Univerzitet u Nišu
Prirodno-matematički fakultet

Metodika nastave fizike - Seminarski rad

# Fajnman i njegove ideje o principu najmanjeg dejstva

Student: Marija Grofulović
Broj indeksa: 11
Predmetni nastavnik: Ljubiša Nešić

Niš
Maj, 2013.

# Sadržaj

# 1 Uvod

Prve ideje u vezi sa principom najmanjeg (stacionarnog) dejstva javile su se u optici i u geodetskim premeravanjima. Formulacije slične njemu javile su se u radovima Euklida, Ptolomeja, Herona, Ojlera, a takav način poimanja stvari postojao je i kod drevnih Egipćana. Princip najmanjeg dejstva je varijacioni princip koji kada se primeni na sistem dovodi do jednačina kretanja. Podsetimo se da je dejstvo u fizici veličina čiji je argument putanja, obično predstavljena parametarski, u funkciji od vremena. Kao rezultat daje realan broj, dok ima dimenzije energija×vreme, što je u SI $Js$. Evolucija fizičkog sistema između dva stanja određeno je zahtevom da dejstvo bude minimalno za male perturbacije oko prave evolucije. Ovako dobijamo diferencijalne jednačine kretanja sistema. Ovaj princip predstavlja način da se diferencijalne jednačine kretanja fizičkog sistema predstave ekvivalentnim integralnim jednačinama.

Značaj ovog principa i elementarno objašnjenje njegovih osnova, iz ugla Ričarda Fajnmana, predmet je ovog rada.

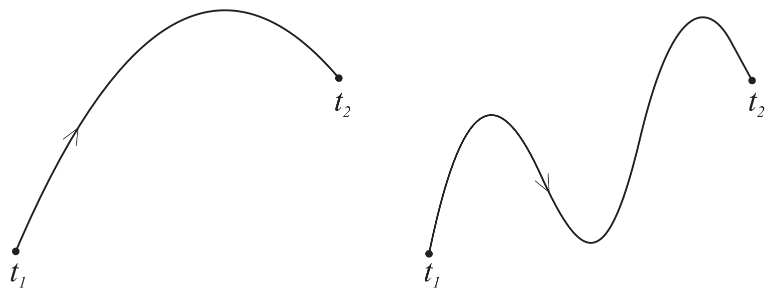
## 2 Ričard Fajnman: Princip najmanjeg dejstva

### 2.1 Ričard Fajman

Ričard Fajnman bio je jedan od najvećih umova 20. veka. Osim činjenice da je zaslužan za brojna naučna dostignuća, te da je dobitnik mnoštva velikih naučnih priznanja između ostalog i Nobelove nagrade, kao jedan od najvećih i najpriznatijih umova Amerike, učinio je i jako mnogo na popularizaciji fizike i nauke uopšte. Pisao je fenomenalne udžbenike, pisao i pričao anegdote, a kasnije i često u nastupima na televiziji pričao fenomenalne priče o onim najvažnijim životnim ili nekim drugim naizgled komplikovanim stvarima.

### 2.2 Princip najmanjeg dejstva

Poimanje sveta oko nas neminovno uslovljava odgovore koje tražimo u fizici. Ipak, razvoju nauke i njenom razumevanju znatno doprinose pitanja tipa: "Zašto stvari nisu drugačije?" Nama je poznato, što iz svakodnevnog iskustva, što iz fizike, kakva će biti putanja tela koje bacimo (u gravitacionom polju). Ono se kreće do neke visine, kada njegova brzina postaje nula, a onda se kreće naniže i posle određenog vremena padne na zemlju, tako da putanja ima oblik parabole (slika 1).




Slika 1. Stvarna putanja (levo) i zamišljena (desno).

To je nama toliko dobro poznato da se nikad ne zapitamo zašto putanja koju je telo prešlo za isto vreme nije drugačija, na primer kao na slici 1 (desno). Razlog bi mogli da iskažemo na ovaj način: Integral po vremenu razlike kinetičke energije i potencijalne energije je najmanji za dobro poznatu paraboličnu putanju. Razlog bi mogli formulisati i na ovaj način: Takva trajektorija je rešenje diferencijalne jednačine $m\ddot{x} = \overrightarrow{F}$.

Pretpostavimo sada da se čestica kreće u gravitacionom polju i posmatrajmo njenu putanju od jedne tačke do druge. Ona će se kretati od početnog do krajnjeg položaja određeno vreme $t_2 - t_1$. Zamislimo sada da je putanja čestice, za koju znamo da je deo parabole, izgleda drugačije ali se ona kretala tom zamisljenom putanjom jednako vreme. Tvrđenje koje je zapunjujuće kaže da bez obzira na to kakvu smo fiktivnu putanju zamislili, integral razlike kinetičke i potencijalne energije u ma kojem trenutku vremena po vremenu (od $t_1$ do $t_2$) imaće veću vrednost nego kada isti izračunamo za stvarnu putanju. Ovo tvrđenje je zapanjujuće iz tog razloga što predočava mogućnost da se drugi Njutnov zakon formuliše drugačije i način na koji bi to mogli uraditi. Umesto diferencijalne jednačine na koju smo navikli $m\ddot{x} = \vec{F}$, putanju tela nalazimo kao onu putanju za koju je integral razlike kinetičke i potencijalne energije tela najmanji.

U slučaju slobodne čestice možemo doći do zanimljivih zaključaka. Pošto je potencijalna energija jednaka nuli, čestica će se kretati tako da je integral kinetičke energije po vremenu od početnog trenutka do krajnjeg minimalan. Odatle sledi da se čestica kreće uniformnom brzinom. Ukoliko to ne bi bio slučaj, čestica bi u nekim trenucima imala manju, a u nekim veću brzinu od srednje brzine. Kinetička energija u tom slučaju bi bila veća nego u slučaju uniformnog kretanja jer je srednja vrednost kvadrata veličine koja se menja oko neke prosečne vredosti uvek veća od kvadrata srednje vrednosti, pa je integral kinetičke energije najmanji ako se brzina ne menja. U prošlom slučaju smo imali predmet u polju gravitacione sile i znamo da tada brzina nije uniformna već se na početku smanjuje, a zatim raste, ali je ključno to da je integral razlike minimalan. Znači da se telo kreće u toku nekog fiksiranog vremena tako da "pokušava" da dobije što veću potencijalnu energiju, da bi oduzeo što veću vrednost, dok kinetička energija ne sme da poraste previše. Rezultirajuća putanja je, kao što nam je poznato, parabola.

### 2.2.1 Dobijanje diferencijalnih jednačina kretanja

Uvedimo veličinu koja je u vezi sa svojstvima kretanja o kojim smo pričali: Dejstvo je integral po vremenu razlike kinetičke i potencijalne enrgije. Oblast integracije je vremenski interval u toku kojeg posmatramo kretanje,

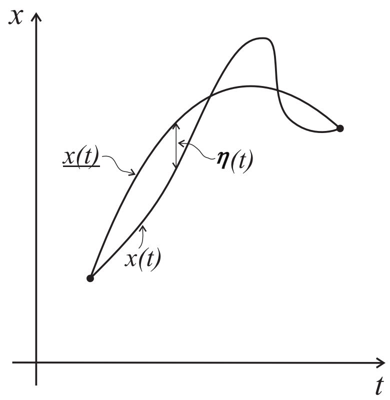
$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt.$$

Obe energije su funkcije vremena, pa će ovaj integral za svaku odabranu putanju imati različitu vrednost. Naš zadatak je naći onu putanju za koju je ovaj integral minimalan. Maksimum ili minimum smo navikli da tražimo tako što prvi izvod po nekoj promenljivoj izjednačimo sa nulom, ali to smo radili kada nam je potrebna vrednost te promenljive pri kojoj je veličina makslimalna ili minimalna. Sada je slučaj drugačiji i da bi rešili problem potreban nam je varijacioni račun.

Kružnicu, na primer, možemo definisati kao geometrijsko mesto tačaka koje su podjednako udaljene od jedne centralne tačke, ali možemo i koristeći se varijacionim računom reći da je kružnica takva kriva određene dužine koja ograničava najveću površinu.

Potražimo sada putanju nekog tela. Zamislićemo jednu putanju koja je stvarna i jednu koja je lažna. Ako bi izračunali dejstvo, ono bi bilo veće za lažnu putanju tela. Na osnovu Tejlorovog razvoja funkcije $f(x)$ oko tačke $x_0$ znamo $f - f_0 = (x - x_0) f_0' + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f_0'' + ...$, gde je $f_0 \equiv f(x_0)$. Vidimo da ako se udaljimo od minimuma funkcije za neku vrednost, ta devijacija funkcije je drugog reda, jer je u minimumu, ukoliko uzmemo da je minimum u tački $x_0$, $f_0' = 0$, pa je devijacija funkcije, tj. $f - f_0$ srazmerna drugom stepenu devijacije argumenta. Ako se pak na drugom mestu, a ne u minimumu, udaljimo od jedne vrednosti argumenta, promena funkcije biće srazmerna prvom redu promene argumenta. To svojstvo se ne sledeći način odražava na naš problem: Ako imamo pravu putanju i neku koja se za malo razlikuje od nje, onda u prvoj aproksimaciji neće biti razlike u dejstvu koje dobijemo za ove putanje. Ako je stvarno jedna od putanja prava putanja, tj. dejstvo je minimalno, onda razlika između tih dejstava mora biti drugog reda, dakle u drugoj aproksimaciji će se uočiti. Da to mora tako da bude možemo shvatiti i na drugi način. Ako devijacija funkcije u minimumu srazmerna prvom stepenu devijacije argumenta, onda devijacija funkcije može postati negativna ukoliko argument pomeramo u drugom smeru realne prave, odnosno ako nam je razlika argumenta negativna. Ako je devijacija funkcije negativna, to znači da smo od neke vrednosti funkcije oduzeli minimalnu vrednost funkcije koja je veća od prvobitne. Dakle, znak devijacije argumenta ne sme uticati na znak devijacije funkcije, pa ona mora biti drugog reda, odnosno srazmerna kvadratu razlike argumenta.

Neka je $\underline{x}(t)$ prava putanja, a $x(t)$ je neka druga putanja koja se od prave razlikuje za $\eta(t)$ (slika 2.). Ideja je da razlika dejstva za ove dve putanje mora biti nula u prvom redu aproksimacije za malo $\eta$. Ovo mora da važi za svako $\eta$ za koje važi $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Dakle, naše putanje počinju i završavaju se u istoj tački. Zašto je to važno, videćemo u daljem računu.




Slika 2.

U izrazu $S = \int [\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2 - V(x)]dt$ predstavićemo veličine koje odgovaraju stvarnoj putanji preko funkcije $\eta(t)$.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt})^2 - V(\underline{x} + \eta)]dt.$$

Član koji se javlja na kvadrat ćemo napisati na drugi način,

$$(\frac{d\underline{x}}{dt})^2 + 2\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{\eta}{dt} + (\frac{d\eta}{dt})^2,$$

pa sabirke koji sadrže druge stepene devijacije $\eta$ zanemarujemo, jer kao što smo rekli, radimo u prvoj aproksimaciji.

Potencijal možemo da razvijemo u Tejlorov red, ako uzmemo u obzir da je $\eta$ malo.

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \eta^2/2V''(\underline{x}) + ...$$

Dobijamo

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}(\frac{d\underline{x}}{dt})^2 - V(\underline{x}) + m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + (sabircidrugogreda)]dt.$$

Prva dva sabirka odgovaraju dejstvu $\underline{S}$. To je jako zgodno jer nama i treba razlika dejstva $S - \underline{S}$ koju ćemo zvati varijacija $\delta S$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x})]dt.$$

Prethodni integral, bez obzira na to šta je $\underline{x}$, mora biti jednak nuli za svako $\eta$. Da bi videli do kakvih posledica to dovodi i kada to važi, ovaj integral bi bilo pogodno dobiti u obliku proizvoda nečega i $\eta$. Uvek se u varijacionom računu primenjuje parcijalna integracija kako bi se umesto $\frac{d\eta}{dt}$ pojavilo samo $\eta$, a tu se vidi važnost uslova da je $\eta(t_1) = \eta(t_2)$. Dobićemo

$$\delta S = m\frac{d\underline{x}}{dt}\eta(t)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\frac{d\underline{x}}{dt})dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x})\eta(t)dt.$$

Zbog spomenutog uslova u početnoj i krajnjoj tački putanje, prvi sabirak je jednak nuli. Dakle

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [-m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x})]\eta(t)dt.$$

Ako je ovaj integral jednak nuli za svako $\eta$, onda zagrada kojom množimo $\eta$ mora biti nula. Dejstvo je minimalno za putanju koja zadovoljava sledeći uslov:

$$[-m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x})] = 0.$$

Prethodni izraz, ako malo bolje pogledamo, nam je već poznat. To je drugi Njutnov zakon $F = ma$. Prvi sabirak je jednak proizvodu mase i ubrzanja, a drugi je izvod potencijalne energije, što je jednako sili.

Za sistem u polju potencijalne sile, dokazali smo da princip najmanjeg dejstva dovodi do istog rezultata kao i drugi Njutnov zakon. Napomenućemo da iako naziv principa nagoveštava da je minimum dejstva u pitanju, mi nigde nismo to iskoristili. Važno je zapravo da je u pitanju ekstremum, bio on maksimum ili minimum.

Ukoliko bi razmatrali trodimenzioni problem, dobili bi tri jednačine. U tom slučaju, $\eta$ bi bio vektor, odnosno imao bi tri komponente i za svaku od njih bi dobili po jedan uslov. Potencijalna energija je funkcija od prostornih koordinata, a putanja je neka prostorna kriva koju nije tako lako nacrtati.

Tvrđenje koje smo spomenuli do sada par puta, da se pomoću principa najmanjeg dejstva dolazi do Njutnovog zakona, nije sasvim tačno. U Njutnovom zakonu se javljaju i nepotencijalne sile, kao što je na primer trenje, dok princip najmanjeg dejstva važi samo za one sile koje se mogu dobiti iz potencijalne energije. Ali, setimo se da je sila trenja jedan makroskopski model čiji su uzrok mikroskopske pojave. Na mikroskopskom nivou nema nepotencijalnih sila, već je nepotencijanost sile trenja posledica modeliranja mikroskopskih pojava. Dakle, fundamentalni zakoni se mogu predstaviti u obliku principa najmanjeg dejstva, odnosno pomoću varijacionog računa.

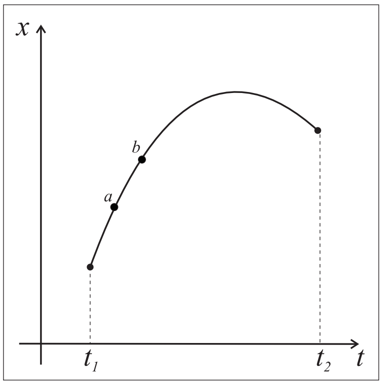
Moramo naglasiti da smo do sada razmatrali nerelativistički slučaj. U suprotnom podintegralna funkcija dejstva neće biti razlika kinetičke i potencijalne energije, već neka drugačija funkcija. Tu funkciju nazivamo Lagranžijanom i Lagranžijan je funkcija samo položaja i brzina čestica.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, v_i)dt.$$

$S$ se naziva i Hamiltonovim principom.

Do sada smo spominjali kako se fundamentalni zakoni mogu formulisati pomoću principa najmanjeg dejstva, ali sličnost između Njutnovog zakona inercije i principa najmanjeg dejstva nije baš intuitivna. Jedan zakon nam kaže da je određeni integral od jedne do druge tačke minimalan, dok drugi kaže da u svakoj tački sila koja deluje na telo saopštava mu ubrzanje koje svojim smerom, pravcem i intenzitetom određuje kretanje. Dakle, prvi zakon nam kazuje nešto o celoj putanji, dok je drugi diferencijalnog tipa. Iako deluje kao velika razlika, zakon koji nam govori o celoj putanji tela možemo i ovako da posmatramo.

Zamislimo stvarnu putanju tela i kao što već znamo dejstvo je duž te putanje minimalno. Neka ova putanja prolazi u jednom trenutku vremena kroz tačku $a$ i nekom kasnijem kroz tačku $b$ (slika 3.).




Slika 3.

Pošto je integral od $t_1$ do $t_2$ minimalan, on mora biti minimalan i u ovoom malom delu putanje od tačke $a$ do tačke $b$, odnosno od $t_a$ do $t_b$. Kada to ne bi bilo tako, postojala bi putanja od $a$ do $b$ za koju je dejstvo manje, pa bi ukupno dejstvo za putanju koja sadrži taj "manji" deo od $a$ do $b$ bilo manje od "minimalnog". Dakle svaki deo putanje mora da daje minimalno dejstvo, koliko god da je mali taj deo. Ako posmatramo dve jako bliske tačke, možemo da smatramo da su potencijalne energije u njima jednake, pa nam je bitan samo prvi izvod potencijalne energije, što je u stvari sila. Vidimo da tvrđenje koje je govorilo o celoj putanji u istom obliku važi i za infinetezimalni deo te putanje, tj. ima diferencijalni oblik.

## 2.3 Primer skalarnog elektrostatičkog potencijala

U fizici ima mnogo interesantnih principa minimuma. Navešćemo primer iz elektrostatike. naime, elektrostatičko polje možemo opisati i tako što ćemo umesto diferencijalne jednačine polja reći da određeni integral ima maksimum ili minimum. Formulisaćemo problem na ovaj način: Neka je poznata gustina naelektrisanja u svakoj tački nekog dela prostora, a mi ćemo potražiti vrednosti potencijala. Funkcija koja nam daje vrednost potencijala elektrostatičkog polja u prostoru predstavlja rešenje diferencijalne jednačine

$$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$$

.

potencijal možemo naći i kao onu funkciju $\phi$ za koju je integral

$$U = \varepsilon_0/2 \int (\nabla\phi)^2 dV - \int \rho\phi dV$$

minimalan.

Pokazaćemo da su ova dva tvrđenja ekvivalentna. Uzmimo bilo koju funkciju $\phi$ i neka je tačna vrednost potencijala $\underline{\phi}$, a malo odstupanje funkcije $\phi$ od tačne vrednosti je $f$. Pokazaćemo da kada za $\phi$uzmemo pravu vrednost potencijala $\underline{\phi}$ i malu devijaciju $f$, tada je promena $U$ u prvom redu aproksimacije jednaka nuli. Dakle

$$\phi = \underline{\phi} + f$$

Da bi varirali $U$ potrebno nam je
$(\nabla\phi)^2 = (\nabla\underline{\phi})^2 + 2\nabla\underline{\phi}\cdot\nabla f + (\nabla f)^2$
Zadržavamo varijacije prvog reda, i ostaje samo $2\nabla\underline{\phi}\cdot\nabla f$.

$$\rho\phi = \rho\underline{\phi} + \rho f.$$

Dobili smo

$$\triangle U = \int (\epsilon_0 \nabla \underline{\phi} \cdot \nabla f - \rho f) dV.$$

Skalarni proizvod u prethodnom izrazu možemo da napišemo na pogodniji način:

$$\nabla \underline{\phi} \cdot \nabla f = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Integrale sabiraka izračunaćemo parcijalnom integracijom ($u = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \partial x}$ i $dv = f$), gde ćemo iskoristiti uslov koji namećemo za funkciju $\phi$, a to je da je ona jednaka nuli u beskonačnosti.Dobijamo $\Delta U = \int(-\epsilon_0 \nabla^2 \underline{\phi} - \rho) f dV$. Da bi ova varijacija bila nula za bilo koju funkciju $f$ mora važiti

$$\nabla^2 \underline{\phi} = -\rho/\epsilon_0.$$

Ovim je ekvivalentnost dokazana.

# 3 Zaključak

U prethodnom izlaganju smo videli koliki je značaj principa najmanjeg dejstva, kao i to na koji način se on koristi. Važno je međutim uočiti činjenicu da zakoni na kojima počiva nama poznata fizika mogu imati dosta različite formulacije, koje, kao što to i mora biti, fundamentalno nisu drugačiji (imaju isti fizički smisao). Ta činjenica ima i praktičnog značaja u situacijama kada nije podjednako pogodno iskoristiti bilo koji formalizam. Neke teorije moderne fizike počivaju upravo na principu o kojem je ovde bilo reči.

# Literatura

[1] Feynman, R., Leighton, R.B., Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, 1964