ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Први разред, А категорија

1. Кроз пресечне тачке A и B кружница k_1 и k_2 конструисане су две паралелне праве које по други пут секу кружницу k_1 у тачкама C и D, а кружницу k_2 у тачкама E и F. Доказати да је $CD = EF$.

2. **(а)** На колико начина се могу изабрати два несуседна двоцифрена броја?

(б) Колико има петоцифрених бројева у којима се цифра 5 појављује тачно два пута и чије су преостале три цифре различити елементи скупа $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$?

3. Колико се највише топова може поставити на „шаховску“ таблу димензија 5×4, тако да сваки топ „напада“ највише једног од преосталих? (Неки топ „напада“ све топове који су у врсти у којој се и он налази, као и све топове који су у колони у којој се он налази.)

4. За $x, y, z \in \mathbb{Z}$ важи

$$x^2z + y^2x + z^2y = x^2y + y^2z + z^2x + x + y + z.$$

Доказати да $27 \mid x + y + z$.

5. Нека је $\triangle ABC$ такав да је $AB = 2$, $BC = 3$ и $CA = 4$. Наћи изломљену линију XYZ са крајевима X, Z на обиму $\triangle ABC$, такву да је $XY = YZ = 1$ и која дели $\triangle ABC$ на два дела једнаких површина.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Први разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити

$$\frac{|x-3|+2}{|2x-3|-5} \leqslant 0.$$

2. Нека су E и F, редом, средишта страница AB и CD четвороугла $ABCD$. Ако су средишта дужи AF, CE, BF и DE неколинеарне тачке, доказати да чине темена паралелограма.

3. Одредити све $a, b \in \mathbb{Q}$ такве да је

$$(a-\sqrt{2})(6-a+\sqrt{2}) = b.$$

4. Кроз пресечне тачке A и B кружница k_1 и k_2 конструисане су две паралелне праве које по други пут секу кружницу k_1 у тачкама C и D, а кружницу k_2 у тачкама E и F. Доказати да је $CD = EF$.

5. **(а)** На колико начина се могу изабрати два несуседна двоцифрена броја?

(б) Колико има петоцифрених бројева у којима се цифра 5 појављује тачно два пута и чије су преостале три цифре различити елементи скупа $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Други разред, А категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити

$$x + a^3 = \sqrt[3]{a - x}\,.$$

2. Око једнакостраничног $\triangle ABC$ је описана кружница. Нека је M тачка која припада луку BC те кружнице, којем не припада теме A. Доказати да је $MA = MB + MC$.

3. Нека су $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\beta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ такви да важи

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}\,.$$

Одредити могуће вредности $\alpha + 2\beta$.

4. Нека су реални бројеви a и b такви да им је разлика једнака фиксном броју α, а производ једнак фиксном позитивном броју β. Одредити све полиноме облика $x^2 + px + q$, такве да, какви год били бројеви a и b са горе наведеном особином, $\max\{a, b\}$ је корен тог полинома, где су p и q изражени у зависности од α и β.

5. У приземљу зграде од 5 спратова, у лифт су ушли Аца, Душан, Лука, Наташа и Цеца. На колико начина се лифт може испразнити тако да ни у једном тренутку неки мушкарац и нека жена не буду сами у лифту? (Свако од њих излази на неком од 5 спратова; лифт се креће од приземља до 5. спрата (не враћа се).)

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Други разред, Б категорија

1. Одредити све $z \in \mathbb{C}$ за које је

$$\left| \frac{z}{1 - iz} \right| = 1.$$

2. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити

$$x + a^3 = \sqrt[3]{a - x}\,.$$

3. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ тако да корени квадратне једначине

$$(2a - 3)x^2 - 2(a + 1)x + a + 7 = 0$$

буду већи од 1.

4. Нека права p не садржи ниједно теме неког правилног 2008-угла. Одредити највећи број дужи чији су крајеви темена тог 2008-угла које сече права p.

2. Око једнакостраничног $\triangle ABC$ је описана кружница. Нека је M тачка која припада луку BC те кружнице, којем не припада теме A. Доказати да је $MA = MB + MC$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Трећи разред, А категорија

1. У $\triangle ABC$, симетрала $\sphericalangle BAC$ сече BC у тачки D; права која садржи D и паралелна је са AC сече AB у тачки E; права која садржи E и паралелна је са BC сече AC у тачки F. Доказати да је $AE = FC$.

2. Испитати да ли је $\operatorname{tg} 1^\circ$ рационалан број.

3. Нека су $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$ реални бројеви такви да је

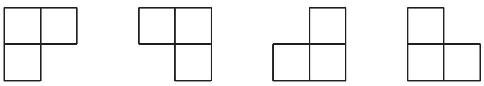
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1.$$

Доказати да је

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \ldots + (2n-1)a_n^2 \leqslant 1.$$

4. На колико се најмање тетраедара може исећи коцка?

5. L-тримино је фигура састављена од три јединична квадрата, неког од облика



Одредити најмање m, тако да је из квадратне мреже димензија 5×5 (састављене од 25 јединичних квадрата) могуће изрезати m L-тримина, тако да се из остатка не може изрезати више ниједан L-тримино. (Приликом изрезивања, квадрати који чине L-тримино се морају поклапати са квадратима мреже.)

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Трећи разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-3} \geqslant 1.$$

2. Одредити угао који граде вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако су вектори $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} + 5\vec{b}$ међусобно ортогонални и $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$.

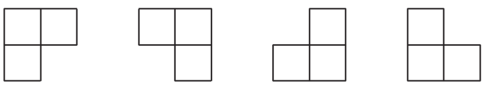
3. Нека су $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\beta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ такви да важи

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Одредити могуће вредности $\alpha + 2\beta$.

4. У $\triangle ABC$, симетрала $\sphericalangle BAC$ сече BC у тачки D; права која садржи D и паралелна је са AC сече AB у тачки E; права која садржи E и паралелна је са BC сече AC у тачки F. Доказати да је $AE = FC$.

5. L-тримино је фигура састављена од три јединична квадрата, неког од облика



Одредити најмање m, тако да је из квадратне мреже димензија 5×5 (састављене од 25 јединичних квадрата) могуће изрезати m L-тримина, тако да се из остатка не може изрезати више ниједан L-тримино. (Приликом изрезивања, квадрати који чине L-тримино се морају поклапати са квадратима мреже.)

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Четврти разред, А категорија

1. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$. Доказати да једначина

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

има бар једно решење у скупу реалних бројева.

2. Одредити све $m \in \mathbb{R}$, тако да корени једначине

$$x^3-12x^2+mx-60=0$$

представљају дужине страница правоуглог троугла.

3. Нека су A и B тачке неке кружнице, а P и Q тачке, такве да су праве AP и BQ тангенте на ту кружницу, $AP = BQ$ и права PQ није паралелна са правом AB. Доказати да права AB полови дуж PQ.

4. Да ли постоји функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, која није идентички једнака некој функција

$$g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g_k(n) = n^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

таква да је $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ за све $m, n \in \mathbb{N}$ и да је $f(2008)$ потпун квадрат?

5. Колико има низова нула и јединица дужине 10, таквих да се међу свака три узастопна члана низа налази највише једна јединица?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Четврти разред, Б категорија

1. Доказати да је за сваки прост број $p \geqslant 5$, полином $(x+1)^p - x^p - 1$ дељив полиномом $x^2 + x + 1$.

2. Израчунати интезитет вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, ако су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ јединични вектори, такви да је угао између било која два од њих $\dfrac{\pi}{3}$.

3. Одредити на колико се начина могу распоредити 4 куглице у 7 кутија, ако се

(а) и куглице и кутије разликују;

(б) не разликују ни кутије ни куглице.

4. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$. Доказати да једначина

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

има бар једно решење у скупу реалних бројева.

5. Одредити све $m \in \mathbb{R}$, тако да корени једначине

$$x^3 - 12x^2 + mx - 60 = 0$$

представљају дужине страница правоуглог троугла.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.