Gimnazija "Svetozar Marković", Niš
Dodatna nastava iz matematike za 3. i 4. razred
Subota, 21.10.2006

MATEMATIČKE IGRE

predavač: *Marko Petković*

1. Na stolu je ukupno M žetona. Marko i Marija naizmenično uzimaju sa stola odredjen broj žetona iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Prvi igra Marko. Naći vrednosti za M tako da Marko ima pobedničku strategiju.

2. Marija je u medjuvremenu otkrila Markovu pobedničku strategiju, pa je rešila da promeni pravila. Sada je dozvoljeno u jednom potezu uzeti sa stola p^n žetona gde je p prost broj (ili jedinica) a n prirodan broj. Pritom Marija je insistirala da ovaj put ona igra prva (ipak dame imaju prednost :)). Naći za koje sada vrednosti M Marija ima pobedničku strategiju.

3. Pošto im je dosadilo da se igraju sa žetonima, Marko i Marija su smislili novu igru. Dat je polinom: $x^{2n} + \square x^{2n-1} + \ldots + \square x + 1$ gde je $n > 1$. U svakom potezu, njih dvoje upisuju po jedan broj u svaki kvadratić. Ukoliko polinom koji se na taj način dobije ima bar jednu realnu nulu, pobednik je Marko, u suprotnom Marija. Igru zapocinje Marija (Marko je insistirao da i ovaj put dama treba da ima prednost ;)). Dokazati da Marko ima pobedničku strategiju.

4. Pošto je Marija shvatila zašto je Marko bio džentlmen pa je pustio da u prethodnoj igri prva igra, odlučila je da ponovo promeni pravila. Sada imamo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} \square x + \square y + \square z &= 0 \\ \square x + \square y + \square z &= 0 \\ \square x + \square y + \square z &= 0 \end{aligned}$$

u kome naizmenično njih dvoje upisuju po jedan broj. Marko je opet insistirao da dame imaju prednost, pa i ovu igru počinje Marija. Ukoliko krajnji sistem ima netrivijalna rešenja, pobedjuje Marko, u suprotnom Marija. Ko sad ima pobedničku strategiju?

5. Marko igra sledeću igru (ovaj put sam sa sobom, pošto ga je Marija ostavila :( ): U svakom potezu može ukloniti jednu ivicu grafa G, pri čemu ta ivica mora da pripada krugu dužine 4. Igra traje sve dok ima dozvoljenih poteza. Markov cilj je da na kraju dobije graf sa što manje ivica, a igru počinje sa kompletnim grafom K_n. Naći koliki je minimalan broj ivica grafa koji Marko može da postigne u ovoj igri.

6. Neka je $N > 0$ ma koji unapred zadan prirodan broj. Mujo i Haso (inace Markove komsije) igraju sledeću igru. Igru počinje Mujo ispisivanjem broja 1 na tabli. U svakom potezu igrač može da napiše na tabli $n + 1$ ili $2n$, pri čemu napisani broj ne sme biti veći od N. Pobednik je onaj koji napiše broj N. Naći ko ima pobedničku strategiju za različite vrednosti N.

7. Marija se ipak na kraju sažalila na jadnog Marka i odlučila da mu pruži još jednu priliku. Zamislila je neki polinom P čiji su koeficijenti iz skupa $\mathbb{N}_0$. Marko mora da odgonetne taj polinom u najviše m poteza. On u jednom potezu može da kaže ceo broj k, a Marija mu saopštava vrednost $P(k)$. Naći najmanji broj poteza m pomoću kog Marko sigurno može da pronadje polinom koji je Marija zamislila.

UPUTSTVA I REŠENJA ZADATAKA

1. Posmatraćemo nekoliko slučaja za "male" vrednosti broja M

$1 \leq M \leq k$. Marko uzima svih M žetona i pobedjuje.

$M = k+1$. Marko koji god broj žetona l da uzme, ostaje $M-l$ žetona, pri čemu je $1 \leq M-l \leq k$. Prema tome, Marija uzima svih $M - l$ preostalih žetona i pobedjuje.

$k+1 < M \leq 2k+1$. Ukoliko Marko uzme $M - k + 1$ žetona, na gomili će ostati tačno $k+1$ žetona, pa Marija ne može da pobedi (na osnovu prethodnog slučaja). Znači Marko pobedjuje.

$M = 2(k+1)$. Koji god broj žetona l da uzme, Marko gubi, jer na tabli preostaje $M-l$ žetona i važi $k+1 < M - l \leq 2k+1$.

Intuitivno zaključujemo da Marko gubi samo u slučaju da je $k+1 \mid M$. Dokažimo to.

Ako je $M = (k+1)q + r$, Markov prvi potez biće r žetona. Sada šta god Marija da odigra, na tabli ostaje $(k+1)(q-1) + r_1$ žetona (Marija je uzela $l = k+1-r_1$ žetona). Marko zatim uzima r_1 žetona i na tabli ponovo ostaje broj žetona deljiv sa $k+1$. Znači, posle svakog Marijinog poteza, broj žetona na tabli nije deljiv sa $k+1$, pa ne može biti nula. Prema tome, ukoliko se pridržava izložene strategije, Marko sigurno pobedjuje.

U slučaju $M = (k+1)q$, situacija je obrnuta u odnosu na prethodni slučaj, i analognim razmatranjem zaključujemo da Marija ima pobedničku strategiju.

2. Uočimo da su dozvoljeno uzeti 1, 2, 3, $4 = 2^2$ kao i 5 žetona, ali ne i 6. Uočimo sada da $6 \not| p^n$ ni za jedno $n \in \mathbb{N}$ i p prost. Na sličan način kao i u prethodnom zadatku pokazuje se da Marija ima pobedničku strategiju za $M \not\equiv_6 0$, a u suprotnom je ima Marko (ako je $M = 6k + r$, Marija uzima r žetona, zatim Marko koji god broj $l = p^n$ žetona da uzme, na tabli ostaje broj žetona koji nije deljiv sa 6, $M - p^n = 6k_1 + r_1$ pa Marija ponovo uzima ostatak r_1, itd...).

3. Očigledno, da će Marko odigrati $n-1$ potez a Marija n poteza. Opisaćemo strategiju kojom Marko dolazi do pobede. U prvih $n-2$ poteza Marko će upisivati proizvoljne brojeve trudeći se samo da obezbedi da poslednji Marijin potez bude upisivanje broja uz neparni eksponent (npr. upisuje samo brojeve uz parne eksponente, pošto ih ima $n-1$, a uz neparne n, Marija poslednji broj upisuje uz neparni). Neka je Marko upisao broj μ uz x^m svom poslednjem potezu, a Marija λ uz x^{2p+1}. Krajnji polinom možemo napisati na sledeći način:

$$Q(x) = P(x) + \mu x^m + \lambda x^{2p+1}$$

Pokazaćemo da Marko može tako da odabere vrednost μ, da Marija koju god vrednost λ odabrala, sigurno gubi, tj polinom $Q(x)$ ima bar jednu nulu. Neka su $r, s > 0$ različiti realni brojevi. Potražimo $Q(r)$ i $Q(-s)$:

$$Q(r) = P(r) + \mu r^m + \lambda r^{2p+1} Q(-s) \quad = P(-s) + (-1)^m s^m \mu - \lambda s^{2p+1}$$

Označimo $a = P(r)$ i $b = P(-s)$. Potražimo μ tako da je $Q(r)Q(-s) \leq 0$ za svako λ. Neka je $A = a + \mu r^m$ a $B = b + \mu(-s)^m$. Sada je:

$$Q(r)Q(-s) = (A + \lambda r^{2p+1})(B - \lambda s^{2p+1}) = AB + \lambda(r^{2p+1}B - s^{2p+1}A) - r^{2p+1}s^{2p+1}\lambda^2$$

Prethodni izraz je kvadratna jednačina po λ i jednak je 0 akko je odgovarajuća diskriminanta:

$$D = (r^{2p+1}B - s^{2p+1}A)^2 + 4r^{2p+1}s^{2p+1}AB = (r^{2p+1}B + s^{2p+1}A)^2$$

jednaka nuli. Znači, mora da važi $r^{2p+1}B + s^{2p+1}A$, odnosno:

$$r^{2p+1}b + s^{2p+1}a + \mu(r^{2p+1}s^m(-1)^m + s^{2p+1}r^m)$$

Odavde dobijamo da je:

$$\mu = -\frac{r^{2p+1}b + s^{2p+1}a}{r^{2p+1}s^m(-1)^m + s^{2p+1}r^m}$$

Znači, za ovako izabrano μ je $D = 0$, odnosno $Q(r)Q(-s) \leq 0$ za svako λ, pa na osnovu Teoreme o medjuvrednosti neprekidne funkcije, polinom $Q(x)$ ima bar jednu realnu nulu na segmentu $[-s, r]$. Time smo dokazali da Marko ima pobedničku strategiju.

5. Nazvaćemo graf G *dostižnim* ukoliko može da se dobije od kompletnog grafa K_n primenom konačnog broja poteza. Dokažimo da je svaki dostižan graf povezan i da sadrži krug neparne dužine. Dokazaćemo da ukoliko graf G poseduje jedno od ova dva svojstva, da onda to svojstvo poseduje i G' dobijen posle jednog dozvoljenog izbacivanja.

Neka je G povezan, i neka smo uočili krug v_1, v_2, v_3, v_4 u grafu G pri čemu izbacujemo ivicu (v_1, v_2). Sada je jasno da ukoliko postoji put u G izmedju neka dva čvora w_1 i w_2 grafa G koji sadrži ivicu (v_1, v_2), tada postoji put izmedju njih i u G' pri čemu su izmedju čvorova v_1 i v_2 umetnuti čvorovi v_3 i v_4.

Neka sad G sadrži krug neparne dužine $C = v_1, \ldots, v_{2p+1}$. Uočimo krug K dužine 4 i ivicu e tog kruga koju izbacujemo. Razlikovaćemo nekoliko slučaja:

Krugovi C i K nemaju zajedničkih ivica. Tada C pripada i G'.

Krugovi C i K imaju jednu zajedničku ivicu, npr. (v_1, v_2). Neka je $K = v_1, v_2, u_1, u_2$. Sada krug $C' = v_1, u_2, u_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2p+1}$ pripada G' i neparne je dužine.

Krugovi C i K imaju dve zajedničke ivice. Ako su te dve ivice susedne u C, npr. (v_1, v_2) i (v_2, v_3), onda je novi krug $v_1, u, v_3, \ldots, v_n$ (gde je $K = v_1, v_2, v_3, u$). Ako nisu susedne, onda neka su to (v_1, v_2) i (v_k, v_{k+1}). Izbacivanjem ivice (v_1, v_2) dobijamo dva nova kruga $C_1 = v_2, \ldots, v_k$ i $C_2 = v_{k+1}, \ldots, v_n, v_1$ u G'. Pošto je početni krug C neparne dužine, onda je takav bar jedan od krugova C_1 i C_2.

Krugovi C i K imaju tri zajedničke ivice. Neka su to (v_1, v_2), (v_2, v_3) i (v_3, v_4). Izbacivanjem bilo koje od njih, dobijamo krug $C' = v_1, v_4, \ldots, v_n$ neparne dužine.

Ovim smo dokazali da je svaki dostižan graf povezan i da ima krug negativne dužine (pošto je takav početni graf K_n). Da bi graf bio povezan mora imati bar $n-1$ ivicu. Graf sa tačno $n-1$ ivica je stablo i nema krug, tako da je minimalan broj ivica dostižnog grafa n. Sada ćemo konstruisati niz poteza kojim se dobija graf sa n ivica. Neka su čvorovi grafa $v_1, \ldots, v_{n-3}, x, y, z$. Najpre uočimo krugove v_i, v_j, x, y i obrišimo ivicu (v_i, v_j). Ovo uradimo za svako $1 \leq i < j \leq n-3$. Sada uočimo krugove v_i, y, z, x i v_i, z, y, x i obrišimo ivice (v_i, y) i (v_i, z). Ovo ponovimo za svako $1 \leq i \leq n-3$. Ovim dobijamo graf G' čiji je skup ivica $E' = \{(v_i, x) \mid 1 \leq i \leq n-3\} \cup \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$ i očigledno je $|E'| = n$.

6. Rećićemo da je broj $n \in \{1, \ldots, N\}$ *pobednički* (*gubitnički*) ako igrač koji sledeći igra ima (nema) pobedničku strategiju. Neka je $N = \overline{a_q a_{q-1} \ldots a_0}$ reprezentacija broja N u binarnom sistemu, i neka je $N_k = \overline{a_q \ldots, a_{q-k}}$, za svako $k = 0, \ldots, q$. Neka je $I_k = \{n \in \mathbb{N} \mid N_{k-1} < n \leq N_j\}$. Primetimo da dupliranje broja $x \in I_{j-1}$ daje paran broj iz intervala I_j. Za svako $x \in I_q$, jedini dozvoljeni potez je povećanje za 1. Prema tome, ako je N paran, onda su svi parni brojevi iz N gubitnički a svi neparni pobednički. U slučaju neparnog N situacija je obrnuta. Dokazaćemo da za svaki interval I_j važi jedno od tri sledeća svojstva:

(α) Svi parni brojevi iz I_j su pobednički, a svi neparni gubitnički.

(β) Svi parni brojevi iz I_j su gubitnički, a svi neparni pobednički.

(γ) Svi brojevi iz I_j su pobednički. Očigledno, za poslednji interval I_k važi svojstvo (α) ako je N neparno, a (β) ako je parno.

Pretpostavimo da za I_j važi svojstvo (α) i neka je $n \in I_{j-1}$ proizvoljan. Dupliranjem, n postaje paran broj iz I_j, pa je pobednički. Odavde sledi da je n pobednički akko je $n+1$ gubitnički i obrnuto. Prema tome, svojstvo (α) se prenosi sa I_j na I_{j-1}.

Neka sada I_j ima svojstvo (β) i neka je $n \in I_{j-1}$ proizvoljan. Pošto je $2n \in I_j$ gubitnički, sledi da je n pobednički, pa za I_{j-1} važi svojstvo (γ).

Pretpostavimo na kraju da I_j ima svojstvo (γ) i neka je $n \in I_{j-1}$ proizvoljan. Kao i u prvom, i u ovom slučaju je dupliranje loš potez jer je $2n \in I_j$ pobednički. Znači, n je pobednički akko je $n+1$ gubitnički. Ukoliko je najveći broj intervala I_{j-1}, N_{j-1} paran, onda je ovaj interval tipa (β), u suprotnom je tipa (α).

Ukoliko je neki interval I_j tipa (α) onda su to svi prethodni (I_i, za $i < j$), pa je i $I_1 = \{1\}$, tj 1 je gubitnički broj, odnosno Mujo dobija igru. U suprotnom, intervali su redom tipa $(\beta), (\gamma), \ldots$, pa zaključujemo da je 1 pobednički, odnosno da Haso dobija. Da bi ovo bilo ispunjeno, moraju svi brojevi $N_k, N_{k-2}, \ldots$ biti parni, odnosno broj N **mora imati nule na parnim mestima u binarnoj reprezentaciji**. Ukoliko je poslednji uslov ispunjen, pobedničku strategiju ima Haso, a u suprotnom Mujo.

7. Dokazaćemo da je minimalan broj poteza 2. Neka Marko u prvom potezu zatraži od Marije vrednost $P(1)$. Sada je:

$$P(1) = a_n + \ldots + a_1 + a_0 \geq a_i, \quad \forall i = 0, \ldots, n$$

Neka je $A = P(1) + 1$. U drugom potezu Marko traži vrednost $P(10^A)$. Imamo da je:

$$B = P(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0$$

Pošto je $a_i < A$, brojevi a_i predstavljaju redom cifre u reprezentaciji broja B u sistem sa osnovom A. Koristeći ovu činjenicu, Marko može da rekonstruiše polinom $P(x)$ tako što nadje predstavljanje broja B u sistemu sa osnovom A. Ovim smo konstruisali metod kojim u 2 poteza dolazimo do traženog polinoma.

Dokazaćemo da je u opštem slučaju nemoguće rekonstruisati polinom $P(x)$ u jednom potezu. Pretpostavimo suprotno. Neka Marko u prvom potezu traži $B = P(x_0)$, i neka je $B < x_0$. Sada postoje dva polinoma $P_1(x) = B$ i $P_2(x) = x - (x_0 - B)$ za koje je $P_1(x_0) = P_2(x_0) = B$, pa samo na osnovu ovog podataka Marko ne može zaključiti koji je polinom Marija zamislila.

Za sve primedbe, komentare, sugestije, itd. u vezi zadataka (a i uopšte) možete me kontaktirati putem e-maila.

dexterofnis@gmail.com