

1. Teg mase $m = 1$ kg, zakačen je o čeličnu nit koja može da izdrži silu zatezanja od $F_z = 2,94$ kN. Na koliki maksimalni ugao može da se odkloni teg, da se nit ne bi iskidala pri prolasku tega kroz položaj ravnoteže.

$$\diamond ma_n = F_z - mg, \cos \alpha = \frac{3mg - F_z}{2mg} = 0,5, \alpha = 60^\circ$$

2. Teg mase $m = 1$ kg, okačen je o neistegljivu nit bez mase, dužine $l = 0,5$ m, vrši oscilacije u vertikalnoj ravni. Za koliki ugao odklona α od vertikale, je kinetička energija tega i njegovom najnižem položaju $E_{kd} = 2,45$ J? Koliko puta će, pri tolikom uglu odklona, sila zatezanja niti F_{zd} u donjem položaju biti veća od sile zatezanja niti u gornjem položaju F_{zg} ?
3. Teg mase m je okačen o neistegljivu nit u homogenom polju Zemljine teže. Kolika treba da mu je brzina u najnižoj tački putanje da bi mogao da izvrši kompletno vertikalno rotaciono kretanje? Da li se ovaj uslov menja ukoliko je teg okačen o štap?

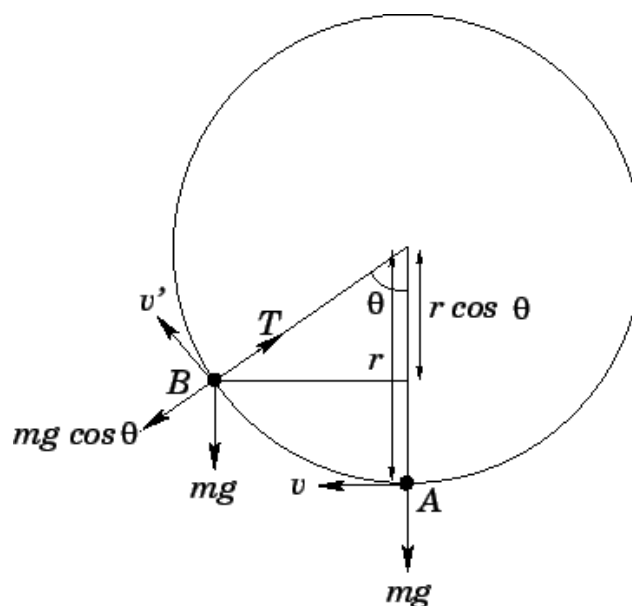


Figure 1: Uz zadatak ...

ZOE:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv'^2}{2} = mgr(1 - \cos \theta)$$

$$v'^2 = v^2 - 2rg(1 - \cos \theta)$$

Kada je telo u tački B , centralna sila koja deluje na telo je zbir sile zatezanja koja deluje ka tački vešanja i $mg \cos \theta$ komponentna težine tela, koja deluje od tačke vešanja. Kako se telo kreće po kružnici, trenutnom tangencijalnom brzinom v' , na njega deluje trenutno ubrzanje $a_n = v'^2/r$ ka tački vešanja. Drugi Njutnov zakon glasi

$$\frac{mv'^2}{r} = F_z - mg \cos \theta$$

$$F_z = \frac{mv^2}{r} + mg(3 \cos \theta - 2)$$

Da bi telo moglo da izvrši kompletno kružno kretanje sila zatezanja mora da bude pozitivna sve vreme, tj. za sve uglove θ . Sila zatezanja ima minimalnu vrednost za $\theta = \pi$ kada je $\cos \pi = -1$. U toj tački je visina maksimalna a tangencijalna brzina minimalna. U tom slučaju je

$$F_{z0} = \frac{mv^2}{r} - 5mg,$$

a iz uslova da taj izraz mora da bude pozitivan dobija se

$$v^2 > 5rg.$$

Ukoliko se umesto žice koristi šipka, ne postoji ograničenje na silu zatezanja jer šipka može da održi telo i kada je na najvišoj tački putanje. Da bi telo sada uspelo da prodje najvišu tačku putanje neophodno je da brzina v' ostane pozitivna. Ona ima minimalnu vrednost za ugao $\theta = \pi$,

$$(v'^2)_0 = v^2 - 4rg,$$

odakle se dobija

$$v^2 > 4rg.$$

4. Akrobat skače na mrežu-trambolinu sa visine $H = 8$ m. Na koju graničnu visinu h iznad poda treba zategnuti mrežu da akrobat ne bi udario u nju pri skoku? Poznato je da se mreža ugiba za $h_0 = 0,5$ m, ako akrobat u nju skoči sa visine $H_0 = 1$ m.

◇ ZOE: $mgH + mgh = k\frac{h^2}{2}$; $mgH_0 + mgh_0 = k\frac{h_0^2}{2}$. Deljenje i sredjivanje daje

$$(H_0 + h_0)h^2 - h_0^2h - Hh_0^2 = 0, h_1 = 1,23 \text{ m}, h_2 = -1,07 \text{ m}.$$

5. Na donji kraj opruge koja je vertikalno postavljena u polju Zemljine teže zakačena je još jedna opruga na čijem kraju se nalazi teg. Krutosti opruga su k_1 i k_2 . Zanimajući njihove mase u poredjenju sa masom tega, odrediti odnos potencijalnih energija opruga.

◇

$$\frac{E_{p1}}{E_{p2}} = \frac{k_1 x_1^2}{k_2 x_2^2}$$

Uslovi ravnoteže za sistem glase

$$0 = m\vec{g} + \vec{F}_{el1}, 0 = m\vec{g} + \vec{F}_{el2},$$

odnosno

$$mg = k_1 x_1, mg = k_2 x_2 \rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2$$

$$\frac{E_{p1}}{E_{p2}} = \frac{k_2}{k_1}$$

6. O dve opruge jednakih dužina okačena je šipka dužine $L = 10$ cm, čija masa može da se zanemari. Krutosti opruga su $k_1 = 2$ N/m i $k_2 = 3$ N/m. Na kom mestu treba opteretiti šipku tegom da bi ona ostala u horizontalnom položaju?

◇ Da bi sistem bio u ravnoteži mora da važe uslovi:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0$$

Projekcija prve jednačine na vertikalnu osu daje

$$mg - k_1 x - k_2 x = 0, mg = (k_1 + k_2)x.$$

Momenti sila u odnosu na tačku A su

$$M_1 = 0, M_2 = mgl_1, M_3 = k_2 xL,$$

odnosno $mgl_1 = k_2 xL$. Kako je iz uslova translacione ravnoteže $x = \frac{mg}{k_1 + k_2}$, dobija se da je

$$l_1 = \frac{k_2 L}{k_1 + k_2},$$

pa se dobija $l_1 = 6$ cm i $l_2 = 4$ cm.

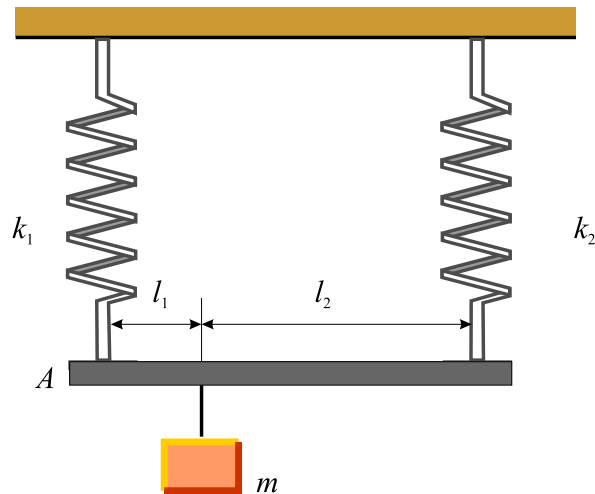


Figure 2: Uz zadatak ...

7. Kako će se promeniti period vertikalnih oscilacija tega koji je okačen o dve identične opruge, ako se od njihove redne veze predje na paralelnu?

◊ Dve opruge povezane redno ponašaju se kao jedna opruga ekvivalentne krutosti k_{e1} a kada su povezani paralelno ekvivalentna krutost im je k_{e2} . Pri rednoj vezi, ukupno istezanje sistema opruga je $\Delta x = x_1 + x_2 = F/k_1 + F/k_2$ a ono se u suštini odvija pod delovanjem iste sile $F = mg$, tako da može da se piše

$$\frac{1}{k_{e1}} = \frac{\Delta x}{F} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}, \rightarrow k_{e1} = \frac{k}{2}.$$

Pri paralelnoj vezi opruga, uslov ravnoteže glasi

$$mg = k_1x + k_2x = 2kx, \text{ odakle sledi da je ekvivalentna krutost } k_{e2} = 2k.$$

Za odnos perioda se sada dobija

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{4} = 2.$$

8. Na vasijskom brodu, u uslovima bestežinskog stanja, za merenje mase tela se može iskoristi apratura čiji princip rada se sastoji u sledećem.

Prvo se izmeri frekvencija oscilovanja tega poznate mase m_0 okačenog o oprugu, a zatim se toj masi doda ona koju želimo da izmerimo i ponovo odredi frekvencija oscilacija. Pokazati kako se, na osnovu poznavanja ovih dveju frekvencija, može odrediti nepoznata masa.

◊ Ako sa m označimo nepoznatu masu, frekvencije ω_0 i ω kojima sistem osciluje u prvom, odnosno drugom slučaju će sa masama biti povezane relacijama

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m}}$$

gde je k koeficijent elastičnosti opruge sistema. Iz ova dva izraza se za traženu masu dobija

$$m = m_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right).$$

9. Teg koji se nalazi u šupljem cilindru površine poprečnog preseka S , pri potapanju cilindra u tečnost gustine ρ zadržava ga u uspravnom položaju. Cilindar sa ovim tegom je prilikom postavljanja u tečnost utonuo do neke dubine. Nakon toga je pritisnut naniže i pušten da osciluje u odnosu na položaj ravnoteže. Masa cilindra sa tegom je m . Zanemarijući viskoznost tečnosti, odrediti period T oscilovanja posmatranog sistema kao i ravnotežnu dubinu na koju je potonuo.

◊ U ovom slučaju ulogu restitucione sile igra sila potiska. Usmerimo x osu vertikalno naniže, izabraši za koordinatni početak njen presek sa površinom tečnosti. Neka je x koordinata donjeg dela cilindra. Sila potiska je $F_p = -Sx\rho g$. Na cilindar osim toga deluje sila teže $Q = mg$, pa je jednačina kretanja

$$m\ddot{x} = mg - Sx\rho g.$$

U položaju ravnoteže ($x = l$), sila teže i sila potiska su uravnotežene pa je $mg = Sl\rho g$, odakle je dubina na koju je utonuo cilindar sa tegom

$$l = \frac{m}{S\rho}.$$

Ako sa y označimo otklon cilindra od njegovog ravnotežnog položaja, koordinatu donjeg dela cilindra možemo da zapišemo kao $x = l + y$, pa će jednačina kretanja sada biti

$$m\ddot{y} = -Sy\rho g,$$

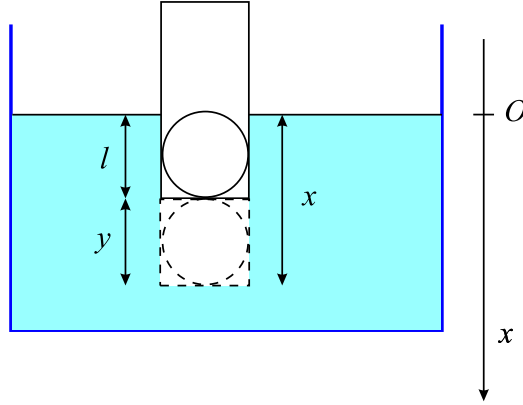


Figure 3:

odnosno

$$\ddot{y} + \frac{S\rho g}{m}y = 0,$$

odakle se vidi daje "koeficijent elastičnosti" ovog sistema $k = S\rho g$, što znači da je odgovarajuća ugaona frekvencija $\omega_0 = \sqrt{S\rho g/m}$. Na osnovu ovoga je period oscilovanja sistema

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}},$$

ili preko ravnotežne dubine l

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

10. Mala metalna lopta mase m , okačena o neistegljivu nit dužine l , osciluje iznad beskonačne, ravnomerno naelektrisanе horizontalne ploče naelektrisanе pozitivno (površinska gustina naelektrisanja σ). Odrediti period oscilovanja klatna ukoliko se na njemu nalazi količina naelektrisanja $-Q$.

◊ Harmonijsko oscilovanje ovog klatna se odvija u homogenom gravitacionom i električnom polju. Obe sile su istog smera, a sila električnog polja je $F_e = QE$, gde je električno polje ploče $E = \sigma/2\epsilon_0$. Drugi Njutnov zakon sada ima oblika

$$ma = mg + \frac{Q\sigma}{2\epsilon_0} = m \left(g + \frac{Q\sigma}{2m\epsilon_0} \right),$$

što znači da će period oscilovanja klatna biti

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\epsilon_0 ml}{2\epsilon_0 mg + \sigma Q}}.$$

11. Odrediti period malih oscilacija koje u vertikalnoj ravni vrši teg mase $m = 40$ g, koja je pričvršćena na sredini horizontalne elastične žice dužine $l = 1$ m. Smatrati da je sila zatezanja žice konstantna i da iznosi $F_z = 10$ N.

◇

Prema slici je

$$m\ddot{x} = mg - 2F_z \sin \theta = mg - 2F_z \theta = mg - 2F \frac{x}{l/2} = mg - \frac{4F_z}{l}x.$$

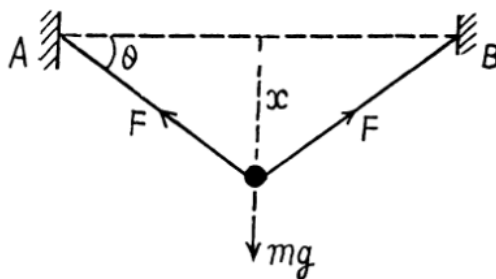


Figure 4:

Odnosno

$$\ddot{x} = -\frac{4F}{ml} \left(x - \frac{mgl}{4F} \right).$$

Smena $y = x - \frac{mgl}{4F_z}$, daje ($\ddot{x} = \ddot{y}$)

$$\ddot{y} = -\frac{4F_z}{ml}y$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{ml}{F_z}} = 0,2 \text{ s.}$$

12. Odrediti period malih oscilacija matematičkog klatna koji čini lopta okačena o neistegljivu nit, dužine $l = 20$ cm, ukoliko se ono nalazi u tečnosti čija gustina je $\eta = 3$ puta veća od gustine lopte. Zanemariti otpor tečnosti kretanju klatna.

◊ Iz $\vec{M} = I\vec{\alpha}$ se dobija

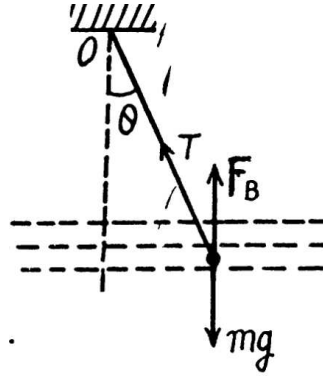


Figure 5:

$$-mgl \sin \theta + F_p l \sin \theta = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) \theta$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\eta l}{g(\eta - 1)}} = 1,1 \text{ s.}$$

13. Lopta je okačena o neistegljivu nit dužine l u tački O na zidu, koja formira mali ugao α sa vertikalom. Ovakvo matematičko klatno se otkloni na mali ugao β ($\beta > \alpha$) i pusti da osciluje. Smatrajući da su sudari lopte sa zidom apsolutno elastični, odrediti period oscilovanja klatna.

◊ Za male uglove β kretanje je harmonijsko. Kako su sudari idealno elastični kretanje se ponavlja nakon udara o zid. Jednačina kretanja je

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega_0^2\theta.$$

Ako klatno kreće iz amplitudnog položaja $\theta = \beta$, u $t = 0$, rešenje diferencijalne jednačine je

$$\theta = \beta \cos(\omega_0 t) = \beta \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} t).$$

Ako je t' vreme kretanja lopte iz amplitudnog položaja do sudara sa zidom, u tom momentu je $\theta = -\alpha$ pa gornja jednačina postaje

$$-\alpha = \beta \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} t'),$$

$$t' = \sqrt{\frac{l}{g}} \arccos\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right), T = 2t'.$$

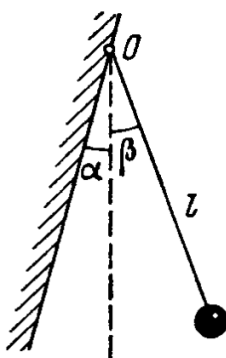


Figure 6:

14. Odrediti period malih oscilacija žive mase $m = 200$ g koja se nalazi u savijenoj cevi prikazanoj na slici čiji desni krak je nagnut pod uglom $\theta = 30^\circ$ stepeni u odnosu na vertikalu. Poprečni presek cevi je $S = 0,50$ cm², dok je viskoznost žive zanemarljiva.

◊ Ako se nivo žive u levom delu cevi podigne za x , u desnom takodje mora da se smanji za isti iznos ali duž iskošenog dela cevi, što znači da će po vertikalnom pravcu da opadne za $x \cos \theta$, pa će ukupna razlika u pritiscima u cevi da bude

$$\Delta P = (P_0 + \rho g x) - (P_0 - \rho g x \cos \theta) = \rho g x (1 + \cos \theta),$$

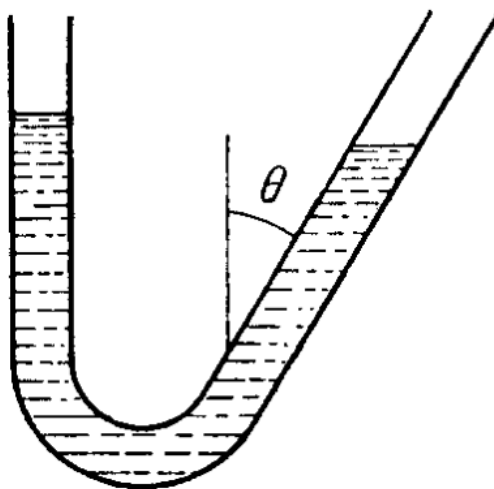


Figure 7:

pa će povratna sila da bude

$$F = -\Delta PS = -\rho g S x (1 + \cos \theta),$$

a iz jednačine kretanja

$$m\ddot{x} = -\rho g S x (1 + \cos \theta)$$

sledi da je period malih oscilacija

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S (1 + \cos \theta)}}.$$