheta}(r, \varphi)$ možemo odrediti primenom odgovarajućih transformacionih formula Descartes-ovih koordinata u polarne koordinate

$$X_1 = R \cos \vartheta, \quad X_2 = R \sin \vartheta. \quad (2.8)$$

Ove formule su zapravo inverzne formulama (2.4). Prema tome JPDF procesa $R(t)$ i $\vartheta(t)$ dobijamo kao

$$p_{R\vartheta}(r, \varphi) = |J| \cdot p_{X_1 X_2}(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Pritom je J jakobijan uvedene transformacije (2.8) koji računamo na sledeći način

$$J = \left| \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(R, \vartheta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -R \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & R \cos \vartheta \end{vmatrix} = R$$

Zamenom dobijamo da je

$$p_{R\vartheta}(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{r^2}{4} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2}\right)\right). \quad (2.9)$$

Iz predhodnog izraza direktno dobijamo gustine raspodele i anvelope $R(t)$ i faze $\vartheta(t)$. Razmotrimo najpre fazu $\vartheta(t)$. Integracijom po r izraza (2.9) dobijamo

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \int_0^{+\infty} p_{R\vartheta}(r, \varphi) dr = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi(\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi)}. \quad (2.10)$$

Za slučaj Rayleigh-evog fedinga kada je $\sigma_1 = \sigma_2$ dobijamo da je

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \frac{1}{2\pi},$$

odnosno da je faza $\vartheta(t)$ uniformno raspodeljena. U graničnom slučaju kada $\sigma_1^2 \rightarrow 0$ dobijamo

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \frac{1}{2}(\delta(\varphi - \pi/2) + \delta(\varphi + \pi/2)), \quad (2.11)$$

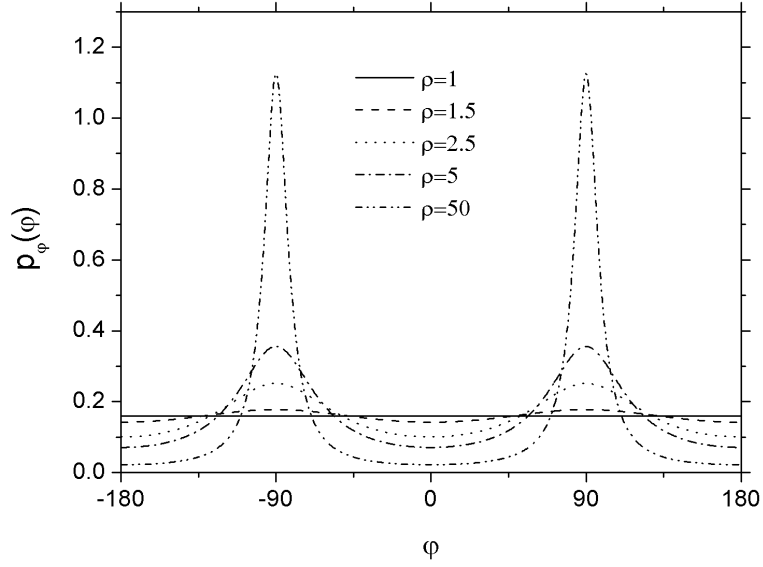
dok se u slučaju $\sigma_2^2 \rightarrow 0$ dobija

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \frac{1}{2}(\delta(\varphi) + \delta(\varphi + \pi)).$$

Utica j parametra $\rho = \sigma_2^2/\sigma_1^2$ na $p_{\vartheta}(\varphi)$ prikazan je na slici 2.4.

Sada ćemo izračunati gustinu raspodele anvelope $R(t)$. Integracijom po φ izraza (2.9) dobijamo

$$p_R(r) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{R\vartheta}(r, \varphi) d\varphi = \frac{r}{\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right) I_0\left(\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\right). \quad (2.12)$$



SLIKA 2.4. Grafik funkcije $p_\theta(\varphi)$ za različite vrednosti parametra $\rho = \sigma_2^2/\sigma_1^2$ i $\sigma_1 = 1$

Naravno predhodni izraz važi samo za $r > 0$ zato što anvelope ne može da bude negativna. Sa $I_0(\cdot)$ označili smo modifikovanu Bessel-ovu funkciju nultog reda. Napomenimo da se gustina raspodele anvelope (2.12) često izražava u sledećem obliku [17]

$$p_R(r) = \frac{(1+q^2)r}{q\Omega} \exp\left(-\frac{(1+q^2)^2 r^2}{4q^2\Omega}\right) I_0\left(\frac{(1-q^4)r^2}{4q^2\Omega}\right),$$

gde su parametri q i Ω definisani sledećim izrazima

$$\frac{(1+q^2)}{q^2\Omega} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}, \quad \frac{1-q^4}{q^2\Omega} = \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}.$$

Parametar q može imati vrednosti između 0 i 1.

Ukoliko je $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ dobijamo raspodelu anvelope za Rayleigh-ev proces

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right).$$

Da bi ispitali ponašanje funkcije $p_R(r)$ kada $\sigma_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2$ uvedimo sledeću oznaku

$$X = \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right).$$

Tada gustinu raspodele $p_R(r)$ možemo izraziti na sledeći način

$$p_R(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_1^2}\right) \sqrt{2\pi X} \exp(-X) I_0(X).$$

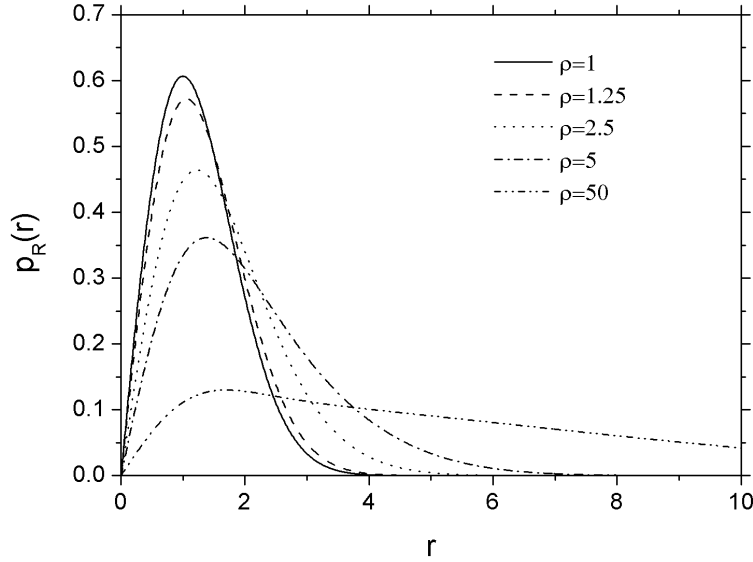
U graničnom slučaju kada $\sigma_2^2 \rightarrow 0$ imamo da $X \rightarrow +\infty$ pa prema tome dobijamo da $p_R(r)$ teži jednostranoj Gauss-ovoj funkciji raspodele

$$p_R(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_1^2}\right).$$

Sa druge strane, Nakagami- q model fedinga može da se posmatra kao aproksimacija Nakagami- m modela za $0.5 \leq m \leq 1$. Ekvivalentne vrednosti parametara m i Ω Nakagami- m modela su

$$\Omega = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}, \quad m = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2}{2(\sigma_1^4 + \sigma_2^4)}.$$

Uticaj parametra $\rho = \sigma_2^2/\sigma_1^2$ na $p_R(r)$ prikazan je na slici 2.5.



SLIKA 2.5. Grafik funkcije $p_R(r)$ za različite vrednosti parametra $\rho = \sigma_2^2/\sigma_1^2$ i $\sigma_1 = 1$.

2.6 Rice-ov model fedinga

Rice-ov model fedinga se koristi za opisivanje signala u okruženjima gde postoji optička vidljivost između predajnika i prijemnika. Komponenta signala koja se prostire duž linije optičke vidljivosti je značajno intenzivnija od komponenti koje se dobijaju rasejanjem. Ovaj model se koristi za opisivanje zemaljskih mobilnih kanala u slabo naseljenim mestima i predgradjima gradova (gde najčešće postoji linija optičke vidljivosti) kao i za opisivanje satelitskih kanala.

Podsetimo se da je primljeni signal u Clarke-ovom modelu oblika

$$E_z = X_1(t) \cos(\omega_c t) - X_2(t) \sin(\omega_c t)$$

gde su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ komponente u fazi odnosno kvadraturi koje se dobijaju superpozicijom N reflektovanih talasa različite amplitude C_n , faze ϕ_n i Doppler-ovog pomeraja ω_n . Videli smo da ukoliko su amplitude svih ovih komponenta približno jednake pogodno je primeniti Rayleigh-ev model fedinga. Sada pretpostavimo da postoji linija optičke vidljivosti duž koje se prostire nulta komponenta signala koja ima značajno veću amplitudu C_0 od ostalih komponenti. Prema tome važi

$$\begin{aligned} X_1(t) &= m_1(t) + \sum_{n=1}^N E_0 C_n \cos(\omega_n t + \phi_n), & m_1(t) &= E_0 C_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \\ X_2(t) &= m_2(t) + \sum_{n=1}^N E_0 C_n \sin(\omega_n t + \phi_n), & m_2(t) &= E_0 C_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Za fazu ϕ_0 ne može se reći da je uniformno raspodeljena slučajna promenljiva. Štaviše, vrednosti C_0, ω_0 i ϕ_0 su konstante. Procesi $X_1(t)$ i $X_2(t)$ više nemaju nultu srednju vrednost pa Rayleigh-ev model fedinga ovde ne važi.

Dalja razmatranja izvodimo pod pretpostavkom da je frekvencija nulte komponente f_0 jednaka nuli. To znači da je dolazeći direktan talas normalan na pravac kretanja prijemnika (predajnika). Pod ovom pretpostavkom dobijamo da su $m_1(t)$ i $m_2(t)$ konstante koje su respektivno jednake $E_0 C_0 \cos(\phi_0)$ i $E_0 C_0 \sin(\phi_0)$. U nastavku označavaćemo ih sa m_1 i m_2 . Iz (2.13) dobija se da su ove veličine zapravo srednje vrednosti procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$. Kao i u slučaju Rayleigh-evog fedinga, odnosno kao u odeljku 2.1 i ovde su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ Gauss-ovi slučajni procesi jednakih varijansi σ^2 .

Odredimo sada statistike prvog reda Rice-ovog modela. Polazimo od združene gustine raspodele procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$. Pošto su ovi procesi nekorelirani (odeljak 2.1) sledi da je njihova JPDF jednaka

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma^2} - \frac{(x_2 - m_2)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Da bi odredili PDF anvelope $R(t)$ i faze $\vartheta(t)$ korišćićemo transformaciju slučajnih promenljivih datu sledećim izrazima $X_1 = R \cos \vartheta$ i $X_2 = R \sin \vartheta$. Jakobijan ove transformacije je $J = R$. Zamenom dobijamo traženu JPDF

$$p_{R\vartheta}(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 - 2r(m_1 \cos \varphi + m_2 \sin \varphi) + m_1^2 + m_2^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.14)$$

Integracijom po promenljivoj φ predhodnog izraza dobijamo PDF anvelope za Rice-ov feding

$$\begin{aligned} p_R(r) &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + m_1^2 + m_2^2}{2\sigma^2}\right) \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{rm_1 \cos \varphi + rm_2 \sin \varphi}{\sigma^2}\right) d\varphi \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + m_1^2 + m_2^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

U slučaju $m_1 = m_2 = 0$ ovaj izraz se svodi na izraz (2.5) za Rayleigh-ev feding. Napomenimo da se osim predhodnog izraza za raspodelu anvelope $R(t)$ koristi i izraz u kome figuriše Rice-ov faktor K [17]. Umesto parametra σ^2 uvodi se parametar Ω_p koji predstavlja moment drugog reda procesa $R(t)$. Ova dva parametra određena su sledećim izrazima

$$K = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2\sigma^2}, \quad \Omega_p = 2\sigma^2(K + 1).$$

Zamenom dobijamo sledeći izraz za gustinu raspodele $p_R(r)$ anvelope [17]

$$p_R(r) = \frac{2r(K + 1)}{\Omega_p} \exp\left(-K - \frac{(K + 1)r^2}{\Omega_p}\right) I_0\left(2r\sqrt{\frac{K(K + 1)}{\Omega_p}}\right).$$

Napomenimo još da se Rice-ov model često naziva i Nakagami-n model [17], gde je parametar n definisan kao $n = \sqrt{K}$.

Slično, integracijom izraza (2.14) po promenljivoj r dobijamo izraz za PDF procesa faze $\vartheta(t)$.

2.7 Nakagami- m model fedinga

Rayleigh-ev i Rice-ov model fedinga najšee se koriste da bi se opisale statističke promene signala na prijemu koje se dešavaju usled različitih putanja prostiranja signala. Pored ovih modela često se koristi i Nakagami- m model zbog lake manipulacije i širokog opsega primenljivosti pri čemu ovaj model veoma dobro opisuje mobilni radio kanal. Iako je za razliku od predhodnih modela ovaj model empirijski, prilično je elegantan i u praksi se dokazao korisnim.

Anvelopa primljenog signala $R(t)$ u Nakagami- m modelu ima sledeću gustinu raspodele (PDF)

$$p_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right). \quad (2.15)$$

Parametar m se naziva *parametar fedinga* (*fading figure*) i može uzeti bilo koju vrednost u intervalu $(1/2, +\infty)$. Parametar Ω predstavlja moment drugog reda raspodele (2.15). U opštem slučaju, moment n -tog reda ove raspodele dat je pomoću

$$\mathbb{E}[R^n] = \int_0^{+\infty} r^n p_R(r) dr = \frac{\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{n/2}.$$

Odgovarajuća CDF anvelope je

$$F_R(r) = \frac{\Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right)}{\Gamma(m)},$$

gde je $\Gamma(a, b)$ nekompletna gama funkcija definisana pomoću

$$\Gamma(a, b) = \int_0^b x^{a-1} \exp(-x) dx.$$

Raspodela anvelope kod Nakagami- m modela, za različite vrednosti parametara m i Ω svodi se na Rayleigh-evu, Rice-ovu, Nakagami- q ili jednostranu Gauss-ovu raspodelu, ili je njihova veoma dobra aproksimacija. Tako za $m = 1$ relacija (2.15) postaje raspodela anvelope (2.5) kod Rayleigh-evog fedinga. Za $m = 1/2$ raspodela anvelope (2.15) postaje jednostrana Gauss-ova raspodela. Ova raspodela dobro aproksimira Rice-ovu raspodelu za sledeći izbor parametara

$$K = \frac{\sqrt{m^2 - m}}{m - \sqrt{m^2 - m}}, \quad \sigma^2 = \frac{\Omega}{2} \left(1 - \sqrt{1 - m^{-1}}\right).$$

Pokazaćemo dva pristupa za izvodjenje raspodela Nakagami- m modela. Drugi pristup je novijeg datuma i ujedno prvi koji u obzir uzima i fazu $\vartheta(t)$.

Najpre ćemo izložiti pristup iz [24]. Predpostavimo da je parametar m tako izabran da je $n = 2m$ ceo broj. Neka su dati Gauss-ovi slučajni procesi $X_{10}(t), X_{11}(t), \dots, X_{1[m]}(t), X_{21}(t), \dots, X_{2[m]}(t)$ nulte srednje vrednosti sa jednakom varijansom σ^2 . Svi ovi procesi su statistički nezavisni. Neka je $Z_0(t) = |X_{10}|$ a $Z_i(t) = \sqrt{X_{1i}^2(t) + X_{2i}^2(t)}$ za $i = 1, \dots, n$. Anvelopa $R(t)$ definiše se kao

$$R^2(t) = \begin{cases} Z_0^2(t) + \sum_{i=1}^{m-1/2} Z_i^2(t), & 2m \text{ neparno,} \\ \sum_{i=1}^m Z_i^2(t), & 2m \text{ parno.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Primetimo da je slučajni proces $Z(t) = R^2(t)$ zapravo jednak zbiru kvadrata $n = 2m$ Gauss-ovih slučajnih procesa. Prema tome, $Z(t)$ ima χ^2 gustinu raspodele sa m stepeni slobode datu sledećim izrazom

$$p_Z(z) = \frac{m^m z^{m-1}}{\Gamma(m) \Omega^m} \exp\left(-\frac{mz}{\Omega}\right).$$

Parametar Ω jednak je $\Omega = 2m\sigma^2$. Primenom transformacione formule $Z = R^2$ iz predhodnog izraza lako dobijamo izraz (2.15) za PDF anvelope $R(t)$.

Razmotrimo sada gustinu raspodele izvoda anvelope $\dot{R}(t)$. Diferenciranjem jednačine (2.16) dobijamo

$$\dot{R} = \frac{1}{R} \cdot \begin{cases} Z_0 \dot{Z}_0 + \sum_{i=1}^{m-1/2} Z_i \dot{Z}_i, & 2m \text{ neparno,} \\ \sum_{i=1}^m Z_i \dot{Z}_i, & 2m \text{ parno.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Pošto su $Z_i(t)$ za $i = 0, \dots, n$ Rayleigh-evi procesi, njihovi izvodi $\dot{Z}_i(t)$ imaju Gauss-ovu raspodelu nulte srednje vrednosti i varijanse β . Kako je linearna kombinacija Gauss-ovih slučajnih procesa takodje Gauss-ov proces, na osnovu (2.17) dobijamo da je uslovna raspodela za $\dot{R}$ pod uslovima $Z_i = z_i$ Gauss-ova. Pošto svi procesi $\dot{Z}_i$ imaju nultu srednju vrednost sledi da $\dot{R}$ takodje ima nultu srednju vrednost. Prema tome imamo da je

$$p_{\dot{R}|Z_0 \dots Z_n}(r | z_0, \dots, z_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp\left(-\frac{r^2}{2b}\right). \quad (2.18)$$

Ostaje nam da odredimo vrednost b . Iz (2.17) direktno dobijamo da je

$$b = \mathbb{E}[\dot{R}^2 | Z_0 = z_0, \dots, Z_n = z_n] = \frac{1}{r} \cdot \begin{cases} z_0^2 \mathbb{E}\dot{Z}_0^2 + \sum_{i=1}^{m-1/2} z_i^2 \mathbb{E}\dot{Z}_i^2, & 2m \text{ neparno} \\ \sum_{i=1}^m z_i^2 \mathbb{E}\dot{Z}_i^2, & 2m \text{ parno} \end{cases} = \beta.$$

Na osnovu ovog rezultata zaključujemo da uslovna verovatnoća $p_{\dot{R}|Z_0 \dots Z_n}(r | z_0, \dots, z_n)$ ne zavisi od vrednosti $z_0, \dots, z_n$. Prema tome, izraz (2.18) zapravo predstavlja traženu gustinu raspodele izvoda anvelope, odnosno važi

$$p_{\dot{R}}(\dot{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\beta}\right).$$

Štaviše iz uslova da $p_{\dot{R}|Z_0 \dots Z_n}(r | z_0, \dots, z_n)$ ne zavisi od vrednosti $z_0, \dots, z_n$ možemo zaključiti da su procesi $Z_i(t)$ i $\dot{R}(t)$ statistički nezavisni, što dalje povlači da su $R(t)$ i $\dot{R}(t)$ statistički nezavisni odnosno da važi

$$p_{R\dot{R}}(r, \dot{r}) = p_R(r)p_{\dot{R}}(\dot{r}).$$

Videli smo da ovaj uslov zadovoljavaju i Rayleigh-ev i Rice-ov model. U narednoj glavi pokazaćemo da Nakagami- q model ne zadovoljava ovaj uslov.

Nedostatak izloženog modela je to što je razmatrana samo anvelopa primljenog signala $R(t)$ a ne i faza $\vartheta(t)$. U radu [25] prvi put je izložen Nakagami- m model koji razmatra i anvelopu i fazu signala. Ovaj model je validan samo ako je m prirodan broj, odnosno $2m$ paran prirodan broj.

Predpostavimo da je prijemni signal u kompleksnom domenu oblika

$$X(t) = X_1(t) + jX_2(t)$$

gde je

$$X_i^2(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^m X_{1i}^2(t)}, \quad i = 1, 2$$

pri čemu su $X_{11}(t), \dots, X_{1m}(t), X_{21}(t), \dots, X_{2m}(t)$ za $i = 1, \dots, m$ statistički nezavisni Gauss-ovi slučajni procesi nulte srednje vrednosti i varijanse σ^2 . Na osnovu definicije možemo da zaključimo da proces $Z_i(t) = X_i^2(t)$, $i = 1, 2$ ima χ^2 raspodelu sa m stepeni slobode zadatu sledećim izrazom

$$p_{Z_i}(z) = \frac{m^{m/2} z^{m/2-1}}{\Omega^{m/2} \Gamma(m/2)} \exp\left(-\frac{mz}{\Omega}\right)$$

Primetimo da je anvelopa $R(t)$ ovako definisanog procesa $X(t)$ zapravo potpuno ista kao i anvelopa u predhodnom modelu. Razlika je u tome, što sada jasno definišemo osim anvelope $R(t)$ i fazu $\vartheta(t)$ procesa $X(t)$. Pošto su anvelope iste, ovde možemo direktno da zaključimo da je PDF $p_R(r)$ zadata izrazom (2.15). Medjutim sada ćemo izvodjenje sprovesti malo drugačije sa ciljem da pored gustine raspodele anvelope dobijemo i gustinu raspodele faze. Uvodjenjem transformacije $Z_i = X_i^2$, $i = 1, 2$ dobijamo

$$p_{X_i}(x) = \frac{m^{m/2} |x|^{m-1}}{\Omega^{m/2} \Gamma(m/2)} \exp\left(-\frac{mx^2}{\Omega}\right).$$

Parametar Ω je ponovo jednak $\Omega = 2m\sigma^2$. Pošto su procesi $X_{ij}(t)$ za $i = 1, 2$ i $j = 1, \dots, m$ statistički nezavisni dobijamo da su takvi i procesi $X_1(t)$ i $X_2(t)$ odnosno da je JPDP ovih procesa jednaka

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2).$$

Sada pristupamo računanju gustine raspodele anvelope i faze procesa $X(t)$. Združenu gustinu raspodele $p_{R\vartheta}(r, \varphi)$ možemo da odredimo iz predhodnog izraza pomoću transformacije

$$X_1 = R \cos \vartheta, \quad X_2 = R \sin \vartheta$$

Jakobijan ove transformacije je jednak $J = R$. Prema tome dobijamo da je

$$\begin{aligned} p_{R\vartheta}(r, \varphi) &= r p_{X_1 X_2}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r p_{X_1}(r \cos \varphi) p_{X_2}(r \sin \varphi) \\ &= \frac{m^m r^{2m-1} |\sin^{m-1}(2\varphi)|}{2^m \Omega^m \Gamma^2(m/2)} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right) \end{aligned}$$

Integraljenjem po r odnosno ϑ predhodnog izraza dobijamo redom gustine raspodele faze $\vartheta(t)$ odnosno anvelope $R(t)$. Za anvelopu se dobija izraz (2.15) kao što smo i očekivali dok se za fazu dobija sledeći izraz

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \frac{\Gamma(m) |\sin^{m-1}(2\varphi)|}{2^m \Gamma^2(m/2)}.$$

Na osnovu izračunatih izraza za $p_{\vartheta}(\varphi)$, $p_R(r)$ kao i $p_{R\vartheta}(r, \varphi)$ dobijamo da su faza i anvelopa kod Nakagami- m fedinga statistički nezavisni, odnosno da važi

$$p_{R\vartheta}(r, \varphi) = p_R(r) p_{\vartheta}(\varphi).$$

Ovakav rezultat imamo i u slučaju Rayleigh-evog fedinga. Napomenimo da je u slučaju $m = 1$ vrednost $p_{\vartheta}(\varphi)$ konstantna i jednaka $(2\pi)^{-1}$, što predstavlja gustinu raspodele faze kod Rayleigh-evog modela. Ovo poklapanje potvrđuje ispravnost izloženog modela.

Glava 3

Statistike drugog reda Nakagami- q signala

U ovoj glavi opisaćemo statistike drugog reda prijemnog signala na izlazu kanala sa Nakagami- q fedingom. Statistike prvog reda ovog signala izvedene su u predhodnoj glavi. Izvešćemo formule u zatvorenom obliku za srednji broj osnih preseka anvelope (LCR), faze (PLCR) kao i srednje vreme trajanja fedinga (ADF). Drugi glavni rezultat ove glave su uslovne PDF anvelope i izvoda faze za definisanu vrednost faze. Osim opšteg slučaja Nakagami- q fedinga, razmotrićemo i nekoliko specijalnih slučajeva a posebno slučaj Rayleigh-evog fedinga. Rezultati prikazani u ovoj glavi su novijeg datuma i uglavnom su publikovani u radovima [27] i [28]. Pored toga, prikaz rezultata je nešto drugačiji nego u [27] i [28]. Neki izrazi su izvedeni na drugačiji način a za neke je upotpunjeno originalno izvodjenje. Ima i nekoliko originalnih rezultata preuzetih iz naših radova [18], [19], [20].

Napomenimo da se za sve grafike u ovoj glavi podrazumevaju sledeće vrednosti parametara $\sigma_1 = 0.322351$, $\sigma_2 = 0.174608$, $\beta_1 = 1103.43$, $\beta_2 = 1091.52$. Ovi rezultati su dobijeni fitovanjem statistika prvog i drugog reda anvelope $R(t)$ za Nakagami- q model na izmerenim podacima. Meren je signal na prijemu mobilnog satelitskog kanala u prisustvu efekta senke [27].

3.1 Definicije statistika drugog reda i osnovna svojstva

U mobilnim komunikacijama primljeni signal se menja u širokom opsegu vrednosti. Zbog toga je za projektovanje digitalnih i analognih sistema potrebno poznavati statističke karakteristike signala. Već smo definisali statističke karakteristike (statistike) prvog reda. To su gustine raspodele verovatnoće anvelope i faze i autokorelaciona funkcija. Pored ovih karakteristika, potrebno je poznavati i kumulativne karakteristike kao što su srednji broj osnih preseka i srednje vreme trajanja fedinga. Ove veličine daju dodatnu informaciju koja kada se kombinuje sa drugim statističkim podacima omogućava projektantima da naprave racionalna rešenja sistema [8].

Srednji broj osnih preseka (LCR - *Level Crossing Rate*) i srednje vreme trajanja fedinga (ADF - *Average Duration of Fades*) su važne statističke karakteristike drugog reda za opisivanje kanala sa fedingom. Ove veličine su korisne u projektovanju mobilnih radio komunikacionih sistema i za analizu performansi istih. U digitalnim telekomunikacijama nagli pad vrednosti anvelope primljenog signala direktno vodi do drastičnog povećanja verovatnoće greške. Za optimizaciju sistema kodovanja koji su potrebni za korekciju grešaka nije važno samo koliko puta primljeni signal prolazi kroz dati nivo

u jedinici vremena već i koliko dugo je u proseku taj signal ispod zadanog nivoa. Srednji broj osnih preseka i srednje vreme trajanja fedinga su upravo odgovarajuće mere usko povezane sa kvalitetom primljenog signala [13].

Stoga za razna pitanja sistem inženjeringa kao što su

- izbor dužine bloka za kodovanje paketskih sistema,
- projektovanje metoda kodovanja sa konkatenacijom sa i bez interlivinga,
- optimizacija veličine interlivera,
- izbor kapaciteta bafera za šeme adaptivne modulacije i procena komunikacionih protokola,

potrebno je poznavati LCR i ADF. Tehnike izračunavanja statistika drugog reda naročito se primenjuju kod diverziti sistema koji su se pokazali kao veoma korisni za smanjivanje uticaja fedinga.

Srednji broj osnih preseka signala $X(t)$, u oznaci $N_X^+(x)$ definiše se kao brzina kojom signal preseca nivo x sa pozitivnim izvodom u tački preseka x . Za izračunavanje LCR potrebno je znati CDF $p_{X\dot{X}}(x, \dot{x})$ procesa $X(t)$ i $\dot{X}(t)$.

Očekivano vreme za koje vrednost signala pripada intervalu $(x, x + dx)$, za dati nagib $\dot{x}$ i vreme dt jednako je $p(x, \dot{x})dx d\dot{x} dt$. Potrebno vreme za jedan prelazak nivoa x za dati nagib $\dot{x}$ u intervalu $(x, x + dx)$ je $dx/\dot{x}$. Odnos ove dve veličine daje očekivani broj prelazaka nivoa x , signala X za dati nagib $\dot{x}$ i vreme dt

$$\dot{x} p_{X\dot{X}}(x, \dot{x}) d\dot{x} dt.$$

Prema tome, ukupan očekivan broj preseka nivoa x u jedinici vremena dat je sledećim izrazom

$$N_X^+(x) = \int_0^{+\infty} \dot{x} p_{X\dot{X}}(x, \dot{x}) d\dot{x}. \quad (3.1)$$

Srednje vreme trajanja fedinga, u oznaci $T_{X-}(x)$ je takodje važna statistička karakteristika drugog reda i predstavlja srednje vreme za koje se anvelopa signala nalazi ispod zadanog nivoa x . Neka je duži vremenski interval u kome se posmatra anvelopa T i neka je t_i trajanje i -tog boravka signala ispod nivoa x . Tada je verovatnoća da je nivo signala $X(t)$ manji od nivoa x

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X(t) \leq x] = \frac{1}{T} \sum_i t_i.$$

Srednje vreme trajanja fedinga je

$$T_{X-}(x) = \frac{1}{TN_X^+(x)} \cdot \sum_i t_i = \frac{F_X(x)}{N_X^+(x)}.$$

Ove veličine su takodje značajne i za izbor bitske brzine prenosa, dužine reči i kodnih šema u digitalnim radio sistemima. Takodje su neophodne za procenu performansi sistema [21].

3.2 JPDF faze i slučajnog FM šuma kod Nakagami- q fedinga

Da bi izveli izraz za gustinu raspodele verovatnoće FM šuma kao i srednji broj osnih preseka faze $\vartheta(t)$ potrebna nam je združena gustina raspodele verovatnoće procesa $R(t), \dot{R}(t), \vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)$ u oznaci

$p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$. Ova JPDF može da se izračuna iz JPDF procesa $X_1(t), \dot{X}_1(t), X_2(t), \dot{X}_2(t)$ primenom odgovarajuće transformacije Descartes-ovih koordinata (x_1, x_2) u polarne koordinate (r, φ) . Transformacione izraze dobijamo na uobičajen način

$$\begin{aligned} X_1 &= R \cos \vartheta, \\ \dot{X}_1 &= \dot{R} \cos \vartheta - R \dot{\vartheta} \sin \vartheta, \\ X_2 &= R \sin \vartheta, \\ \dot{X}_2 &= \dot{R} \sin \vartheta + R \dot{\vartheta} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Imamo da je Jakobijan ove transformacije jednak

$$J = \left| \frac{\partial(X_1, \dot{X}_1, X_2, \dot{X}_2)}{\partial(R, \dot{R}, \vartheta, \dot{\vartheta})} \right| = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & 0 & -R \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & R \cos \vartheta & 0 \\ -\dot{\vartheta} \sin \vartheta & \cos \vartheta & -\dot{R} \sin \vartheta + R \dot{\vartheta} \cos \vartheta & -R \sin \vartheta \\ -\dot{\vartheta} \cos \vartheta & \sin \vartheta & \dot{R} \sin \vartheta + R \dot{\vartheta} \sin \vartheta & R \cos \vartheta \end{vmatrix} = R^2.$$

Prema tome imamo da je tražena JPDF procesa $R(t), \dot{R}(t), \vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)$ jednaka

$$p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = r^2 p_{X_1\dot{X}_1X_2\dot{X}_2}(r \cos \varphi, \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, r \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi). \quad (3.3)$$

Za simetričnu Doppler-ovu spektralnu gustinu snage (*PSD - Power Spectral Density*) gde su procesi $X_1(t), X_2(t), \dot{X}_1(t)$ i $\dot{X}_2(t)$ Gauss-ovi, i u parovima nekorelirani, važi da je

$$p_{X_1\dot{X}_1X_2\dot{X}_2}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{1}{4\pi^2 \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \beta_2}} \exp \left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} - \frac{\dot{x}_1^2}{2\beta_1} - \frac{\dot{x}_2^2}{2\beta_2} \right) \quad (3.4)$$

Zamenom predhodnog izraza u (3.3) dobijamo traženu JPDF

$$\begin{aligned} p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) &= \frac{r^2}{4\pi^2 \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \beta_2}} \exp \left\{ -r^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{2\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2} \right) - \dot{r}^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{2\beta_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\beta_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \dot{r}^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{2\beta_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\beta_1} \right) - r \dot{r} \dot{\varphi} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1} \right) \sin \varphi \cos \varphi \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Poslednji izraz važi ako je $0 \leq r < +\infty$, $-\infty < \dot{r}, \dot{\varphi} < +\infty$ i $-\pi \leq \varphi < \pi$. Varijanse β_i procesa $\dot{X}_i(t)$ ($i = 1, 2$) mogu se odrediti kao $\beta_i = -\ddot{r}_{X_i X_i}(0)$, odnosno predstavljaju negativnu krivinu autokorelacione funkcije $r_{X_i X_i}(\tau)$ u tački $\tau = 0$. Za klasičnu Jakes Doppler-ovu spektralnu gustinu snage vrednost β_i može da se predstavi kao $\beta_i = 2(\pi \sigma_i f_{max_i})$ gde je f_{max_i} maksimalna Doppler-ova frekvencija procesa $X_i(t)$. Iako činjenica da procesi $X_1(t)$ i $X_2(t)$ imaju različite maksimalne Doppler-ove frekvencije nema odgovarajuću fizičku interpretaciju, ona omogućava veću fleksibilnost modela i poboljšava slaganje sa eksperimentalnim rezultatima [22].

Združenu funkciju gustine raspodele procesa $\vartheta(t)$ i $\dot{\vartheta}(t)$ možemo odrediti integracijom izraza (3.5) po promenljivama $\dot{r}$ i r . Drugim rečima potrebno je naći integral

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) d\dot{r} dr.$$

Najpre ćemo izračunati integral po promenljivoj $\dot{r}$ a zatim po r . Primetimo da se funkcija gustine raspodele $p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$ može zapisati na sledeći način kao funkcija argumenta $\dot{r}$

$$p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = M_1 \exp(-a_1 \dot{r}^2 + b_1 \dot{r} + c_1), \quad (3.6)$$

gde su M_1, a_1, b_1 i c_1 odgovarajući parametri. Integraljenjem predhodnog izraza po promenljivoj r i zamenom vrednosti parametara dobijamo

$$p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{r^2 \exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} \right) \right\}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}}. \quad (3.7)$$

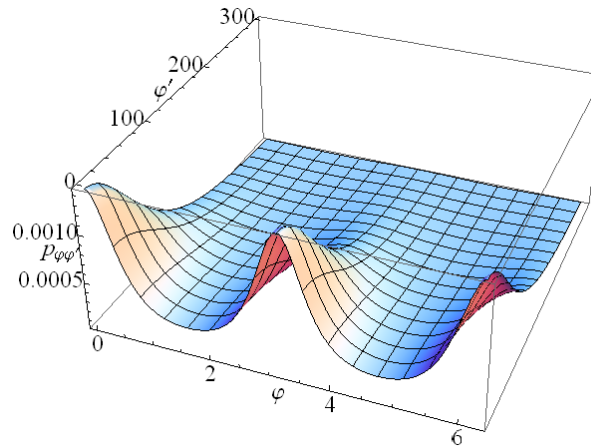
Sledeći korak je integracija po promenljivoj r . Funkciju gustine raspodele $p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi})$ možemo zapisati u obliku

$$p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) = M_2 r^2 \exp(-a_2 r^2)$$

gde su takodje M_2 i a_2 parametri koji se dobijaju na osnovu izraza (3.7). Integraljenjem predhodnog izraza po r konačno dobijamo JPDP $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$ procesa $\vartheta(t)$ i $\dot{\vartheta}(t)$ u zatvorenoj formi

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right)^{-3/2}}{4\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}}. \quad (3.8)$$

Na slici 3.1 prikazan je 3D grafik funkcije $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$. Grafik je dat samo za pozitivne vrednosti $\dot{\varphi}$ pošto je funkcija $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$ parna po $\dot{\varphi}$.



SLIKA 3.1. 3D grafik funkcije združene gustine raspodele (JPDP) faze $\vartheta(t)$ i izvoda $\dot{\vartheta}(t)$, $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$.

U predhodnom odeljku smo videli da se u slučaju $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ i $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ Nakagami- q fedinga svodi na Rayleigh-ev feding. Zamenom u izraz (3.8) dobijamo JPDP procesa $\vartheta(t)$ i $\dot{\vartheta}(t)$ za slučaj kanala sa Rayleigh-evim fedingom

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta} + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-3/2}}{4\pi \sigma^2 \sqrt{\beta}}. \quad (3.9)$$

Primitimo da ova verovatnoća ne zavisi od faze φ procesa već samo od izvoda $\dot{\varphi}$. Trivijalno, integraljenjem izraza (3.9) po promenljivoj φ (u granicama od 0 do 2π) dobijamo PDF izvoda faze $p_{\dot{\vartheta}}(\varphi)$, odnosno slučajnog FM šuma

$$p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi}) = \frac{\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta} + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-3/2}}{2\sigma^2 \sqrt{\beta}}. \quad (3.10)$$

Integraljenjem po promenljivoj $\dot{\varphi}$ predhodnog izraza lako se dobija odgovarajuća CDF $F_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi})$ slučajnog FM šuma

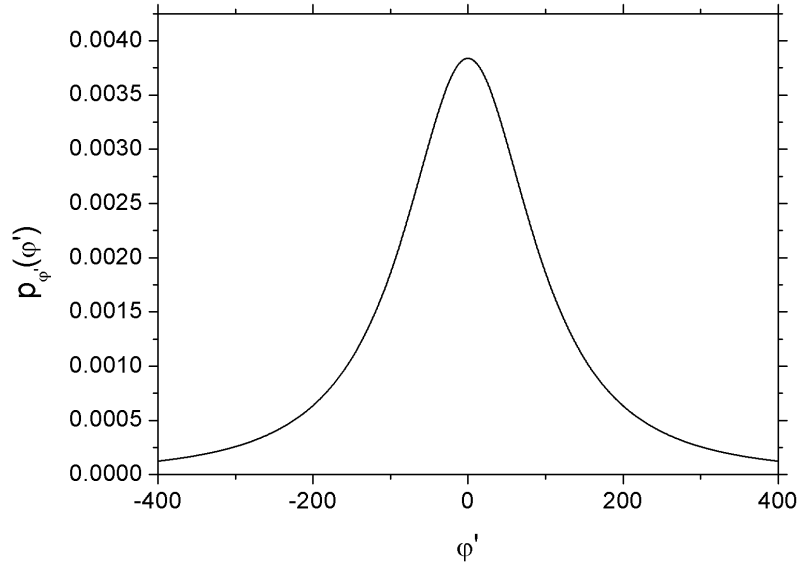
$$F_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma \dot{\varphi}}{\sqrt{\beta + \sigma^2 \dot{\varphi}^2}} \right). \quad (3.11)$$

Napomenimo još jednom da izrazi (3.10) i (3.11) važe samo za slučaj Rayleigh-evog fedinga. Analogno možemo naći PDF izvoda faze $p_{\dot{\varphi}}(\varphi)$ za slučaj Nakagami- q fedinga, integracijom izraza (3.8) po promenljivoj φ . Nažalost ovaj integral nije moguće naći u zatvorenom obliku.

I pored ove poteškoće, možemo izvesti neke generalne zaključke vezane za proces $\dot{\varphi}(t)$. Posmatrajmo srednju vrednost (matematičko očekivanje) ovog procesa $\mathbb{E}\vartheta(t)$. Iz izraza (3.8) sledi da je $p_{\vartheta\dot{\varphi}}(\varphi, \dot{\varphi})$ parna funkcija po promenljivoj $\dot{\varphi}$. Pošto je

$$p_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi}) = \int_0^{2\pi} p_{\vartheta\dot{\varphi}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\varphi,$$

možemo zaključiti da je i $p_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi})$ parna funkcija po $\dot{\varphi}$. Iz ovoga direktno sledi da je $\mathbb{E}\vartheta(t) = 0$. Naravno, predhodno je potrebno pokazati da $\mathbb{E}\vartheta(t)$ postoji, tj da odgovarajući integral konvergira u granicama od $-\infty$ do $+\infty$. Na slici 3.2 prikazan je grafik funkcije $p_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi})$ za slučaj Nakagami- q fedinga.



SLIKA 3.2. Grafik funkcije gustine raspodele $p_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi})$ izvoda faze $\dot{\vartheta}(t)$.

Odredimo sada varijansu izvoda faze. Pošto je $\mathbb{E}\dot{\varphi}(t) = 0$, varijansa procesa $\dot{\varphi}(t)$ jednaka je momentu drugog reda

$$\mathbb{E}(\dot{\vartheta}^2(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi}^2 p_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi}) d\dot{\varphi}.$$

Pošto je $p_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi})$ parna funkcija po $\dot{\varphi}$, predhodni integral možemo dobiti kao dvostruku vrednost integrala u granicama od 0 do $+\infty$. Može se pokazati da je vrednost ovog integrala jednaka $+\infty$. Takodje važi da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi}^2 p_{\vartheta\dot{\varphi}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} = +\infty,$$

za svako $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Na osnovu predhodnog razmatranja zaključujemo da varijansa FM šuma nije pogodna za opisivanje stepena rasipanja vrednosti ovog procesa oko srednje vrednosti $\mathbb{E}\dot{\vartheta}(t) = 0$. Kao alternativnu meru možemo koristiti vrednost $\mathbb{E}|\dot{\vartheta}(t)|$. Ovakav pristup koristio je Rice [14] u svojoj analizi FM šuma kod kanala sa Rice-ovim fedingom. Imamo da važi sledeći izraz

$$\mathbb{E}|\dot{\vartheta}(t)| = 2 \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi}) d\dot{\varphi} = 2 \int_0^{2\pi} N_{\vartheta}^+(\varphi) d\varphi \quad (3.12)$$

Sa $N_{\vartheta}^+(\varphi)$ označen je srednji broj osnih preseka faze (PLCR) $\vartheta(t)$. U sledećem odeljku pokazaćemo da je

$$N_{\vartheta}^+(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (3.13)$$

Iz izraza (3.12) očigledno sledi da je $\mathbb{E}|\dot{\vartheta}(t)|$ konačno. Medjutim u opštem slučaju Nakagami- q fedinga, integral u izrazu (3.12) ne može da se odredi u zatvorenoj formi. Nasuprot ovome, u slučaju Rayleigh-evog fedinga, odnosno kada važi da je $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ i $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, integral je rešiv i imamo da važi

$$\mathbb{E}|\dot{\vartheta}(t)| = \frac{\sqrt{\beta}}{\sigma}.$$

Na kraju ovog odeljka napomenimo još da je $\mathbb{E}|\dot{\vartheta}(t)|$ zapravo srednja vrednost broja osnih preseka procesa $\vartheta(t)$ usrednjena po svim nivoima $\varphi \in (0, 2\pi)$.

3.3 Srednji broj osnih preseka faze kod Nakagami- q fedinga

Srednji broj osnih preseka faze $\vartheta(t)$ (PLCR) u oznaci $N_{\vartheta}^+(\varphi)$ je očekivan broj prolazaka signala, u jedinici vremena, kroz zadati nivo φ u pozitivnom (ili negativnom) smeru. Izraz po kome se računa PLCR je

$$N_{\vartheta}^+(\varphi) = \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}. \quad (3.14)$$

U slučaju Nakagami- q fedinga ova JPDP je određena izrazom (3.8). Zamenom u definicioni izraz (3.14) dobijamo

$$N_{\vartheta}^+(\varphi) = \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} \frac{\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right)^{-3/2}}{4\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}} d\dot{\varphi}.$$

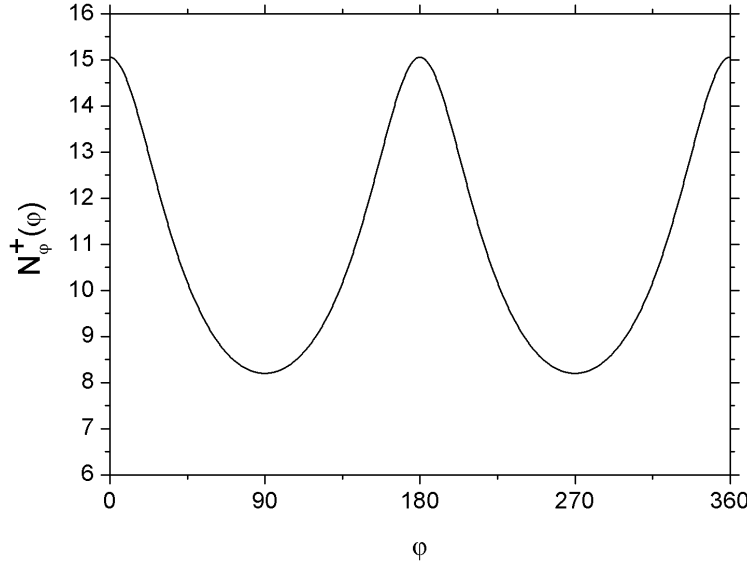
Izračunavanjem predhodnog integrala u zatvorenom obliku (detalji ovog izračunavanja dati su u dodatku) dobijamo sledeći izraz za srednji broj osnih preseka faze u slučaju Nakagami- q fedinga

$$N_{\vartheta}^+(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (3.15)$$

Na slici 3.3 prikazan je grafik srednjeg broja osnih preseka faze $N_{\vartheta}^+(\varphi)$ za Nakagami- q feding. U slučaju Rayleigh-evog fedinga ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$ i $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$), predhodni izraz se umnogome uprošćava i ima oblik

$$N_{\vartheta}^+(\varphi) = \frac{\gamma}{4\pi}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\beta}}{\sigma}. \quad (3.16)$$

Veličina γ je takozvani *poluprečnik žiracije* (*radius of gyration*) Doppler-ove spektralne gustine snage

SLIKA 3.3. Grafik funkcije srednjeg broja osnih preseka faze (PLCR) $N_\vartheta^+(\varphi)$.

procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$. Pošto je u ovom slučaju faza $\varphi(t)$ uniformno raspodeljena imamo da je srednji broj osnih preseka $N_\vartheta^+(\varphi)$ konstantan, tj nezavisan od nivoa φ .

Primetimo da se u slučaju Nakagami- q fedinga za vrednosti nivoa faze $\varphi = 0$ kao i $\varphi = \pi$ izraz (3.15) takodje svodi na (3.16). U tom slučaju je

$$N_\vartheta^+(0) = N_\vartheta^+(\pi) = \frac{\gamma_2}{4\pi}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sigma_2}.$$

Analogno smo sa γ_2 označili poluprečnik žiracije Doppler-ove spektralne gustine snage procesa $X_2(t)$. Jednakost $N_\vartheta^+(0) = N_\vartheta^+(\pi)$ može se objasniti na osnovu fazorskog dijagrama na slici 2.3. Možemo uočiti da faza preseca nivo $\varphi = 0$ u pozitivnom smeru ukoliko je $X_1(t) > 0$ a $X_2(t)$ preseca x osu (odnosno nivo 0). Analogni zaključak važi i za nivo faze $\varphi = \pi$ pri čemu je sad $X_1(t) < 0$. Pošto su procesi $X_1(t)$ i $X_2(t)$ nezavisni i pošto su verovatnoće događaja $X_1(t) < 0$ i $X_1(t) > 0$ međusobno jednake ($X_1(t)$ je Gauss-ov proces) direktno zaključujemo da je jednakost $N_\vartheta^+(0) = N_\vartheta^+(\pi)$ zadovoljena. Napomenimo još da je $N_\vartheta^+(\varphi)$ srednji broj okretanja faze za 2π u pozitivnom smeru detektora faze ukoliko on na izlazu daje fazu u intervalu $(-\pi, \pi)$. Prema tome to je ujedno i broj pozitivnih spajkova koji nastaju na izlazu detektora faze.

Analogno se za nivoe $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ izraz (3.15) svodi na (3.16) pri čemu je sada

$$N_\vartheta^+(\pi/2) = N_\vartheta^+(3\pi/2) = \frac{\gamma_1}{4\pi}, \quad \gamma_1 = \frac{\sqrt{\beta_1}}{\sigma_1}.$$

Ovaj rezultat se takodje može objasniti pomoću fazorskog dijagrama na slici 2.3.

Podsetimo se da za klasičnu Jakes Dopplerovu spektralnu gustinu snage vrednosti β_i možemo predstaviti kao $\beta_i = 2\pi^2\sigma_i^2 f_{max_i}^2$ gde je f_{max_i} maksimalna Doppler-ova frekvencija procesa $X_i(t)$ (za $i = 1, 2$). Predpostavimo da je $f_{max_1} = f_{max_2} = f_{max}$. Zamenom u izraz (3.15) dobijamo da je

$$N_\vartheta^+(\varphi) = \frac{\gamma}{4\pi} = \frac{f_{max}}{2\sqrt{2}}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$$

odnosno da srednji broj osnih preseka zavisi isključivo od maksimalne Doppler-ove frekvencije procesa f_{max} kao i da je jednak odgovarajućem izrazu za Rayleigh-ev feding. Prema tome, pretpostavka da procesi $X_1(t)$ i $X_2(t)$ imaju različite Doppler-ove frekvencije drastično uopštava model i omogućava bolje uklapanje sa izmerenim vrednostima [22].

3.4 Uslovne gustine raspodele anvelope i izvoda faze

U ovom odeljku izvešćemo izraze za uslovne gustine raspodele anvelope $R(t)$ i izvoda faze $\dot{\vartheta}(t)$ (FM šuma) pod uslovom $\vartheta(t) = \varphi$, gde je φ proizvoljni nivo faze. Ove uslovne raspodele omogućavaju opisivanje statistika anvelope i FM šuma u vremenskim trenucima kada je $\vartheta(t) = \varphi$, kao što je to prikazano na slici 2.3. One su izvedene u radovima [6, 26] za potrebe proučavanja statistike FM klik šuma koji nastaje u FM prijemnicima [15]. Označimo sa $F_{R\dot{\vartheta}|\varphi+}(r, \dot{\varphi})$ i $p_{R\dot{\vartheta}|\varphi+}(r, \dot{\varphi})$ redom uslovne JCDF i JPDF procesa $R(t)$ i $\dot{\vartheta}(t)$.

Najpre ćemo dati izraz za računanje uslovne JCDF $F_{R\dot{\vartheta}|\varphi+}(r, \dot{\varphi})$ a zatim na osnovu ovog izraza izvešćemo uslovne gustine raspodela. Veličina $F_{R\dot{\vartheta}|\varphi+}(r, \varphi)$ zapravo predstavlja uslovnu verovatnoću događaja $\{R(t) \leq r, \dot{\vartheta}(t) \leq \dot{\varphi}\}$ pod uslovom da $\vartheta(t)$ preseca nivo φ u pozitivnom smeru u vremenu dt . Prema tome, važi sledeći izraz

$$\begin{aligned} F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(r_0, \dot{\varphi}_0) &= \frac{\mathbb{P}[R(t) \leq r_0, \dot{\vartheta}(t) \leq \dot{\varphi}_0, \vartheta(t) \text{ seče nivo } \varphi_0 \text{ u pozitivnom smeru u vremenu } dt]}{\mathbb{P}[\vartheta(t) \text{ seče nivo } \varphi_0 \text{ u pozitivnom smeru u vremenu } dt]} \\ &= \frac{\int_0^{r_0} \int_0^{\dot{\varphi}_0} \dot{\varphi} p_{R\dot{\vartheta}}(r, \varphi_0, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} dr}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)} \end{aligned}$$

Uvedimo sledeće oznake

$$\begin{aligned} I(r, \varphi; \dot{\varphi}_0) &= \int_0^{\dot{\varphi}_0} \dot{\varphi} p_{R\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}, \\ I(r, \varphi) &= I(r, \varphi; +\infty). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sada možemo uslovne PDF za $R(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$ kao i uslovnu JPDF ova dva procesa izraziti na sledeći način

$$\begin{aligned} p_{R|\varphi_0+}(r_0) &= \frac{d}{dr_0} F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(r_0, +\infty) = \frac{I(r_0, \varphi_0)}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)}, \\ p_{\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(\dot{\varphi}_0) &= \frac{d}{d\dot{\varphi}_0} F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(+\infty, \dot{\varphi}_0) = \frac{\dot{\varphi}_0 p_{\dot{\vartheta}}(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)}, \\ p_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(r_0, \dot{\varphi}_0) &= \frac{d}{dr_0} F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(r_0, \dot{\varphi}_0) = \frac{I(r_0, \varphi_0; \dot{\varphi}_0)}{N_{\vartheta}^+(\varphi)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Najpre ćemo odrediti izraze za $I(r, \varphi; \dot{\varphi}_0)$ i $I(r, \varphi)$ u zatvorenom obliku. Zamenom iz relacije (3.7) dobijamo

$$I(r, \varphi; \dot{\varphi}_0) = \frac{r^2 \exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right\}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}} \int_0^{\dot{\varphi}_0} \dot{\varphi} \exp \left(-\frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} \right) d\dot{\varphi}.$$

Rešavanjem integrala i sredjivanjem predhodnog izraza imamo

$$I(r, \varphi; \dot{\varphi}_0) = \frac{\exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right\} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{r^2 \dot{\varphi}_0^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} \right) \right\} \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}}{2(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2}. \quad (3.19)$$

Ako u predhodnom izrazu zamenimo $\dot{\varphi}_0 = +\infty$ dobijamo sledeći izraz za $I(r, \varphi)$ u zatvorenom obliku

$$I(r, \varphi) = \frac{\exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right\} \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2}. \quad (3.20)$$

Na osnovu relacija (3.18) kao i (3.19), (3.20) i (3.8) sada možemo odrediti tražene uslovne raspodele. Sredjivanjem dobijamo

$$p_{R|\varphi+}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right)} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right\}. \quad (3.21)$$

Možemo da zaključimo da je $p_{R|\varphi+}(r)$ jednostrana Gauss-ova gustina raspodele pri čemu su srednja vrednost m a varijansa σ^2 redom jednaki

$$m = 0, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}.$$

Analogno dobijamo i preostale dve uslovne PDF. Tako je uslovna gustina raspodele izvoda faze jednaka

$$p_{\dot{\varphi}|\varphi+}(\dot{\varphi}) = \frac{\dot{\varphi} \sqrt{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}}{2\sigma_1 \sigma_2 (\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi)} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right)^{-3/2}, \quad (3.22)$$

dok je združena uslovna gustina raspodele anvelope i izvoda faze jednaka

$$p_{R\dot{\varphi}|\varphi+}(r, \dot{\varphi}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right)} \exp \left(-\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right) \times \left[1 - \exp \left(-\frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Na slikama 3.4 i 3.5 prikazani su grafici uslovnih gustina anvelope $p_{R|\varphi+}(r)$ i faze $p_{\dot{\varphi}|\varphi+}(\dot{\varphi})$ za različite nivoe faze i Nakagami-q feding.

Kao što se moglo i očekivati, u specijalnim slučajevima kada je $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ uslovna PDF $p_{R|\varphi+}(r)$ svodi se na jednodimenzionu Gauss-ovu PDF definisanu sledećim izrazima

$$p_{R|0+}(r) = p_{R|\pi+}(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left(-\frac{r^2}{2\sigma_1^2} \right),$$

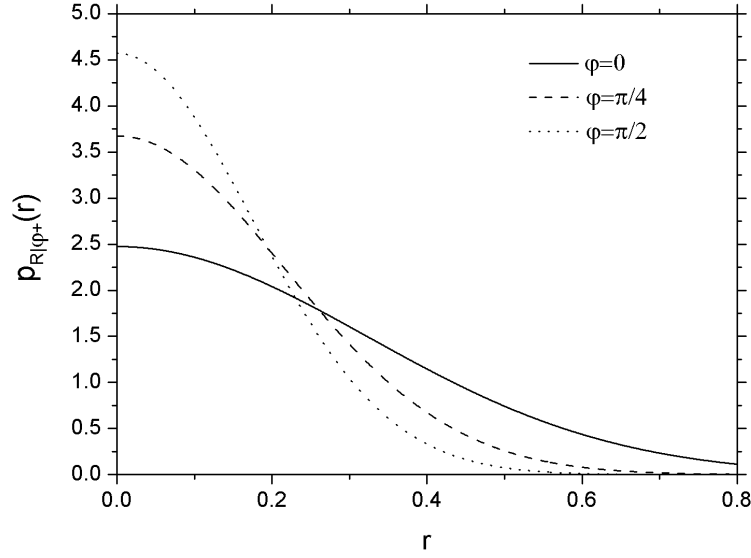
$$p_{R|\pi/2+}(r) = p_{R|3\pi/2+}(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left(-\frac{r^2}{2\sigma_2^2} \right).$$

Analogno dobijamo da je u specijalnim slučajevima $\varphi = 0, \varphi = \pi$ kao i $\varphi = \pi/2, \varphi = 3\pi/2$ gustina raspodele $p_{\dot{\varphi}|\varphi+}(\dot{\varphi})$ jednaka

$$p_{\dot{\varphi}|0+}(\dot{\varphi}) = p_{\dot{\varphi}|\pi+}(\dot{\varphi}) = \frac{\dot{\varphi}}{\sigma_1 \beta_2} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_2} + \frac{1}{\sigma_1^2} \right)^{-3/2}$$

$$p_{\dot{\varphi}|\pi/2+}(\dot{\varphi}) = p_{\dot{\varphi}|3\pi/2+}(\dot{\varphi}) = \frac{\dot{\varphi}}{\sigma_2 \beta_1} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_1} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right)^{-3/2}$$

Primećujemo da je za $\varphi = 0, \pi$ uslovna gustina raspodele izvoda faze nezavisna od σ_1 i β_2 dok je za $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ nezavisna od σ_2 i β_1 . Drugim rečima, maksimalna Doppler-ova frekvencija f_{max1} nema nikakvog uticaja na $p_{\dot{\varphi}|0+}(\dot{\varphi})$ i $p_{\dot{\varphi}|\pi+}(\dot{\varphi})$ dok f_{max2} nema uticaja na $p_{\dot{\varphi}|\pi/2+}(\dot{\varphi})$ i $p_{\dot{\varphi}|3\pi/2+}(\dot{\varphi})$.



SLIKA 3.4. Grafik uslovne gustine raspodele anvelope $p_{R|\varphi+}(r)$ za nivoe faze $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2$.

3.5 JPDF anvelope i izvoda

U ovom odeljku razmotrićemo statistike drugog reda anvelope $R(t)$ za kanal sa Nakagami- q fedin-
gom. Da bi odredili LCR i ADF potrebno je naći združenu gustinu raspodele $p_{R\dot{R}}(r, \dot{r})$ slučajnih
procesa $R(t)$ i $\dot{R}(t)$. Kao i u slučaju faze i njenog izvoda, krećemo od JPDF $p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$
procesa $R(t), \dot{R}(t), \vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)$ koja je već izračunata (izraz (3.5)). Najpre određujemo JPDF procesa
 $R(t), \dot{R}(t), \vartheta(t)$ rešavanjem sledećeg integrala

$$p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}. \quad (3.24)$$

Primetimo da je $p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$ kao funkcija promenljive $\dot{\varphi}$ sledećeg oblika

$$p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = M \exp(-a\dot{\varphi}^2 + b\dot{\varphi} + c),$$

gde su M, a, b i c odgovarajući parametri. Iz ovoga možemo zaključiti da se integral u izrazu (3.24)
može rešiti u zatvorenom obliku i važi

$$p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) = \frac{r \exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) - \frac{\dot{r}^2}{2(\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi)} \right\}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}}. \quad (3.25)$$

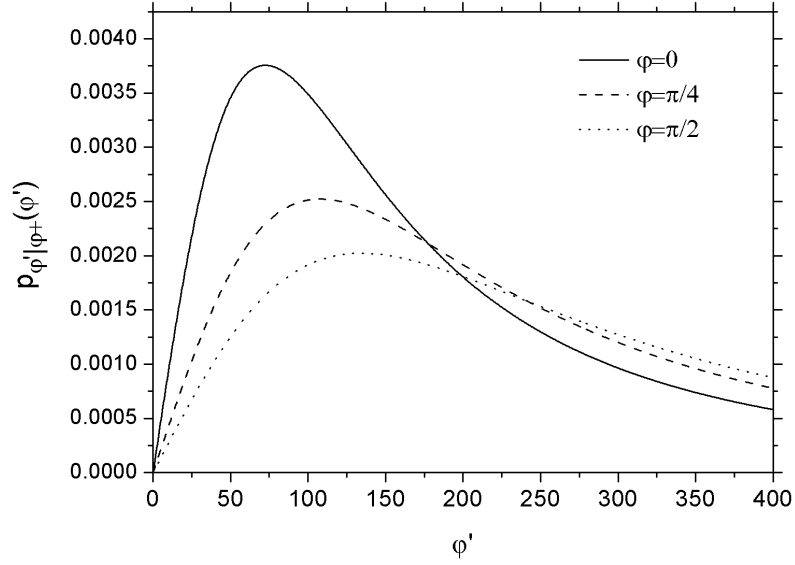
Sledeći korak je integracija izraza (3.25) po promenljivoj φ , odnosno potrebno je naći sledeći integral

$$p_{R\dot{R}}(r, \dot{r}) = \int_0^{2\pi} p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) d\varphi. \quad (3.26)$$

Dobijeni integral nije moguće odrediti u zatvorenom obliku.

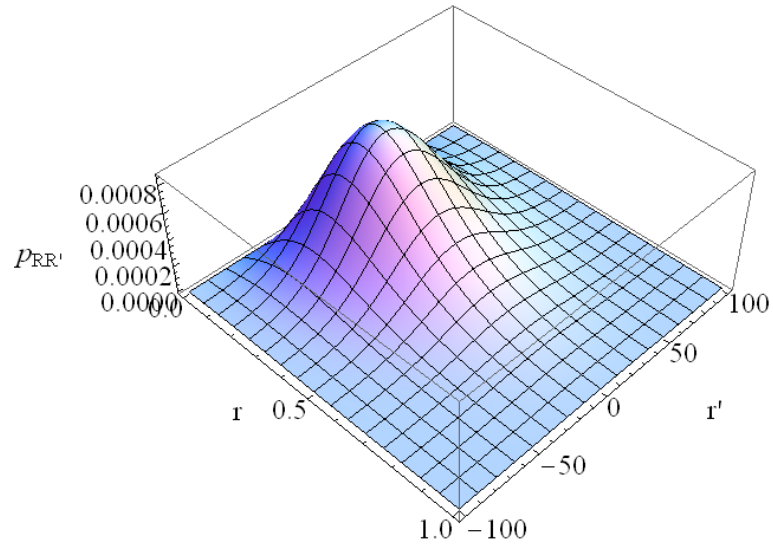
U slučaju Rayleigh-evog fedinga ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$ i $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ gustina raspodele $p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi)$ ne
zavisi od φ , pa integral u izrazu (3.26) trivijalno rešavamo i dobijamo

$$p_{R\dot{R}}(r, \dot{r}) = \frac{r \exp \left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{\dot{r}^2}{2\beta} \right)}{\sqrt{2\pi}\sigma^2\sqrt{\beta}}.$$



SLIKA 3.5. Grafik uslovne gustine raspodele izvoda faze $p_{\dot{\varphi}|\varphi^+}(\varphi')$ za nivoe faze $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2$.

Analitički izraz za $p_{R\dot{R}}(r, \dot{r})$ moguće je dobiti u još nekim specijalnim slučajevima a mogu se odrediti i aproksimativni izrazi. Ove slučajeve razmatraćemo u narednog glavi. Na slici 3.6 je prikazan 3D grafik funkcije $p_{R\dot{R}}(r, \dot{r})$ za Nakagami-q feding.



SLIKA 3.6. 3D grafik funkcije $p_{R\dot{R}}(r, \dot{r})$.

Odredimo sada gustinu raspodele $p_{\dot{R}}(\dot{r})$ izvoda anvelope $\dot{R}(t)$. Ova gustina može da se dobije integraljenjem izraza (3.26), odnosno (3.25) po promenljivoj r . Imamo da je

$$p_{\dot{R}}(\dot{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_1 \sigma_2 \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2(\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi)}\right)}{(2\pi)^{3/2} (\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}} d\varphi. \quad (3.27)$$

Kada je u pitanju Rayleigh-ev feding, predhodni integral se takodje trivijalno rešava i dobija se sledeći

izraz

$$p_{\dot{R}}(\dot{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\beta}\right)$$

Vidimo da je u pitanju Gauss-ova raspodela čija je srednja vrednost jednaka 0 dok je varijansa jednaka β .

Možemo primetiti da u opštem slučaju Nakagami- q fedinga ne važi $p_{R\dot{R}}(r, \dot{r}) \neq p_R(r)p_{\dot{R}}(\dot{r})$ odnosno da procesi $R(t)$ i $\dot{R}(t)$ nisu statistički nezavisni. Nasuprot ovome ukoliko je Rayleigh-ev feding u pitanju, jednakost $p_{R\dot{R}}(r, \dot{r}) = p_R(r)p_{\dot{R}}(\dot{r})$ očigledno važi. Može se pokazati da su $R(t)$ i $\dot{R}(t)$ nezavisni i u slučajevima Nakagami- m i Rice-ovog fedinga. U oba ova slučaja raspodela $p_{\dot{R}}(\dot{r})$ izvoda anvelope $\dot{R}(t)$ je Gauss-ova, što očigledno ne važi za Nakagami- q feding.

3.6 Srednji broj osnih preseka i vreme trajanja fedinga

U ovom odeljku izvodimo srednji broj osnih preseka (LCR) i srednje vreme trajanja fedinga (ADF) za Nakagami- q i Rayleigh-ev feding. Obe statistike računamo za proces anvelope $R(t)$. Podsetimo se definicionih izraza za $N_R^+(r)$ (LCR) i $T_{R-}(r)$

$$N_R^+(r) = \int_0^{+\infty} \dot{r} p_{R\dot{R}}(r, \dot{r}) d\dot{r}, \quad T_{R-}(r) = \frac{F_R(r)}{N_R^+(r)} \quad (3.28)$$

Pritom je $F_R(r)$ CDF procesa $R(t)$. Pošto u izrazu (3.26) figuriše integral po promenljivoj φ , potrebno je odrediti u zatvorenom obliku vrednost sledećeg integrala

$$I_1(r, \varphi) = \int_0^{+\infty} \dot{r} p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) d\dot{r}.$$

Primetimo da $p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi)$ (izraz (3.25)) kao funkcija od $\dot{r}$ predstavlja Gauss-ovu raspodelu čija je srednja vrednost 0 a varijansa $\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi$. Prema tome imamo da važi

$$\begin{aligned} I_1(r, \varphi) &= \frac{r \exp\left\{-\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2}\right)\right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_0^{+\infty} \frac{\dot{r} \exp\left\{-\frac{\dot{r}^2}{2(\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi)}\right\}}{\sqrt{2\pi(\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi)}} d\dot{r} \\ &= \frac{r \exp\left\{-\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2}\right)\right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned}$$

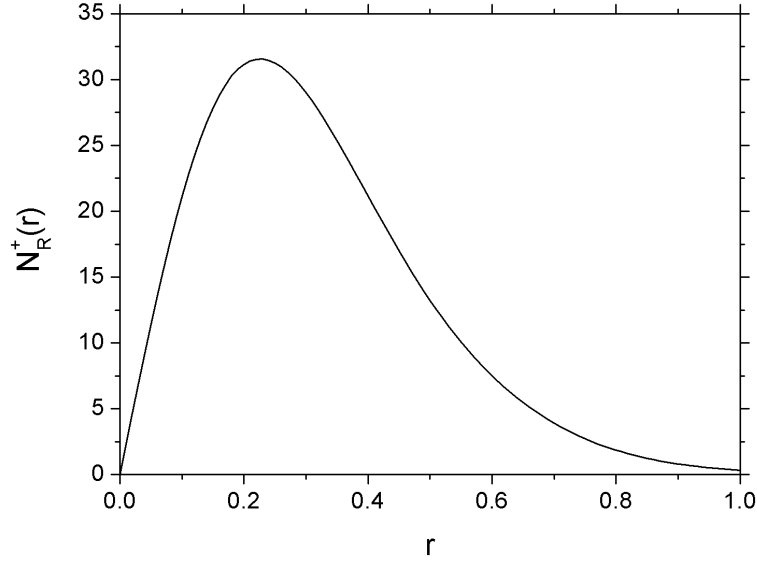
Srednji broj osnih preseka sada računamo kao integral izraza $I_1(r, \varphi)$ po promenljivoj φ . Tako dobijamo da je

$$N_R^+(r) = \frac{r}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2}\right)\right\} \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (3.29)$$

Na slici 3.7 prikazan je grafik funkcije srednjeg broja osnih preseka anvelope $N_R^+(r)$ za Nakagami- q feding. Vrednosti funkcije $N_R^+(r)$ računane su na osnovu izraza (3.29) pri čemu je integral računat numerički.

Nažalost ni predhodni integral nije moguće rešiti u zatvorenom obliku u opštem slučaju. Naravno, u slučaju Rayleigh-evog fedinga izraz pod integralom u (3.29) ne zavisi od φ pa je integral trivijalno rešiv. Na taj način dobijamo sledeći poznati izraz za LCR kanala sa Rayleigh-evim fedingom

$$N_R^+(r) = \frac{\beta r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma^2}. \quad (3.30)$$

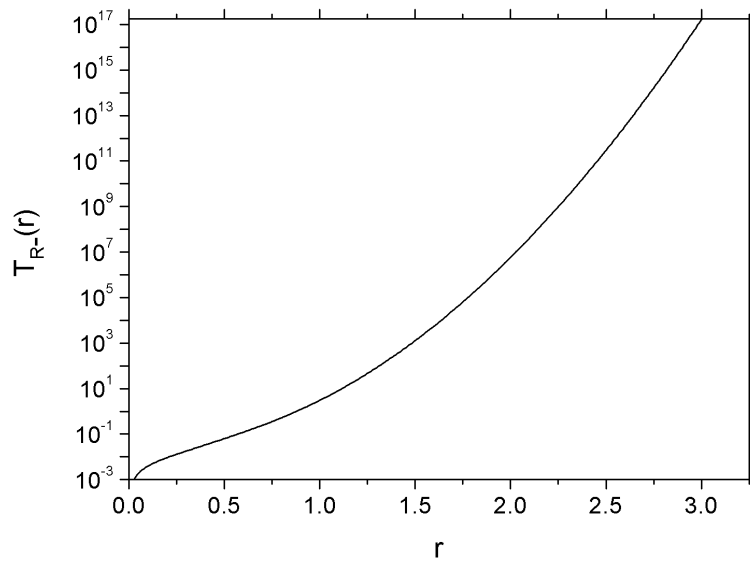
SLIKA 3.7. Grafik funkcije $N_R^+(r)$ za slučaj Nakagami- q fedinga.

Postoje rešenja za LCR u zatvorenom obliku za još neke specijalne slučajeve. O ovome će biti više reči u sledećoj glavi.

Podsetimo se da je CDF procesa $R(t)$ data sledećim izrazom

$$F_R(r_0) = \int_0^{r_0} p_R(r) dr = \int_0^{r_0} \frac{r}{\sigma_1 \sigma_2} \exp\left(-\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right) I_0\left(\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right) dr \quad (3.31)$$

Zamenom predhodnog izraza i (3.29) u (3.28) računamo ADF $T_{R-}(r)$ za Nakagami- q feding. Na slici 3.8 prikazan je grafik srednjeg vremena trajanja fedinga $T_{R-}(r)$.

SLIKA 3.8. Grafik funkcije $T_{R-}(r)$ u logaritamskoj razmeri.

U slučaju Rayleigh-evog fedinga CDF procesa $R(t)$ data je sledećim izrazom

$$F_R(r_0) = \int_0^{r_0} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr = 1 - \exp\left(-\frac{r_0^2}{2\sigma^2}\right).$$

Prema tome, za Rayleigh-ev feding možemo da izračunamo $T_{R-}(r)$ u zatvorenom obliku na sledeći način

$$T_{R-}(r) = \frac{\sigma^2 \left(\exp\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) - 1 \right)}{\beta r}.$$

Glava 4

Statistike prvog i drugog reda zbira kosinusnog talasa i Nakagami- q signala

U ovoj glavi razmatraćemo statistike drugog reda složenog signala koji se sastoji od dve komponente. Prva komponenta predstavlja signal na prijemu iz kanala sa Nakagami- q fadingom dok je druga kosinusni talas. Za složeni signal su izvedeni izrazi najpre za statistike prvog reda (PDF anvelope i faze) a zatim i statistike drugog reda (LCR, PLCR, ADF). Kao u predhodnoj glavi i ovde smo razmatrali nekoliko specijalnih i graničnih slučajeva. Takodje razmatrane su i uslovne PDF anvelope i izvoda faze. Najpre su sve veličine izvedene za slučaj konstantne vrednosti amplitude kosinusnog signala a i izvoda $\dot{a}$. Nakon toga posmatran je slučaj kada je $A(t)$ Rayleigh-ev proces.

Ovaj model može da se iskoristi u slučaju kada jedna komponenta složenog signala koristan signal dok je druga interferencija. Takodje, ovaj model predstavlja generalizaciju Rice-ovog modela, pri čemu kosinusni talas ima ulogu komponente signala duž linije optičke vidljivosti prijemnika i predajnika.

Kao i u predhodnoj glavi i ovde se za sve grafike podrazumevaju sledeće vrednosti parametara $\sigma_1 = 0.322351, \sigma_2 = 0.174608, \beta_1 = 1103.43, \beta_2 = 1091.52$. Napomenimo jos jednom da su ovi rezultati dobijeni fitovanjem statistika prvog i drugog reda anvelope $R(t)$ za Nakagami- q model na izmerenim podacima. Meren je signal na prijemu mobilnog satelitskog kanala u prisustvu efekta senke [27].

Rezultati izloženi u ovoj glavi su **originalni** i preuzeti iz naših radova [19],[18] i [20].

4.1 Opis modela i statistike prvog reda

U opštem slučaju amplituda druge komponente predstavlja slučajni proces. Prema tome u ovoj glavi posmatramo sledeći signal

$$x(t) = X_1(t) \cos(\omega t) + X_2(t) \sin(\omega t) + A(t) \cos(\omega t). \quad (4.1)$$

Komponente $X_1(t)$ i $X_2(t)$ su kao i u predhodnoj glavi nekorelisani Gauss-ovi procesi čija je srednja vrednost jednaka nuli dok su varijanse redom jednake σ_1^2 i σ_2^2 . U kompleksnom domenu, signal predstavljamo na sledeći način

$$X(t) = X_1(t) + A(t) + jX_2(t). \quad (4.2)$$

Nakagami- q signal (signal na izlazu iz kanala sa Nakagami- q fadingom) razmatran u predhodnoj glavi dobija se kada je $A(t) = 0$.

Najpre ćemo pretpostaviti da su vrednost amplitude kosinusnog signala $A(t)$ i njen izvod $\dot{A}(t)$ konstantni. Svi izrazi izvedeni pod ovom pretpostavkom su uslovni i uslovljeni su vrednošću amplitude signala A i izvoda amplitude u vremenu $\dot{A}$. Naravno, ovaj slučaj je fizički moguć samo za $\dot{A} = 0$. Međutim kada je $A(t)$ slučajni proces pri čemu su poznate raspodele za $A(t)$ i $\dot{A}(t)$, karakteristike signala u ovom slučaju dobijamo usrednjavanjem odgovarajućih uslovnih karakteristika. Prema tome, u nastavku ćemo pretpostaviti da su $A(t)$ i $\dot{A}(t)$ konstantni i jednaki a odnosno $\dot{a}$.

Definišimo anvelopu i fazu složenog signala $X(t)$ na uobičajen način

$$\begin{aligned} R(t) &= \sqrt{(X_1(t) + A(t))^2 + X_2^2(t)}, \\ \vartheta(t) &= \arctan\left(\frac{X_2(t)}{X_1(t) + A(t)}\right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Da bi odredili združenu gustinu raspodele procesa $R(t)$ i $\vartheta(t)$ polazimo od gustine raspodele procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ definisane izrazom (2.7) koji ovde ponovo navodimo

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right). \quad (4.4)$$

Koristićemo sledeće transformacione formule Descartes-ovih u polarne koordinate koje su ekvivalentne formulama (4.3)

$$\begin{aligned} X_1 &= R \cos \vartheta - A, \\ X_2 &= R \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Jakobijan ove transformacije je očigledno $J = R$. Korišćenjem relacija (4.4) i transformacionih formula (4.5) direktno računamo traženu JPDPF

$$p_{R\vartheta}(r, \varphi) = r p_{X_1 X_2}(r \cos \varphi - a, r \sin \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(r \cos \varphi - a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2}\right). \quad (4.6)$$

Gustine raspodele faze i anvelope dobijaju se integraljenjem (4.6) po promenljivima r i φ . Prvo odredjujemo gustinu raspodele faze $\vartheta(t)$. Imamo da se (4.6) može napisati u obliku

$$p_{R\vartheta}(r, \varphi) = M_1 r \exp(-a_1 r^2 + b_1 r + c_1), \quad (4.7)$$

gde su parametri M_1, a_1, b_1 i c_1 određeni sledećim izrazima

$$M_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}, \quad a_1 = \frac{\sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}, \quad b_1 = \frac{ar}{\sigma_1^2}, \quad c_1 = -\frac{a^2}{2\sigma_1^2}.$$

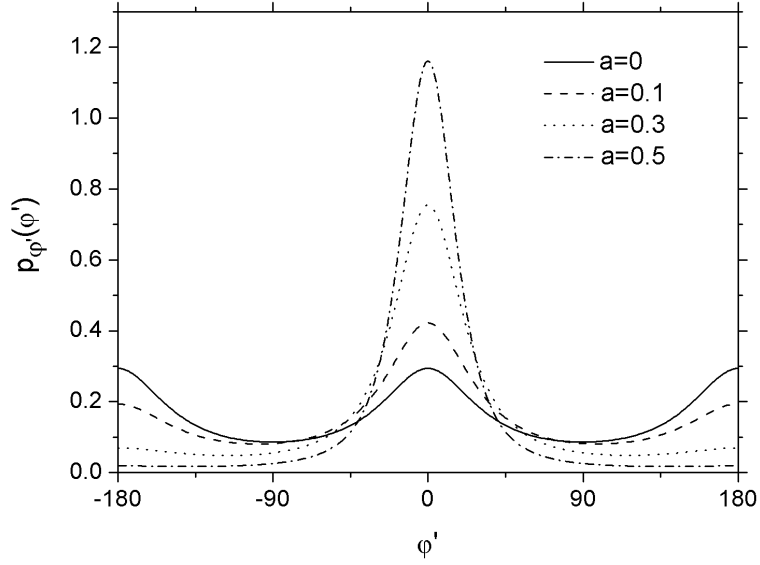
Integraljenjem izraza (4.7) i zamenom vrednosti parametara dobija se konačan izraz za gustinu raspodele faze

$$p_\vartheta(\varphi) = \int_0^{+\infty} p_{R\vartheta}(r, \varphi) dr = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sigma_\varphi^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) g\left(\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_\varphi\sigma_1\sqrt{2}}\right). \quad (4.8)$$

Sa $g(s)$ i σ_φ označili smo sledeće pomoćne funkcije

$$\begin{aligned} g(s) &= 1 + \sqrt{\pi} s \exp(s^2)(1 + \operatorname{erf}(s)), \\ \sigma_\varphi &= \sqrt{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Na slici 4.1 prikazan je grafik funkcije $p_\vartheta(\varphi)$ za različite vrednosti amplitude kosinusnog signala a . Ukoliko je $a = 0$, predhodni izraz se svodi na (2.10) kao što smo očekivali.

SLIKA 4.1. Grafik funkcije $p_\vartheta(\varphi)$ u zavisnosti od amplitude kosinusnog signala a .

Za slučaj Rayleigh-evog fedinga za koji važi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ izraz (4.8) postaje

$$p_\vartheta(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) g\left(\frac{a \cos \varphi}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

Vidimo da $p_\vartheta(\varphi)$ nije konstantna kao što je to bio slučaj za $a = 0$. Sada ćemo razmotriti granične slučajeve kada jedna od varijansi σ_i ($i = 1, 2$) teži nuli.

1. Neka $\sigma_2 \rightarrow 0$. Za $\varphi \neq 0, \pi$ imamo da argument funkcije g u (4.6) teži nuli, pa onda i vrednost funkcije g za taj argument teži vrednosti $g(0) = 1$ (pošto je g neprekidna). Vrednost σ_φ teži ka $\sigma_1 \sin \varphi \neq 0$. Na osnovu ovoga zaključujemo da za $\sigma_2 \rightarrow 0$ važi $p_\vartheta(\varphi) = 0$ za $\varphi \neq 0, \pi$. Ispitajmo sada šta se dešava za $\varphi = 0$ odnosno $\varphi = \pi$. Za obe vrednosti funkcija $p_\vartheta(\varphi)$ teži beskonačnosti kada σ_2 teži nuli. Prema tome, rezultujući izraz za $p_\vartheta(\varphi)$ je linearna kombinacija Dirac-ove delta funkcije $\delta(x)$ i pomerene Dirac-ove delta funkcije $\delta(x - \pi)$ kao u (2.11) odnosno

$$p_\vartheta(\varphi) = A_1 \delta(\varphi) + A_2 \delta(\varphi - \pi).$$

Konstante A_1 i A_2 zadovoljavaju uslov $A_1 + A_2 = 1$. Takodje važi

$$\frac{A_1}{A_2} = \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \frac{p_\vartheta(0)}{p_\vartheta(\pi)} = \frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + \sqrt{\pi} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma_1\sqrt{2}}\right)\right)}{\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + \sqrt{\pi} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma_1\sqrt{2}}\right)\right)}.$$

Iz predhodna dva uslova lako odredjujemo vrednosti konstantni A_1 i A_2 i dobijamo

$$\lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} p_\vartheta(\varphi) = \frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + \sqrt{\pi} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma_1\sqrt{2}}\right)\right)}{2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + 2\sqrt{\pi}} \delta(\varphi) + \frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + \sqrt{\pi} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma_1\sqrt{2}}\right)\right)}{2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + 2\sqrt{\pi}} \delta(\varphi - \pi)$$

2. Neka sada $\sigma_1 \rightarrow 0$. Medjutim razmatrajući samo izraz (2.10) nije moguće odrediti traženu graničnu vrednost. Zbog toga (2.10) zapisujemo u sledećem razvijenom obliku

$$p_\vartheta(\varphi) = \frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_\varphi^2} \left[\sigma_1 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_\varphi} \exp\left(-\frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_\varphi^2}\right) \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_\varphi \sigma_1 \sqrt{2}}\right)\right) \right]. \quad (4.10)$$

Odmah možemo da uočimo da $\sigma_1 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) \rightarrow 0$ za svako $a > 0$. Takodje primetimo da $\sigma_\varphi \rightarrow \sigma_2 |\cos \varphi|$. Zbog ove činjenice razlikujemo 2 podslučaja.

2.1. Neka je $\cos \varphi \geq 0$. Tada imamo da $\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_\varphi \sqrt{2}} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}}$ odnosno da $\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_\varphi \sqrt{2}} \rightarrow +\infty$ pa prema tome

$$1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_\varphi \sqrt{2}}\right) \rightarrow 2.$$

Zamenom predhodnog izraza u (4.10) dobijamo da

$$p_\vartheta(\varphi) \rightarrow \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma_2 \cos^2 \varphi} \exp\left(-\frac{a^2 \tan^2 \varphi}{2\sigma_2^2}\right), \quad \cos \varphi > 0.$$

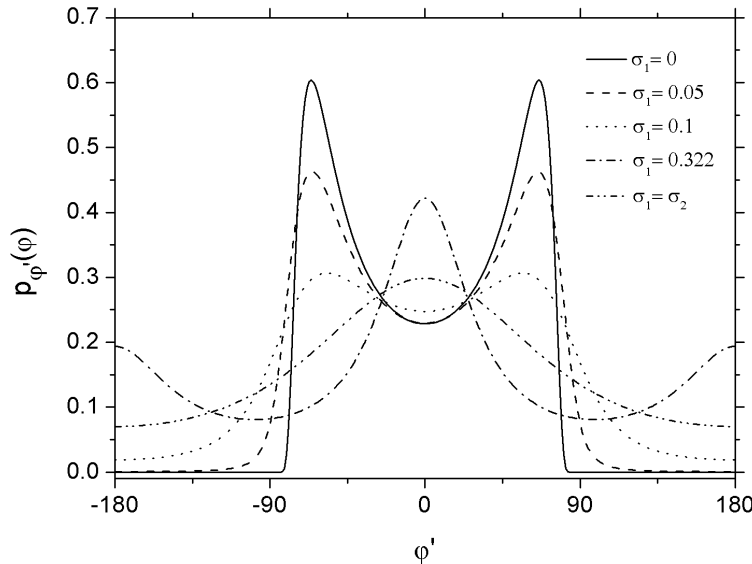
2.2. Neka je $\cos \varphi < 0$. Tada $\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_\varphi \sqrt{2}} \rightarrow -\infty$ pa $1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_\varphi \sqrt{2}}\right) \rightarrow 0$. Na osnovu ovoga direktno zaključujemo da $p_\vartheta(\varphi) \rightarrow 0$ za $\cos \varphi < 0$. Ako je $\cos \varphi = 0$ onda je $\sin \varphi = \pm 1$ ($\varphi = 0, \pi$) i važi

$$p_\vartheta(0) = p_\vartheta(\pi) = \frac{\sigma_1 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right)}{2\pi\sigma_2},$$

odakle očigledno dobijamo da $p_\vartheta(\varphi) \rightarrow 0$ kada je $\cos \varphi = 0$. Ovim smo dokazali da kada $\sigma_1 \rightarrow 0$ važi

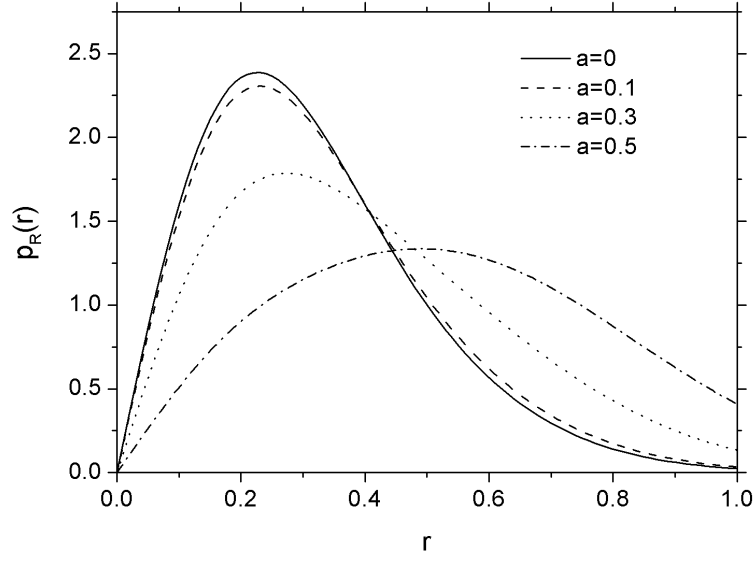
$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} p_\vartheta(\varphi) = \begin{cases} \frac{a \exp\left(-\frac{a^2 \tan^2 \varphi}{2\sigma_2^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2 \cos^2 \varphi}, & \varphi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi) \\ 0, & \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases} \quad (4.11)$$

Na slici 4.2 prikazano je nekoliko grafika funkcije $p_\vartheta(\varphi)$ za različite vrednosti σ_1 . Može se uočiti da kada σ_1 teži nuli, vrednost funkcije $p_\vartheta(\varphi)$ teži graničnoj vrednosti određenoj izrazom (4.11).



SLIKA 4.2. Grafik funkcije $p_\vartheta(\varphi)$ u zavisnosti od parametra σ_1 . Za $\sigma_1 = 0$ korišćen je granični izraz (4.11).

Gustina raspodele anvelope $p_R(r)$ dobija se integracijom izraza (2.9) po promenljivoj φ . Kada je $a > 0$ ovaj integral nije analitički rešiv. Na slici 4.3 dat je grafik funkcije $p_R(r)$ za različite vrednosti a .

SLIKA 4.3. Grafik funkcije $p_R(r)$ za različite vrednosti amplitude kosinusnog talasa a .

4.2 JPDF faze i FM šuma za konstantne vrednosti amplitude kosinusnog signala i izvoda

Da bi odredili statistike drugog reda anvelope i faze potrebna nam je JPDF procesa $R(t), \dot{R}(t), \vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)$. Podsetimo se da je JPDF procesa $X_1(t), X_2(t), \dot{X}_1(t), \dot{X}_2(t)$ u slučaju Nakagami- q fedinga data izrazom (3.4) koji ponovo navodimo

$$p_{X_1, X_2, \dot{X}_1, \dot{X}_2}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{4\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{\beta_1\beta_2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} - \frac{\dot{x}_1^2}{2\beta_1} - \frac{\dot{x}_2^2}{2\beta_2}\right). \quad (4.12)$$

Kao i u predhodnom slučaju, i ovde uvodimo transformaciju Descartes-ovih koordinata (x_1, x_2) u polarne (r, φ) . Transformacione formule se neznatno razlikuju od formula (3.2) iz predhodne glave

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi - a, \\ x_2 &= r \sin \varphi, \\ \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{a}, \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Jakobijan ove transformacije je jednak $J = -r^2$. Sada možemo izraziti $p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$ na sledeći način

$$p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = r^2 p_{X_1\dot{X}_1X_2\dot{X}_2}(r \cos \varphi - a, \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{a}, r \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi).$$

Zamenom konačno dobijamo traženu JPDF procesa $R(t), \dot{R}(t), \vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)$

$$\begin{aligned} p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) &= \frac{r^2}{4\pi^2\sigma_1\sigma_2\sqrt{\beta_1\beta_2}} \exp \left\{ -\frac{(r \cos \varphi - a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{a})^2}{2\beta_1} - \frac{(\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2}{2\beta_2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

U ovom odeljku odredićemo JPDF procesa $\vartheta(t)$ i $\dot{\vartheta}(t)$. Znači potrebno je izvršiti integraciju izraza (4.14) najpre po promenljivoj $\dot{r}$ a zatim po r .

Uvedimo sledeće oznake

$$\begin{aligned}\beta_\varphi &= \beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi, \\ \sigma_\varphi &= \sqrt{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Primetimo da $p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$ može da se izrazi kao funkcija promenljive $\dot{r}$ na sledeći način

$$p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = M_1 \exp(-a_1 \dot{r}^2 + b_1 \dot{r} + c_1). \quad (4.16)$$

Parametri a_1, b_1, c_1 i M_1 imaju vrednosti

$$\begin{aligned}M_1 &= \frac{r^2}{4\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sigma_1 \sigma_2}, \quad a_1 = \frac{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}{2\beta_1 \beta_2}, \\ b_1 &= \frac{r(\beta_2 - \beta_1)\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi}{\beta_1 \beta_2} + \frac{\dot{a} \cos \varphi}{\beta_1}, \\ c_1 &= -\frac{(a - r \cos \varphi)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2} - \frac{(r\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{a})^2}{2\beta_1} - \frac{r\dot{\varphi} \cos \varphi}{2\beta_2}.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Integraljenjem izraza (4.16) i zamenom vrednosti parametara dobijamo traženu JPDF

$$\begin{aligned}p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) &= \frac{r^2}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}} \exp \left\{ -\frac{(a - r \cos \varphi)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(r\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{a})^2}{2\beta_1} - \frac{r\dot{\varphi} \cos \varphi}{2\beta_2} + \frac{[r(\beta_2 - \beta_1)\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{a}]^2 \cos^2 \varphi}{2\beta_1 \beta_2 (\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi)} \right\}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Sledeći korak je integracija po promenljivoj r . Sredjivanjem izraza (4.18) možemo zaključiti da se $p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi})$ kao funkcija promenljive r može izraziti na sledeći način

$$p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) = M_2 r^2 \exp(-a_2 r^2 + b_2 r + c_2), \quad (4.19)$$

gde su parametri a_2, b_2, c_2 and M_2 određeni pomoću

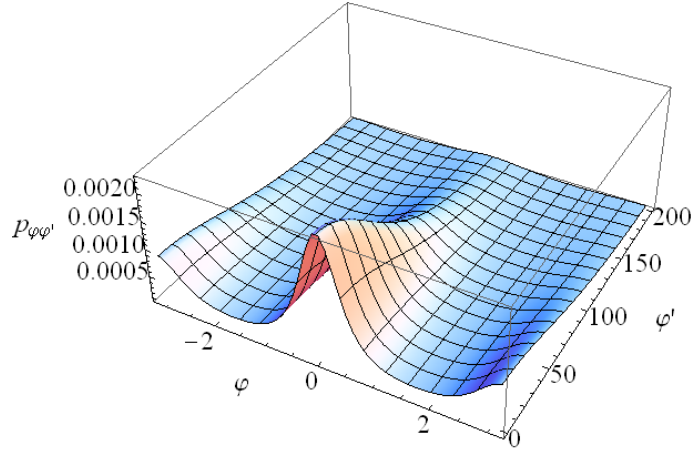
$$\begin{aligned}M_2 &= \frac{1}{(\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_\varphi}}, \quad a_2 = -\frac{\dot{\varphi}^2}{2\beta_\varphi} - \frac{\sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2}, \\ b_2 &= \frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2} - \frac{\dot{a} \dot{\varphi} \sin \varphi}{\beta_\varphi}, \quad c_2 = -\frac{a^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_\varphi}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Integral izraza (4.19) moguće je odrediti u zatvorenom obliku. Vrednost ovog integrala data je u dodatku. Rešavanjem integrala izraza (4.19) i zamenom vrednosti parametara (4.20) dobijamo sledeću relaciju za $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$ u zatvorenom obliku

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{4(\pi a_{\varphi\dot{\varphi}})^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \beta_\varphi} \exp \left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_\varphi} \right) f \left(\frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2 a_{\varphi\dot{\varphi}}^{1/2} \sqrt{2}} - \frac{\dot{a} \dot{\varphi} \sin \varphi}{\beta_\varphi a_{\varphi\dot{\varphi}}^{1/2} \sqrt{2}} \right). \quad (4.21)$$

Zbog jednostavnijeg pisanja uveli smo pomoćnu funkciju $f(s)$ odnosno $a_{\varphi\dot{\varphi}}$ na sledeći način

$$\begin{aligned}f(s) &= 2s + \sqrt{\pi}(1 + 2s^2) \exp(s^2)(1 + \operatorname{erf}(s)), \\ a_{\varphi\dot{\varphi}} &= -2a_2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_\varphi} + \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

SLIKA 4.4. 3D grafik funkcije $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$ za $a = 0.1$ i $\dot{a} = 0$.

Na slici 4.4 dat je 3D grafik funkcije $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$ za konstantnu vrednost amplitude kosinusnog talasa $a = 0.1$.

Razmotrimo sada nekoliko specijalnih slučajeva izraza (4.21). Zamenom $a = \dot{a} = 0$ u (4.21) očigledno dobijamo izraz (3.8) za Nakagami- q fading bez dodatnog signala

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}00}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{f(0)}{4(\pi a_{\varphi, \dot{\varphi}})^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \beta_{\varphi}} = \frac{\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} + \frac{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right)^{-3/2}}{4\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}}. \quad (4.23)$$

Vrednost $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$ u ovom specijalnom slučaju označili smo sa $p_{\vartheta\dot{\vartheta}00}(\varphi, \dot{\varphi})$.

Predpostavimo da je amplituda kosinusnog signala konstantna, odnosno da je ispunjeno $a \neq 0$ a $\dot{a} = 0$. Zamenom u (4.21) dobijamo da tada važi

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}0}(\varphi, \dot{\varphi}) = p_{\vartheta\dot{\vartheta}00}(\varphi, \dot{\varphi}) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) f\left(\frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2 a_{\varphi\dot{\varphi}}^{1/2} \sqrt{2}}\right). \quad (4.24)$$

Na sličan način kao u predhodnoj glavi i ovde možemo da izračunamo PDF $p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi})$ izvoda faze $\dot{\vartheta}(t)$ integraljenjem izraza (4.23) po promenljivoj φ .

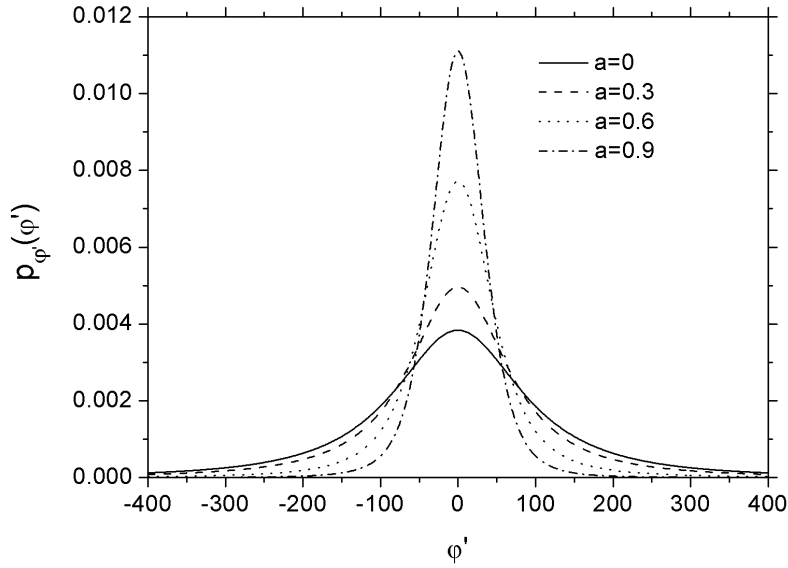
$$p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi}) = \int_0^{2\pi} p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\varphi \quad (4.25)$$

Medjutim, ovaj integral nije moguće odrediti u zatvorenoj formi čak ni u slučaju Rayleigh-evog fedinga ili za $\dot{a} = 0$. Na slici 4.5 prikazan je grafik funkcije $p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi})$ za $\dot{a} = 0$. Pritom je integral u izrazu (4.25) je računat numerički.

Napomenimo neka svojstva PDF izvoda faze $\dot{\varphi}(t)$. U slučaju $\dot{a} = 0$, srednja vrednost ovog procesa je nula, tj. važi $\mathbb{E}(\dot{\vartheta}(t)) = 0$. Da bi ovo dokazali, dovoljno je da uočimo da je $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$ parna funkcija po promenljivoj $\dot{\varphi}$ ($a_{\varphi\dot{\varphi}}$ je takodje parna funkcija po $\dot{\varphi}$). Na osnovu ovoga možemo zaključiti da je i $p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi})$ parna funkcija, što direktno dokazuje da je $\mathbb{E}(\dot{\vartheta}(t)) = 0$. U opštem slučaju kada je $\dot{a} \neq 0$ važi $\mathbb{E}\dot{\vartheta}(t) \neq 0$. Ovaj zaključak još jednom potvrđuje činjenicu da je slučaj $\dot{a} = 0$ fizički neostvariv.

Za $\dot{a} = 0$ može se dokazati da je $\mathbb{E}\dot{\vartheta}^2(t) = +\infty$. Pod istim uslovom, važi i sledeći opštiji zaključak za svako $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi}^2 p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} = +\infty.$$



SLIKA 4.5. Grafik funkcije $p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi})$ za konstantnu vrednost amplitude kosinusnog signala a ($\dot{a} = 0$).

Prema tome slučajni proces $\vartheta(t)$ nema momente drugog reda, pa ukoliko želimo da opišemo stepen rasturanja vrednosti ovog slučajnog procesa oko srednje vrednosti $\mathbb{E}\vartheta(t) = 0$ moramo da koristimo neku drugu veličinu, na primer

$$\mathbb{E}|\vartheta(t)| = 2 \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{\dot{\vartheta}}(\dot{\varphi}) d\dot{\varphi} = \int_0^{2\pi} N_{\vartheta}^+(\varphi) d\varphi.$$

4.3 Srednji broj osnih preseka faze

Sada možemo da pristupimo izračunavanju srednjeg broja osnih preseka faze $\vartheta(t)$ složenog signala. Krećemo od izraza (4.21) za združenu gustinu raspodele $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$ faze i izvoda. Kao funkcija promenljive $\dot{\varphi}$, izraz (4.21) može da se zapiše na sledeći način

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{M_2'}{(P + Q\dot{\varphi}^2)^{3/2}} f\left(\frac{b_2' + b_2''\dot{\varphi}}{\sqrt{P + Q\dot{\varphi}^2}}\right).$$

Ovde su P, Q, M_2', b_2' i b_2'' odgovarajući parametri. Predhodni oblik nije pogodan za računanje integrala u izrazu za PLCR. Zato ćemo iskoristiti sledeću transformaciju i zameniti redosled integrala

$$\begin{aligned} N_{\vartheta}^+(\varphi) &= \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} \\ &= \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} \int_0^{+\infty} p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) dr d\dot{\varphi} \\ &= \int_0^{+\infty} dr \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Podsetimo se da smo izraz unutar integrala po r označili sa $I(r, \varphi)$, odnosno da je

$$I(r, \varphi) = \int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{R\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}.$$

Najpre ćemo naći $I(r, \varphi)$ u zatvorenom obliku a onda ćemo taj izraz integraliti po promenljivoj r . Iz izraza (4.21) sledi da se $p_{R\theta\dot{\theta}}(r, \varphi_0, \dot{\varphi})$ može na sledeći način predstaviti kao funkcija promenljive $\dot{\varphi}$

$$p_{R\theta\dot{\theta}}(r, \varphi, \dot{\varphi}) = M_3 \exp(-a_3 \dot{\varphi}^2 + b_3 \dot{\varphi} + c_3) \quad (4.27)$$

gde su parametri M_3, a_3, b_3 i c_3 definisani sledećim izrazima

$$\begin{aligned} M_3 &= \frac{r^2}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_\varphi}}, \quad a_3 = \frac{r^2}{2\beta_\varphi}, \quad b_3 = -\frac{\dot{a} r \sin \varphi}{\beta_\varphi}, \\ c_3 &= -\frac{\sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} r^2 + \frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2} r - \frac{a^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_\varphi} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Primetimo da je oblik (4.27) identičan obliku (4.16) samo što je ovde $\dot{\varphi}$ promenljiva i što parametri imaju drugačije vrednosti. Integracijom izraza (4.27) i zamenom vrednosti parametara (4.28) dobijamo sledeći izraz

$$I(r, \varphi) = \frac{\beta_\varphi^{1/2}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2} g\left(-\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_\varphi}}\right) \exp\left(-\frac{\sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} r^2 + \frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2} r - \frac{a^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_\varphi}\right). \quad (4.29)$$

Podsetimo se da smo sa $g(s)$ označili sledeću pomoćnu funkciju (izraz (4.9))

$$g(s) = 1 + \sqrt{\pi} s \exp(s^2)(1 + \operatorname{erf}(s)).$$

Izraz (4.29) je pogodan za integraciju po promenljivoj r . Imamo da $I(r, \varphi)$ kao funkcija promenljive r ima isti oblik kao (4.16) (tj. (4.27)), odnosno da važi

$$I(r, \varphi) = M_4 \exp(-a_4 r^2 + b_4 r + c_4) \quad (4.30)$$

Parametri M_4, a_4, b_4 i c_4 su jednaki

$$\begin{aligned} M_4 &= \frac{\sqrt{\beta_\varphi}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2} g\left(-\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_\varphi}}\right) \\ a_4 &= \frac{\sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2}, \quad b_4 = \frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2}, \quad c_4 = -\frac{a^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_\varphi} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Integracijom i zamenom vrednosti parametara konačno dobijamo sledeći izraz za PLCR

$$N_\vartheta^+(\varphi) = \frac{\sqrt{\beta_\varphi}}{4\pi \sigma_\varphi} g\left(-\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_\varphi}}\right) \exp\left(-\frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_\varphi^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_\varphi}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_\varphi \sqrt{2}}\right)\right] \quad (4.32)$$

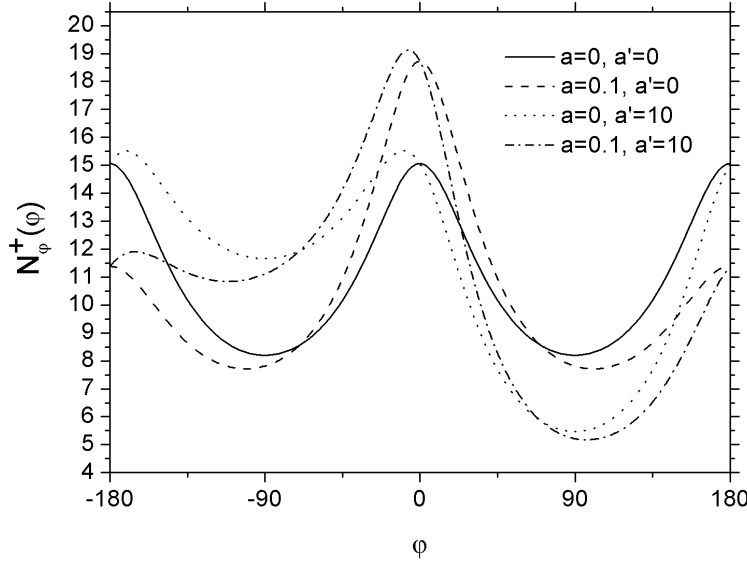
Na slici 4.6 prikazana su 4 karakteristična grafika funkcije $N_\vartheta^+(\varphi)$. Razmotrimo sada dva specijalna slučaja izraza (4.32). Kada je $a = \dot{a} = 0$ dobijamo izraz za srednji broj osnih preseka faze za Nakagami- q feding

$$N_{\vartheta 00}^+(\varphi) = \frac{\sqrt{\beta_\varphi}}{4\pi \sigma_\varphi} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi}{\sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi}} \quad (4.33)$$

Kao što smo i očekivali, predhodni izraz je isti kao (3.15) iz predhodne glave.

Za slučaj konstantne amplitude kosinusnog signala ($a \neq 0$ i $\dot{a} = 0$) imamo da važi

$$N_{\vartheta 0}^+(\varphi) = N_{\vartheta 00}^+(\varphi) \exp\left(-\frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_\varphi^2}\right) \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_\varphi \sqrt{2}}\right)\right). \quad (4.34)$$

SLIKA 4.6. Grafik funkcije $N_{\vartheta}^+(\varphi)$.

Na slici 4.7 prikazan je grafik funkcije $N_{\vartheta 0}^+(\varphi)$ za različite vrednosti parametra a . Na kraju ovog odeljka primetimo da vrednosti $N_{\vartheta}^+(0)$ i $N_{\vartheta}^+(\pi)$ više nisu jednake, odnosno da jednakost važi samo u slučaju $a = \dot{a} = 0$. Isto važi i za $N_{\vartheta}^+(\pi/2)$ i $N_{\vartheta}^+(3\pi/2)$. Ovaj rezultat je očekivan jer se uvođenjem kosinusnog signala ruši simetrija na osnovu koje su odgovarajuće jednakosti važile. Ukoliko su maksimalne Doppler-ove frekvencije procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ jednake zamenom dobijamo da $N_{\vartheta}^+(\varphi)$ ne zavisi od φ samo ako je $a = \dot{a} = 0$.

4.4 Uslovne gustine raspodele anvelope i izvoda faze

U ovom odeljku razmotrićemo uslovne raspodele anvelope i izvoda faze za složeni signal $X(t)$. Princip izvodjenja je sličan kao u odeljku 3.4 pri čemu ovde nećemo računati uslovnu JCDF $F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(r, \dot{\varphi})$ zato što je odgovarajući izraz suviše komplikovan.

Podsetimo se da je uslovna JCDF procesa $R(t), \dot{\vartheta}(t)$ definisana u odeljku 3.4 na sledeći način:

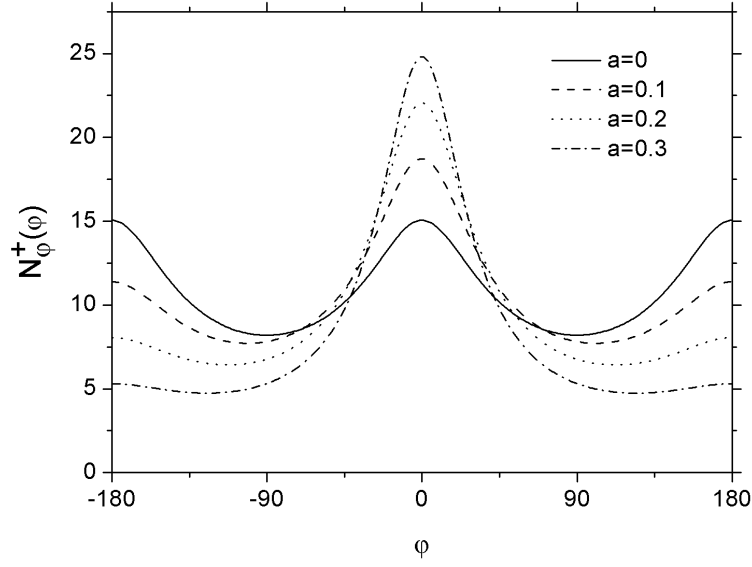
$$F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(r_0, \dot{\varphi}_0) = \frac{\int_0^{r_0} dr \int_0^{\dot{\varphi}_0} \dot{\varphi} p_{R\dot{\vartheta}}(r, \varphi_0, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)} \quad (4.35)$$

Iz predhodnog izraza dobijamo uslovnu PDF anvelope $p_{R|\varphi_0+}(r_0)$ kao

$$\begin{aligned} p_{R|\varphi_0+}(r_0) &= \left. \frac{d}{dr} F_{R\dot{\vartheta}|\varphi_0+}(r, +\infty) \right|_{r=r_0} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{R\dot{\vartheta}}(r_0, \varphi_0, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)} = \frac{I(r_0, \varphi_0)}{N_{\vartheta}^+(\varphi_0)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Zamenom izraza za $I(r, \varphi)$ (4.29) i $N_{\vartheta}^+(\varphi_0)$ (4.32) dobijamo traženu uslovnu PDF u zatvorenom obliku.

$$p_{R|\varphi_0+}(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{(r-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{1 + \operatorname{erf}(m)}. \quad (4.37)$$



SLIKA 4.7. Grafik funkcije $N_{\varphi}^{+}(\varphi)$ za različite vrednosti parametra a i $\dot{a} = 0$.

Parametri m i σ definisani su sledećim izrazima

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_\varphi}, \quad m = -\frac{a \sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_\varphi \sqrt{2}}.$$

Primetimo da (4.37) predstavlja odsečenu Gauss-ovu funkciju raspodele sa parametrima m i σ .

Najpre možemo da zaključimo da $p_{R|\varphi+}(r)$ ne zavisi od $\dot{a}$. Takodje veličina a utiče samo na srednju vrednost m a ne i na varijansu σ^2 . U slučaju $a = 0$ dobijamo $m = 0$ pri čemu se izraz (4.37) svodi na (4.29) iz odeljka 3.4, kao što smo i očekivali.

U specijalnim slučajevima $\varphi = 0, \pm\pi/2, \pi$ parametar σ svodi se na σ_1 (ako je $\varphi = 0, \pi$) ili σ_2 (ako je $\varphi = \pm\pi/2$). Primetimo da je parametar m jednak 0 za $\varphi = \pm\pi/2$ i za te vrednosti je $p_{R|\varphi+}(r)$ jednostrana Gauss-ova gustina raspodele, kao što se dobija u slučaju $a = \dot{a} = 0$.

Za $\varphi = 0, \pi$ imamo da je $m = \frac{a}{\sigma_1}$ odnosno gustina raspodele $p_{R|\varphi+}(r)$ je nezavisna od parametara σ_2 and β_2 procesa $X_2(t)$.

Slično dobijamo drugu uslovnu PDF $p_{\dot{\varphi}|\varphi_0+}(\dot{\varphi})$ na sledeći način

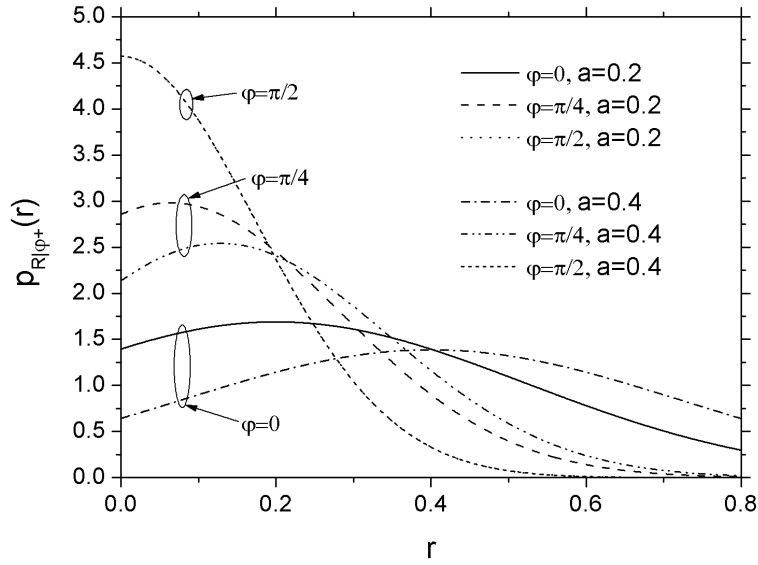
$$\begin{aligned} p_{\dot{\varphi}|\varphi_0+}(\dot{\varphi}) &= \left. \frac{d}{d\dot{\varphi}} F_{R\dot{\varphi}|\varphi_0+}(+\infty, \dot{\varphi}) \right|_{\varphi=\varphi_0} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} \dot{\varphi}_0 p_{R\dot{\varphi}}(r, \varphi_0, \dot{\varphi}_0) dr}{N_{\varphi}^{+}(\varphi_0)} \\ &= \frac{\dot{\varphi}_0 p_{\dot{\varphi}}(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)}{N_{\varphi}^{+}(\varphi_0)}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Ponovo kombinovanjem izraza (4.21) i (4.32) dobijamo formulu u zatvorenom obliku za drugu uslovnu

gustinu raspodele

$$p_{\dot{\varphi}|\varphi_0+}(\dot{\varphi}) = \frac{\sigma_{\varphi}\dot{\varphi}}{2\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2(\beta_{\varphi}a_{\varphi}\dot{\varphi})^{3/2}} \cdot \frac{f\left(\frac{a\cos\varphi}{\sigma_1^2a_{\varphi}^{1/2}\sqrt{2}} - \frac{\dot{a}^2\dot{\varphi}\sin\varphi}{\beta_{\varphi}a_{\varphi}^{1/2}\sqrt{2}}\right)}{g\left(-\frac{\dot{a}\sin\varphi}{\sqrt{2}\beta_{\varphi}}\right)\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a\sigma_2\cos\varphi}{\sigma_1\sigma_{\varphi}\sqrt{2}}\right)\right]} \quad (4.39)$$

Na slikama 4.8 i 4.9 dati su grafici uslovnih gustina raspodele anvelope i izvoda faze za različite vrednosti amplitude a kosinusnog signala i nivoa faze φ . Podrazumevana vrednost za $\dot{a}$ je nula.



SLIKA 4.8. Grafik funkcije $p_{R|\varphi+}(r)$ za $\dot{a} = 0$ i različite vrednosti φ i a .

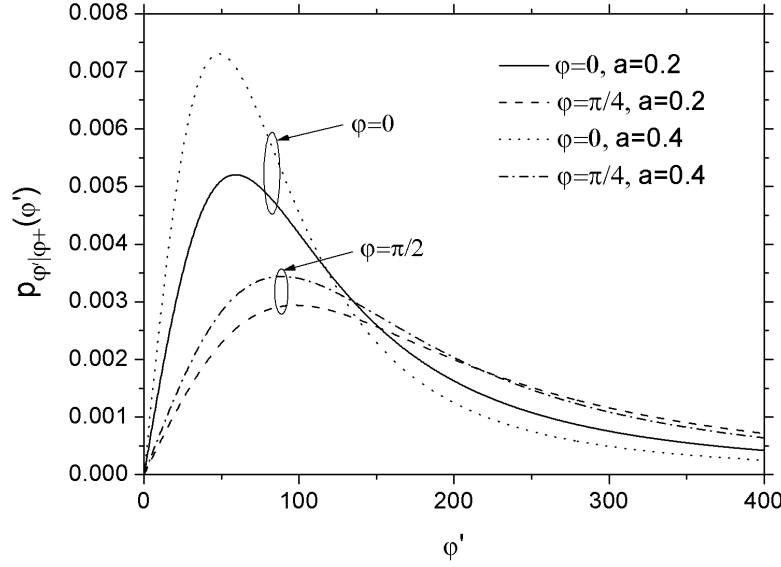
U slučaju $a = \dot{a} = 0$ izraz (4.39) svodi se na (3.21) u odeljku 3.4, kao što smo i očekivali. I ovde ćemo analizirati specijalne slučajeve kada je vrednost nivoa faze jednaka $\varphi = 0, \varphi = \pm\pi/2$ ili $\varphi = \pi$. Zamenom $\varphi = 0$ ili $\varphi = \pi$ u (4.39) dobijamo

$$p_{\dot{\varphi}|\pi+}(\dot{\varphi}) = p_{\dot{\varphi}|0+}(\dot{\varphi}) = \frac{\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_2} + \frac{1}{\sigma_1^2}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right)}{\sigma_1\beta_2\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma_1\sqrt{2}}\right)\right)}. \quad (4.40)$$

Primećujemo da u predhodnom izrazu ne figurišu parametri β_1 and σ_2 . Drugim rečima i ovde maksimalna Doppler-ova frekvencija f_{max1} nema uticaja na uslovnu PDF $p_{\dot{\varphi}|0+}(\dot{\varphi})$. Zamenom $\varphi = \pm\pi/2$ u (4.39) dobijamo

$$p_{\dot{\varphi}|\pm\pi/2+}(\dot{\varphi}) = \frac{\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_1} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^{-3/2} f\left(\frac{\mp\dot{a}\dot{\varphi}}{\beta_1\sqrt{2}\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \frac{\beta_1}{\sigma_2^2}}}\right)}{\sigma_2\beta_1 g\left(\mp\frac{\dot{a}}{\sqrt{2}\beta_1}\right)}. \quad (4.41)$$

Poslednji izraz ne zavisi od a . Prema tome za konstantnu vrednost amplitude kosinusnog signala a ($\dot{a} = 0$) dobijamo potpuno isti izraz kao u slučaju $a = 0$. Dalje vidimo da je uslovna PDF $p_{\dot{\varphi}|\pm\pi/2}(\dot{\varphi})$

SLIKA 4.9. Grafik funkcije $p_{\varphi|\varphi+}(\varphi')$ za $\dot{a} = 0$ i različite vrednosti φ i a .

data izrazom (4.41) nezavisna od β_2 i σ_1 , tj. na nju ne utiče maksimalna Doppler-ova frekvencija f_{max2} .

4.5 Srednji broj osnih preseka faze kada je amplituda $A(t)$ Rayleigh-ev proces

U naredna dva odeljka pretpostavićemo da je amplituda kosinusnog signala zavisna od vremena i da je slučajni proces. Takodje smatraćemo da $A(t)$ ima Rayleigh-evu raspodelu a $\dot{A}(t)$ Gauss-ovu raspodelu. Predpostavićemo još da su $A(t)$ i $\dot{A}(t)$ statistički nezavisni procesi. Sva ova svojstva ima upravo proces anvelope kod kanala sa Rayleigh-evim fadingom. Prema tome, odgovarajuća JPDF procesa $A(t)$ i $\dot{A}(t)$ ima sledeći oblik

$$p_{A\dot{A}}(a, \dot{a}) = p_A(a)p_{\dot{A}}(\dot{a}) = \frac{a}{\sqrt{2\pi\beta_a}\sigma_a^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_a^2} - \frac{\dot{a}^2}{2\beta_a}\right). \quad (4.42)$$

U ovom odeljku izračunaćemo srednji broj osnih preseka za ovakav signal a u narednom računaćemo uslovne PDF anvelope $R(t)$ i izvoda faze $\vartheta(t)$.

Srednji broj osnih preseka $N_{\vartheta}^+(\varphi)$ u ovom slučaju možemo odrediti na osnovu sledećeg izraza

$$N_{\vartheta}^+(\varphi) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\vartheta|A,\dot{A}}^+(\varphi | a, \dot{a}) p_{A\dot{A}}(a, \dot{a}) da d\dot{a}. \quad (4.43)$$

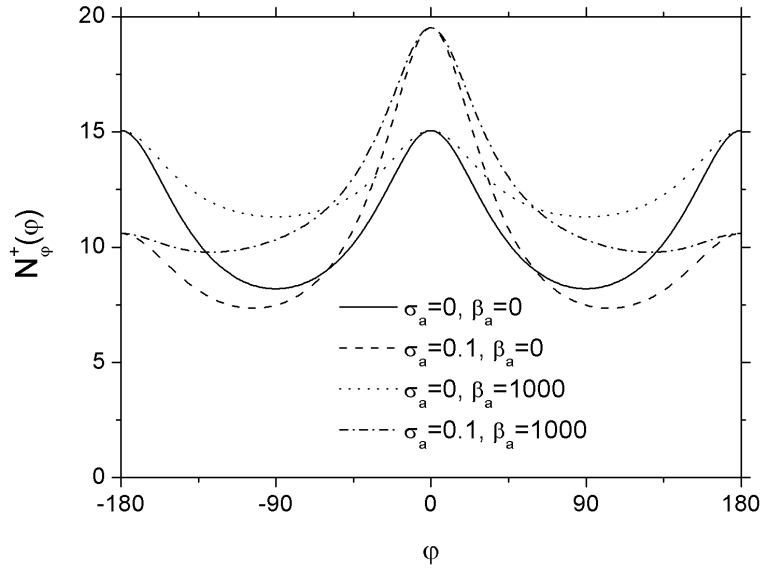
Sa $N_{\vartheta|A,\dot{A}}^+(\varphi | a, \dot{a})$ označili smo srednji broj osnih preseka za konstantne vrednosti amplitude i izvoda

kosinusnog signala, tj izraz (4.32) iz odeljka 3.3. Zamenom (4.42) i (4.32) u (4.43) dobijamo

$$\begin{aligned}
 N_{\vartheta}^+(\varphi) &= \frac{\sqrt{\beta_{\varphi}}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\beta_a} \sigma_a^2 \sigma_{\varphi}} \\
 &\times \int_0^{+\infty} a \exp \left[-a^2 \left(\frac{1}{2\sigma_a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\sigma_{\varphi}^2} \right) \right] \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sigma_{\varphi} \sqrt{2}} \right) \right] da \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\dot{a}^2 \left(\frac{1}{2\beta_a} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\beta_{\varphi}} \right) \right] g \left(-\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_{\varphi}}} \right) d\dot{a}.
 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Podsetimo se da smo sa $g(s)$ označili sledeću pomoćnu funkciju (izraz (4.9))

$$g(s) = 1 + \sqrt{\pi} s \exp(s^2) (1 + \operatorname{erf}(s)).$$



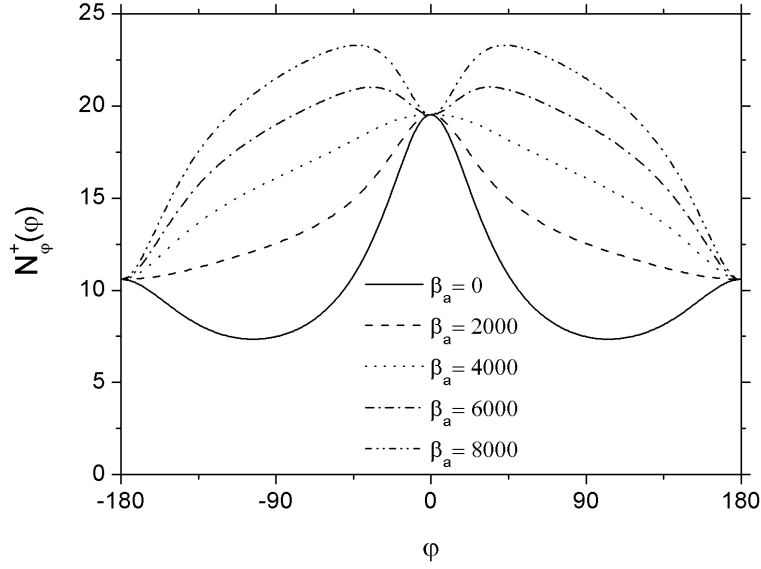
SLIKA 4.10. Grafik funkcije $N_{\vartheta}^+(\varphi)$ za različite vrednosti σ_a i β_a

Oba integrala u predhodnom izrazu mogu da se izračunaju u zatvorenom obliku (detalji su prikazani u dodatku). Rešavanjem ovih integrala dobijamo sledeći izraz za srednji broj osnih preseka

$$N_{\vartheta}^+(\varphi) = \frac{\sqrt{\beta_{\varphi} + \beta_a \sin^2 \varphi}}{4\pi \sigma_{\varphi}} \left(1 + \frac{\sigma_2 \sigma_a}{\sigma_{\varphi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_a^2}} \cos \varphi \right) \left(1 + \frac{\sigma_a^2 \sin^2 \varphi}{\sigma_{\varphi}^2} \right)^{-1}. \quad (4.45)$$

Na slici 4.10 prikazani su grafici funkcije $N_{\vartheta}^+(\varphi)$ različite vrednosti parametara β_a i σ_a . Praktično, prvi slučaj kada je $\sigma_a = 0.001$ a $\beta_a = 1$ zanemarljivo se razlikuje od slučaja kada je $\beta_a = \sigma_a = 0$, odnosno kada nema kosinusnog signala. U ostalim slučajevima najpre je $\sigma_a \gg 0$ onda $\beta_a \gg 0$ i na kraju su oba parametra veća od 0.

Na slikama 4.11 i 4.12 prikazan je uticaj parametra σ_a odnosno β_a na $N_{\vartheta}^+(\varphi)$. Vrednosti parametara β_a odnosno σ_a su 0.1 odnosno 1000.

SLIKA 4.11. Grafik funkcije $N_\varphi^+(\varphi)$ za različite vrednosti σ_a i $\beta_a = 1000$.

4.6 Uslovne gustine raspodele anvelope i izvoda faze kada je amplituda $A(t)$ Rayleigh-ev proces

U ovom odeljku odredićemo uslovne verovatnoće amplitude i izvoda faze za slučaj kada je $A(t)$ Rayleigh-ev proces.

Podsetimo se da je uslovna PDF $p_{R|\varphi_0+}(r_0)$ definisana na sledeći način

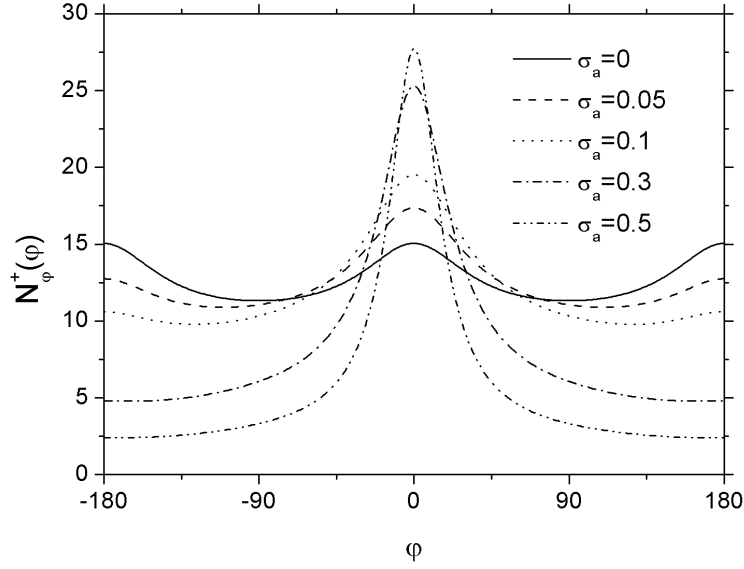
$$p_{R|\varphi_0+}(r_0) = \frac{\int_0^{+\infty} \dot{\varphi} p_{R\vartheta\dot{\varphi}}(r_0, \varphi_0, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}}{N_\varphi^+(\varphi)} = \frac{I(r_0, \varphi_0)}{N_\varphi^+(\varphi)}. \quad (4.46)$$

Srednji broj osnih preseka $N_\varphi^+(\varphi)$ smo za posmatrani slučaj već odredili u predhodnom odeljku (relacija (4.45)). Ostaje nam još da izračunamo $I(r_0, \varphi_0)$. U odeljku 4.2 pokazali smo da za konstantne vrednosti amplitude i izvoda (a i $\dot{a}$) kosinusnog signala važi sledeći izraz

$$I(r, \varphi | a, \dot{a}) = \frac{\beta_\varphi^{1/2}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2} g \left(-\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_\varphi}} \right) \exp \left(-\frac{\sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} r^2 + \frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2} r - \frac{a^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_\varphi} \right).$$

Kao i u slučaju srednjeg broja osnih preseka (predhodni odeljak) i ovde odredjujemo $I(r, \varphi)$ usrednjavanjem uzimajući u obzir JPDF $p_{A,\dot{A}}(a, \dot{a})$ procesa $A(t)$ i $\dot{A}(t)$ definisanu izrazom (4.42). Prema tome važi

$$\begin{aligned} I(r, \varphi) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} I(r, \varphi | a, \dot{a}) p_{A,\dot{A}}(a, \dot{a}) da d\dot{a} \\ &= \frac{\beta_\varphi^{1/2}}{(2\pi)^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_a^2 \sqrt{\beta_a}} \exp \left(-\frac{\sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} r^2 \right) \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} a \exp \left(\frac{r \cos \varphi}{\sigma_1^2} a - \frac{a^2}{2\sigma_{1a}^2} \right) da \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_\varphi} - \frac{\dot{a}^2}{2\beta_a} \right) g \left(-\frac{\dot{a} \sin \varphi}{\sqrt{2\beta_\varphi}} \right) d\dot{a}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

SLIKA 4.12. Grafik funkcije $N_{\vartheta}^{+}(\varphi)$ za različite vrednosti β_a i $\sigma_a = 0.1$.

Ovde smo označili $\sigma_{1a} = \sqrt{1/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_a^2)}$. Oba integrala u predhodnom izrazu (4.47) mogu da se reše u zatvorenom obliku i imaju sledeće vrednosti

$$\sigma_{1a}^2 g\left(\frac{r\sigma_a \cos \varphi}{\sigma_1 \sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_a^2)}}\right),$$

$$\sqrt{\frac{2\pi\beta_a(\beta_{\varphi} + \beta_a \sin^2 \varphi)}{\beta_{\varphi}}}.$$

Detalji vezani za rešavanje ovih integrala dati su u dodatku. Zamenom i sredjivanjem dobijamo sledeći izraz

$$I(r, \varphi) = \frac{\sigma_1 \sqrt{\beta_{\varphi} + \beta_a \sin^2 \varphi}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_2 (\sigma_1^2 + \sigma_a^2)} \exp\left(-\frac{\sigma_{\varphi}^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} r^2\right) g\left(\frac{r\sigma_a \cos \varphi}{\sigma_1 \sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_a^2)}}\right).$$

Iz (4.6) i (4.45) direktno dobijamo uslovnu PDF $p_{R|\varphi+}(r)$ procesa anvelope $R(t)$

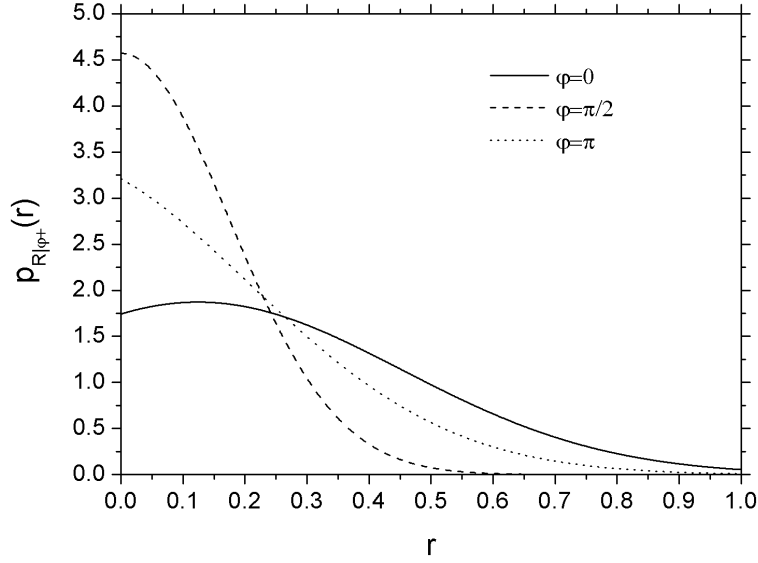
$$p_{R|\varphi+}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_1 (\sigma_{\varphi}^2 + \sigma_a^2 \sin^2 \varphi)}{\sigma_2 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_a^2} (\sigma_{\varphi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_a^2} + \sigma_2 \sigma_a \cos \varphi)} \times \exp\left(-\frac{\sigma_{\varphi}^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} r^2\right) g\left(\frac{r\sigma_a \cos \varphi}{\sigma_1 \sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_a^2)}}\right). \quad (4.48)$$

Na slici 4.13 prikazan je grafik funkcije $p_{R|\varphi+}(r)$ za tri različite vrednosti nivoa faze φ i $\sigma_a = 0.1$.

Sledeći cilj je određivanje uslovne PDF $p_{\dot{\vartheta}|\varphi+}(\dot{\varphi})$ izvoda faze $\vartheta(t)$. Podsetimo se da je $p_{\dot{\vartheta}|\varphi+}(\dot{\varphi})$ definisana sledećim izrazom

$$p_{\dot{\vartheta}|\varphi+}(\dot{\varphi}) = \frac{\dot{\varphi} p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})}{N_{\vartheta}^{+}(\varphi)}.$$

Pošto smo odredili PLCR preostaje nam još da odredimo JPDP $p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi})$ procesa faze i izvoda faze za posmatrani slučaj.

SLIKA 4.13. Grafik funkcije $p_{R|\varphi+}(r)$ za $\sigma_a = 0.1$.

U odeljku 4.2 izračunali smo ovu JPDP za konstantne a i $\dot{a}$ i pritom dobili sledeći izraz (4.23)

$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}|A,\dot{A}}(\varphi, \dot{\varphi}|a, \dot{a}) = \frac{1}{4(\pi a_{\varphi, \dot{\varphi}})^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \beta_{\varphi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\dot{a}^2 \sin^2 \varphi}{2\beta_{\varphi}}\right) f\left(\frac{a \cos \varphi}{\sigma_1^2 a_{\varphi \dot{\varphi}}^{1/2} \sqrt{2}} - \frac{\dot{a} \dot{\varphi} \sin \varphi}{\beta_{\varphi} a_{\varphi \dot{\varphi}}^{1/2} \sqrt{2}}\right). \quad (4.49)$$

Podsetimo se da smo $f(s)$ i $a_{\varphi \dot{\varphi}}$ definisali u izrazu (4.22) na sledeći način

$$f(s) = 2s + \sqrt{\pi}(1 + 2s^2) \exp(s^2)(1 + \operatorname{erf}(s)),$$

$$a_{\varphi \dot{\varphi}} = \frac{\dot{\varphi}^2}{\beta_{\varphi}} + \frac{\sigma_{\varphi}^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}.$$

Traženu JPDP računamo slično kao u slučaju $I(r, \varphi)$ odnosno PLCR $N_{\vartheta}^+(\varphi)$

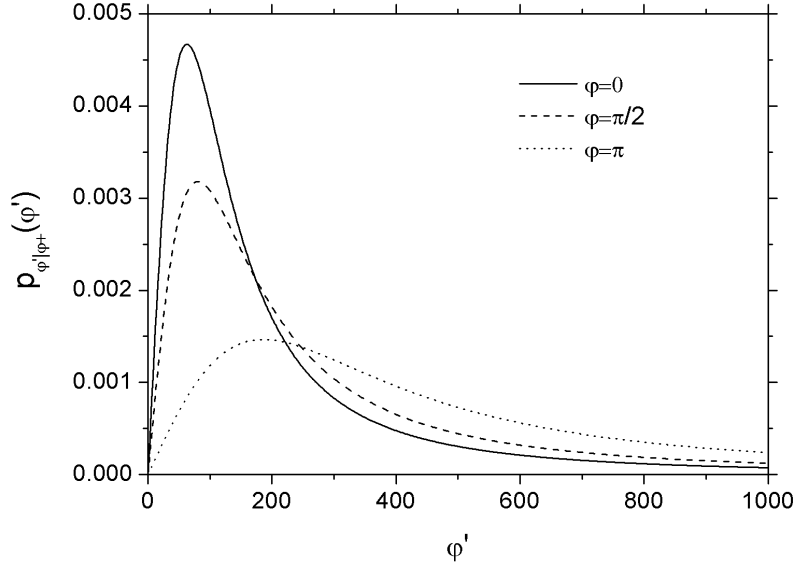
$$p_{\vartheta\dot{\vartheta}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\vartheta\dot{\vartheta}|A,\dot{A}}(\varphi, \dot{\varphi}|a, \dot{a}) p_{A,\dot{A}}(a, \dot{a}) da d\dot{a}. \quad (4.50)$$

Nažalost ovaj integral nije moguće odrediti u zatvorenom obliku. Iz predhodnog izraza moguće je dobiti PDF izvoda faze (FM šuma) na isti način kao u odeljku 3.2. Pritom je potrebno numerički računati tri integrala za svaku vrednost $\dot{\varphi}$ što umnogome povećava vreme potrebno za izračunavanje.

Na slici 4.14 prikazan je grafik funkcije $p_{\dot{\vartheta}|\varphi+}(\dot{\varphi})$, pri čemu je integral u izrazu 4.50 računat numerički. Vrednosti parametara σ_a i β_a su redom 0.1 i 1000.

4.7 Srednji broj osnih preseka anvelope

U naredna dva odeljka računamo statistike drugog reda procesa anvelope $R(t)$ za složeni signal koji proučavamo u ovoj glavi. Ograničićemo se na slučaj kada je amplituda kosinusnog signala A konstantna i jednaka a . Tada je $\dot{a} = 0$. Ova pretpostavka će važiti kako u ovom tako i u narednom

SLIKA 4.14. Grafik funkcije $p_{\varphi|\varphi+}(\varphi')$, za $\sigma_a = 0.1$ i $\beta_a = 1000$

odeljku. Podsetimo se da srednji broj osnih preseka (LCR) procesa $R(t)$ kao i srednje vreme trajanja fedinga (ADF) računamo na osnovu sledećeg izraza

$$N_R^+(r) = \int_0^{+\infty} \dot{r} p_{R\dot{R}}(r, \dot{r}) d\dot{r}, \quad T_{R-}(r) = \frac{F_R(r)}{N_R^+(r)}. \quad (4.51)$$

Da bi odredili LCR korišćenjem predhodnog izraza potrebno je najpre da nadujemo JPDP $p_{R\dot{R}}(r, \dot{r})$ procesa $R(t)$ i $\dot{R}(t)$.

Polazimo od JPDP procesa $R(t), \dot{R}(t), \vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)$ definisane izrazom (4.14). Zamenom $\dot{a} = 0$ dobijamo

$$p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{r^2}{4\pi^2 \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_1 \beta_2}} \exp \left\{ -\frac{(r \cos \varphi - a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2} - \frac{(\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}{2\beta_1} - \frac{(\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2}{2\beta_2} \right\}.$$

Najpre odredjujemo JPDP procesa $R(t), \dot{R}(t)$ i $\vartheta(t)$ integraljenjem izraza (4.14) po promenljivoj $\dot{\varphi}$. Izraz (4.14) možemo predstaviti u sledećem obliku kao funkciju promenljive $\dot{\varphi}$

$$p_{R\dot{R}\vartheta\dot{\vartheta}}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = M_1 \exp(-a_1 \dot{\varphi}^2 + b_1 \dot{\varphi} + c_1) \quad (4.52)$$

Parametri a_1, b_1, c_1 i M odredjeni su sledećim izrazima

$$M_1 = \frac{r^2}{8\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sigma_1 \sigma_2}, \quad a_1 = r^2 \frac{\beta_\varphi}{2\beta_1 \beta_2}, \quad b_1 = r \dot{r} \frac{(\beta_2 - \beta_1) \sin(2\varphi)}{2\beta_1 \beta_2}, \quad (4.53)$$

$$c_1 = -\frac{a^2}{2\sigma_1^2} + \frac{ar \cos \varphi}{\sigma_1^2} - \dot{r}^2 \frac{\beta_\varphi}{2\beta_1 \beta_2} - r^2 \frac{\sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2}.$$

Integraljenjem izraza (4.52) po promenljivoj $\dot{\varphi}$ u granicama od $-\infty$ do $+\infty$, zamenom konstanti (4.53)

i sredjivanjem dobijamo

$$p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) = \frac{r \exp \left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2} + \frac{ar \cos \varphi}{\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} - \frac{\dot{r}^2}{2\beta_\varphi} \right)}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\beta_\varphi}}. \quad (4.54)$$

Sledeći korak bi trebao da bude integracija izraza (4.54) po promenljivoj φ . Međutim čak i u slučaju $a = 0$, kao što smo videli u odeljku 3.6, integral nije moguće odrediti u zatvorenom obliku. Zbog toga ćemo zameniti redosled integrala kao u odeljku 3.6 i srednji broj osnih preseka računaćemo kao

$$N_R^+(r) = \int_{-\pi}^{\pi} I_1(r, \varphi) d\varphi, \quad (4.55)$$

gde je $I_1(r, \varphi)$ definisano na sledeći način

$$I_1(r, \varphi) = \int_0^{+\infty} \dot{r} p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) d\dot{r}.$$

Sada pristupamo računanju izraza $I_1(r, \varphi)$. Primetimo da se $p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi)$ može na sledeći način napisati kao funkcija $\dot{r}$:

$$p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) = M_2 \exp(-a_2 \dot{r}^2 + b_2), \quad (4.56)$$

gde su parametri M_2, a_2 i b_2 definisani sledećim izrazima

$$M_2 = \sqrt{\frac{2\pi\beta_1\beta_2}{r^2\beta_\varphi}}, \quad a_2 = \frac{1}{2\beta_\varphi}, \quad b_2 = -\frac{(a - r \cos \varphi)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2}. \quad (4.57)$$

Integracijom izraza (4.56), zamenom vrednosti parametara i sredjivanjem dobija se

$$I_1(r, \varphi) = \frac{\sqrt{\beta_\varphi} r \exp \left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2} + \frac{ar \cos \varphi}{\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sigma_\varphi^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right)}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2}. \quad (4.58)$$

Zamenom u (4.55) dobijamo sledeći izraz za $N_R^+(r)$

$$N_R^+(r) = \frac{r}{2\sqrt{2}\pi^{3/2} \sigma_1 \sigma_2} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left(-\frac{(a - r \cos \varphi)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2} \right) \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.59)$$

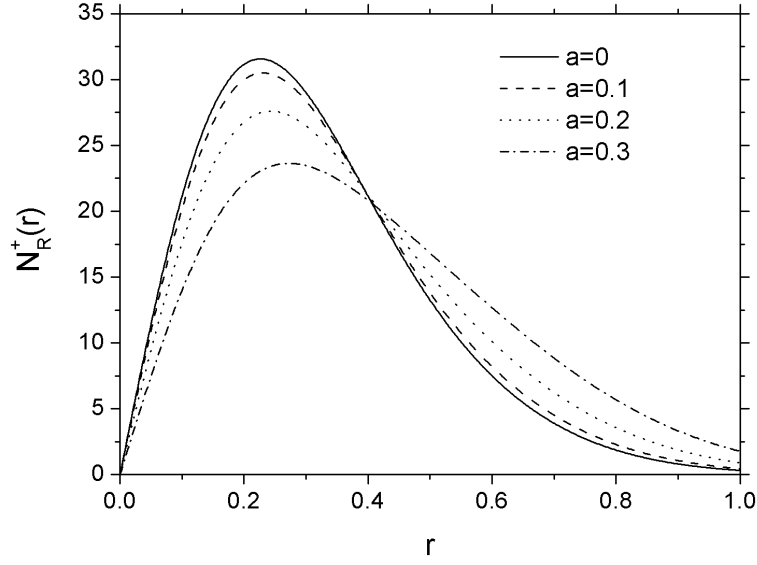
Integral u izrazu (4.59) nije moguće odrediti u zatvorenom obliku. To je moguće uraditi u nekim specijalnim slučajevima o čemu će biti reči u narednom odeljku.

Na slici 4.15 prikazan je grafik funkcije $N_R^+(r)$ za različite vrednosti parametra a .

Srednje vreme trajanja fedinga $T_{R-}(r)$ računa se direktno zamenom (4.59) u definicioni izraz.

Razmotrimo sada izraz (4.59) za srednji broj osnih preseka procesa $R(t)$ u nekoliko specijalnih slučajeva. Najpre ćemo posmatrati slučaj kada nema kosinusnog signala, odnosno kada je $a = 0$. U tom slučaju izraz (4.59) svodi se na izraz (3.29) za Nakagami- q feding

$$N_R^+(r) = \frac{r}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right\} \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.60)$$

SLIKA 4.15. Grafik funkcije $N_R^+(r)$ za različite vrednosti parametra a .

Zamenom vrednosti $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ u predhodni izraz (4.60) dobijamo

$$\begin{aligned} N_R^+(r) &= \frac{r\sqrt{\beta}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}\sigma_1\sigma_2} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2}\right) d\varphi \\ &= \frac{r\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{r^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{4\sigma_1^2\sigma_2^2}\right\} I_0\left(\frac{r^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}{4\sigma_1^2\sigma_2^2}\right). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ukoliko je $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ zamenom u (4.60) dobijamo

$$\begin{aligned} N_R^+(r) &= \frac{r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}\sigma^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi)} d\varphi \\ &= \frac{r\sqrt{2\beta_2}}{\pi^{3/2}\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) E\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Pritom su $I_0(\cdot)$ i $E(\cdot)$ redom modifikovana Bessel-ova funkcija nultog reda i kompletan eliptički integral definisan pomoću

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x \cos^2 \theta)^{1/2} d\theta. \quad (4.63)$$

Primitimo da su izrazi (4.61) i (4.62) suštinski različiti što potvrđuje činjenicu da se u opštem slučaju integrali u (4.59) i (4.60) ne mogu rešiti u zatvorenom obliku.

Razmotrimo sada slučaj kada je $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ i $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, odnosno kada komponente $X_1(t)$ i $X_2(t)$ odgovaraju Rayleigh-evom procesu. Zamenom u (4.59) dobijamo

$$\begin{aligned} N_R^+(r) &= \frac{r\sqrt{\beta}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}\sigma^2} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{a^2 - 2ar \cos \varphi + r^2}{2\sigma^2}\right) d\varphi \\ &= \frac{r\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Za $a = 0$ predhodni izraz se svodi na izraz (3.30) za Rayleigh-ev feding odredjen u odeljku 3.6.

Na kraju ovog odeljka odredićemo aproksimativni izraz za $N_R^+(r)$ koji važi za male vrednosti promenljive r . Iz (4.59) dobija se $N_R^+(0) = 0$. Za male vrednosti r kvadratni član u eksponentu u izrazu (4.59) može se zanemariti, pa prema tome važi sledeća aproksimacija

$$\exp\left(-\frac{(a - r \cos \varphi)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2}\right) \approx \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) \left(1 + \frac{ar}{\sigma_1^2} \cos \varphi\right).$$

Zamenom aproksimacije u (4.59) dobijamo sledeći približni izraz za $N_R^+(r)$

$$N_R^+(r) = \frac{r \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right)}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{ar}{\sigma_1^2} \cos \varphi\right) \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.65)$$

Primetimo da je integral

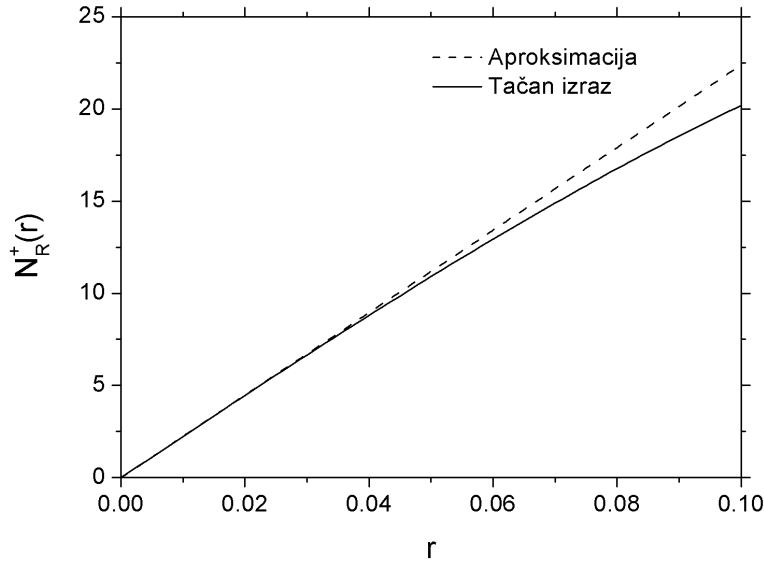
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi \sqrt{\beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

jednak nuli kao integral neparne funkcije na simetričnom segmentu. Zamenom u (4.65) dobijamo

$$N_R^+(r) = \frac{r \sqrt{2\beta_2}}{\pi^{3/2} \sigma_1^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_1 \sigma_2}\right) E\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right). \quad (4.66)$$

Predhodni izraz je veoma sličan izrazu (4.62). Ova aproksimacija je trećeg reda, tj. važi da je razlika između tačne i približne vrednosti za $N_R^+(r)$ kada $r \rightarrow 0$ jednaka $O(r^3)$.

Na slici 4.16 prikazan je grafik funkcije $N_R^+(r)$ i aproksimacije date izrazom (4.66).



SLIKA 4.16. Približna (isprekidana linija) i tačna (puna linija) formula za $N_R^+(r)$ i vrednost parametra $a = 0.1$

4.8 Generalisani srednji broj osnih preseka anvelope

Srednji broj osnih preseka anvelope $R(t)$ predstavlja srednji broj preseka trajektorije ovog procesa sa pravom $y = r$ u pozitivnom smeru u jedinici vremena. Ova definicija može da se generalizuje na sledeći način. Posmatraćemo srednji broj preseka trajektorije procesa $R(t)$ sa pravom $y = r$ u jedinici

vremena pri čemu je u trenutku preseka faza $\vartheta(t)$ u tačno definisanim granicama tj $\varphi_1 \leq \vartheta(t) \leq \varphi_2$. Ovaj broj označićemo sa $N_{R|\vartheta}^+(r; \varphi_1, \varphi_2)$ i nazvaćemo ga *generalisani srednji broj osnih preseka* (GLCR - *Generalized Level Crossing Rate*).

Sličnu generalizaciju srednjeg broja osnih preseka faze (GPLCR) prvi put je posmatrao Rice u radu [14] kada je razmatrao problem klik šuma u FM sistemima. U radu [4] autori su posmatrali GPLCR za Nakagami- m kanal. U ovom odeljku izvešćemo GLCR anvelope $R(t)$ za složeni signal koji posmatramo u ovoj glavi. Imamo da se GLCR anvelope izračunava primenom sledećeg izraza [4]

$$N_{R|\vartheta}(r; \varphi_1, \varphi_2) = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{+\infty} \dot{r} p_{R\dot{R}\vartheta}(r, \dot{r}, \varphi) d\dot{r} d\varphi}{F_{\vartheta}(\varphi_2) - F_{\vartheta}(\varphi_1)} = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I_1(r, \varphi) d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p_{\vartheta}(\varphi) d\varphi} \quad (4.67)$$

Označićemo sa $F_{\vartheta}(\varphi)$ CDF procesa faze $\vartheta(t)$. Takodje, u slučaju kada $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, razmotrićemo graničnu vrednost za $N_{R|\vartheta}(r; \varphi_1, \varphi_2)$.

Podsetimo se da je PDF faze $p_{\vartheta}(\varphi)$ definisana izrazom (4.8)

$$p_{\vartheta}(\varphi) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\pi \sigma_{\varphi}^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_1^2}\right) g\left(\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_{\varphi} \sigma_1 \sqrt{2}}\right).$$

Odgovarajuću CDF faze dobijamo integracijom predhodnog izraza po promenljivoj φ . Nažalost ovaj integral nije moguće odrediti u zatvorenom obliku. Kao što smo već videli, isto važi i za integral u brojiocu.

U zatvorenom obliku možemo da izračunamo malo drugačiju generalizaciju srednjeg broja osnih preseka. Posmatrajmo vrednost GLCR kada $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$. To je zapravo uslovni LCR procesa anvelope $R(t)$ uslovljen vrednošću faze $\vartheta(t) = \varphi$. Ako označimo $\varphi = \varphi_1$ i posmatramo graničnu vrednost izraza (4.67) kada φ_2 teži φ , primenom L'Hospital-ove teoreme dobijamo sledeću graničnu vrednost

$$N_{R|\vartheta}(r | \varphi) = \lim_{\varphi_2 \rightarrow \varphi} \frac{\int_{\varphi}^{\varphi_2} I_1(r, u) du}{F_{\vartheta}(\varphi_2) - F_{\vartheta}(\varphi)} = \frac{I_1(r, \varphi)}{p_{\vartheta}(\varphi)}. \quad (4.68)$$

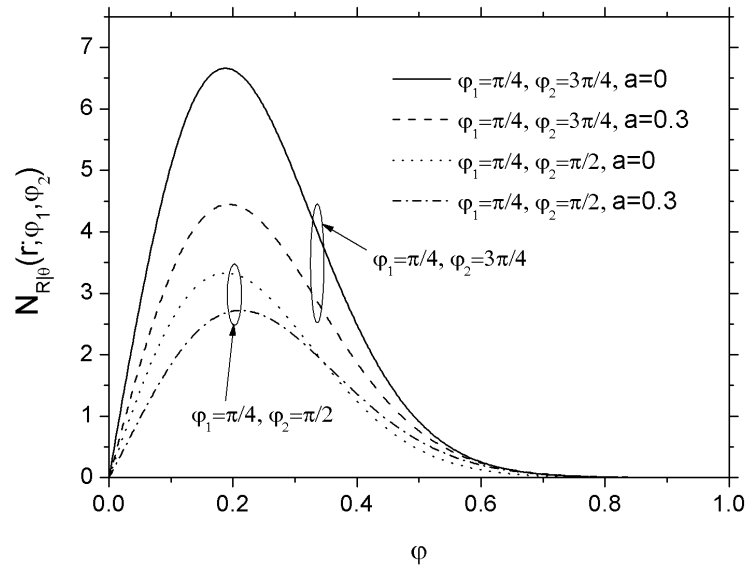
Sada zamenom izračunatih izraza za brojioc (4.58) i imenioc (4.8) dobijamo sledeći izraz u zatvorenom obliku

$$N_{R|\vartheta}(r | \varphi) = \frac{r\sigma_{\varphi}\sqrt{\beta_{\varphi}} \exp\left(-\frac{(a - r \cos \varphi)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_{\varphi}^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_2^2}\right)}{\sigma_1 \sigma_2 \pi \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a\sigma_2 \cos \varphi}{\sigma_1 \sqrt{2}\sigma_{\varphi}}\right)\right)}. \quad (4.69)$$

Napomenimo da se u slučaju Rayleigh-evog fedinga ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$ i $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$) predhodni izraz uprošćava na sledeći način

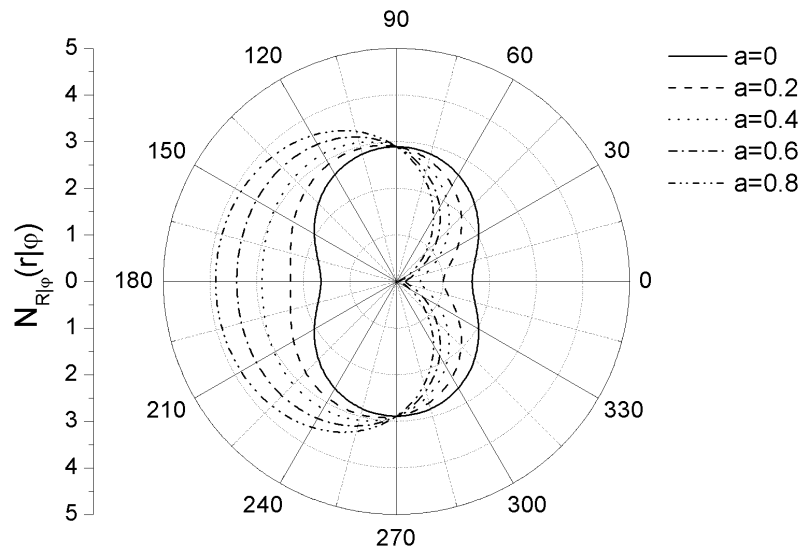
$$N_{R|\vartheta}(r | \varphi) = \frac{r\sqrt{\beta} \exp\left(-\frac{(a \cos \varphi - r)^2}{2\sigma^2}\right)}{\pi \sigma \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)}$$

Na slici 4.17 prikazan je grafik funkcije $N_{R|\vartheta}(r | \varphi_1, \varphi_2)$ u četiri različita slučaja. Vidimo da su grafici veoma slični graphicima sa slike 4.15.

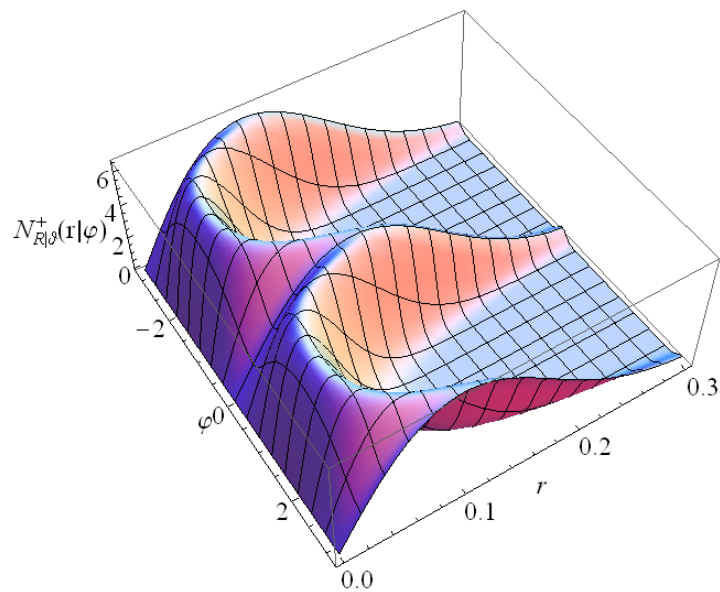
SLIKA 4.17. Grafik funkcije $N_{R|\vartheta}(r | \varphi_1, \varphi_2)$

Videli smo da veličina $N_{R|\varphi}(r | \varphi)$ zapravo predstavlja uslovni srednji broj osnih preseka kada je $\vartheta(t) = \varphi$. Zbog same prirode ove veličine, logično je da posmatramo njen polarni grafik (slika 4.18) u zavisnosti od φ .

Na kraju prikazujemo 3D grafik funkcije $N_{R|\vartheta}(r | \varphi)$ na slici 4.19.



SLIKA 4.18. Grafik funkcije $N_{R|\varphi}(r|\varphi)$ za $a = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$, $r = 0.05$ u polarnom koordinatnom sistemu.



SLIKA 4.19. 3D grafik funkcije $N_{R|\vartheta}(r|\varphi)$ za $a = 0.1$

Glava 5

Zaključak

Osnovni problemi koji nastaju pri digitalnom prenosu podataka kroz bežični komunikacioni sistem su pojava fedinga i efekta senke. Signal se prostire po više putanja kroz bežični kanal, tako da na prijemu suma svih oslabljenih i zakasnelih kopija signala može rezultovati slabljenjem signala. Kada se mobilna jedinica kreće ili se javljaju prostorne promene u propagacionom okruženju, dolazi do promene rezultujuće amplitude i faze prijemnog signala. To takođe dovodi do slabljenja signala. Pod fedingom se podrazumevaju brze promene amplitude na malim rastojanjima kada za slabljenje usled prostiranja važi pretpostavka da je ono približno konstantno.

U ovom radu je razmatrano više modela fedinga i izvedene su najvažnije statističke karakteristike za ove modele. Pokazano je da slučajni karakter ovih pojava, posebno u prisustvu šumova i smetnji, dovodi do toga da se signal na prijemu ponaša kao slučajni proces. Iz tog razloga razvijeni su mnogi modeli mobilnih kanala koji omogućavaju da se na osnovu statistike procene performanse bežičnih sistema. Postoje različiti modeli procesa fedinga, kao npr. Rayleigh-ev, Rice-ov, Nakagami- m i Nakagami- q . Posebna pažnja posvećena je Nakagami- q modelu kao i Rayleigh-evom koji predstavlja specijalni slučaj Nakagami- q modela. Svaki od ovih modela ima primenu za određeni tip okruženja. Rayleigh-ev model se koristi u urbanim sredinama kada ne postoji LOS komponenta, pa se signal prostire samo putem refleksije, difrakcije i rasejanja. Rice-ov model je najviše u upotrebi kada se razmatraju satelitski sistemi i okruženje u kome postoji LOS (Line Of Sight) komponenta signala (npr. van gradova). Nakagami- q i Nakagami- m model imaju širok opseg primenljivosti i često se koriste zbog lake manipulacije.

Kada se procenjuju performanse sistema, najčešće se navodi verovatnoća greške pri korišćenju različitih modulacionih postupaka. Međutim, pri digitalnom prenosu podataka, feding primljenog signala dovodi do paketskih grešaka. Zbog toga je potrebno poznavati neke druge statističke osobine kanala. Na primer, da bi se pronašla optimalna dužina paketa, potrebno je odrediti srednje vreme trajanja fedinga (ADF). Takođe, za optimalni izbor kodova za korekciju greške, potrebno je poznavati koliko puta signal preseca određeni nivo u jedinici vremena (LCR). Zato je u ovom radu pomenutim statistikama drugog reda posvećena naročita pažnja.

Svi rezultati izloženi u ovom radu mogu se sistematizovati na sledeći način:

- A. Detaljno je opisan prenos signala u kanalima sa fedingom. Definisani su najvažniji modeli kanala sa fedingom i detaljno opisane njihove statističke karakteristike. Rezultati i zaključci do kojih smo došli, mogu se sistematizovati na sledeći način:

A.1. Najpre je opisan model prostiranja signala po više putanja. Detaljno je opisan Clarke-ov dvodimenzioni model [3], [12], [8]. Opisana je promena frekvencije signala na prijemu usled kretanja mobilnog prijemnika. Na osnovu ovih promena, i uz pretpostavku da postoji N različitih putanja po kojima se prostire signal, dati su izrazi za električno i magnetno polje signala na prijemu. Uz određene pretpostavke, pokazano je da signal na prijemu ima slučajni karakter pri čemu su amplitude direktne i ortogonalne komponente Gauss-ovi slučajni procesi.

A.2. Dat je prikaz osnovnih veličina koje opisuju kanal sa fadingom [8]. Pošto je utvrđeno da se signal na prijemu može modelirati slučajnim procesom, sve prikazane veličine predstavljaju statistike prvog i drugog reda odgovarajućih slučajnih procesa.

A.3. Opisan je Rayleigh-jev model fedinga [8], [17]. Ukazano je na primenu ovog modela kada između prijemnika i predajnika ne postoji linija optičke vidljivosti. Takođe je ukazano i na nekoliko praktičnih primena ovog modela.

A.4. Slično razmatranje obavljeno je i za Nakagami- q (Hoyt-ov) model kanala [7], [27], [28]. Ovaj model predstavlja uopštenje Rayleigh-evog modela i u praksi pokazuje bolje rezultate. Ukazano je na praktične primene Nakagami- q modela.

A.5. Statističke karakteristike prvog reda izvedene su zajedno za Nakagami- q i Rayleigh-ev model [28]. Ova dva modela su zajedno razmatrana zbog velike međusobne sličnosti i činjenice da je Rayleigh-ev model specijalni slučaj Nakagami- q modela. Polazeći od funkcija gustine raspodele (PDF) direktne i ortogonalne komponente signala, kao i uslova da su ove dve komponente signala nezavisne izvedeni su izrazi za PDF faze i anvelope. Ovi izrazi su razmatrani u nekoliko specijalnih i graničnih slučajeva. Data je i veza Nakagami- q i Nakagami- m modela, kao i drugi način predstavljanja funkcije raspodele anvelope [17] u kome figuriše parametar q .

A.6. Dalje je opisan Rice-ov model koji je u upotrebi kada između prijemnika i predajnika postoji linija optičke vidljivosti. Izvedeni su izrazi za statistike prvog reda i ukazano je na nekoliko primena.

A.7. Na kraju je izložen Nakagami- m model. Ukazano je na činjenicu da je ovaj model empirijski i da se pokazao veoma primenljivim u mnogim situacijama. Dat je izraz za PDF anvelope kao i dva načina za izvodjenje ovog izraza [10], [25]. Ova dva načina ustvari predstavljaju modele određenih prenosnih sistema u kojima anvelopa signala ima Nakagami- m raspodelu. Kao što je već konstatovano, Nakagami- m model ima mnogo šire primene. Drugi način za izvodjenje PDF anvelope (drugi model) [25] je novijeg datuma i daje PDF kako anvelope tako i faze.

B. Izvedeni su izrazi za statistike drugog reda faze i anvelope za kanal sa Nakagami- q fadingom. Svi dobijeni izrazi dati su i za slučaj Rayleigh-evog fedinga. Ovi rezultati su novijeg datuma i mahom su preuzeti iz [27] i [28] a ima jedan broj novih rezultata. Dobijeni rezultati i zaključci mogu se sistematizovati na sledeći način:

B.1. Najpre su definisane statistike drugog reda nekog slučajnog procesa. Navedeno je nekoliko primena statistika drugog reda faze i anvelope.

B.2. Izveden je izraz za združenu funkciju gustine verovatnoće (JPDF) faze i izvoda faze (FM šum). Razmatrana je i PDF slučajnog FM šuma za koju izraz, nažalost, nije moguće

odrediti u zatvorenom obliku. To je moguće za slučaj Rayleigh-evog fedinga i odgovarajući izraz u zatvorenom obliku je dat.

B.3. Korišćenjem predhodno izvedenog izraza za JPDF faze i izvoda odredjen je srednji broj osnih preseka faze (PLCR). Razmatrano je i nekoliko specijalnih slučajeva kao i slučaj kada su Doppler-ove frekvencije procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ jednake. U tom slučaju dobijen je identičan izraz kao za Rayleigh-ev feding, odnosno pokazano je da je PLCR faze konstantan.

B.4. Izračunate su uslovne gustine anvelope i izvoda faze, uslovljene vrednošću procesa faze. Svi izrazi su dobijeni u zatvorenom obliku. I ovde je razmotreno nekoliko specijalnih slučajeva. Posmatran je uticaj maksimalnih Doppler-ovih frekvencija procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ na ove uslovne gustine. Ove veličine imaju značajnu ulogu u projektovanju FM prijemnika.

B.5. Dalje se pristupilo računanju statistika drugog reda anvelope. Najpre je odredjena JPDF anvelope i izvoda. Integral po vrednosti procesa faze koji figuriše u ovom izrazu nije moguće rešiti u zatvorenom obliku u opštem slučaju. To je moguće za slučaj Rayleigh-evog fedinga kada su procesi faze i izvoda faze nezavisni. Ovaj zaključak ne važi za Nakagami-q feding.

B.6. Iako izraz za JPDF anvelope i izvoda nije bilo moguće izračunati u zatvorenom obliku u opštem slučaju, za srednji broj osnih preseka (LCR) je dobijen izraz u zatvorenom obliku. Takodje je izveden izraz za srednje vreme trajanja fedinga (ADF).

- C. Statistike prvog i drugog reda su računate za zbir kosinusnog talasa i Nakagami-q signala. Ovi rezultati su originalni i preuzeti iz naših radova [18], [19] i [20]. Ovaj signal praktično predstavlja generalizaciju signala na izlazu kanala sa Rice-ovim fedingom.

C.1. Najpre je definisan model i izračunate su statistike prvog reda složenog signala. Svi izrazi su izvedeni pod pretpostavkom da je amplituda kosinusnog signala konstantna. Analizirano je i nekoliko specijalnih slučajeva i pokazano da se u slučaju nulte amplitude dobijeni izrazi svode na odgovarajuće izraze za Nakagami-q feding.

C.2. Nakon toga izveden je izraz za JPDF faze i izvoda faze složenog signala. Ovaj izraz je izveden pod pretpostavkom da su amplituda i izvod amplitude u vremenu kosinusnog talasa konstantni. Ova pretpostavka ima fizičkog smisla samo u slučaju da je vrednost izvoda amplitude jednaka nuli, odnosno tada dobijamo slučaj konstantne amplitude. Međutim sa druge strane, izveden izraz predstavlja uslovnu JPDF za odredjenu vrednost amplitude i izvoda i samim tim nam omogućava računanje statistika drugog reda u slučaju promenljive amplitude.

C.3. Izraz u zatvorenom obliku izveden je i za srednji broj osnih preseka faze složenog signala. Razmotreno je nekoliko specijalnih slučajeva i pokazano da se u odgovarajućem specijalnom slučaju ovaj izraz svodi na izraz za PLCR Nakagami-q fedinga. Diskutovan je slučaj kada su maksimalne Doppler-ove frekvencije procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ jednake. Pokazano je da je PLCR konstantan jedino u slučaju kada nema kosinusnog talasa.

C.4. Odredjene su i uslovne gustine anvelope i izvoda faze, uslovljene vrednošću procesa faze. I ovde je posmatran uticaj maksimalnih Doppler-ovih frekvencija procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ i dobijeni su slični rezultati, kao i u slučaju Nakagami-q fedinga.

C.5. Srednji broj osnih preseka faze kao i uslovne gustine raspodele anvelope i faze određene su i u slučaju kada je amplituda kosinusnog signala Rayleigh-ev proces. Rezultati dobijeni za konstantnu amplitudu i izvod amplitude su usrednjeni korišćenjem odgovarajućih raspodela vrednosti i izvoda za Rayleigh-ev proces. Uslovnu gustinu raspodele izvoda faze, kao i JPDF faze i izvoda nije moguće dobiti u zatvorenom obliku.

C.6. U nastavku su razmatrane statistike drugog reda anvelope složenog signala. Sva izvodjenja vezana za anvelopu složenog signala izvedena su pod pretpostavkom da je amplituda kosinusnog talasa konstantna. Izveden je izraz za JPDF anvelope i izvoda. I ovde integral po vrednosti faze nije bilo moguće izračunati u zatvorenom obliku. Dalje je određen LCR anvelope gde takodje nije bilo moguće rešiti integral po vrednosti faze. Ovi integrali mogu da se reše u nekim specijalnim slučajevima, koji su ovde razmotreni.

C.7. Izračunat je takodje i generalisani srednji broj osnih preseka anvelope (GLCR) za složeni signal. Ova veličina predstavlja srednji broj osnih preseka anvelope kada je vrednost faze u određenom intervalu. Posmatran je i granični slučaj kada dužina ovog intervala teži nuli.

Na samom kraju ovog rada, napomenimo da bi dalja istraživanja ove problematike mogla da se odvijaju u sledećim pravcima:

1. Računanje statistika drugog reda anvelope za slučaj promenljive amplitude kosinusnog signala. Najpre bi bilo potrebno izvesti sve izraze za slučaj konstantne amplitude i izvoda kao što je to učinjeno za fazu, a zatim te izraze usrednjiti odgovarajućim raspodelama za amplitudu kosinusnog signala i njen izvod.
2. Izvodjenje statistika drugog reda za slučaj kada amplituda kosinusnog talasa i njen izvod imaju drugačije raspodele (npr. lognormalnu, itd.).
3. Analiza složenog signala koji se dobija kao zbir kosinusnog talasa i signala na izlazu kanala modeliranog nekim drugim modelom fedinga (npr. Nakagami- m , Weibull, itd.).
4. Izvodjenje statistika drugog reda za diverziti sisteme, pri čemu su sve grane kanali sa Nakagami- q fedingom. Detaljna analiza statistika drugog reda za diverziti sisteme i nekoliko modela fedinga (Rayleigh-ev, Rice-ov, Nakagami- m , Weibull-ov, itd.) data je npr. u [10]. Koliko je nama poznato, slična analiza za Nakagami- q model nije izvršena.
5. Analiza statistika drugog reda za složeni signal i diverziti sisteme. Napomenuli smo da jedna od komponenti složenog signala može da igra ulogu korisnog signala, dok je druga interferencija. Ovakav scenario može da nastane kod diverziti sistema kada postoji preslušavanje izmedju grana.

Dodatak A

Vrednosti korišćenih integrala

Svi navedeni izrazi važe u slučaju da su vrednosti parametara realni brojevi i da je parametar a pozitivan. Za računanje integrala korišćen je programski paket **MATHEMATICA** verzija 6.0.

1.

$$\int_0^{\infty} x(ax^2 + b)^{-3/2} dx = \frac{1}{a\sqrt{b}}$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx + c) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right)$$

3.

$$\int_0^{+\infty} x \exp(-ax^2 + bx + c) dx = \frac{\exp(c)}{2a} g\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$$

4.

$$\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2 + bx + c) dx = \frac{\exp(c)}{4a^{3/2}} f\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$$

5.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) g(-\sqrt{a}x) dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

6.

$$\int_0^{+\infty} x \exp(-ax^2) [1 + \operatorname{erf}(bx)] dx = \frac{1}{2a} \left[1 + \frac{b}{\sqrt{a + b^2}} \right]$$

Literatura

- [1] A. Annamalai, C. Tellambura, and V. K. Bhargava, *Simple and accurate methods for the outage analysis in cellular mobile radio systems—A unified approach*, IEEE Trans. Commun., vol. 49, pp. 3033-3046, Feb. 2001.
- [2] B. Chytil, *The distribution of amplitude scintillation and the conversion of scintillation indices*, J. Atmos. Terr. Phys., vol. 29, pp. 1175-1177, Sep. 1967.
- [3] R.H. Clarke, *A statistical theory of mobile radio reception*, Bell Syst. Tech. J., Vol. 47, pp. 957–1000, July 1968.
- [4] D. B. da Costa, M. D. Yacoub, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, J. R. Mendes, *Generalized Nakagami-m Phase Crossing Rate*, IEEE Comm. Letters, Vol. 10, No. 1, January 2006.
- [5] P. J. Crepeau, *Uncoded and coded performance of MFSK and DPSK in Nakagami fading channels*, IEEE Trans. Commun., vol. 40, no. 3, pp. 487-493, Mar. 1992.
- [6] I.B. David, S. Shamai, *On the Rice model of noise in FM receivers*, IEEE Trans. Commun., vol. 34, pp. 1406-1419, Nov. 1988.
- [7] R.S. Hoyt, *Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate*, Bell Syst. Tech. J., vol. 26, pp. 318-359, Apr. 1947.
- [8] W.C. Jakes, Ed., *Microwave Mobile Communications*, NJ, Wiley, 1997.
- [9] A. Mehrnia and H. Hashemi, *Mobile satellite propagation channel part II-A new model and its performance*, in Proc. IEEE Vehicle Technology Conf. (VTC99), Amsterdam, The Netherlands, pp. 2780-2784, Sep. 1999.
- [10] A. Mitić, *Statističke karakteristike signala u mobilnim telekomunikacionim diverziti sistemima*, Magistarska teza, Elektronski fakultet u Nišu, 2006.
- [11] M. Nakagami, *The m-distribution A general formula of intensity distribution of rapid fading*, in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*. New York: Pergamon, 1960, pp. 336.
- [12] J.D. Parsons, *The mobile radio propagation channel*, Pentech, London, UK, 1992.
- [13] M. Patzold *Mobile fading channels*, John Wiley and Sons, Ltd., England, 2002.
- [14] S.O. Rice, *Statistical properties of sine wave plus random noise*, Bell Syst. Tech. J., vol. 27, pp. 109-157, Jan. 1948.

- [15] S. O. Rice, *Noise in FM Receivers. ser. Time Series Analysis*, M. Rosenblatt, Ed. New York: Wiley, 1963, ch. 25.
- [16] M. K. Simon and M. S. Alouini, *A unified approach to the performance analysis of digital communication over generalized fading channels*, Proc. IEEE, vol. 86, pp. 1860-1877, Sep. 1998.
- [17] M.K. Simon, M.S. Alouini, *Digital communication over fading channels*, NJ, Wiley, 2005.
- [18] M. Stefanović, M.D. Petković, *Envelope Level Crossing Rate of Cosine Signal With Nakagami-q Interference*, TELSIKS 2007, Proceeding of papers, Vol. 2, pp. 533–536, Niš, Serbia, 2007.
- [19] M. Stefanović, M.D. Petković, *Phase level-crossing rate of cosine wave plus Nakagami-q signal*, biće objavljeno.
- [20] M. Stefanović, M.D. Petković, M.D. Milošević, *Envelope and phase derivative conditional PDFs of cosine wave plus Nakagami-q signal*, biće objavljeno.
- [21] G.L. Struber, *Principles of mobile communications*, 2nd ed. Kluwer, Norwell, MA, 2000.
- [22] C. X. Wang, N. Youssef, M. Patzold, *Level-crossing rate and average duration of fades of deterministic simulation models for Nakagami- Hoyt fading channels*, in Proc. WPMC02, Honolulu, HI, Oct., pp. 272276, 2002.
- [23] E. W. Weisstein, *Central Limit Theorem*, From MathWorld – A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CentralLimitTheorem.html>.
- [24] M.D. Yacoub, J.E.V. Bautista, L.G.R. Guedes, *On higher order statistics of Nakagami-m distribution*, IEEE Transactions on Vehicular Technology , Vol. 48, pp. 790–794, 1999.
- [25] M.D. Yacoub, G. Fraidenraich, J. Filho, *Nakagami-m phase-envelope joint distribution*, Electron. Lett., 41(5): 259–261, March 2005.
- [26] N. Youssef, T. Munakata, and T. Mimaki, *Level crossings of phase of sine wave plus Gaussian noise*, Jpn. J. Appl. Phys., vol. 32, no. 12A, pp. 58155822, Dec. 1993.
- [27] N. Youssef, W. Elbahri, M. Patzold, S. Elasami, *On the Crossing Statistics of Phase Processes and Random FM Noise in Nakagami-q Mobile Fading Channels*, IEEE Transactions on Wireless communication, Vol. 4, No. 1, January 2005.
- [28] N. Youssef, C.X. Wang, M. Patzold, *A study on the second order statistics of Nakagami-Hoyt mobile fading channels*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 54, No. 4, July 2005.