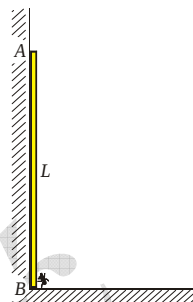


Klasična mehanika

1. (Pripreme za Olimpijadu 2007, 3.)

Veoma dugačku tanku šipku AB savili smo pod uglom od 90° , tako da je jedan deo šipke postavljen u vertikalni (AO), a drugi deo u horizontalni (OB) položaj (vidi sliku 1.) Duž svakog dela šipke može da se kreće po jedan prsten iste mase M , zanemarljivih dimenzija. Prstenove spojimo pravim vrlo tankim nesavitim metalnim štapom zanemarljive mase i dužine $L=0.1m$. U početnom trenutku štap je vertikalan, a onda su prstenovi počeli da se kreću. Izračunajte maksimalne brzine svakog prstena tokom svog kretanja. Trenje u potpunosti zanemariti. Ubrzanje sile zemljine teže je $g=10m/s^2$.

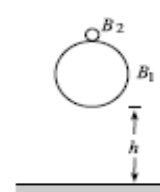


slika 1.

2. (Morin - Chapter 4, 22.) Basketball and tennis ball **

a) Teniska lopta male mase m_2 stoji na vrhu košarkaške lopte velike mase m_1 (vidi sliku 2.). Donji kraj košarkaške lopte je na visini h iznad podloge, a donji kraj teniske lopte na visini $h+d$ iznad podloge. Lopte su puštene da slobodno padaju. Do koje visine će odskočiti teniska loptica?

Napomena: Uzeti da je masa m_1 mnogo veća od mase m_2 , i pretpostaviti da lopte odskoču elastično. Takođe, radi jednostavnosti, pretpostaviti da se lopte prvobitno razdvajaju na malim rastojanjima, a zatim odskoču trenutno.

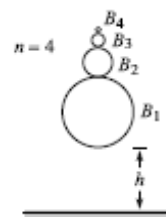


slika 2.

b) Sada razmatramo n lopti, $B_1, \dots, B_n$, masa $m_1, \dots, m_n$ ($m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$), koje stoje na gomili u vertikalnoj ravni (slika 3.). Donji kraj lopte B_1 je na visini h iznad podloge, a donji kraj lopte B_n je na visini $h+l$ iznad podloge. Lopte su puštene da slobodno padaju. Do koje visine će odskočiti najviša loptica?

Napomena: Uzeti aproksimacije slične onima u delu a).

Ako je $h=1m$, koliki je minimalni broj loptica potreban da bi poslednja loptica odskočila na visinu od minimum $1km$? Pretpostaviti da loptice i dalje odskoču elastično (što je malo apsurdno ovde), ignorišite uticaj otpora vazduha..., a veličinu l ne uzimati u obzir.



slika 3.

3. (MOF XIX Olimpijada – 1988., 2.) Maksvelov točak

Homogeni cilindrični disk (mase $M=0.40kg$, poluprečnika $R=0.060m$, debljine $d=0.010m$) okačen je o dve žice jednake dužine koje su pričvršćene za osovinu poluprečnika r koji prolazi kroz centar diska (masa i debljina žica, kao i masa osovine, mogu se zanemariti). Namotavanjem žica oko osovine centar mase diska se podigne na visinu $H=1.0m$ i onda pusti da se odmoti (slika). Nakon što dostigne najnižu tačku, disk se ponovo podiže. Rešite sledeće zadatke, uz pretpostavku da se trenutna osa rotacije A uvek nalazi vertikalno ispod tačke vešanja P. (slika).

a) Kolika je vrednost ugaone brzine rotacije diska ω nakon što se centar mase diska S spustio za dužinu s ?

b) Kolika je translatorska kinetička energija E_{trans} diska za $s=0.50m$? Odredite brojni odnos ove energije i ostalih energija koje se javljaju u ovom trenutku ako je poluprečnik osovine $r=0.0030m$.

c) Odredite silu zatezanja T_1 koja deluje na svaku od žica tokom spuštanja diska.

d) Izračunajte ugaonu brzinu diska ω u funkciji ugla rotacije φ tokom faze „preokretanja“ (prema slici). Prikažite komponente (u odgovarajućem Dekartovom koordinatnom sistemu) pomeraja i brzine centra mase diska u funkciji ugla rotacije φ .

e) Maksimalna sila zatezanja koju data žica može izdržati je $T_m=10N$. Koja je maksimalna dužina s_m žica koje bi se mogle odmotati, a da ne dođe do kidanja u fazi „preokretanja“.

4. (Olimpijada - 1998., 1.) Kotrljanje šestougaone prizme

Posmatrajmo dugačku, punu, krutu, pravilnu šestougaonu prizmu nalik na običnu olovku (slika). Masa prizme je M i ravnomerno je raspoređena. Dužina svake stranice normalnog poprečnog šestougaonog preseka prizme je a . Moment inercije šestougaone prizme oko njene vertikalne ose je: $I = 5/12 * Ma^2$. Moment inercije I' oko ivice prizme je $I' = 17/12 * Ma^2$.

a) (3.5 poena) Prizma u početnom trenutku miruje na strmoj ravni koja zaklapa mali ugao θ sa horizontalom (slika). Osa prizme je horizontalna. Pretpostaviti da su površine bočnih strana prizme blago udubljene, tako da prizma dodiruje ravan samo ivicama. Uticaj ove udubljenosti na momenat inercije prizme je zanemarljiv. Prizmu pokrenemo tako da počne da se kotrlja niz strmu ravan. Pretpostaviti da trenje sprečava bilo kakvo klizanje i da prizma ni u jednom trenutku ne gubi kontakt sa strmom ravni. Ugaona brzina prizme neposredno pre nego što data ivica dodirne ravan je ω_i , dok je ω_f ugaona brzina neposredno posle dodira.

Pokazati da važi relacija $\omega_f = s \omega_i$, i odrediti koeficijent s .

b) (1 poen) Kinetičke energije prizme neposredno pre i neposredno posle dodira su K_i i K_f , respektivno. Pokazati da važi $K_f = r K_i$, i odrediti vrednost koeficijenta r .

c) (1.5 poena) Da bi prizma mogla da se obrne oko naredne ivice, K_i mora biti veće od neke minimalne vrednosti $K_{i,min}$, što se može izraziti kao $K_{i,min} = \delta Mga$, gde je $g = 9.81 m/s^2$ ubrzanje zemljine teže. Naći koeficijent δ u funkciji nagibnog ugla θ i koeficijenta r . (upotrbiti algebarski simbol r , a ne njegovu brojnu vrednost).

d) (2 poena) Ako je uslov pod (c) ispunjen, vrednost kinetičke energije K_i se približava fiksnoj vrednosti $K_{i,0}$ kako prizma produžava sa kotrljanjem niz strmu ravan. Pretpostavljajući da ovakav maksimum kinetičke energije postoji, pokazati da se on može izraziti kao: $K_{i,0} = kMga$. Izraziti koeficijent k u funkciji θ i r .

e) (2 poena) Izračunajte sa tačnošću od 0.1° , minimalni nagibni ugao strme ravni θ_0 za koji se jednom započeto kotrljanje ne prekida.

5. (Završno takmičenje za izbor olimpijskih ekipa 2007. - 2.)

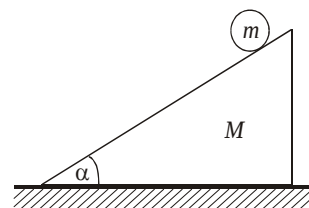
Kada se spoji mnogo malih retro-reflektora dobija se optički element koji se u svakodnevnom životu naziva „mačije oko“ (slika). Retro-reflektori moraju da budu dovoljno veliki da može da se zanemari difrakcija. S druge strane, oni su dovoljno mali da pomak upadnog i reflektovanog zraka može da se zanemari. Prema tome, mačije oko ima osobinu da zrak vrati približno po istoj putanji, odnosno da se reflektovani zrak razlikuje od upadnog samo po smeru.

Na strane omotača pravilne šestostrane prizme su naizmenično nalepljena ogledala i mačije oči (slika). Stranica šestougaonika je l . Prizma može slobodno da rotira oko centra O . Na sredinu strane sa mačijim okom pada uzak, dobro usmeren snop Nd:YAG lasera talasne dužine $1064nm$. Snop je paralelan osi AA' .

Na kojoj udaljenosti od tačke A treba na strani sa ogledalom da padne uzak, dobro usmeren snop Ar^+ lasera talasne dužine $488nm$ da prizma ne bi počela da rotira? I ovaj snop je paralelan osi AA' i ima isti fluks fotona kao i Nd:YAG laser.

6. (Zadaci sa priprema za olimpijadu 2006. - 2.)

Na horizontalnoj podlozi se nalazi strma ravan mase M i nagibnog ugla $\alpha = 30^\circ$. Na tu strmu ravan postavimo tanak обруч mase $m \gg M$ i pustimo ga da se kreće bez početne brzine (vidi sliku 4.). Koeficijent trenja između обруча i strme ravni je dovoljno veliki da se обруч kreće po ravni bez proklizavanja. Pri kojoj će vrednosti koeficijenta trenja μ između strme ravni i horizontalne podloge strma ravan ostati nepokretna?



slika 4.