

1. Tanki homogeni štap dužine $l = 1$ m može slobodno da rotira oko horizontalne ose, koja se nalazi na $x = 20$ cm od njegove sredine. Odrediti period oscilovanja štapa, ukoliko se on otklanja od ravnotežnog položaja maksimalno za $\varphi_0 \leq 8^\circ$. Skicirati grafik zavisnosti $T(x)$.

◊ Iz jednačine kretanja $I\vec{\alpha} = \vec{M}$, $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgx \sin \varphi \approx -mgx\varphi$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgx}{I}\varphi$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + mx^2}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2/12 + x^2}{gx}} = 1,58 \text{ s.}$$

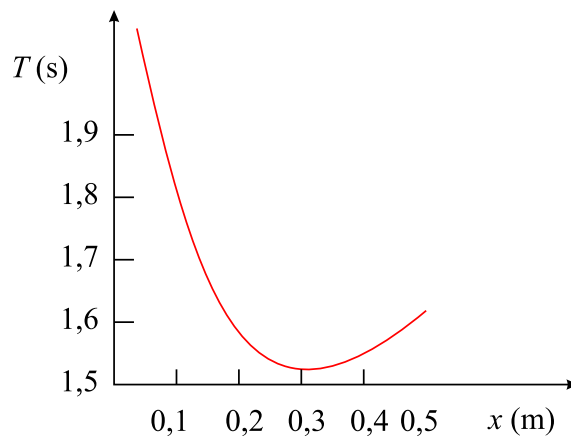


Figure 1: Uz zadatak ...

Kada je $x = 0$ period teži beskonačnosti. To znači da se klip nalazi u stanju labilne ravnoteže i da ne vrši oscilacije. Prvi izvod f-je $T(x)$ je

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{x}{l^2/12 + x^2}} \frac{x^2 - l^2/12}{x^2}$$

pa funkcija dostiže minimum za $x = l/\sqrt{12}$ kada ima vrednost $T = 1,52$ s. Period monotonno opada pri porastu x od 0 do $l/\sqrt{12}$. Pri najvećoj vrednosti $x = l/2$ period ima vrednost $T = 1,63$ s.

Fizičko klatno se nalazi u položaju u kome mu je centar mase iznad tačke vešanja. Ako krene iz tog položaja ka položaju stabilne ravnoteže, proći će kroz njega ugaonom brzinom ω . Zanemarujući trenje odrediti period koji ima ovo klatno kada vrši male oscilacije.

◊ Neka je l rastojanje centra mase od tačke vešanja. Kada klatno dodje do položaja stabilne ravnoteže, centar masa je promenio položaj za $2l$. U položaju stabilne ravnoteže raspolaže rotacionom kinetičkom energijom $E_k = I\omega^2/2$, a iz zakona održanja energije

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mg2l, \quad \rightarrow I = \frac{4mgl}{\omega^2}$$

pa je period

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = \frac{4\pi}{\omega}.$$

2. Klatno se sastoji od lake šuplje sfere tankih zidova, poluprečnika R ispunjenoj vodom, koja je okačena lakim štapom o tačku O . Rastojanje od tačke vešanja do centra sfere je l . Kako će se izmeniti period malih oscilacija ovog sistema u slučaju smrzavanja vode? Viskoznost vode i promenu njene zapremine pri zamrzavanju zanemariti.

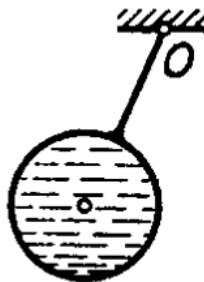


Figure 2: Uz zadatak ...

◊ Kada je voda smrznuta imamo posla sa fizičkim klatnom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}mR^2 + ml^2}{mgl}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{1 + \frac{2R^2}{5l^2}}.$$

Kada voda nije smrznuta, obzirom da je zanemarena njena viskoznost, reč je o idealnom fluidu. Takvi fluidi trenutno reaguju na spoljašnje

uticaje. Kada sfera sa takvim fluidom vrši male oscilacije, linearno ubrzanje delova fluida se razlikuje jer se nalaze na različitoj udaljenosti od tačke vešanja ($a = r\alpha$). Kako je fluid idealna u njemu se javlja rotaciono kretanje koje poništava efekat različitih ubrzanja pa u konačnom svi delići fluida imaju isto ubrzanje. To znači da se u ovom slučaju sistem ponaša kao matematičko klatno perioda $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$, odakle se dobija

$$T = T_0\sqrt{1 + \frac{2R^2}{5l^2}}.$$

3. Materijalna tačka učestvuje istovremeno u dva oscilatorna procesa koji se odvijaju u istom pravcu po harmonijskom zakonu, istom frekvencijom i sa amplitudama $A_1 = 5$ cm i $A_2 = 10$ cm, dok je pomeraj u fazi $\Delta\varphi = \pi/3$. Odrediti amplitudu i početnu fazu rezultujućeg oscilatornog procesa.

◇

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (1)$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (3)$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (4)$$

Ukoliko je poznata samo razlika u fazama ima smisla uzeti da je $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \Delta\varphi$, pa je

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi} = 13 \text{ cm},$$

$$\tan \varphi = \frac{A_2 \sin \Delta\varphi}{A_1 + A_2 \cos \Delta\varphi} = 0,23\pi.$$

4. Odrediti amplitudu i početnu fazu harmonijskog oscilovanja koje se dobija slaganjem dve oscilacije koje se odvijaju duž istog pravca a zadate su jednačinama $x_1 = 4 \sin \pi t$ cm i $x_2 = 3 \sin(\pi t + \pi/2)$ cm. Napisati jednačinu rezultujućeg oscilovanja. Nacrtati vektorski dijagram za sabiranje amplituda.

◇

$$A_1 = 4 \text{ cm}, A_2 = 3 \text{ cm}, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2 \quad A = 5 \text{ cm}, \tan \varphi = 3/4$$

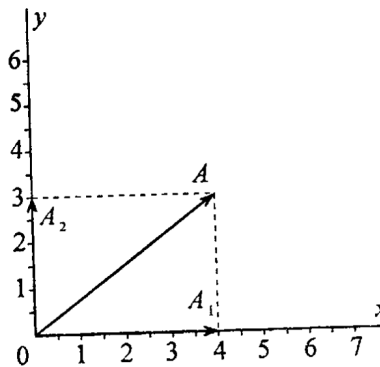


Figure 3: Uz zadatak ...

5. Matematičko klatno dužine $l = 50\text{cm}$ vrši male oscilacije u sredini, čiji je koeficijent prigušenja $\beta = 0,9\text{ s}^{-1}$. Odrediti vreme τ i broj punih oscilacija n , nakon kojih će amplituda klatna da se smanji 5 puta. Koliko puta treba da bude veći koeficijent trenja, da oscilacije ne bi bile moguće?

$$\diamond A_1 = \varphi_0 e^{-\beta t}, A_2 = \varphi_0 e^{\beta(t+\tau)}$$

$$A_1/A_2 = e^{\beta\tau} = 5 \rightarrow \tau = \frac{1}{\beta} \ln 5 = 1,79\text{ s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}, T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 1,45\text{ s}$$

Broj punih oscilacija se dobija kao odnos vremena τ i perioda

$$n = \frac{\tau}{T} = 1,23$$

što znači da se nakon dve pune oscilacije amplituda umanjila više od 5 puta.

Oscilacije prestaju kada je $\beta = \beta_{max} = \omega_0$. Kako je $\beta = b/(2m)$, traženi odnos je

$$\frac{b_{max}}{b} = \frac{\beta_{max}}{\beta} = \frac{\omega_0}{\beta} = 4,9.$$

6. Harmonijski oscilator vrši u vakuumu oscilacije ugaone učestanosti ω_0 i amplitude A_0 . U viskoznoj sredini ugaona frekvencija je ω . Odrediti

formulu po kojoj se menja brzina oscilatora sa vremenom, njenju amplitudnu vrednost i fazni pomeraj u odnosu na elongaciju u viskoznoj sredini.

◊ U vakuumu je elongacija $x = A_0 \cos \omega_0 t$

U viskoznoj sredini je $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, gde je β koeficijent prigušenja koji zavisi od svojstava sredine. Elongacija će sada biti data izrazom $x = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$, odakle je brzina oscilovanja

$$v = \frac{dx}{dt} = A_0 e^{-\beta t} (-\omega \sin \omega t - \beta \cos \omega t).$$

Izraz u zagradama može da se shvati kao proces koji je zbir dva harmonijska oscilovanja jednakih frekvencija ω sa amplitudama ω i β . Iz toga sledi da ovaj izraz može da se predstavi kao jedno harmonijsko kretanje koje se odvija istom frekvencijom.

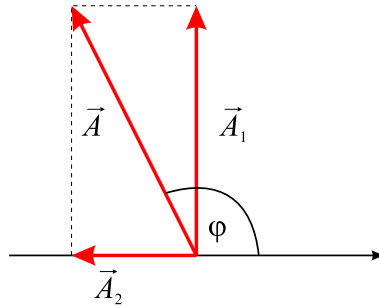


Figure 4: Uz zadatak ...

Prvom oscilatornom kretanju $-\omega \sin \omega t = \omega \cos(\omega t + \pi/2)$ odgovara vektor $\vec{A}_1$ a drugome $-\beta \cos \omega t = \beta \cos(\omega t + \pi)$, vektor $\vec{A}_2$. Vektor $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ je zbirn vektor rezultujućeg oscilatornog procesa. Njegov intenzitet je

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0^2$$

dok mu je početna faza

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi, \quad \tan \psi = \frac{\beta}{\omega}.$$

$$-\omega \sin \omega t - \beta \cos \omega t = \omega_0 \cos[\omega t + (\pi/2 + \psi)]$$

Tražena brzina je

$$v = A_0 \omega_0 e^{-\beta t} \cos[\omega t + (\pi/2 + \psi)].$$

Brzina prigušenog kretanja se u viskoznoj sredini menja po vremenu na isti način kao i elongacija, sa istom frekvencijom ω . Početna amplituda brzine je

$$v_0 = A_0 \omega_0$$

dok je pomerena u fazi u odnosu na elongaciju za

$$\Delta\varphi = \pi/2 + \arctan(\beta/\omega).$$

Primetimo da je za neprigušene oscilacije ($\beta = 0$) amplituda brzine $A_0 \omega_0$ dok je pomeraj u fazi $\Delta\varphi = \pi/2$.

7. Kuglica mase $m = 50$ g okačena je o neistegljivu oprugu krutosti $k = 20$ N/m. Pod dejstvom prinudne vertikalne harmonijske sile frekvencije $\omega = 18 \text{ s}^{-1}$ ona vrši harmonijske prinudne oscilacije amplitude $A_0 = 1,3$ cm. Pri tome elongacija kuglice kasni u fazi u odnosu na prinudnu silu za $\varphi = \pi/4$. Odrediti rad koji izvrši prinudna sila za vreme od jednog perioda oscilovanja.

◇ $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$ Sila je $F = F_0 \cos \omega t$, a elongacija $x = A_0 \cos(\omega t - \varphi)$, dok je brzina $v = \dot{x} = -\omega A_0 \sin(\omega t - \varphi)$.

$$A_0 = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (5)$$

$$\tan \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6)$$

$$dA = -F_0 \omega A_0 \cos \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt$$

$$A = -F_0 \omega A_0 [\cos \varphi \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt - \sin \varphi \int_0^T \cos^2 \omega t dt]$$

$$\int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0, \quad \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$$

$$A = F_0 A_0 \pi \sin \varphi$$

Iz $\tan \pi/4 = 1$ sledi $2\beta\omega = \omega^2 - \omega_0^2$, pa je

$$F_0 = A_0 m (\omega_0^2 - \omega^2) \sqrt{2}$$

$$A = A_0^2 m \pi (\omega_0^2 - \omega^2) = 2,0 \times 10^{-3} \text{ J.}$$