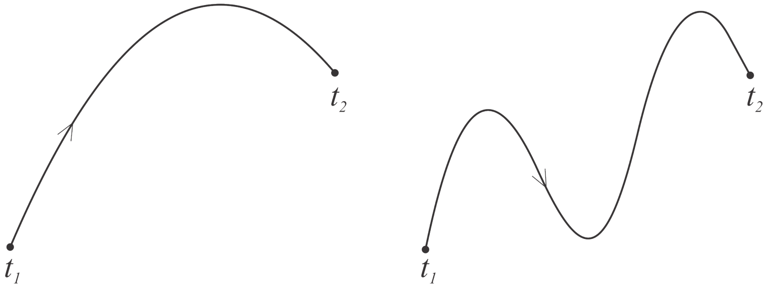
Fajnman i njegove ideje o principu najmanjeg dejstva

Marija Grofulović

Univerzitet u Nišu,
PMF

- Ako telo bacimo u trenutku t_1 iz neke tačke, i ono se nađe u drugoj tački u trenutku t_2, putanja tela izgleda kao na slici 1-levo.



- Zašto putanja ne može da izgleda kao na drugoj slici?

- Putanja je takva jer se ona dobija kao rešenje diferencijalne jednačine koja proizilazi iz drugog Njutnovog zakona

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}.$$

- Integral po vremenu razlike kinetičke energije i potencijalne energije je najmanji za dobro poznatu paraboličnu putanju.

- Putanja je takva jer se ona dobija kao rešenje diferencijalne jednačine koja proizilazi iz drugog Njutnovog zakona

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}.$$

- Integral po vremenu razlike kinetičke energije i potencijalne energije je najmanji za dobro poznatu paraboličnu putanju.

- Putanja je takva jer se ona dobija kao rešenje diferencijalne jednačine koja proizilazi iz drugog Njutnovog zakona

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}.$$

- Integral po vremenu razlike kinetičke energije i potencijalne energije je najmanji za dobro poznatu paraboličnu putanju.

- Putanju tela nalazimo kao onu putanju za koju je pomenuti integral minimalan.
- Druga formulacija drugog Njutnovog zakona?

Slobodna čestica

- Pošto je potencijalna energija jednaka nuli, čestica će se kretati tako da je integral kinetičke energije po vremenu od početnog trenutka do krajnjeg minimalan.
- Odatle sledi da se čestica kreće uniformnom brzinom (jer je srednja vrednost kvadrata veća od kvadrata srednje vrednosti).

Slobodna čestica

- Pošto je potencijalna energija jednaka nuli, čestica će se kretati tako da je integral kinetičke energije po vremenu od početnog trenutka do krajnjeg minimalan.
- Odatle sledi da se čestica kreće uniformnom brzinom (jer je srednja vrednost kvadrata veća od kvadrata srednje vrednosti).

Dejstvo

Dejstvo je integral po vremenu razlike kinetičke i potencijalne enrgije. Oblast integracije je vremenski interval u toku kojeg posmatramo kretanje,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt.$$

- Naš zadatak je naći onu putanju za koju je ovaj integral minimalan.
- Takvi problemi se rešavaju pomoću varijacionog računa.
- Kružnicu, na primer, možemo definisati kao geometrijsko mesto tačaka koje su podjednako udaljene od jedne centralne tačke, ali možemo i koristeći se varijacionim računom reći da je kružnica takva kriva određene dužine koja ograničava najveću površinu.

Dejstvo

Dejstvo je integral po vremenu razlike kinetičke i potencijalne enrgije. Oblast integracije je vremenski interval u toku kojeg posmatramo kretanje,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt.$$

- Naš zadatak je naći onu putanju za koju je ovaj integral minimalan.
- Takvi problemi se rešavaju pomoću varijacionog računa.
- Kružnicu, na primer, možemo definisati kao geometrijsko mesto tačaka koje su podjednako udaljene od jedne centralne tačke, ali možemo i koristeći se varijacionim računom reći da je kružnica takva kriva određene dužine koja ograničava najveću površinu.

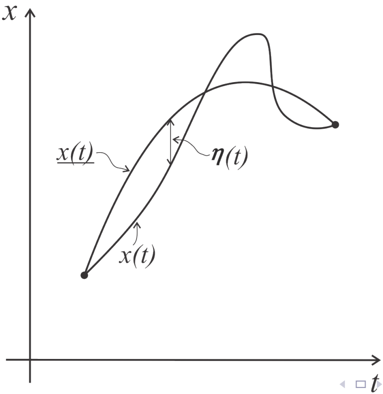
Dejstvo

Dejstvo je integral po vremenu razlike kinetičke i potencijalne enrgije. Oblast integracije je vremenski interval u toku kojeg posmatramo kretanje,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt.$$

- Naš zadatak je naći onu putanju za koju je ovaj integral minimalan.
- Takvi problemi se rešavaju pomoću varijacionog računa.
- Kružnicu, na primer, možemo definisati kao geometrijsko mesto tačaka koje su podjednako udaljene od jedne centralne tačke, ali možemo i koristeći se varijacionim računom reći da je kružnica takva kriva određene dužine koja ograničava najveću površinu.

- Posmatramo kretanje tela u gravitacionom polju
- Ako imamo pravu putanju i neku koja se za malo razlikuje od nje, onda u prvoj aproksimaciji neće biti razlike u dejstvu koje dobijemo za ove putanje.
- $f - f_0 = (x - x_0) f_0' + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f_0'' + ...$
- Ideja je da razlika dejstva za ove dve putanje mora biti nula u prvom redu aproksimacije za malo η. Ovo mora da važi za svako η za koje važi $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Dakle, naše putanje počinju i završavaju se u istoj tački.



- $S = \int [\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2 - V(x)]dt$
- $$S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt})^2 - V(\underline{x} + \eta)]dt.$$
- Član koji se javlja na kvadrat ćemo napisati na drugi način,

$$(\frac{d\underline{x}}{dt})^2 + 2\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{\eta}{dt} + (\frac{d\eta}{dt})^2,$$

- pa sabirke koji sadrže druge stepene devijacije η zanemarujemo, jer kao što smo rekli, radimo u prvoj aproksimaciji.

- $S = \int [\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2 - V(x)]dt$
-
$$S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt})^2 - V(\underline{x} + \eta)]dt.$$
- Član koji se javlja na kvadrat ćemo napisati na drugi način,
$$(\frac{d\underline{x}}{dt})^2 + 2\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{\eta}{dt} + (\frac{d\eta}{dt})^2,$$
- pa sabirke koji sadrže druge stepene devijacije η zanemarujemo, jer kao što smo rekli, radimo u prvoj aproksimaciji.

- $S = \int [\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2 - V(x)]dt$
- $$S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt})^2 - V(\underline{x} + \eta)]dt.$$
- Član koji se javlja na kvadrat ćemo napisati na drugi način,
$$(\frac{d\underline{x}}{dt})^2 + 2\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{\eta}{dt} + (\frac{d\eta}{dt})^2,$$
- pa sabirke koji sadrže druge stepene devijacije η zanemarujemo, jer kao što smo rekli, radimo u prvoj aproksimaciji.

- Potencijal možemo da razvijemo u Tejlorov red, ako uzmemo u obzir da je η malo.

$$V(\underline{x}+\eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \eta^2/2V''(\underline{x}) + \ldots$$

- $$S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}(\frac{d\underline{x}}{dt})^2 - V(\underline{x}) + m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + \ldots]dt$$
- $S - \underline{S}$ zovemo varijacija δS.
- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x})]dt.$$
- Posle parcijalne integracije

$$\delta S = m\frac{d\underline{x}}{dt}\eta(t)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\frac{d\underline{x}}{dt})dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x})\eta(t)dt.$$

- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [-m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x})]\eta(t)dt.$$

- Potencijal možemo da razvijemo u Tejlorov red, ako uzmemo u obzir da je η malo.

$$V(\underline{x}+\eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \eta^2/2 V''(\underline{x}) + ...$$

- $$S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}(\frac{d\underline{x}}{dt})^2 - V(\underline{x}) + m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + ...]dt$$

- $S - \underline{S}$ zovemo varijacija δS.
- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x})]dt.$$

- Posle parcijalne integracije

$$\delta S = m\frac{d\underline{x}}{dt}\eta(t)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\frac{d\underline{x}}{dt})dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x})\eta(t)dt.$$

- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [-m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x})]\eta(t)dt.$$

- Potencijal možemo da razvijemo u Tejlorov red, ako uzmemo u obzir da je η malo.

$$V(\underline{x}+\eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \eta^2/2V''(\underline{x}) + ...$$

- $$S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}(\frac{d\underline{x}}{dt})^2 - V(\underline{x}) + m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + ...]dt$$

- $S - \underline{S}$ zovemo varijacija δS.

- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x})]dt.$$

- Posle parcijalne integracije

$$\delta S = m\frac{d\underline{x}}{dt}\eta(t)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\frac{d\underline{x}}{dt})dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x})\eta(t)dt.$$

- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [-m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x})]\eta(t)dt.$$

- Potencijal možemo da razvijemo u Tejlorov red, ako uzmemo u obzir da je η malo.

$$V(\underline{x}+\eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \eta^2/2V''(\underline{x}) + ...$$

- $$S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}(\frac{d\underline{x}}{dt})^2 - V(\underline{x}) + m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + ...]dt$$
- $S - \underline{S}$ zovemo varijacija δS.
- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x})]dt.$$
- Posle parcijalne integracije

$$\delta S = m\frac{d\underline{x}}{dt}\eta(t)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\frac{d\underline{x}}{dt})dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x})\eta(t)dt.$$

- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [-m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x})]\eta(t)dt.$$

- Potencijal možemo da razvijemo u Tejlorov red, ako uzmemo u obzir da je η malo.

$$V(\underline{x}+\eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \eta^2/2V''(\underline{x}) + ...$$

- $$S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}(\frac{d\underline{x}}{dt})^2 - V(\underline{x}) + m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + ...]dt$$

- $S - \underline{S}$ zovemo varijacija δS.

- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x})]dt.$$

- Posle parcijalne integracije

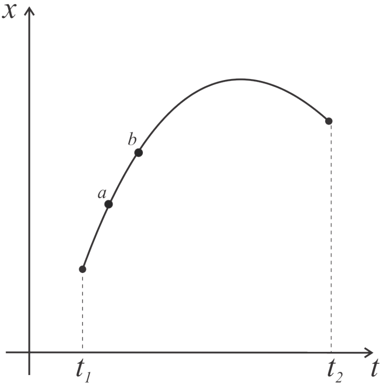
$$\delta S = m\frac{d\underline{x}}{dt}\eta(t)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\frac{d\underline{x}}{dt})dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x})\eta(t)dt.$$

- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [-m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x})]\eta(t)dt.$$

- $$[-m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x})] = 0.$$
- $F = ma$
- Za sistem u polju potencijalne sile princip najmanjeg dejstva dovodi do istog rezultata kao i drugi Njutnov zakon.
- Važno je zapravo da je u pitanju ekstremum, bio on maksimum ili minimum

- $$[-m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x})] = 0.$$
- $F = ma$
- Za sistem u polju potencijalne sile princip najmanjeg dejstva dovodi do istog rezultata kao i drugi Njutnov zakon.
- Važno je zapravo da je u pitanju ekstremum, bio on maksimum ili minimum

- Neka ova putanja prolazi u jednom trenutku vremena kroz tačku *a* i nekom kasnijem kroz tačku *b*



Pošto je integral od t_1 do t_2 minimalan, on mora biti minimalan i u ovoom malom delu putanje od tačke *a* do tačke *b*, odnosno od t_a do t_b.

Vidimo da tvrđenje koje je govorilo o celoj putanji u istom obliku važi i za infinitezimalni deo te putanje, tj. ima diferencijalni oblik

Primer skalarnog elektrostatičkog potencijala

- Vrednost potencijala elektrostatičkog polja u prostoru predstavlja rešenje diferencijalne jednačine
$$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$$
.
- Potencijal možemo naći i kao onu funkciju ϕ za koju je integral
$$U = \varepsilon_0/2 \int (\nabla\phi)^2 dV - \int \rho\phi dV$$
minimalan.

- $$\phi = \underline{\phi} + f$$
- Da bi varirali U potrebno nam je
  $(\nabla\phi)^2 = (\nabla\underline{\phi})^2 + 2\nabla\underline{\phi}\cdot\nabla f + (\nabla f)^2$
  Zadržavamo varijacije prvog reda, i ostaje samo $2\nabla\underline{\phi}\cdot\nabla f$.
- $$\rho\phi = \rho\underline{\phi} + \rho f.$$
- $$\triangle U = \int(\epsilon_0\nabla\underline{\phi}\cdot\nabla f - \rho\phi)dV.$$
- $$\nabla\underline{\phi}\cdot\nabla f = \frac{\partial\underline{\phi}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\underline{\phi}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\underline{\phi}}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}$$
- $\Delta U = \int(-\epsilon_0\nabla^2\underline{\phi} - \rho)fdV$
- Da bi ova varijacija bila nula za bilo koju funkciju f mora važiti
  $$\nabla^2\underline{\phi} = -\rho/\epsilon_0.$$
  Ovim je ekvivalentnost dokazana.