

Osnovi teorije grešaka

Poznato je da svakoj fizičkoj pojavi u prirodi možemo pristupiti kvalitativno (opisno). To bi značilo objasniti suštinu same fizičke pojave, način, uzroke i uslove pod kojima se ona odigrava. Međutim, da bi naše znanje o nekoj grupi fizičkih pojava moglo dobiti naučni karakter, sve teorijske hipoteze se moraju proveriti i dokazati eksperimentalnim putem. Dakle, kvantitativni način proučavanja fizičkih pojava je neophodan, jer se njime utvrđuju odgovarajuće zakonitosti između pojedinih veličina, i proveravaju teorijske pretpostavke. Da navedemo reči lorda Kelvina: „Ja često kažem da onda kada možete meriti ono o čemu govorite i izraziti ga brojevima, vi o tome znate nešto. Ali kada ga ne možete izraziti brojevima, vaše znanje je oskudno i ne zadovoljava; ono može biti početak saznanja, ali ste u svojim rasuđivanjima jedva dospeli do stupnja *nauke*“. Dakle, osnovni metod saznanja u fizici je eksperiment.

Eksperiment se zasniva na merenju. Merenje je upoređivanje vrednosti neke fizičke veličine sa drugom količinom iste fizičke veličine koja je uzeta za jedinicu mere.

Međutim, pri svakom merenju, moramo imati u vidu da apsolutno nikada ne možemo odrediti „pravu“ ili „stvarnu“ vrednost fizičke veličine koju merimo - mi možemo samo *proceniti interval* oko neke srednje izmerene vrednosti, za koji smo na određenom nivou poverenja (sa određenom verovatnoćom) sigurni da se u njemu nalazi stvarna ili prava vrednost. Najčešće se srednja izmerena vrednost uzima za najbolju procenu prave vrednosti, pa se rezultat svakog merenja bilo koje fizičke veličine uvek piše u obliku obostranog intervala oblika

$$(\bar{x} \pm \Delta x)$$

gde je $\bar{x}$ srednja izmerena vrednost, a Δx apsolutna greška merenja (može biti i slučajna ili ukupna!). Srednja vrednost se obično lako nalazi, dok je problem u nalaženju vrednosti greške merenja, odnosno u određivanju širine datog intervala u kome treba da se nalazi prava vrednost.

Sve greške koje pri nekom merenju možemo napraviti možemo podeliti u tri grupe:

- ✓ *grube greške* - gruba odstupanja, na primer, pogrešno očitavanje vrednosti sa instrumenta. One su najčešće posledica nepažnje eksperimentatora i naravo, nisu dozvoljene.
- ✓ *sistematske greške* - greške koje se javljaju kao posledica nesavršenosti instrumenta kojim se vrši merenje. Svaki instrument ima jednu karakteristiku - *klasu tačnosti* na osnovu koje se može odrediti koliko sistematsku grešku pravi. Međutim, kasnije ćemo videti da postoje i druge metode za procenu sistematskih grešaka, kada se upoznamo sa pojmovima direktnih i indirektnih merenja.
- ✓ *slučajne greške* - greške koje se uvek javljaju, imaju slučajan karakter, i ne mogu se otkloniti čak i kada bi smo koristili „idealno tačne“ instrumente! Za procenu slučajnih grešaka koriste se Gausova (za veći broj merenja) i Studentova raspodela verovatnoće, no da bi smo njih procenjivali trebalo bi da imamo nekoliko desetina merenja, ili više.



Slika 1. Odnos sistematske i slučajne greške u zavisnosti od tačnosti merenja.

Greške sa kojima ćemo se mi ovde baviti su sistematske greške. Podrazumevaćemo da grubih grešaka nema, a zbog manjeg broja merenja, zanemarivaćemo slučajne. Razlikovaćemo *apsolutnu* i *relativnu* sistematsku grešku.

Apsolutna greška nekog merenja se obično definiše kao apsolutno odstupanje vrednosti tog merenja od srednje vrednosti:

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}|$$

Ako imamo veći broj merenja, i svako ima svoju sistematsku grešku, za konačnu sistematsku grešku uzimamo najveće od pojedinačnih odstupanja

$$\Delta x = |x_i - \bar{x}|_{\max}$$

Relativna greška se definiše kao odnos apsolutne greške i srednje vrednosti, i obično se izražava u procentima:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Ovo su definicije koje se mogu naći u većini knjiga, no praksa pokazuje da postoje različite metode određivanja apsolutnih, a samim tim i relativnih grešaka, u zavisnosti od vrste merenja i načina na koji se ono vrši.

Direktna i indirektna merenja

Po načinu na koji se dolazi do vrednosti merene fizičke veličine, sva merenja možemo podeliti na *direktna* i *indirektna*.

Direktno merenje je merenje pri kom, kako mu samo ime kaže, direktno očitavamo vrednost fizičke veličine sa odgovarajućeg analognog ili digitalnog instrumenta. Na primer, temperaturu nekog tela direktno očitavamo sa termometra, jačinu struje u nekom kolu direktno očitavamo sa ampermetra, vreme za koje se neko telo kreće direktno merimo hronometrom (štoperica) itd.

Indirektno merenje je merenje pri kom vrednost neke fizičke veličine određujemo posrednim putem - preko neke formule koja je povezuje sa drugim veličinama koje obično merimo direktnim putem. Na primer, ako bi smo određivali ubrzanje sile Zemljine teže matematičkim klatnom, merili bi smo period oscilovanja i njegovu dužinu. Za određivanje perioda merili bi smo vreme oscilovanja dok klatno ne napravi n oscilacija, pa bi smo onda ubrzanje teže nalazili po odgovarajućoj formuli:

$$T = \frac{t}{n}, T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \Rightarrow g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} = 4\pi^2 \frac{n^2 l}{t^2}$$

Tada kažemo da ubrzanje sile teže merimo indirektnim putem.

Način na koji određujemo apsolutnu i relativnu grešku zavisi od toga da li fizičku veličinu merimo direktnim ili indirektnim putem.

Ako veličinu određujemo indirektnim putem, onda njena sistematska greška zavisi od sistematskih grešaka svih direktno merenih veličina pomoću kojih se ona određuje.

Sada ćemo objasniti metod nalaženja sistematskih grešaka kod svake vrste merenja.

Apsolutna i relativna greška direktno merene veličine

Vrednost neke fizičke veličine možemo direktno meriti jednom, ili više puta. Ako merimo samo jednom, onda apsolutnu grešku veličine možemo odrediti na dva moguća načina:

- ✓ Za apsolutnu grešku možemo uzeti ili *ceo najmanji podeok*, ili *polovinu najmanjeg podeoka* na odgovarajućem instrumentu (da li se uzima ceo podeok ili polovina zavisi od procene eksperimentatora, na osnovu veličine srednje vrednosti), i
- ✓ Koristeći klasu tačnosti instrumenta k , apsolutnu grešku računamo po obrascu:

$$\Delta x = \frac{k \cdot x_{\max}}{100}$$

gde je $x_{\max}$ maksimalna vrednost koja se datim instrumentom može izmeriti (praktično merni opseg instrumenta). Ovaj obrazac nije jedinstven, i obično se koristi za analogne instrumente.

Preporučljivo je da se direktno merenje neke veličine vrši veći broj puta, jer se tada može pomoću srednje vrednosti izvršiti najbolja procena prave vrednosti merene veličine:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

gde je n broj merenja, a x_i pojedinačne vrednosti dobijene tokom merenja. Svaka vrednost ima neko svoje apsolutno odstupanje - apsolutne greške pojedinačnih merenja:

$$\Delta x_1 = |x_1 - \bar{x}|, \Delta x_2 = |x_2 - \bar{x}|, \dots, \Delta x_n = |x_n - \bar{x}|$$

Tada za konačnu apsolutnu grešku merenja uzimamo *maksimalno* od gore navedenih odstupanja, dakle

$$\Delta x = |x_i - \bar{x}|_{\max}$$

i rezultat zapisujemo u obliku

$$(\bar{x} \pm \Delta x)$$

Na primer, ako smo metarskom trakom tri puta merili dužinu nekog tela, i dobili pojedinačne vrednosti

$$l_1 = 39,9cm, \quad l_2 = 40,0cm, \quad l_3 = 40,1cm$$

srednja vrednost je

$$\bar{l} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3} = 40,0cm$$

apsolutna odstupanja su

$$\Delta l_1 = |39,9 - 40,0|cm = 0,1cm$$

$$\Delta l_2 = |40,0 - 40,0|cm = 0cm$$

$$\Delta l_3 = |40,1 - 40,0|cm = 0,1cm$$

pa je apsolutna greška $\Delta l = \Delta l_{\max} = 0,1cm$ i rezultat zapisujemo u obliku

$$l = (40,0 \pm 0,1)cm$$

Ovde je bitno napomenuti da srednja vrednost i apsolutna greška trebaju biti izražene sa istom tačnošću, odnosno sa istim brojem *značajnih cifara* (to praktično najčešće znači sa istim brojem decimala). Kasnije ćemo reći nešto o pravilima zaokruživanja i pojmu *značajna cifra*.

Apsolutna greška indirektno merene veličine

Neka se neka veličina y određuje indirektno, na osnovu direktno merenih veličina $x_1, x_2, \dots, x_n$, po nekoj formuli

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Samo ćemo navesti opštu formulu za određivanje sistematske greške, a onda ćemo objasniti alternativni metod njenog nalaženja:

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \right| \Delta x_n = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \quad (1)$$

Alternativni metod:

Za objašnjenje alternativnog metoda najbolje je poslužiti se konkretnim primerom neke zavisnosti. Neka to bude zavisnost ubrzanja teže od dužine matematičkog klatna i vremena njegovog oscilovanja, u već navedenom eksperimentu određivanja ubrzanja teže pomoću matematičkog klatna:

$$g = \frac{4\pi^2 n^2 l}{t^2}$$

Ako imamo apsolutne greške za vreme oscilovanja i dužinu klatna, apsolutnu grešku za g nalazimo iz tri koraka:

1) Logaritmovanje odgovarajuće zavisnosti prirodnim logaritmom $\ln$.

Logaritmovanje gornje jednakosti dobijamo:

$$\ln g = \ln 4 + 2 \ln \pi + 2 \ln n + \ln l - 2 \ln t$$

2) Diferenciranje tako dobijene jednakosti.

Kako je $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$, i kako je diferencijal zbira jednak zbiru diferencijala, diferenciranjem gornja jednačina dobija oblik:

$$\frac{dg}{g} = \frac{d4}{4} + 2 \frac{d\pi}{\pi} + 2 \frac{dn}{n} + \frac{dl}{l} - 2 \frac{dt}{t}$$

Takođe, kako je diferencijal konstante jednak nuli, j -na dobija prostiji oblik:

$$\frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - 2 \frac{dt}{t}$$

3) Zamena diferencijala u svakom izrazu sa Δ i prebacivanje svih minuseva u plusve.

Naime, diferencijal neke fizičke veličine u fizici predstavlja jako malu promenu njene vrednosti - njen jako mali *priraštaj*, za neki „beskonačno mali interval vremena“. Kako su sva merenja vršena za neko konačno vreme, sve diferencijale zamenjujemo apsolutnim greškama direktno merenih veličina.

Takođe, u osnovi mi ne znamo kako greške pojedinih direktno merenih veličina utiču na grešku indirektno merene vrednosti. Ali, s obzirom na činjenicu da mi samo *procenjujemo interval* oko srednje vrednosti u kome pretpostavljamo da se (sa određenom verovatnoćom) nalazi prava vrednost, onda trebamo posmatrati „najgori“ simultani uticaj grešaka svih direktno merenih veličina, u smislu da svaka greška utiče na povećanje sistematske greške indirektno merene veličine. Tako ćemo dobiti maksimalni mogući interval, u kome će naravno biti i najveća verovatnoća nalaženja prave vrednosti. Iz tog razloga su, u ostalom, i svi parcijalni izvodi u j -ni (1) u apsolutnim zagradama - da bi se obezbedila njihova pozitivnost i sabiranje svih grešaka!

Na osnovu svega navedenog, dobićemo jednačinu sa relativnim greškama oblika

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta t}{t}$$

i ako smo izračunali srednju vrednost, apsolutnu grešku nalazimo po obrascu

$$\Delta g = \bar{g} \cdot \left(\frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta t}{t} \right)$$

Po jednačini (1), ali i po alternativnoj metodi mogu se odrediti izrazi za apsolutnu i relativnu grešku bilo koje zavisnosti. Najbitniji izrazi su navedeni u priloženoj tabeli 1.

Формула	Апсолутна грешка	Релативна грешка
$y = \text{const} \cdot x_1$	$\Delta y = \text{const} \cdot \Delta x_1$	$\delta_y = \delta_{x_1}$
$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ $y = x_1 - x_2 - \dots - x_n$	$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n$	$\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$
$y = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ $y = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k}{x_{k+1} \cdot \dots \cdot x_n}$	$\Delta y = y \delta_y$	$\delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \dots + \delta_{x_n}$.
$y = x_1^p$	$\Delta y = y \delta_y$	$\delta_y = p \delta_{x_1}$
$y = \sqrt[p]{x_1}$	$\Delta y = y \delta_y$	$\delta_y = \frac{1}{p} \delta_{x_1}$

Tabela 1.
Apsolutne i relativne greške nekih zavisnosti

I konačno, bitno je napomenuti da se vrednost veličine i njena greška ovako određuju jedino ako se u eksperimentu ne crta grafik. Međutim, ako se u eksperimentu crta grafik, onda se vrednost veličine i njena greška određuju sa neke od karakteristika grafika, da bi preciznost bila što je moguće veća.

Najlakše je raditi sa graphicima linearnih funkcija, no jasno je da zavisnost između merenih veličina ne mora biti takva. U tom slučaju, neku nelinearnu zavisnost možemo svesti na linearnu postupkom koji se sastoji u pravilnom i promišljenom odabiru onoga što ćemo nanostiti na koordinantnim osama - *linearizacijom* grafika. Prema tome, pre no što se upoznamo sa crtanjem grafika i odgovarajućim pravilima, moramo se podsetiti linearne zavisnosti o na konkretnom primeru objasniti postupak linearizacije.

Linearizacija grafika

Primer određivanja ubrzanja sile teže matematičkim klatnom koji smo odabrali u prethodnom odeljku takođe je jako pogodan za objašnjavanje pojma linearizacije. Poznato je da se u eksperimentu crta grafik zavisnosti $T^2 = f(l)$, i da se ubrzanje sile teže određuje iz koeficijenta pravca tog grafika:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \Leftrightarrow y = kx$$

$$k = \frac{4\pi^2}{g}, \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{k}$$

Ako bi smo crtali grafik zavisnosti perioda od dužine klatna, grafik bi bio parabola, sa koje bi smo teško odredili ubrzanje sile teže, dok je grafik zavisnosti $T^2 = f(l)$ linearna prava. Dakle,

linearizacija neke zavisnosti predstavlja samo pravilan odabir veličina koje ćemo nanositi na apscisu i ordinatu.

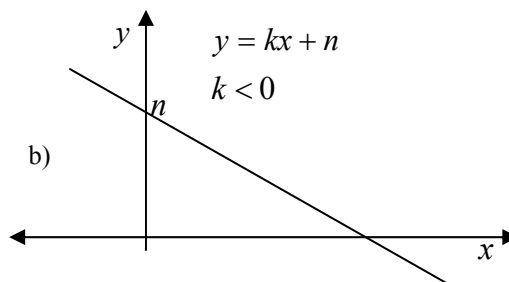
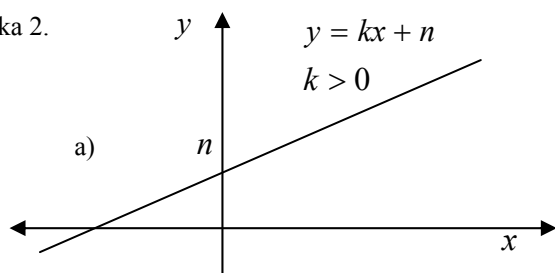
Linearna funkcija i njen grafik

Opšti eksplisitni oblik linearne funkcije $y = f(x)$ je:

$$y = kx + n$$

gde je k koeficijent pravca a n odsečak na y -osi. Ako je koeficijent pravca pozitivan, funkcija ima rastuće, a ako je negativan opadajuće ponašanje, kao na narednim slikama (2a i 2b):

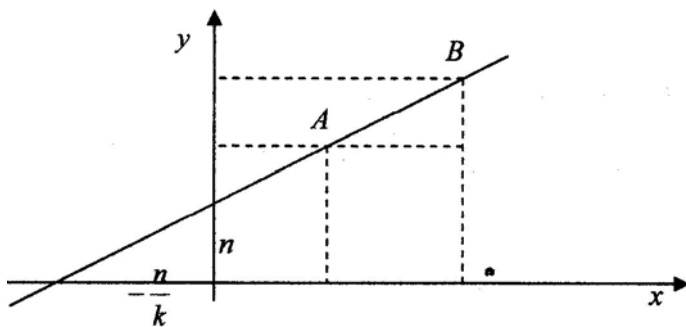
Slika 2.



Jako često je dobro poznavati i *segmentni* oblik jednačine prave, zato što se ponekad tražena veličina može određivati i sa jednog od odsečaka na osama! Segmentni oblik se lako dobija iz eksplisitnog:

$$-kx + y = n, \quad \frac{x}{-\frac{n}{k}} + \frac{y}{n} = 1, \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

odavde se može videti da je odsečak na x -osi $m = -n/k$, a na y -osi n . Koeficijent pravca prave predstavlja tangens nagibnog ugla te prave sa x -osom, i najlakše se određuje odabirom dve tačke A i B sa prave, kao na slici 3.



Slika 3. Određivanje koeficijenta pravca prave

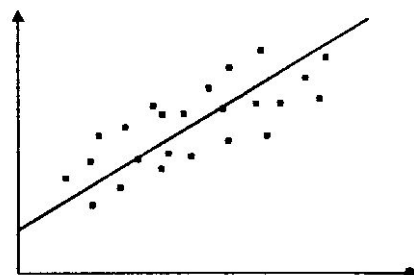
Koeficijent pravca se lako određuje iz odgovarajućeg pravouglog trougla:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Naravno, koordinate tačaka A i B direktno očitavamo sa grafika, tako da ovakvo određivanje koeficijenta pravca spada u indirektnu metodu. Ta činjenica je bitna zbog načina određivanja njegove greške.

Do sada smo govorili o idealnoj, matematičkoj linearnoj funkciji. Međutim, kada u eksperimentu izvršimo neka merenja, i eksperimentalne tačke nanesimo na grafik, one sigurno neće pripadati jednoj ovakvoj pravoj, već će se, zbog slučajnih grešaka, javiti određena odstupanja, kao na slici 4.

Slika 4. Eksperimentalni podaci sa statističkom linearnom zavisnošću i regresiona prava



Naš zadatak je da na osnovu eksperimentalnih tačaka nađemo linearnu pravu koja na najbolji način opisuje datu linearnu zavisnost. Takva prava se naziva *regresiona prava*, a metod određivanja njene jednačine *metod najmanjih kvadrata*.

Ovde se nećemo upuštati u detaljnu analizu metoda najmanjih kvadrata, već ćemo samo objasniti njegovu suštinu, koja se sastoji u sledećem:

Regresionu pravu treba konstruisati tako da je zbir kvadrata odstupanja svih eksperimentalnih tačaka od nje minimalan.

Odnosno, da je algebarski zbir odstupanja minimalan. Pod pojmom algebarski zbir podrazumeva se činjenica da neka odstupanja ulaze sa predznakom „+“ a neka sa predznakom „-“. Odstupanja onih tačaka koje su iznad regresione prave možemo po dogovoru uzimati za pozitivna, a odstupanja tačaka ispod prave za negativna. Drugim rečima, zbir odstupanja svih tačaka iznad i ispod prave treba da budu što približniji. Na slici 5. prikazana su odstupanja eksperimentalnih tačaka od neke prave.

Na ovakvom grafiku koeficijent pravca nalazimo na već objašnjen način - biramo dve proizvoljne, neeksperimentalne tačke A i B. Tačka A obično se bira između prve i druge, a tačka B između pretposlednje i poslednje eksperimentalne tačke. Greška koeficijenta pravca se nalazi na način na koji se traži greška indirektno merene veličine:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \bigg/ \ln$$

$$\ln k = \ln(y_B - y_A) - \ln(x_B - x_A) \quad (1. \text{ korak})$$

$$\frac{dk}{k} = \frac{d(y_B - y_A)}{y_B - y_A} - \frac{d(x_B - x_A)}{x_B - x_A} \quad (2. \text{ korak})$$

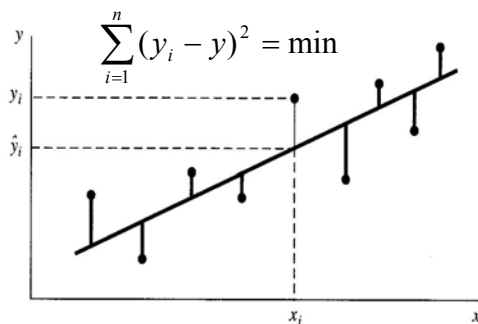
$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{x_B - x_A} + \frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{y_B - y_A} \quad (3. \text{ korak})$$

Poslednja jednačina je jednačina koja se može koristiti kao gotova, i predstavlja obrazac za relativnu grešku koeficijenta pravca. Koordinate x_A , x_B , y_A i y_B očitavamo direktno sa grafika, a njihove apsolutne greške koje figurišu u brojiocima možemo procenjivati na dva načina:

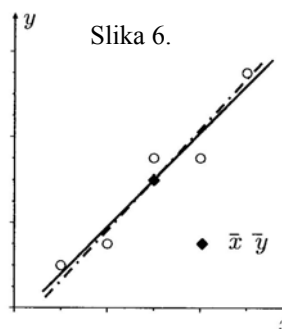
- ✓ Ako svaka eksperimentalna tačka ima svoju grešku po x - osi i po y - osi, onda se za apsolutnu grešku tačke A i B (bilo koje koordinate) uzima jedna od apsolutnih grešaka susednih tačaka - uvek se uzima ona koja je veća!
- ✓ Ako eksperimentalne tačke nemaju apsolutne greške po jednoj od osa, onda za apsolutne greške tačaka A i B (po toj osi) treba uzeti vrednost najmanjeg podeoka na toj osi (njenu razmeru).

Odsecci na osama se direktno očitavaju sa grafika, a njihove apsolutne greške se takođe mogu procenjivati na dva načina:

- ✓ Za apsolutnu grešku odsečka na nekoj od osa možemo uzeti najveću od apsolutnih grešaka svih eksperimentalnih tačaka po toj osi
- ✓ Možemo naći tzv. „najhorizontalniji“ i „najvertikalniji“ položaj prave, takve da prava još uvek prolazi kroz intervale grešaka svih eksperimentalnih tačaka. Ta dva granična položaja regresione prave će na koordinatnim osama odsecati određene dužine, koje možemo uzeti za sistematske greške odsečaka na tim osama, kao na slici 6.



Slika 5.



Slika 6.

Pravila za crtanje grafika

S obzirom na činjenicu da se tražena veličina najčešće izračunava iz neke od karakteristika grafika (koeficijenta pravca, odsečaka na osama...) jasno je da je jako bitno tačno nacrtati grafik. Za to služe tzv. pravila za crtanje grafika. Njih ima više, mada ćemo ovde napomenuti samo ona najbitnija:

- Grafik se crta isključivo na milimetarskom papiru, formata A4, običnom olovkom.
- Grafik mora imati naziv (Grafik zavisnosti od) i na osama moraju biti obeležene veličine čije se vrednosti nanose, sa naznakom jedinica u uglastim zagradama.
- Kada crtamo grafik, biramo takvu razmeru da najveći deo raspoloživog prostora na milimetarskom papiru bude iskorišćen. Međutim, pri odabiru razmere treba biti pažljiv, jer nisu sve razmere dozvoljene! Nedoizvoljene razmere su one koje podrazumevaju da vrednost jednog milimetra na osi nije konačan broj. Tada se pri nanošenju vrednosti fizičke veličine na odgovarajuću osu mora vršiti zaokruživanje, a time se pravi greška. Dozvoljene razmere su one pri kojima vrednost jednog milimetra na grafiku iznosi:

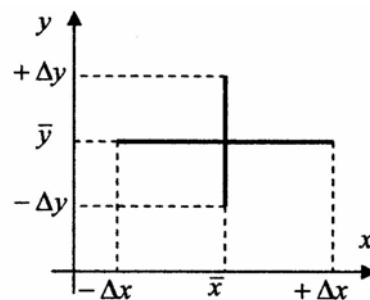
0,005, 0,004, 0,025, 0,002, 0,001, 0,05, 0,04, 0,025, 0,02, 0,01, 0,1, 0,02, 0,025, itd.

jedinica veličine koju nanosimo na datu osu. Odnosno, jedinica veličine koju nanosimo može biti predstavljena sa 1, 2, 2,5, 5, 10, 20, 25, 50, 100 milimetara itd. Razmere

1:3, 1:6, 1:7, 1:9, 1:12 itd. nisu dozvoljene.

Pri tom, razmera 1:4 je dozvoljena, ali je treba izbegavati.

- Na koordinantne ose se nanose samo ekvidistantne vrednosti, najbolje celobrojne, a nikako vrednosti eksperimentalnih tačaka (osim ako se naravno eksperimentalna ne poklopi sa celobrojnima). To su tzv. uporedne tačke. Koga interesuje kolika je vrednost koordinate neke od eksperimentalnih tačaka, one je lako može očitati sa grafika. Ovo pravilo se primenjuje radi preglednosti grafika.
- Eksperimentalne tačke se na grafik nanose različitim simbolima - u obliku krstića, kvadratića, kružića, malih trouglova itd. No najbolji je metod krstića, jer on omogućuje da se na grafiku sa svakom eksperimentalnom tačkom nanese i njene apsolutne greške po svakoj od osa. Na slici 7. prikazana je jedna „uvećana“ eksperimentalna tačka, i fizička suština krakova krstića. Oni predstavljaju apsolutne greške, dok koordinate centra krstića predstavljaju srednje vrednosti eksperimentalne tačke po x-osi i po y-osi.



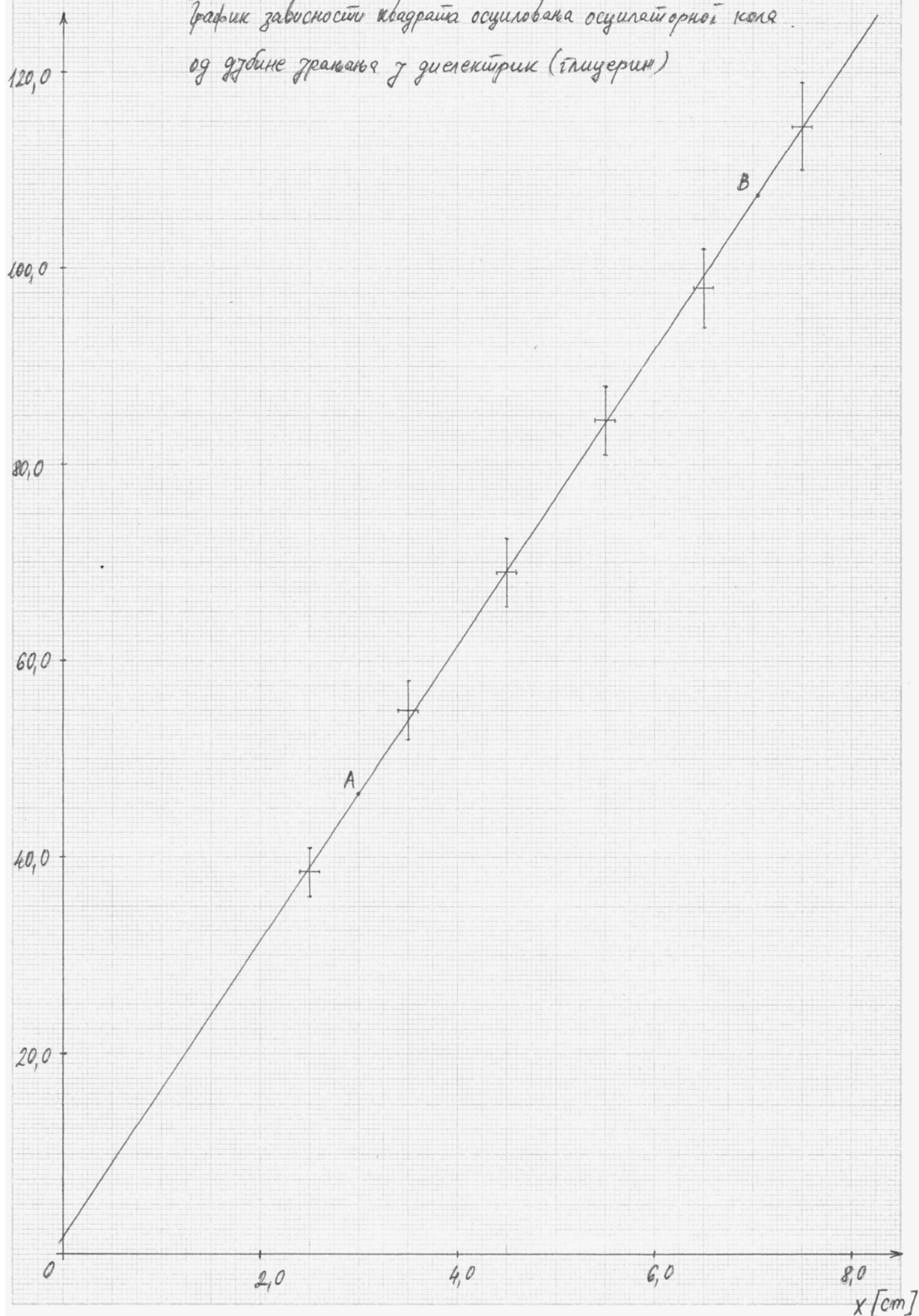
Slika 7.

- Greške eksperimentalnih tačaka se na grafik ne nanose samo ako su njihove vrednosti manje od vrednosti jednog milimetra na odgovarajućoj osi (razmere).
- Ponekad je bolje da na grafiku preseki koordinantnih osa ne budu u koordinantnom početku, odnosno da jedna od osa ne počinje od nule. Na primer, ako se vrednosti eksperimentalnih tačaka na nekoj od osa kreću recimo u intervalu 360 - 370 (jedinica veličine), jasno je da je bolje da ta osa ne polazi od nule, već od recimo 358. podeoka itd. Međutim, pri ovome je potrebno biti pažljiv, jer to nekada može dovesti do grube greške. Na primer, ako se treba odrediti odsečak na jednoj osi, druga mora polaziti od nule!
- Na grafiku se ne povlače bilo kakve linije od nanetih tačaka do koordinantnih osa!

Na narednoj slici je prikazan grafik kod koga su ispoštovana sva navedena pravila.

$T^2 [10^{-12} \text{ s}^2]$

График зависимости квадрата периода осциллограммы осцилляторной колы
от глубины погружения x диэлектрик (глицерин)



Pojam sigurnih i nesigurnih cifara

U jednom od prethodnih odeljaka rečeno je da se srednja vrednost i apsolutna greška zapisuju sa istom tačnošću, odnosno sa istim brojem sigurnih cifara.

Apsolutne greške mogu da utiču samo na izvestan broj cifara u broju koji predstavlja rezultat merenja. Tako na primer, ako je rezultat merenja neke veličine

$$x = (1,336 \pm 0,002)$$

onda ova greška može da izmeni samo krajnju cifru, odnosno 6, dok ostale cifre 1,33 ostaju nepromenjene. Dakle, ako merenje ponovimo više puta, cifre 1,33 se neće menjati.

Ove cifre koje se ne menjaju ma koliko puta ponavljali eksperiment nazivaju se *sigurne (tačne) cifre*. One cifre u rezultatu koje se mogu promeniti u zavisnosti od apsolutne greške i broja ponavljanja eksperimenta, nazivaju se *nesigurne (sumnjive) cifre*.

Pri izražavanju rezultata merenja, uobičajen je način pisanja koji daje mogućnost da se odmah ocene granice u kojima se greška kreće. Ovo se postiže tako što se pišu sve sigurne cifre i samo jedna, prva od nesigurnih. Ako je apsolutna greška veća od reda veličine te nesigurne cifre, ta nesigurna cifra se ne piše.

Na primer, ako je neka dužina data u obliku 6,45cm, podrazumevamo da su 6,4 sigurne cifre, a 5 je nesigurna, pa odmah procenjujemo da je red veličine apsolutne greške 0,01cm.

Na osnovu ovoga, postoje dva ekvivalentna načina zapisa rezultata merenja, što se može videti iz narednog primera:

$$x = (1,4562 \pm 0,0004)cm \quad \text{ili} \quad x = 1,4562(4)cm$$

Zaokruživanje srednjih vrednosti

- ✓ Ako je prva cifra koja se odbacuje 0, 1, 2, 3 ili 4, poslednja zadržana cifra se ne menja
- ✓ Ako je prva cifra koja se odbacuje 6, 7, 8 ili 9, poslednja zadržana cifra se povećava za jedan
- ✓ Ako je prva cifra koju treba odbaciti 5, a iza nje ima još cifara koje su različite od nule, tada se poslednja zadržana cifra povećava za jedan.
- ✓ Ako je prva cifra koju treba odbaciti 5, a iza nje nema više cifara ili su sve nule, tada se zadnja cifra koja ostaje uvećava za jedan ako je neparna, a ne menja ako je parna.

Primeri:

$$0,0063285 \approx 0,0063 = 6,3 \cdot 10^{-3} \quad (\text{prvo pravilo})$$

$$7,43876 \approx 7,44 \quad (\text{drugo pravilo})$$

$$0,02855 \approx 0,029 = 2,9 \cdot 10^{-2} \quad (\text{treće pravilo})$$

$$0,02855 \approx 0,0286 = 2,86 \cdot 10^{-2} \quad (\text{četvrto pravilo, prvi slučaj})$$

$$5,485 \approx 5,48 \quad (\text{četvrto pravilo, drugi slučaj})$$

U praksi prilikom izračunavanja vrednosti neke fizičke veličine najčešće se pojavljuje više od jedne računске operacije. Onda se za sve međurezultate koristi nezaokružena vrednost, ili bar zaokružena vrednost koja ima jednu značajnu cifru više od konačnog rezultata!

Literatura:

- (1) Vlastimir V. Vučić „Osnovna merenja u fizici“, Beograd 1995.
- (2) Čedomir A. Maluckov, Zoran T. Pavlović, Miodrag K. Radović „Zbirka zadataka iz obrade rezultata fizičkih merenja“, Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet u Boru, Bor 2007.
- (3) S. Vukadinović, Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pregled, Beograd 1978.
- (4) G. L. Dimić, M. D. Mitrinović „Metrologija u fizici“, Građevinska knjiga, Beograd 1991.