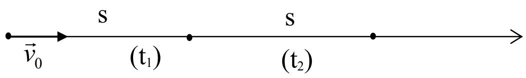
Први проблем

Крећући се праволинијски, тело прелази сукцесивно две деонице пута свака дужине S. Убрзање током кретања остаје исто, док време за које тело пређе прву деоницу је t_1, а другу $t_2>t_1$

a) Одредити почетну брзину v_0 и убрање a.
b) Колике су брзине на крају прве и друге деонице пута?
c) Колики је интервал времена до заустављања и пређени пут до заустављања, узети у обзир да је убрзање све време исто.
d) Нумеричке вредности: S=10m, t_1 =1,06 s, t_2=2,2s.

Решење првог проблема



a). Из $S = v_0 t_1 - \frac{a}{2} t_1^2$, $v_1 = v_0 - a t_1$, $v_1^2 = v_0^2 - 2aS$, $S = v_1 t_2 - \frac{a}{2} t_2^2$,
добија се

$a = \frac{2S(t_2 - t_1)}{t_1 t_2 (t_2 + t_1)} = 2{,}99 m/s^2$, $\quad v_0 = S\frac{t_2^2 - t_1^2 + 2t_1t_2}{t_1 t_2 (t_2 + t_1)} = 11{,}02 m/s$. .... **2 поена**

b). $v_1 = S\frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 7{,}84 m/s$, $\quad v_2 = S\frac{t_1^2 - t_2^2 + 2t_1t_2}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 1{,}25 m/s$. ....**2 поена**

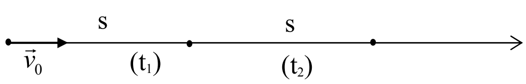
c). $\tau = t_1 + t_2 + t_{stop} = \frac{v_0}{a} = \frac{t_2^2 - t_1^2 + 2t_1t_2}{2(t_2 - t_1)} = 3{,}68 s$ (т.ј. $t_{stop} = \frac{v_2}{a} = 0{,}42 s$)

и $\quad L = \frac{v_2^2}{2a} = S\frac{\left(t_1^2 - t_2^2 + 2t_1t_2\right)^2}{4t_1t_2\left(t_2^2 - t_1^2\right)} = 0{,}26 m$ .... **2 поена**

d). За сваку нумеричку вредност 0,5 поена (помножено шестицом) ....**3 поена**
Екстра...**1 поена**
УКУПНО...**10 (десет) поена**

In a rectilinear motion, a mobile (body) travels succesively through two equal segments (paths) of the road of length S each. The acceleration of the motion remain always constant (the same) and the travelling times for the two segments (paths) of the road were t_1, respectively $t_2>t_1$.
a). Determine the initial velocity v_0 of the mobile and its acceleration a.
b). What are the velocities at the ends of the two road segments (paths) of the lengths S each ?
c). What is the interval of time until the stop of the motion and the distance traveled by the mobile until the stop, taking into consideration that the mobile's acceleration was the same.
d). Numerical application: S=10m, t_1 =1,06 s, t_2=2,2s.

Solution of the first problem



a). From $S = v_0 t_1 - \frac{a}{2} t_1^2$, $v_1 = v_0 - a t_1$, $v_1^2 = v_0^2 - 2aS$, $S = v_1 t_2 - \frac{a}{2} t_2^2$,
results

$$a=\frac{2S(t_2-t_1)}{t_1t_2(t_2+t_1)}=2{,}99\,m/s^2,\qquad v_0=S\frac{t_2^2-t_1^2+2t_1t_2}{t_1t_2(t_2+t_1)}=11{,}02\,m/s.$$ .... **2 points**

b). $$v_1=S\frac{t_1^2+t_2^2}{t_1t_2(t_1+t_2)}=7{,}84\,m/s,\qquad v_2=S\frac{t_1^2-t_2^2+2t_1t_2}{t_1t_2(t_1+t_2)}=1{,}25\,m/s.$$ ....**2 points**

c). $$\tau=t_1+t_2+t_{stop}=\frac{v_0}{a}=\frac{t_2^2-t_1^2+2t_1t_2}{2(t_2-t_1)}=3{,}68\,s\ \ (\text{i.e. } t_{stop}=\frac{v_2}{a}=0{,}42\,s)$$

and $$L=\frac{v_2^2}{2a}=S\frac{\left(t_1^2-t_2^2+2t_1t_2\right)^2}{4t_1t_2\left(t_2^2-t_1^2\right)}=0{,}26\,m$$ .... **2 points**

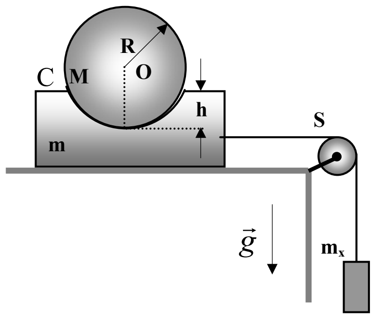
d). For each numerical value 0,5 points (multiplied by six)…..**3 points**

Extra ....**1 point**

TOTAL...**10 (ten) points**

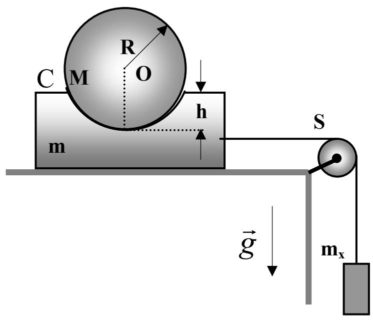
Second problem

На хоризонталној табли лежи дебела даска (видети слику) са сферним удубљењем радијуса R и дубине h и у то удубљење постављена је сфера истог радијуса. Одредити масу m_x тела које треба окачити на крај нити пребачене преко идеалног котура S, тако да у току кретања даске сфера може да искочи из удубљења. Маса нити је занемарљива. Следећи параметри су познати:M,m,R,h и g. Сва трења су занемарена. Дискутовати решење проблема тј. зависност $m_x(h)$, за $0<h<R$.



Second problem

On a horizontal table lies a thick plank (see the figure). Into this plank, a spherical hollow of radius R, with depth h, is carved, where a sphere having the same radius is inserted. Determine the mass m_x of the body that should be hung at the end of the massless thread which passes over the ideal pulley S, and which is fixed with the other end on the plank, so that, during the plank's motion, the sphere could be able to jump off from inside the hollow. The following parameeters are known:M,m,R,h and g. All the frictions are to be neglected. Discuss the solution of the problem, i.e. the dependence $m_x(h)$, for $0<h<R$.



Решење другог проблема.

Из Њутновог закона имамо $a = g\dfrac{m_x}{m_x + M + m}$ (*) .... **1,5 поен**

Инерцијална сила која делује у лево је $F_{in} = Ma$. У исто време, вертикално на доле имамо $G = Mg$. Угао између $\vec{G}$ и резултујуће силе $\vec{F}_{res} = \vec{F}_{in} + \vec{G}$ је $\alpha = \mathrm{arctg}(a/g)$ ....**2 поена**

Такође можемо да дефинишемо угао $\alpha_0 = arccos(1 - h/R)$ и ако је $\alpha > \alpha_0$ сфера ће искочити из удубљења, ако је $\alpha < \alpha_0$ искакање није могуће. У граничном случају $\alpha = \alpha_0$ је $a_0 = g\dfrac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R - h}$. (**)..**2,5 поена**

Изједначавањем a из (*) са a_0 из (**) добијамо минималну вредност масе $m_x^{(0)} = (M + m)\dfrac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R - h - \sqrt{2Rh - h^2}}$. $(***)$. Када је $m_x > m_x^{(0)}$ искакање је могуће…..**1,5 поена.**

Дискусија: Услов $m_x^{(0)} > 0$ доводи до неједначине $2h^2 - 4Rh + R^2 > 0$ са решењем $h \in \left[0; R\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$. То значи да максимална могућа вредност за h одговара $\cos\alpha_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тј. $\alpha_0 = 45°$. Због тога, када $m_x \to \infty$, имамо $a \to g$ и $\alpha \to \alpha_0$ .... **1,5 поена**

Екстра .... **1 поен**
Укупно...**10 (десет) поена**

Solution of the second problem.

With Newton's law we obtain $a = g\dfrac{m_x}{m_x + M + m}$ (*) .... **1,5 points**

The inertial force acting to the left is $F_{in} = Ma$. In the same time, in the vertical, down, direction, we hawe $G = Mg$. The angle between $\vec{G}$ and and the resultant force $\vec{F}_{res} = \vec{F}_{in} + \vec{G}$ is $\alpha = \mathrm{arctg}(a/g)$ ....**2 points**

We can define also the angle $\alpha_0 = arccos(1 - h/R)$ and if $\alpha > \alpha_0$ the sphere jump off from inside the hollow and when $\alpha < \alpha_0$ the jump is not possible. In the limiting case $\alpha = \alpha_0$ we obtain $a_0 = g\dfrac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R - h}$. (**)..**2,5 points**

Equating a from (*) with a_0 from (**) we obtain the minimal value of the mass $m_x^{(0)} = (M + m)\dfrac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R - h - \sqrt{2Rh - h^2}}$. $(***)$. When $m_x > m_x^{(0)}$ the jump is possible……..**1,5 points**

Discussion: The condition $m_x^{(0)} > 0$ leads to the inequation $2h^2 - 4Rh + R^2 > 0$ with the solution $h \in \left[0; R\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$. This means that the maximal possible value of h correspond to

$\cos\alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, i.e. to $\alpha_0 = 45°$. Therefore, when $m_x \to \infty$, we have $a \to g$ and $\alpha \to \alpha_0$ .... **1,5 points**

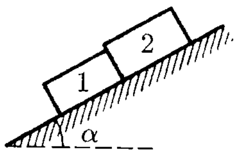
Extra .... **1 point**
TOTAL..**10 (ten) points**

1. A balloon is moving straight down with the constant velocity $u = 1$ m/s. From the balloon, a body is thrown straight up with initial velocity $v_0 = 8$ m/s relative to Earth. Find the distance between body and balloon when the body reaches the maximum relative to Earth. ($g = 10 m/s^2$)

Solution

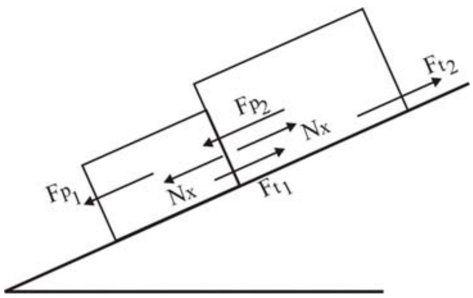
Body is thrown straight up with initial velocity $V_0 = v_0 + u$ **(2 points)** relative to balloon. After time $t = v_0 / g$ **(2 points)** the body reaches maximum height relative to Earth. The distance between body and balloon is path which body moved (traversed) relative to balloon $h = V_0 t - gt^2/2 = (v_0 + u)t - gt^2/2 = v_0(v_0 + u)/g - v_0^2/(2g) = v_0(v_0 + 2u)/(2g) = 4.00m$
(5 points) and Extra 1 point for complete solution.

2. Two touching bodies 1 and 2 are placed on an inclined plane forming an angle $\alpha = 30^0$ with horizontal, as shown in Figure. The masses of the bodies are $m_1 = 1{,}5$ kg and $m_2 = 1$ kg, whereas the coefficients of friction between inclined plane and bodies are equal $\mu_1 = 0{,}2$ and $\mu_2 = 0{,}1$ respectively. Find the force of the interaction of the bodies in the process of motion.



Solution

Both bodies will move together, since $\mu_1 > \mu_2$, with acceleration a and they can treat as one body with mass $m_1 + m_2$, then Newton's second law in projection form along plane direction gives $F_{p1} + F_{p2} - (F_{t1} + F_{t2}) = (m_1 + m_2)a$ **(1 point)** where $F_{p1} = m_1 g/2$ **(1 point)**, $F_{p2} = m_2 g/2$ **(1 point)**, $F_{t1} = \mu_1 m_1 g\sqrt{3}/2$ **(1 point)** and $F_{t2} = \mu_2 m_2 g\sqrt{3}/2$ **(1 point)**. The equation of motion for each body is $F_{p1} + N_x - F_{t1} = m_1 a$ **(1 point)**, $F_{p2} - N_x - F_{t2} = m_2 a$ **(1 point)** where N_x is required force. Obviously that sum of the last two relations gives the first expression. From the last two expressions we have $N_x = \frac{m_1 m_2 g\sqrt{3}}{2(m_1 + m_2)}(\mu_1 - \mu_2) = 0{,}52N$ **(2 points) and Extra 1 point for complete solution**.



Text in Serbian

1. Балон се креће вертикално наниже константном брзином $u = 1$ m/s. Из балона се баци тело, вертикално навише, почетном брзином $v_0 = 8$ m/s у односу на земљу. Израчунати растојање између тела и балона када оно достигне максималну висину у односу на земљу.

Решење

У односу на балон тело се баци вертикално навише брзином $V_0 = v_0 + u$. Максималну висину у односу на земљу тело достиже после времена $t = v_0 / g$. Растојање између тела и балона тада је једнако путу који тело пређе у односу на балон

$$h = V_0 t - gt^2/2 = (v_0 + u)t - gt^2/2 = v_0(v_0 + u)/g - v_0^2/(2g) = v_0(v_0 + 2u)/(2g) = 4m.$$

2. На стрму раван нагибног угла $\alpha = 30^0$, постављена су два тела маса $m_1 = 1{,}5$ kg и $m_2 = 1$ kg, као на слици 1. Коефицијенти трења између равни и тела су $\mu_1 = 0{,}2$ и $\mu_2 = 0{,}1$, респективно. Наћи силу којом једно тело притиска друго (силу узајамног деловања) у току кретања.

2. С обзиром да је $\mu_1 > \mu_2$ оба тела ће се кретати заједно неким убрзањем a, па их можемо посматрати као једно тело масе $m_1 + m_2$. Тада је $F_{p1} + F_{p2} - (F_{t1} + F_{t2}) = (m_1 + m_2)a$, где су $F_{p1} = m_1 g / 2$, $F_{p2} = m_2 g / 2$ паралелне компоненте силе Земљине теже првог и другог тела, а $F_{t1} = \mu_1 m_1 g\sqrt{3}/2$, $F_{t2} = \mu_2 m_2 g\sqrt{3}/2$ силе трења. Једначине кретања за свако тело посебно су $F_{p1} + N_x - F_{t1} = m_1 a$, $F_{p2} - N_x - F_{t2} = m_2 a$ где је N_x тражена сила узајамног деловања. Очигледно је да збир последње две једначине даје прву. На основу последње две релације имамо $N_x = \dfrac{m_1 m_2 g\sqrt{3}}{2(m_1 + m_2)}(\mu_1 - \mu_2) = 0{,}52N$.

Решење

У односу на балон тело се баци вертикално навише брзином $V_0 = v_0 + u$. Максималну висину у односу на земљу тело достиже после времена $t = v_0 / g$. Растојање између тела и балона тада је једнако путу који тело пређе у односу на балон $h = V_0 t - gt^2 / 2 = (v_0 + u)t - gt^2 / 2 = v_0(v_0 + u) / g - v_0^2 /(2g) = v_0(v_0 + 2u)/(2g) = 4m$.