

◊ Štap se pri ovom kretanju ponaša kao fizičko klatno čiji je period oscilovanja $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$, gde je I moment inercije štapa a d je udaljenost centra mase štapa od tačke vešanja.

Moment inercije štapa dobijamo integracijom izraza dmr^2 , koji predstavlja moment inercije delića štapa dužine dr i mase dm po dužini štapa. Masa jednog takvog delića je $dm = \rho dV$, dok je gustina, prema uslovima zadatka $\rho = \rho_0 + cr$. Zapremina posmatranog delića štapa može da se zapiše kao $dV = Sdr$, gde je S površina poprečnog preseka štapa. Na osnovu ovoga je moment inercije

$$I = \int_0^L (\rho_0 + cr)r^2 S dr = \rho_0 S \int_0^L r^2 dr + cS \int_0^L r^3 dr = SL^3 \left(\frac{\rho_0}{3} + \frac{cL}{4} \right).$$

Položaj centra mase štapa, $r_{CM} = \frac{\int r dm}{m}$, je

$$r_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^L r(\rho_0 + cr) S dr = \frac{\rho_0 S}{m} \int_0^L r dr + \frac{cS}{m} \int_0^L r^2 dr = \frac{SL^2}{m} \left(\frac{\rho_0}{2} + \frac{cL}{3} \right).$$

Kako je on određen u odnosu na tačku vešanja, ovaj izraz istovremeno predstavlja veličinu d u izrazu za period fizičkog klatna. Na osnovu ovako dobijenih podataka, period je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L(4\rho_0 + 3cL)}{2g(3\rho_0 + 2cL)}} = 2s.$$

9. O dve opruge okačeni su tegovi masa m_1 i m_2 , pri čemu je $m_1 > m_2$ a izduženje opruga je jednako i iznosi l . Koji teg ima veći period oscilovanja a koji, pri jednakim amplitudama, ima veću energiju. Mase opruga zanemariti.

◊

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ovde je k koeficijent elastičnosti koji je određen silom koja izaziva izduženje opruge za jedničnu dužinu, $k = \frac{Q}{l}$, pa je

$$k_1 = \frac{m_1 g}{l}, \text{ i } k_2 = \frac{m_2 g}{l}$$

Na osnovu ovoga su period jednaki i iznose

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Energije oscilovanja su

$$E_i = \frac{1}{2}k_i A^2 = \frac{m_i g}{2l} A^2,$$

pa će veću energiju imati teg veće mase.

10. Materijalna tačka osciluje po zakonu $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, gde je $A = 2$ cm. Odrediti početnu fazu φ_0 , ako je $x(0) = -\sqrt{3}$ cm i $\dot{x}(0) < 0$.

◊ Iz jednačine oscilovanja je

$$x(0) = A \cos \varphi_0,$$

odakle je $\cos \varphi_0 = x(0)/A = -\sqrt{3}/2$, odnosno $\varphi_0 = \pi \pm \pi/6$. Da bi odrediti koju od ove dve vrednosti da uzmemo za početnu fazu potreban nam je još jedan podatak a on je dat sa $\dot{x}(0) < 0$. Iz izraza za brzinu

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi),$$

odakle je $\dot{x}(0) = -\omega A \sin \varphi_0$. Početna brzina je negativna pri negativnim vrednostima sinusa, odnosno za uglove između 0 i π , pa je početna faza $\varphi_0 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

11. Materijalna tačka mase $m = 5$ g vrši harmonijske oscilacije sa frekvencijom $\nu = 0,5$ Hz. Amplituda oscilovanja je $A = 3$ cm. Odrediti: brzinu tačke u momentu vremena t_0 , kada je elongacija $x = 1,5$ cm, maksimalnu silu F_{max} koja deluje na tačku i ukupnu energiju oscilovanja tačke.

◊ Iz jednačine oscilovanja je

$$x = A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

se za brzinu dobija

$$v = \dot{x} = -2\pi\nu A \sin(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Ako iz ova dva izraza eliminišemo vreme dobija se

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(2\pi\nu A)^2} = 1,$$

pa je

$$v(t) = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 8,2 \text{ cm/s}.$$

Sila se može dobiti kao proizvod mase i ubrzanja koje je

$$a = \dot{v} = -(2\pi\nu)^2 A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

pa je sila

$$F = -m(2\pi\nu)^2 A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Maksimalna vrednost sile je, prema tome,

$$F_{max} = mA(2\pi\nu)^2 = 1,5 \text{ mN}.$$

Ukupna energija je

$$E = \frac{kA^2}{2} = 2m\pi^2\nu^2 A^2 = 22 \mu\text{J}.$$

12. Dva matematička klatna, jednakih masa ali različitih dužina, osciluju jednakim ugaonim amplitudama α . Koje od ova dva klatna ima veću energiju?

◊ Ukupna energija oscilovanja materijalne tačke je jednaka zbiru kinetičke i potencijalne a takodje je jednaka maksimalnoj kinetičkoj (tada je potencijalna nula) ili maksimalnoj potencijalnoj (kada je kinetička jednaka nuli). U ovom slučaju je zgodno uporediti maksimalne potencijalne energije koje su određene maksimalnim otklonom. U ovim slučajevima tegovi su, u odnosu na njihov ravnotežni položaj, podignuti na visinu

$$h = l(1 - \cos \alpha)$$

gde je l dužina klatna. Kako su kod oba klatna ugaone amplitude jednake, na veću visinu se podiže klatno veće dužine. Drugim rečima, veću energiju ima klatno veće dužine.

13. Dve oscilacije istog pravca su zadate jednačinama $x_1 = A_1 \cos \omega(t + \tau_1)$ i $x_2 = A_2 \cos \omega(t + \tau_2)$, gde je $A_1 = 1$ cm, $A_2 = 2$ cm, $\tau_1 = 1/6$ s, $\tau_2 = 1/2$ s, $\omega = \pi$ 1/s. Odrediti amplitudu i početnu fazu rezultujuće oscilacije.

◇ Zgodno je prvo zapisati ove oscilacije u uobičajenom obliku

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi_i), \quad i = 1, 2$$

gde su početne faze $\varphi_i = \omega \tau_i$, odnosno $\varphi_1 = \pi/6$ i $\varphi_2 = \pi/2$.

Amplituda rezultujuće oscilacije je

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_2 - \varphi_1} = \sqrt{7} = 2,65 \text{ cm},$$

dok je njena početna faza

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Zamena vrednosti daje

$$\tan \varphi = \frac{\sin \pi/6 + 2 \sin \pi/2}{\cos \pi/6 + 2 \cos \pi/2} = \frac{1/2 + 2}{\sqrt{3}/2} = \frac{5}{\sqrt{3}},$$

odakle je $\varphi = 0,394\pi \text{ rad} = 70,9^\circ$. Pošto oscilacije koje se sabiraju imaju jednake frekvencije, rezultujuća oscilacija će imati istu frekvenciju i biće zadata izrazom $x = A \cos(\omega t + \varphi)$.

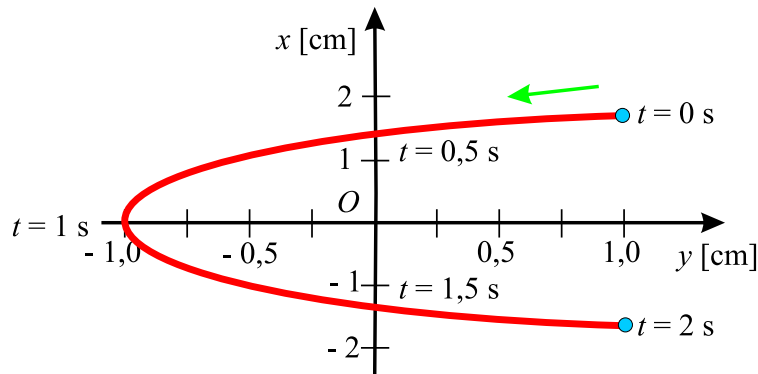
14. Materijalna tačka istovremeno učestvuje u dva uzajamno normalna harmonijska oscilovanja, čije su jednačine

$$x = A_1 \cos \omega t, \quad y = A_2 \cos \frac{\omega t}{2},$$

gde je $A_1 = 1$ cm, $A_2 = 2$ cm, $\omega = \pi$ 1/s. Nacrtati jednačinu trajektorije tačke i prikazati smer njenog kretanja.

◇ Da bi našli jednačinu trajektorije, treba iz jednačina oscilacija eliminisati vreme t . Koristeći trigonometrijsku formulu $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, za $\alpha = \omega t/2$, se dobija

$$x = \frac{2A_1}{A_2^2} y^2 - A_1.$$



Slika 3.29:

15. Štap dužine $l = 50$ cm i mase $m = 270$ g ima na jednom svom kraju pričvršćen disk poluprečnika $R = 10$ cm i mase $M = 500$ g. Odrediti moment inercije ovako formiranog matematičkog klatna, rastojanje od centra mase do tačke vešanja i period malih oscilacija klatna.

◊ Period oscilovanja fizičkog klatna je određen jednačinom

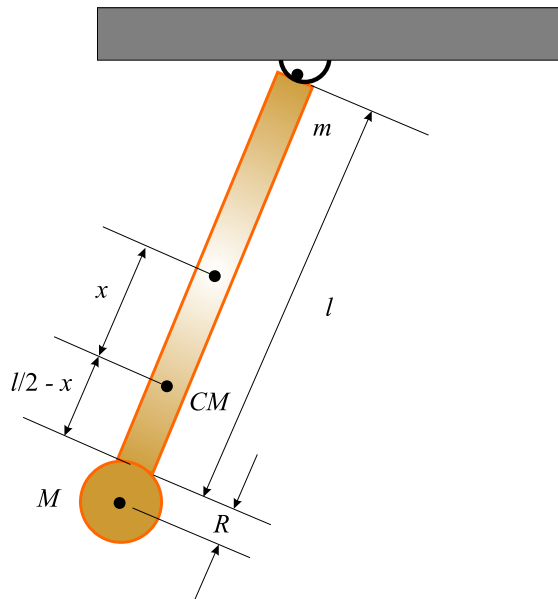
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m_u g d}}$$

gde je m_u ukupna masa klatna ($m_u = m + M = 0,77$ kg), I moment inercije u odnosu na osu oko koje osciluje a d rastojanje centra mase štapa do tačke vešanja (u kojoj se nalazi osa oscilovanja).

Moment inercije klatna je jednak zbiru momenata inercije štapa I_1 i diska I_2 . Moment inercije diska u odnosu na osu koja je normalna na njega i prolazi kroz jedan njegov kraj je $I_1 = ml^2/3$. Moment inercije diska u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar je $I_0 = MR^2/2$, a u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku vešanja udaljenu $l + R$ od njegovog centra, se dobija na osnovu Štajnerove teoreme $I_2 = I_0 + M(l + R)^2 = M(l^2 + 2lR + 3R^2/2)$. Ukupan moment inercije klatna je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{ml^2}{3} + M\left(l^2 + 2lR + \frac{3}{2}R^2\right) = 0,205 \text{ kgm}^2.$$

Centar mase klatna se nalazi izmedju centra mase diska i štapa, recimo na nekom rastojanju x od centra mase štapa. Ovo rastojanje se može



Slika 3.30:

naći iz jednakosti odgovarajućih momenata (sila) koja daje $xm = (l/2 + R - x)M$, odnosno

$$x = \frac{M}{m + M} \left(\frac{l}{2} + R \right) = 0,227 \text{ m.}$$

Rastojanje d od tačke vešanja do centra mase je prema tome $d = l/2 + x = 0,477 \text{ m}$.

Na osnovu ovoga je period malih oscilacija klatna

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,205}{0,77 \cdot 9,8 \cdot 0,477}} = 1,5 \text{ s.}$$

16. Na vasijskom brodu, u uslovima bestežinskog stanja, za merenje mase tela se može iskoristi apratura čiji princip rada se sastoji u sledećem. Prvo se izmeri frekvencija oscilovanja tega poznate mase m_0 okačenog o oprugu, a zatim se toj masi doda ona koju želimo da izmerimo i ponovo odredi frekvencija oscilacija. Pokazati kako se, na osnovu poznavanja ovih dveju frekvencija, može odrediti nepoznata masa.

◊ Ako sa m označimo nepoznatu masu, frekvencije ω_0 i ω kojima sistem osciluje u prvom, odnosno drugom slučaju će sa masama biti povezane relacijama

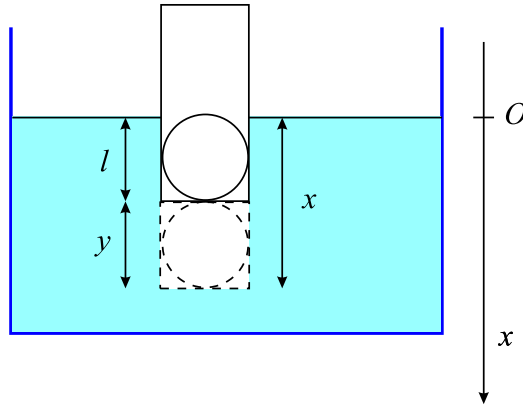
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m}}$$

gde je k koeficijent elastičnosti opruge sistema. Iz ova dva izraza se za traženu masu dobija

$$m = m_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right).$$

17. Teg koji se nalazi u šupljem cilindru površine poprečnog preseka S , pri potapanju cilindra u tečnost gustine ρ zadržava ga u uspravnom položaju. Cilindar sa ovim tegom je prilikom postavljanja u tečnost utonuo do neke dubine. Nakon toga je pritisnut naniže i pušten da osciluje u odnosu na položaj ravnoteže. Masa cilindra sa tegom je m . Zanemarijući viskoznost tečnosti, odrediti period T oscilovanja posmatranog sistema kao i ravnotežnu dubinu na koju je potonuo.

◊ U ovom slučaju ulogu restitucione sile igra sila potiska. Usmerimo x osu vertikalno naniže, izabraši za koordinatni početak njen presek sa površinom tečnosti. Neka je x koordinata donjeg dela cilindra. Sila



Slika 3.31:

potiska je $F_p = -Sx\rho g$. Na cilindar osim toga deluje sila teže $Q = mg$, pa je jednačina kretanja

$$m\ddot{x} = mg - Sx\rho g.$$

U položaju ravnoteže ($x = l$), sila teže i sila potiska su uravnotežene pa je $mg = Sl\rho g$, odakle je dubina na koju je utonuo cilindar sa tegom

$$l = \frac{m}{S\rho}.$$

Ako sa y označimo otklon cilindra od njegovog ravnotežnog položaja, koordinatu donjeg dela cilindra možemo da zapišemo kao $x = l + y$, pa će jednačina kretanja sada biti

$$m\ddot{y} = -Sy\rho g,$$

odnosno

$$\ddot{y} + \frac{S\rho g}{m}y = 0,$$

odakle se vidi daje "koeficijent elastičnost" ovog sistema $k = S\rho g$, što znači da je odgovarajuća ugaona frekvencija $\omega_0 = \sqrt{S\rho g/m}$. Na osnovu ovoga je period oscilovanja sistema

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}},$$

ili preko ravnotežne dubine l

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

18. Mala metalna lopta mase m , okačena o neistegljivu nit dužine l , osciluje iznad beskonačne, ravnomerno naelektrisanе horizontalne ploče naelektrisanе pozitivno (površinska gustina naelektrisanja σ). Odrediti period oscilovanja klatna ukoliko se na njemu nalazi količina naelektrisanja $-Q$.

◊ Harmonijsko oscilovanje ovog klatna se odvija u homogenom gravitacionom i električnom polju. Obe sile su istog smera, a sila električnog polja je $F_e = QE$, gde je električno polje ploče $E = \sigma/2\epsilon_0$. Drugi Njutnov zakon sada ima oblika

$$ma = mg + \frac{Q\sigma}{2\epsilon_0} = m\left(g + \frac{Q\sigma}{2m\epsilon_0}\right),$$

što znači da će period oscilovanja klatna biti

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\epsilon_0 ml}{2\epsilon_0 mg + \sigma Q}}.$$

19. J. J. Thomson je 1906. godine postavio model atoma koji se popularno naziva "puding sa šljivama" prema kome su negativni elektroni uronjeni u prostor pozitivnog naelektrisanja, čija masa predstavlja veći deo mase atoma.

Atom vodonika je, prema ovom modelu, lopta poluprečnika $R = 10^{-10}$ m, naelektrisanja $Q = +e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C i sa jednim elektronom unutar nje, naelektrisanja $-e$ i mase $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, koji se u normalnom stanju nalazi u centru pozitivno naelektrisanе lopte. Pretpostavimo da je elektron na neki način pomeren na neko malo rastojanje r_0 od centra pozitivne lopte. Ukoliko se nakon toga prepusti sebi on će početi da osciluje oko ravnotežnog položaja sa amplitudom r_0 . Kolika je frekvencija ovog oscilovanja?

◇

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

$$F = -eE$$

$$m\ddot{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

$$\omega_0 = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 120 \text{ nm.}$$