

ДА ЛИ ПОСТОЈЕ ЦИНОВИ И ПАТУЉЦИ?

Љубиша Нешић

Одсек за физику, Природно-математички факултет, Вишеградска 33, 18 000 Нови
nesiclj@junis.ni.ac.yu, <http://www.pmf.ni.ac.yu/people/nesiclj>

Апстракт

У мору питања која људски род поставља себи налазе се и она која се тичу величине живих бића која егзистирају на нашој планети. Бајке на чијим причама смо сви одрасли су препуне патуљака и цинова тако да је пуно малишана било разочарано када је схватило да они не постоје у стварности. А онда су нужно поставили питање себи и другима зашто је то тако? Одоговор се може наћи у примени научног метода, пре свега у области физике односно у анализи физичких аспеката еволуције који указују на ограничења величине живих бића која су могла да настану на Земљи. Као што ћемо видети, циновска и патуљаста бића су у принципу могла да настану током еволуције али обзиром да су бића оптималних димензија имала пуно предности над њима она су и однела победу. Испоставља се да чак и ако би постојала таква бића данас онда би вокална комуникација између њих и јединки просечне, односно уобичајене величине, била немогућа. У тој анализи је од велике помоћи теорија такозваних алометријских односно неизометријских сразмера. Испоставља се да се живи свет, развија на алометријски начин, односно тако што различити делови тела исте јединке не расту у истој размери. Овакав принцип се може приметити и на ток еволутивног развоја биљних и животињских врста присутних на Земљи.

Феномен науке

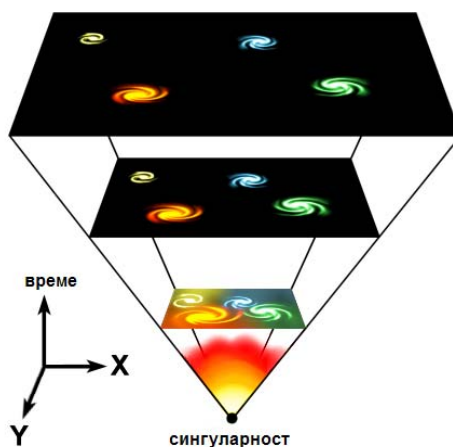
Може се рећи да су науке настале кроз процес човеког сазнавања света који га окружује, базиран на искуствима која стичу у њему и на покушајима да их објасни. Први познати покушаји да се свет објасни помоћу рационалних доказа, уз избегавање празноверја, митова и богова, су везани за античку грчку. Грци су, наиме, били задивљени постојањем многих правилних ствари на свету: редовним смењивањем дана и ноћи, годишњих доба, деловањем ватре, воде и ветра. Око 650. године пре Христа људска цивилизација која се развила у Средоземљу је већ поседовала одређен систем знања који је имао прилично велику и значајну примену. Људи су на копну умели да премеравају земљиште и бавили се успешно металургијом. На мору су знали да се оријентишу по звездама јер су познавали положаје звезда и планета, захваљујући чему су правили календаре и предвиђали када ће се шта дешавати. У једној од колонија грчког царства где је трговина била веома развијена, у градићу Милету на западној обали полуострва које данас припада Турској, родило се уверење да је свет, иако изгледа замршен и сложен, у бити ипак једноставан и да се логичким размишљањем може проникнути до те суштинске једноставности света.

«Настанак» Свемира

Према становиштима модерне науке, на самом почетку није било *ничега*, односно постојала је *празнина* - једна необична врста вакуума - једно ништа у коме није било ни простора, ни времена, ни материје, ни светлости, ни звука. Па ипак, сви закони природе су били ту, и били су на снази, а овај чудновати вакуум имао је свој потенцијал (који је могао а није морао да се оствари) – да створи *све*. Као дивовска стена која лежи на самом рубу огромно високе литице...

И та *празнина* је експлодирала. У тој првој провали огња створени су и простор и време. Из те енергије изронила је материја - густа плазма честица која се растопила у

зрачење, а онда опет згуснула у материју. Честице су се сударале, и на тај начин доводиле до рађања нових честица. Време и простор су кључали и пенушали се, црне рупе су се стварале и растакале.



Слика 1. Настанак и еволуција васионе.

У току тог ширења, Васељена се хладила и постајала мање густа. Појавиле су се честице, а силе су се раздвајале једна од друге. Настајали су протони и неутрони, затим атомска језгра, па и цели атоми; настајали су и огромни облаци прашине, који су настављали да се распростиру у све шира пространства, понегде ипак почињући - онако, локално, само у најближем суседству - да се згрушавају, стварајући звезде, галаксије и планете. На једној планети, сасвим обичној, која кружи око једног сасвим осредњег сунца, као трунчица у једном спиралном краку једне сасвим обичне галаксије – настали су, у почетку, заталасани континенти и узаврели океани, а после се у океанима појавило и много нечег љигавог. То љигаво били су органски молекули, који су отпочели своје реакције, саградили беланчевине - и живот је почео. Из једноставних организама развиле су се, еволуцијом, биљке и животиње, а једног дана појавила су се и људска бића. Главна разлика између људских и осталих бића била је у томе што је једино та жива врста осећала силну радозналост у вези са својом околином и почела да поставља низ питања. Како ово? Како оно? Како је створена Васељена? Како је могуће да једна иста васељенска 'твар' произведе тако непојамну разноврсност нашег света - звезде и планете, морске видре и океане, корале и Сунчев сјај, људски мозак? На ово последње питање могао се наћи одговор, али тек после неколико хиљада година мукотрпног труда, силне посвећености том раду, упорног преношења знања са учитеља на ученика, и тако даље, и тако даље... стотинама поколења. Питање је довело и до мноштва нетачних и постиђујуће глупавих одговора. Данас, после двадесет пет векова њиховог труда, почињемо да наслућујемо целину приче о Постању. Помоћу микроскопа и телескопа, опсерваторија и лабораторија почињемо да назиремо чисту и пречисту лепоту и симетрију које су владале првим тренуцима Васељене.

Материја коју данас видимо око себе прилично је сложена. Постоји стотинак различитих врста хемијских атома.¹ Број корисних, употребљивих комбинација тих атома (хемијских) може се израчунати, и огроман је: постоје милијарде и милијарде тога. Природа је, међутим, искористила само неке од тих комбинација хемијских елемената (за које имамо и назив: молекули) и направила планете, сунца, вирусе,

¹ Термин «хемијски атом» означава управо атоме у оном смислу у коме их сви данас разумемо. Међутим треба имати у виду да је тај термин уведен од стране античких атомиста да би означио нешто што је стварно елементарно и недељиво – а то свакако није данашњи «хемијски атом».

планине, ... Али није одувек било тако. Током најранијих тренутака после настанка Васељене, дакле после Великог праска, није постојала та разноврсност материје какву познајемо данас. Није било атомских језгара, а ни атома, није било ничег што би се састојало од неких мањих, једноставнијих делића. А зашто? Зато што огромна врелина те ране Васељене није још допустила да се ма шта сложено уобличи или одржи; ако је у неком судару и настало нешто што би било сачињено од, рецимо, два делића, одмах се и распадало због тако високе температуре. Тада је постојала, можда, само једна једина врста честица и само једна једина сила - или, чак, само једна, обједињена сила/честица - а постојали су и закони физике. У том праисконском ентитету, већ су се криле клице из којих ће настати каснији сложени свет, у коме ће једног дана, еволуцијом, настати и људски род, чија је можда главна сврха постојања управо да размишља о тим стварима.

Васиона се након револуционарног настанка ни из чега, надаље развијала еволутивно. У том развоју можемо да издвојимо више еволутивних фаза и то:

- Космичка еволуција (настанак простора, времена, материје и енергије ни из чега);
- Хемијска еволуција (настанак “виших” елемената од водоника);
- Еволуција звезда и планета (настанак звезда и планета);
- Органска еволуција (настанак живе материје од неживе);
- Макро еволуција (настанак врста); и
- Микро еволуција (варирање особина унутар врста).

Једна фаза – на једној неугледној планети, једне обичне звезде, у споредном краку галаксије, у водама њених океана је настала љигава материја – први органски молекули – а ми смо последица тога – једине смислено радознале животиње које занима како је свет настао и како функционише.

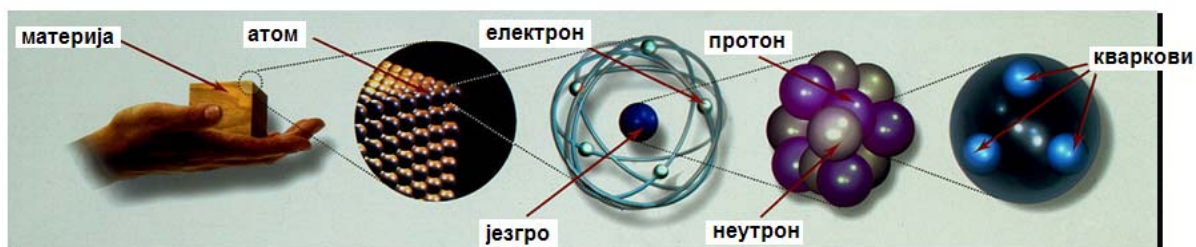
Физика као фундаментална наука

Кад је реч о физици, за њу се може рећи да је настала из астрономије зато што су најранији филозофи дизали поглед са страхопоштовањем ка ноћном небу и трагали за логичким моделима помоћу којих би могли објаснити распоред звезда на небу, померање планета, излазак и залазак Сунца. Како је време пролазило, тако су неки од научника почињали гледати и Земљу и појаве на њој - пад јабуке са дрвета, лет стреле, равномерно кретање клатна, ветар, плим и осек; из свега тога извели су низ правила које данас називамо законима физике. У доба ренесансе физика је посебно процветала и постала, негде око 1500. године, засебна научна дисциплина. У наредним вековима су конструисани микроскоп, телескоп, вакуумска пумпа, разне врсте часовника које су омогућиле прецизнија мерења; наилазило се на све већи број појава које су могле да се описују по формулисаним законима који су изражавани језиком математике, развијане су нове области математике да би прецизније могле да се опишу појаве које су се одвијале у природи...

У двадесетом веку су фундаментална истраживања у физици усмерена ка атомским језгрима и елементарним честицама. Најпознатији резултати истраживања у овој области су открића нуклеарне фисије и фузије које су проузроковале најстрашније оружје прошлог века - нуклеарну бомбу. Осим тога, велика пажња је поклањана покушајима да се одговори на фундаментална питања типа шта је Васиона, како функционише, и од чега се она па и ми састојимо?

Структура материје

Структура материје се једино може испитати њеним уситњавањем на све ситније и ситније делиће. Још је велики антички научник Демокрит закључио да у том циљу треба набавити само довољно оштар нож – и кренути у сецкање све ситнијих и ситнијих комадића материје.



Слика 2. Данас позната структура материје која се може регистровати при њеном „сецкању“.

Претпоставимо да смо одлучили да посматрамо структуру материје тако што смо од дрвета исекли коцку са страницама од једног сантиметра односно од 10^{-2} метара. Уколико успемо да одсечемо делић величине 10^{-9} м могли би да уочимо молекуле. Они за саставне делове имају атоме до којих би дошли уколико би успели да их исецемо на парчиће димензија 10^{-10} метара. Атоми се састоје из језгра и „омотача“ у коме се налазе електрони. За њих се са сигурношћу данас може рећи да уколико и имају унутрашњу структуру она је свакако мања од 10^{-18} метара. Уколико би успели да „ножем“ одвојимо језгра од атома њихова величина би била 10^{-14} метара а ако би којим чудом успели њих да исецкамо на парчиће величине мање од 10^{-19} метара добили би кваркове.²

Пирамида наука

Све скупове сазнања које данас имамо систематизоване у одређене науке можемо у једном, релативно грубом прилазу, приказати у виду једне пирамиде. Основицу те пирамиде чини математика, не зато што је апстрактнија или што је у неком смислу 'боља' или вољенија од других наука, него зато што не мора да се ослања ни на коју другу науку, док физика, која је следећи слој (или спрат) пирамиде, мора, неизбежно, да се ослања на математику. Изнад физике је хемија, која не може без свог ослонаца, а ослонац јој је оно што је испод ње (физика). Унаточ томе што се ради о једном поједностављењу узајамног односа наука, можемо рећи да физика може без хемије јер је закони хемије *не занимају*. На пример: хемичари желе да знају како се атоми комбинују у молекуле и како се молекули понашају кад су сасвим близу један другоме. Силе између атома су сложене, али у суштини се свде на закон о привлачењу и одбијању наелектрисаних честица - дакле, на физику. Следећи спрат је биологија, која се мора ослонити на добро познавање и физике и хемије. Још виши спратови ове хијерархије, то јест пирамиде, почињу да се претапају и мешају, све теже их је разделити; кад се појаве физиологија, медицина, психологија, постане немогуће закључити шта је изнад чега. На прелазним површинама између појединих наука

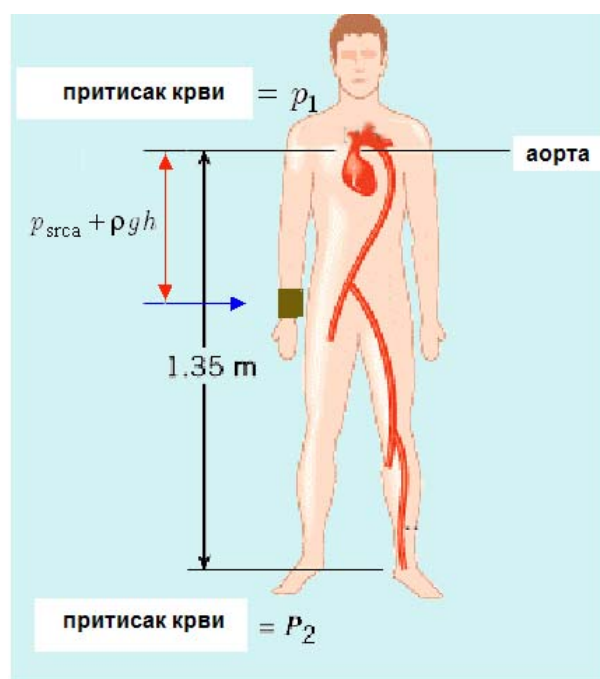
² За детаље о структури материје видети радове у овом зборнику аутора П. Ацића и Г. Ђорђевића.

појављују се дисциплине сложене од двеју или више других: математичка физика, физичка хемија, биофизика.

Физика и биологија

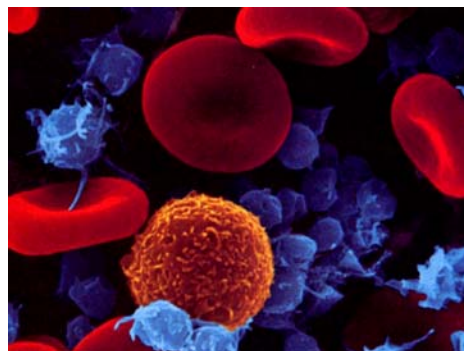
Кад говоримо о физици обично имамо у виду науку која се бави неживим светом док чим се помене биологија има се у виду наука која се бави живим светом. Да ли их је могуће повезати на директан или индиректан начин? Ево пар примера како је то могуће урадити уз напомену да феномене који су заједнички проучава интердисциплинарна наука под називом биофизика. Крв која циркулише кроз крвне судове животиња је у суштини течност за транспорт разноразних хранљивих материја и гасова ка крајњим корисницима – ћелијама и обратно, Овакав вид кретања се може описивати законитостима које спадају у област физике транспортних процеса и појава.

Тело просечног човека тежине око 790 Њутна садржи око 5,2 литра крви, масе око 5,5 килограма, и тежине око 54 Њутна, што значи да око 7,8% човекове тежине отпада на крв. Следећи пример се тиче начина мерења крвног притиска. У суштини крвни



Слика 4. Крвни притисак крви зависи од положаја дела тела на коме се мери.

крви који су повезани са одређивањем једне величине која се назива Рејнолдсов број која је основни критеријум за тип струјања - а то су питања којима се бави једна



Слика 3. Течност за транспорт материје.

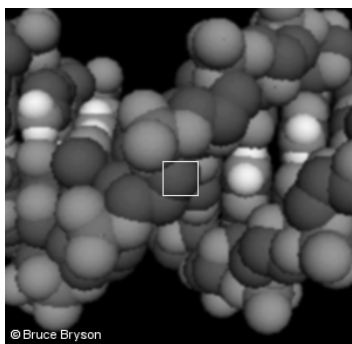
притисак варира од онога који се зове систолни (максимални) који се јавља када лева комора пумпа крв у аорту, до дијастолног (минималног) који се јавља када се она пуни. Вредности ових притисака које се добијају код здраве особе износе 120 односно 80 милиметара живиног стуба. Како је реч о притисцима који владају у аорти, они се мере не надлактици јер је она на отприлике истој висини на којој се налази и аорта. Уколико би притисак мерили на подлактици морали би да га коригујемо за притисак који потиче од висинске разлике аорте и подлактице. А ако се запитамо како уствари лекари мере крвни притисак доћи ћемо до тога да уствари они прате појаву шумова³ при преласку струјања крви кроз одговарајућу артерију из турбулентног режима у ламинаран. А да би се ово ваљано проучило морали би да се испитају услови за режим струјања

³ Ови шумови се називају Коротковљевим шумовима.

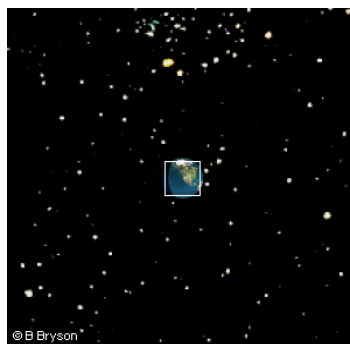
област физике која се назива механика флуида. У тесној вези са многим процесима у живим организмима су такође и термодинамика, електромагнетизам и оптика, са феноменом говора и начином његовог регистровања је у вези акустика, ...

Међутим, све поменуто спада у ствари које су мање више добро познате и релативно су често помињане у уџбеницима било из физике било из биологије. Ако се мало више удубимо у материјале доступне по књигама из ове две области приметићемо да постоји још једна веза између ове две науке која као импликацију има одређена ограничења величине живих бића која су могла да настану на Земљи. То је теорија сразмера.

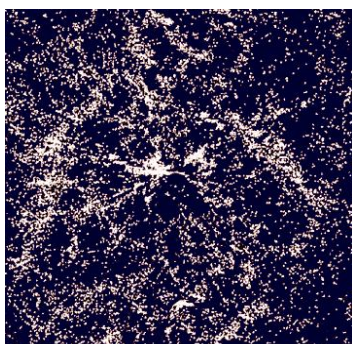
Живот је вероватно најкомплекснији и најразноврснији физички систем у универзуму јер постоји у распону од 27 редова величина у погледу масе, од молекула генетског кода и метаболичких процеса па све до највећих китова и џиновских секвоја. У тома распону организми имају масе у области од 21 реда величине, од најмањих микроба (10^{-13} грама) до највећих сисара и биљака (10^8 грама). Тај распон редова величина је већи од области у којој се налази распон маса Земље и галаксије (он износи „само“ 18 редова величине)⁴. И у том огромном распону величине живих бића метаболизам их одржава у животу. Унаточ оволико великим разликама у величини и комплексности живих бића, већина биолошких процеса показује невероватну сличност уколико се посматрају као функција величине јединке.



Слика 5. Молекул ДНК, 10^{-9} метара.



Слика 6. Земља, 10^8 м.



Слика 7. Галаксије, 10^{26} м. Свака од тачака на слици је галаксија

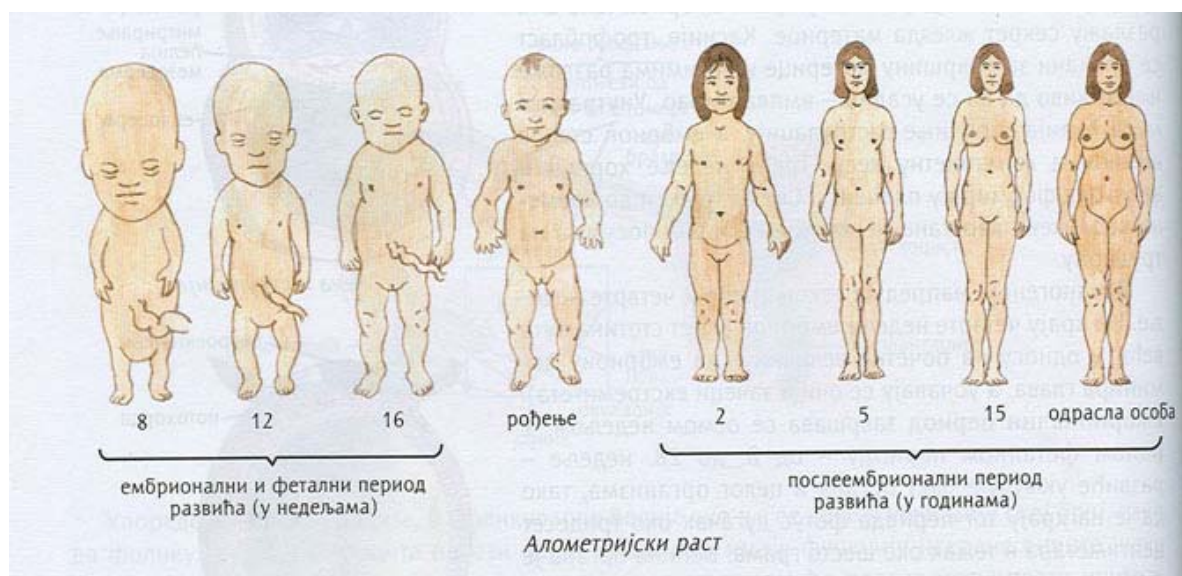
Физика и еволуција

Према раније наведеним еволутивни фазама у развоју света, овде ће пре свега да буде размотрен однос физике и микро еволуције, односно физике и разних могућности

⁴ Однос маса Земље и галаксије одговара односу маса електрона и мачке на пример.

варирања особина унутар одређене врсте живих бића, при чему је такође интересатно упоредити међусобно врсте у погледу истих карактеристика.

Прво што можемо да се запитамо је како се живе јединке, од рођења, односно настанка, па до потпуног развоја мењају у геометријском смислу. Другим речима да ли одрасла јединка изгледа исто као малена али изометријски⁵ односно пропорционално увећана. У математичком смислу би то значило да је одрасла јединка добијена изометријском трансформацијом од свог младунца, односно умањене копије себе. Одговор се може лако добити јер је очигледан чак и унутар људске врсте. Наиме, бебе нису умањена копија одрасле особе, односно делови њихових тела не расту и развијају се на изометријски начин. Начин на који се то дешава се назива алометријски⁶ што означава да постоји релативан раст једног дела тела у односу на цео организам.



Слика 8. Неизометријски – алометријски развој представника људске врсте.

Однос површине и запремине тела

Да би боље размели појам алометрије размотримо прво примере изометријског увећања на примеру промене површине и запремине коцке при изометријској промени дужине њених страница. Наиме, ако све странице коцке повећамо два пута, њена површина се повећава 4, односно 2^2 пута а запремина 8 односно 2^3 пута. Износ увећања површине и запремине је у вези са бројем димензије простора у коме се то дешава (површи су дводимензионалне, запремине тродимензионалне).

Дужина странице	Површина коцке	Запремина
L	$6L^2$	L^3
$2L=2^1L$	$4(6L^2)=2^2(6L^2)$	$8L^3=2^3L^3$

⁵ Реч изометрија потиче од грчких речи ισο =исто и μετρον = мерити.

⁶ Реч алометрија потиче од грчке речи $\alpha\lambda\lambda\omicron$ =другачији.



Слика 9. Изометријско увећање коцке.

Пошто смо утврдили законитост по којој се мењају површина и запремина коцке при њеном изометријском увећању, интересно је поставити питање како се мења однос ове две величине при таквом увећању. Резултати су приказани у следећој табели.

Дужина странице коцке, L	Површина, $S = 6L^2$	Запремина, $V = L^3$	Однос површине и запремине, S/V
1	6	1	6
2	24	8	3
3	54	27	2
10	600	1.000	0,6
100	60.000	1.000.000	0,06
1000	6.000.000	10.000.000.000	0,006

Као што се види из табеле, при изометријском расту коцке, однос површине и запремине постаје све мањи и мањи, јер запремина брже расте од површине. Сличан закључак се може извести и за друга геометријски правилна тела а он такође остаје у важности и за тела која немају геометријски правилан облик а расту изометријски. Ова чињеница само на први поглед изгледа као једна математичка игарија која је небитна за жива бића. Међутим, пуно величина које описују разне функције организма зависе управо од односа ове две величине, површине и запремине тела. На пример за површину тела – покривену кожом се може рећи да служи целом телу одређене запремине и у том смислу је њихов међусобни однос веома битан.

Као пример наведимо топлотни баланс организма са његовом околином. Количина топлоте Q коју произведе живо биће пропорционална је његовој маси, која је пак пропорционална запремини тела (коефицијент пропорционалности је густина), па се може рећи да важи $Q \sim L^3$. Са друге стране топлота се највише губи зрачењем које се обавља преко површине организма па је и пропорционално величини површине тела тако да је количина топлоте која се губи сразмерна површини $Q \sim L^2$.

Како код великих животиња запремина доминира над површином то значи оне имају један значајан проблем а то је одржавање довољно ниске температуре тела. Уколико би се животиње развијале изометријски овај проблем би практично био нерешив. Међутим, у природи је заправо већински присутна аллометрија, а животиње код којих је однос површине и запремине неповољан обично имају већу површину коже (услед постојања набора) од геометријске површине њихових тела, чиме обезбеђују боље хлађење свог организма. Такође, велике животиње уносе сразмерно

мање количине хране него мале животиње чиме додатно регулишу неповољан однос површине и запремине тела.

Чврстина структурних елемената

Као што смо видели, при повећању свих димензија тела (дужина, ширина, висина) n пута, запремина тела се повећа n^3 пута, што је заправо последица димензионалности простора у коме живимо (он је тродимензионалан). Како је маса тела пропорционална његовој запремини ($m = \rho V$), јасно је да се и она повећава на потпуно исти начин⁷. Природно је да се запитамо како се жива бића боре са овом чињеницом јер на већу масу долази и већа тежина, пошто Земља, масивнија тела, привлачи већом силом. Да би дошли до одговора на ово питање треба уствари да пронализирамо од чега зависи однос чврстине структурних елемената тела (мишића, тетива и костију) и тежине коју они треба да носе.

Ако чврстину схватимо као максималну силу коју тетиве и кости могу да понесу а да не пукну⁸, јасно је да је она пропорционална површини попречног пресека датог елемента. Кад је реч о мишићима њихова моћ затезања такође расте са површином попречног пресека. Како смо за масу закључили да зависи од запремине, за тражени однос се може писати следећи низ релација

$$\frac{\sigma_{\max}}{mg} \sim \frac{S}{V} \sim \frac{L^2}{L^3} \sim \frac{1}{L}, \quad (1)$$

односно овај однос је обрнуто пропорционалан трећем корену масе тела. Овакав резултат доводи до закључка да код геометријски сличних животиња, њихова способност да носе сопствену тежину опада са порастом линеарних димензија животиње. Другим речима, што је већа животиња, то је већа вероватноћа кидања тетива и пуцања костију и мишића. У ову чињеницу се можемо лако уверити ако од на пример пластелина направимо три фигуре геометријски истог облика али различитих димензија. Приметићемо да са порастом масе расте могућност деформисања фигура под утицајем сопствене тежине (слика 10)



Слика 10. Деформисање изометријских тела у гравитационом пољу

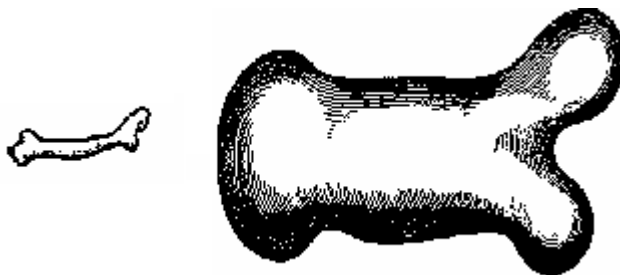
Жива бића су током еволутивног развоја овај проблем решила на два начина. Један, који није предмет овог разматрања, је веома домишљат и састоји се у коришћењу силе потиска која помаже ношењу сопствене тежине. Други се састоји у неизометријском расту и развоју структурних елемената на тај начин што они постају дебљи него што би били када би тела расла изометријски. На тај начин, иста кост велике животиње се разликује од кости мале животиње у дебљини (слике 11 и 12).

⁷ Уз претпоставку да је маса тела хомогено распоређена по његовој запремини, односно да је густина тела константна.

⁸ У складу са Хуковим законом ова сила је пропорционална површини попречног пресека тела и односу промене његове дужине (услед деловања силе) и почетне дужине.



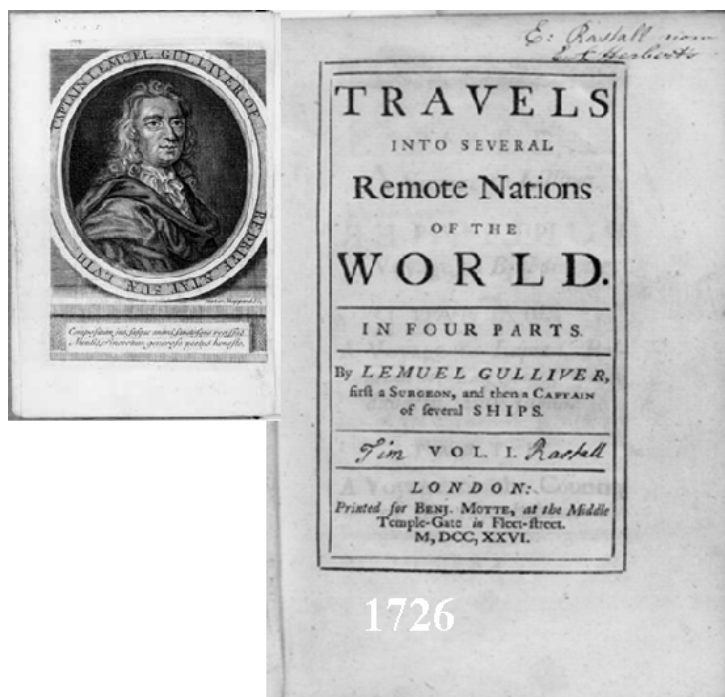
Слика 11. Кост мале животиње и иста кост изометријски увећана



Слика 12 Кост мале животиње и иста кост алометријски (реално) увећана

Физика Гуливерових путовања

Један интересантан пример који је вредно анализирати са овог становишта можемо наћи у књизи „Гуливерова путовања“ Ирског писца Џонатана Свифта. У књизи је реч о путовањима Лемјуела Гуливера,⁹ који се током њих обрео у две веома чудне острвске земље. У једној су живели Лилипутанци људи патуљастог раста а у другој Бробдигнежани циновског раста. Без упуштања у детаљан опис Гуливерових доживљаја на овим острвима размотримо пар чињеница наведених у овом роману.



Слика 13. «Гуливерова путовања», Џонатан Свифт (1667-1745)

⁹ Интересантно је напоменути да се «Гуливерова путовања» заправо састоје из четири дела при чему се код нас углавном позната само прва два, боравак (након бродолома) у Лилипуту и доцније путовање у земљу Бробдигнежана. У трећем делу Гуливер се обрео у земљи летећих острва Лапута. На острву под називом Глубдудриб је живело друштво чаробњака који су дозивали душе мртвих и на тај начин му омогућили да разговара са Александром Великим, Цезаром, Аристотелом, ... И коначно у четвртм делу је описан пут у Хоунмс у коме су коњи паметни а људи недовољно интелигентни што је био резултат самоуништителског деловања људске расе. Може се рећи да ово Свифтово дело спада заправо у сатирична дела у којем је он покушао да укаже на последице неодговорног понашања људског друштва.

Гуливер и Лилипутанци

Према роману, након бродолома Гуливер се пробудио и открио да не може да помери ни руке ни ноге. Открио је да је заправо везан за земљу и да је окружен



Слика 14 . Гуливер окружен Лилипутанцима

гомилем ситних створења налик људима која су му нешто чудно говорила. И без даљег препричавања његових доживљаја у Лилипуту задржимо се само на овом податку – **Гуливер је чуо Лилипутанце како говоре!**

Он је иначе био мушкарац просечне висине, дакле негде око 1,8 метара, масе око 72 килограма па је према томе био тежак око 720 Њутна. Можемо прво да се запитамо колике су маса и тежина Лилипутанаца. Уколико пођемо од тога да је висина просечног Лилипутанца око 0,15 метара, однос ових двеју висина је 12. На основу овога можемо закључити да је запремина Лилипутанца $12^3=1728$ пута мања од запремине Гуливера што значи да му је маса око 41,7 грама а тежина око 0,42 Њутна. Да би могли да пронализирамо чињеницу коју је изнео Свифт у роману, а која се односи на то да је током боравка у Лилипуту Гуливер стално разговарао са становницима те

земље, присетимо се да механизам произвођења звука људским гласовним органима на упрошћен начин може да се представи треперењем затегнуте жице.¹⁰ Висина основног тона (фреквенца), који тако затегнута жица дужине l производи је представљен изразом

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (2)$$

где је μ - маса по јединици дужине а F - сила којом је жица затегнута. Како маса по јединици дужине може да се представи као производ (запреминске) густине жице и површине њеног попречног пресека (а за њега важи да је пропорционалан са l^2), важи следећи низ релација

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{S\rho}} \sim \frac{1}{l} \sqrt{\frac{1}{l^2}} = \frac{1}{l^2}. \quad (3)$$

¹⁰ Присетимо се такође да је област чујних фреквенци за људско ухо од 16 до 20.000 Херца. Звучни таласи фреквенце испод 16 Херца се називају инфразвук а они чија је фреквенца преко 20 000 Херца ултразвук.

Резултат показује да је фреквенца основног тона који емитује гласовни апарат обрнуто сразмерна квадрату линеарних димензије бића. У складу са тиме је однос висине тона Лилипутанца и Гуливера, обзиром да је $l_G / l_L = 12$

$$\frac{f_L}{f_G} = \frac{l_G^2}{l_L^2} = 12^2 = 144. \quad (4)$$

Из ове једначине можемо на основу једне познате висине тона одредити другу. Уколико пођемо од тога да је просечна висина гласа мушкараца око 150 Херца (ту висину ћемо приписати Гуливеру), висина гласа Лилипутанца би била

$$f_L = 144 f_G = 22000 \text{ Hz}, \quad (5)$$

што представља ултразвучну фреквенцу коју људско ухо не може да региструје! Дакле, ако су Лилипутанци били онолики колики је тврдио Свифт да јесу, просечан припадник људског рода није никако могао да их чује. Ако се пође од тога да просечна женска особа својим гласним жицама производ звук фреквенце од око 260 Херца, припадница лепшег пола у Лилипуту би емитовала звук од око 37 000 Херца.

Гуливер и Бробдигнежани

Након боравак у Лилипуту током кога је Гуливер у роману Свифта разговарао са становницима те земље (а уствари није могао да их чује ако су заиста били те величине како је наведено у роману) и чак учествовао у династичким и међудржавним сукобима, Гуливер је успео да побегне али га је пут нанео у земљу циновских Бробдигнежана који су били око 10 пута већи од њега. Са њима је, према Свифту, такоже успоставио аудио контакт али нас сада опрез нагони да пробамо да проценимо да ли је то било могуће или је писац неопрезно претпоставио ствар која није могућа а њему се чинила тако очигледном. Будући да је реч о 18. веку, када је физика већ била релативно добро фундирана као наука, рекло би се да је он морао бити опрезнији приликом смишљања доживљаја свог јунака.

На основу разматрања, у потпуности аналогних ранијим, лако је израчунати да је тежина ових цинова око 720 000 Њутна, односно да им је маса била око 72 тоне. Фреквенца основног тона који је могао да произведе њихов гласовни апарат је тек 1,5 Херца, односно реч је о инфразвуку! Другим речима, Свифтов јунак није могао ни њих да чује.

Дакле, можемо да закључимо да између припадника ове три врсте није могло да буде вокалне комуникације! Иако је закључак да нису могли да се чују тачан, дозволимо да је ипак постојао неки начин да Гуливер чује Лилипутанце и Бробдигнежане, на пример уз помоћ неког специјалног слушног апарата који би прениске односно превисоке фреквенце преводио у оне чујне за људске уши. Шта би у том случају оне могле да чују?



Слика 15. Гуливер љуби руку краљице Бробдигнежана

Прво, пођимо од чињенице да је човеку потребна отприлике 1 секунда да (након вежбања) изговори реч Брондигнежан. Како је фреквенца његовог гласа око 150 херца, то значи да сваке секунде у ухо дође 150 таласних дужина овог звучног таласа. Обзиром на фреквенцу говора цинова, њима треба око 100 секунди (присетимо се да је овде битан фактор 10^2) да изговоре исту реч, односно 1 минут и 40 секунди.

Када је реч о Лилипутанцима, њима су за исти посао потребне само 7 мили секунде ($1/144$). Оно што је интересно је да би један школски час у Лилипуту трајао $45\text{мин}/144=1/3$ минута.

Коефицијент интелигенције Лилипутанци и Бробдигнежана

На основу теорије сразмера се може проценити и коефицијент интелигенције живе јединке. У случају Лилипутанаца, обзиром да је фактор скале 12, његов мозак је $12^3=1728$ пута мањи од Гуливеровог. Запремина пак можданих ћелија опада са фактором $8=2^3$ (од већих ка мањим бићима). Деоба ова два броја даје да је број ћелија мозга Лилипутанаца мањи око 200 пута од броја можданих ћелија Гуливеровог мозга. Другим речима мозак Лилипутанца је поредив са мозгом мачке, односно ради се о не много интелигентним бићима. Са друге стране смо видели да, обзиром на високу фреквенцу којом говоре они јако брзо причају. Дакле, не чујемо их али кад би их чули приметили би да брбљају и причају глупости.

Ситуација са циновима је пак нешто другачија. Фактор скале је овде 10 па им је мозак 10^3 пута већи од људског. Интелигенција, као што је познато има везе са величином церебралног кортекса, одосно површином коре мозга која је 100 пута већа од површине коре мозга човека, што значи да је просечан Бробдигнежан око 100 пута интелигентнији од просечног човека. Да сумирамо: просечан цин би (кад би могли да га чујемо) говорио веома споро прилично паметне ствари и имао би изузетно дубок глас.¹¹

Висина скока животиња

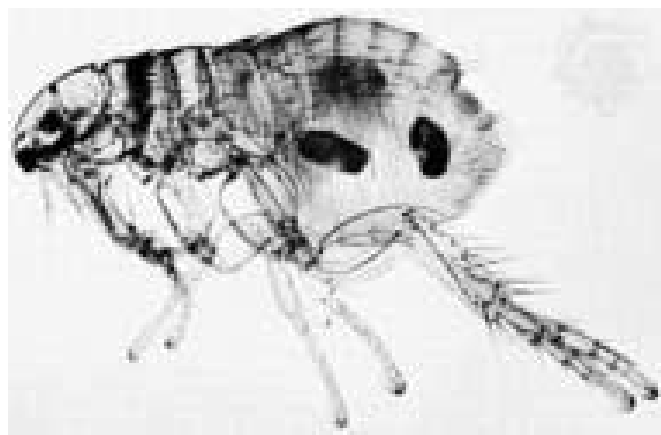
Теорија сразмера омогућује и да се процени висина скока животиње. Наиме, да би се тело масе m подигло на висину h , неопходно је утрошити енергију $E = mgh$. Рад силе затезања мишића, при њиховој контракцији за величину D , управо мора да буде пропорционалан промени потенцијалне енергије тела,

$$FD \sim mgh. \quad (5)$$

На основу овога, процењена висина скока је

$$h \sim \frac{FD}{mg}. \quad (6)$$

Сила мишићних контракција F је утолико већа уколико је мишић веће дебљине, па се може рећи да је она сразмерна квадрату линеарних димензија тела L^2 . Са друге стране D је величина мишићних контракција која је сразмерна првом степену линеарних димензија, док је маса, као



Слика 16. Бува, један од најпознатијих скакача у вис.

¹¹ Церебрални кортекс Лилипутанца је $12^2=144$ пута мањи од кортекста просечног човека.

што смо то већ истакли, пропорционална са L^3 , па горњи израз (уз изостављање за процену реда величине висине небитне константе g) постаје

$$h \sim \frac{FD}{m} \sim \frac{L^2 L}{L^3} = const. \quad (6)$$

Резултат који смо добили показује да висина скока не зависи од величине животиње! Другим речима ред величине скока мора бити мање-више исти код свих живих бића. Да ли је ово парадокс или не? Па, ипак није, наиме познато је да на пример бува може да скочи око 20 центиметара у висину, што знатно премашује њене линеарне димензије, док рецимо висина скока човека износи око 60 центиметара. Неко би се сетио светског рекорда у скоку у вис који износи 2 метра и 40-ак центиметара, али такви скокови се остварују применом посебних метода тако да не могу бити разматрани у овом контексту. Осим тога, 20 и 60 центиметара су висине једнаког реда величине тако да је резултат представљен формулом (6) тиме оправдан.

Базални метаболизам и животни век

Приступ анализи функционисања живих организама на основу теорије сразмера и алометрије је релативно новијег датума. У литератури се као година када су у биологији уочени први феноменолошки закони помиње 1932. У то време је постављен и, вероватно најзначајнији, закон из ове области који се односи на базални метаболизам и његову везу са масом организма. Базални метаболизам је наиме минимална количина енергије коју треба да произведе неки организам да би опстао. Закон се назива Клеберов, по научнику који га је уочио и представља типичну алометријску зависност

$$B = const \times m^{3/4}. \quad (7)$$

Познавајући ту зависност могуће је проценти колико дуго може дата јединка да живи. Пре него што видимо како ћемо то искористити, уочимо да је број откуцаја срца N , независан од величине јединке¹² и да је са фреквенцијом откуцаја f и временом њеног живота T у вези преко релације $f = N/T$, одакле је $T = N/f$. У овом изразу је непозната фреквенција откуцаја срца до чије процене се може доћи следећом анализом. Запремина срца V_{srca} и запремина крви V_{krvi} су величине које су пропорционалне запремини животиње. Брзина циркулације крви $\Delta V_{krvi} / \Delta t$ је са друге страна пропорционална базалном метаболизму

$$\frac{\Delta V_{krvi}}{\Delta t} \sim B = const \times m^{3/4}, \quad (8)$$

а то истовремено мора да буде једнако производу фреквенције откуцаја срца и његове запремине

$$fV_{srca} = \frac{\Delta V_{krvi}}{\Delta t} \sim const \times m^{3/4}. \quad (9)$$

Како је запремина срца пропорционална запремини тела, а она маси, за фреквенцију срчаних откуцаја се добија

$$f \sim m^{-1/4}, \quad (10)$$

што значи да време живота зависи од масе на следећи начин

¹² Број откуцаја срца просечне животиње (укључујући и човека), у току њеног живота, износи око један билион.

$$T \sim m^{1/4}, \quad (11)$$

што је резултат који се добро слаже са постојећим подацима о дужини животног века животињских врста.

Закључак

На крају приче о једној интересантној теорији вреди за почетак напоменути да се у оквиру ње могу разматрати још и гранична брзина кретања живих бића, проценити величина мозга, проанализирати да ли постоји «велики ногати»... Теорија алометријских сразмера се такође може применити и на одређена питања екологије а може се применити и у теорији фрактала, односно структура које се понављају на различитим дужинским скалама. А када је реч о питању које је постављено у наслову, може се рећи да џинови и патуљци не постоје. Ако би и постојали не би смо могли да их чујемо. Ако би их чули приметили би да су џинови веома паметни, говорили би изузетно споро веома дубоким гласом (ван опсега чујности). Патуљци не би били тако паметни, брбљали би великом брзином пискутавим гласићима (које такође не можемо да чујемо).

Током еволуције, јединке које су се развијале изометријски, уколико их је било, вероватно су нестале.

Литература

- [1] Physics of the Human Body, <http://www.phys.virginia.edu/classes/304/>
- [2] Of Mice and Elephants: The matter of scale:
http://hep.ucsb.edu/courses/ph6b_99/0111299sci-scaling.html
- [3] Physics and Size of Biological Systems,
<http://smccd.net/accounts/goth/MainPages/Scaling/Scaling.htm>