

Sadržaj

1	Kinematika	9
1.1	Koordinatni sistemi u ravni	9
1.2	Pomeraj i brzina	11
1.2.1	Trenutna brzina	13
1.3	Ubrzanje	16
1.4	Brzina pri kretanju u ravni	17
1.5	Predjeni put	19
1.6	Ubrzanje u diferencijalnoj formi	22
1.7	Kinematičke jednačine	25
1.7.1	Ravnomerno ubrzano kretanje tela u jednoj dimenziji	25
1.7.2	Ravnomerno ubrzano kretanje tela u dve i tri dimenzije	26
1.8	Kosi hitac	28
1.9	Krivolinijsko kretanje	31
1.9.1	Kretanje po kružnici konstantnom ugaonom brzinom ω	31
1.9.2	Tangencijalno i radijalno ubrzanje	32
1.10	Beskonačno male veličine u fizici	33
2	Dinamika	37
2.1	Sile	38
2.2	Prvi Njutnov zakon. Inercijalni sistemi reference	41
2.3	Drugi Njutnov zakon u diferencijalnoj formi	42
2.3.1	Primena drugog Njutnovog zakona na neke konkretne slučajeve	44
2.3.2	Kauzalnost klasične mehanike	49
2.4	Galilejev princip relativnosti	51
2.4.1	Primeri primene Galilejevog principa relativnosti	54
2.5	Zakon održanja impulsa i III Njutnov zakon	57
2.6	Rad	58
2.6.1	Rad konstantne sile	58

2.6.2	Rad sile koja nije konstantna	59
2.6.3	Rad elastične sile	61
2.7	Snaga	62
2.8	Energija	62
2.8.1	Kinetička energija	63
2.8.2	Potencijalna energija	65
2.8.3	Konzervativne i nekonzervativne sile	67
2.8.4	Konzervativne sile i potencijalna energija	68
2.8.5	Energijski dijagrami i stabilnost sistema	69
2.8.6	Ukupna mehanička energija. Zakon održanja energije .	73
2.9	Teorema o kretanju centra masa	74
2.10	Odredjivanje položaja centra masa krutih dela različitog oblika	77
2.10.1	Centar masa krutog tela	77
2.11	Redukovana masa	81
2.12	Kretanje u centralnom polju sila. Problem dva tela	82
2.12.1	Centralno polje sila	83
2.12.2	Problem dva tela	86
2.13	Kretanje tela promenljive mase. Reaktivno kretanje	87
2.14	Kretanje u prisustvu sila otpora	91
2.14.1	Kretanje tela u prisustvu sile otpora proporcionalne brzini tela	91
2.14.2	Kretanje tela u prisustvu sile otpora proporcionalne drugom stepenu brzine tela	93
2.15	Rotaciono kretanje krutog tela	94
2.15.1	Kinetička energija pri rotacionom kretanju	94
2.15.2	Izračunavanje momenata inercije krutih tela različitog oblika	95
2.16	Primeri i zadaci	101
3	Oscilacije	113
3.1	Prosto harmonijsko kretanje	113
3.1.1	Energija prostog harmonijskog oscilatora	120
3.1.2	Klatno	122
3.1.3	Oscilovanje klipa u sudu sa idealnim gasom	127
3.1.4	Veza sa uniformnim kretanjem po kružnici	129
3.2	Prigušene oscilacije	131
3.2.1	Koeficijent prigušenja i period prigušenih oscilacija . .	136
3.2.2	Faktor dobrote	137
3.3	Prinudne oscilacije	138
3.3.1	Amplituda prinudnih oscilacija	139

3.3.2	Rezonancija	140
3.4	Slaganje oscilacija	140
3.4.1	Slaganje oscilacija istog pravca i istih frekvencija	141
3.4.2	Slaganje oscilacija bliskih frekvencija (udari)	142
3.4.3	Vektorski dijagram	144
3.4.4	Slaganja međusobno normalnih oscilacija	145
3.4.5	Modulacija	149
3.4.6	Razlaganje oscilacija. Spektar	150
3.5	Primeri i zadaci	154
4	Talasi	175
4.1	Osnovne veličine potrebne za opisivanje talasnog kretanja	176
4.2	Pravac poremećaja delova sredine	177
4.3	Jednodimenzionalni progresivni talas	180
4.3.1	Puls koji se prostire na desno	181
4.3.2	Brzina talasa na žici	182
4.3.3	Refleksija i transmisija	185
4.4	Sinusoidalni talasi	187
4.4.1	Energija i intenzitet talasa	191
4.5	Talasa jednačina	195
4.5.1	Transverzalni talas na zategnutoj žici	195
4.5.2	Longitudinalni talas u idealnom gasu	197
4.5.3	Talasi u krutom telu	203
4.6	Sferni i ravanski talasi	205
4.6.1	Doplerov efekat	208
4.7	Superpozicija talasa	213
4.7.1	Superpozicija i interferencija sinusoidalnih talasa	214
4.7.2	Stojeći talasi	215
4.7.3	Uslovi formiranja stojećeg talasa na žici čiji su krajevi fiksirani	220
4.7.4	Stojeći talasi u vazдушnim stubovima	223
4.7.5	Stojeći talasi u šipkama i na pločama	226
4.8	Primeri i zadaci	228
5	Analitička mehanika	235
5.1	Elementi analitičke mehanike	236
5.2	Ojler-Lagranževe jednačine	238
5.3	Fazni prostor	238
5.4	Klasična mehanika i granice njene primenljivosti	241

5.5	Osobine prostora i vremena u klasičnoj mehanici i njihova veza sa zakonima održanja	244
5.5.1	Simetrije prostora i vremena.	245
6	Kinematika specijalne teorije relativnosti	249
6.1	Brzina svetlosti i zakon sabiranja brzina	250
6.2	Majkelson-Morlijev eksperiment	254
6.3	Ajnštajnov princip relativnosti	258
6.4	Posledice specijalne teorije relativnosti	260
6.4.1	Istovremenost u Ajnštajnovoj relativnosti	261
6.4.2	Dilatacija vremena	263
6.4.3	Kontrakcija dužina	272
6.4.4	Relativistički Doplerov efekat	274
6.5	Lorencove transformacije	276
6.5.1	Lorencove transformacije	280
6.5.2	Relativistički zakon sabiranja brzina	281
6.6	Osnovne kinematičke posledice Lorencovih transformacija	282
6.6.1	Dilatacija vremena	282
6.6.2	Kontrakcija dužine	283
6.7	Interval	283
6.7.1	Tipovi intervala	285
6.7.2	Primeri primene invarijantnog intervala	286
6.8	Prostor Minkovskog	287
6.8.1	Grafici u prostor-vremenu	287
6.8.2	Vektori u prostoru Minkovskog	289
6.8.3	4-vektor i brzine	290
6.9	Relativistička raketa	291
6.10	Primeri i zadaci	293
7	Dinamika specijalne teorije relativnosti	315
7.1	Relativistički izraz za impuls i II Njutnov zakon	315
7.2	Relativistička energija	318
7.3	4-vektor impulsa	322
7.4	Transformacija impulsa i energije	323
7.5	Ekvivalencija mase i energije	323
7.6	Energija veze	325
7.7	Relativnost i elektromagnetizam	326
7.8	Granica između Njutnove i relativističke dinamike	329
7.8.1	Kretanje čestice u polju konstantne sile	331

8	Opšta teorija relativnosti	333
8.1	Pojave u ubrzanim sistemima reference	334
8.2	Inercijalne sile	336
8.3	Osobine inercijalnih sila	336
8.4	Prostor i vreme u neinercijalnim sistemima reference	337
8.5	Princip ekvivalencije	341
8.6	Elementi opšte teorije relativnosti	343
8.6.1	Prostor i vreme u gravitacionom polju	343
8.6.2	Opisivanje kretanja u gravitacionom polju	343
8.6.3	Tri potvrde OTR	344
8.7	Crne rupe	347
8.8	Gravitacioni talasi	348
8.9	Gravitaciona interakcija i neinercijalni sistemi reference	348
8.10	Princip ekvivalentnosti	349
8.11	Dilatacija vremena	352
8.12	Gravitaciono polje i geometrija. Zakrivljenje prostora.	354
8.13	Primena OTR na Vasionu, kosmologija.	356
8.14	Granice primenljivosti OTR	359
9	Dodatak	361
9.1	Numeričko modelovanje u dinamici čestice	361
9.1.1	Ojlerov metod	362
9.2	Maksvelove jednačine i elektromagnetni talasi	364
9.2.1	Elektromagnenti talasi	365
9.3	Dimenziona analiza	367
9.3.1	Funkcionalna zavisnost sile otpora sredine pri kretanju tela kroz nju	369
9.4	Algebra	371
9.4.1	Neke važne formule	371
9.4.2	Linearne jednačine	372
9.5	Geometrija	373
9.6	Trigonometrija	376
9.7	Diferencijalni račun	378
9.7.1	Osobine izvoda	379
9.7.2	Izvodi nekih funkcija	381
9.7.3	Razvoj u red nekih funkcija	381
9.8	Integralni račun	382
9.8.1	Parcijalna integracija	384
9.8.2	Totalni diferencijal	385
9.8.3	Integrali nekih funkcija	385

9.8.4	Neki određeni integrali	387
-------	-----------------------------------	-----

Predgovor

Knjiga koja je pred vama je u početku bila zamišljena samo kao kurs Teorije relativnosti (specijalne i opšte). Skoro uvek kada je autor započinjao razmišljanje kako da je koncipira, sretao se sa problemom šta iz nerelativističke mehanike smatrati poznatim a na šta ponovo ukazati kod uvođenja odgovarajućih pojmova relativističke mehanike. Takodje se postavljalo pitanje na koje od postojećih udžbenika opšte i teorijske fizike se pozivati prilikom pisanja. U jednom momentu se došlo do, možda ne preterano racionalnog, zaključka da je bolje na istom mestu obraditi ključne oblasti Njtonove mehanike i prilagoditi ih docnijim potrebama teorije relativnosti. A onda kada se počelo sa pisanjem, radi kompletnosti i konzistentnosti izlaganja, se materijal iz nerelativističke mehanike prilično proširio tako da je nastala knjiga koja ima prvi (nerelativistički deo) koji je pisan na nivou koji se nalazi između nivoa opšteg i teorijskog kursa fizike i drugi relativistički koji je takodje pisan na dva nivoa, jedan koji mogu da sa uspehom da prate i zainteresovaniji srednjoškolci, i drugi koji zahteva poznavanje nekih specijalnih oblasti matematike.

Iako se knjiga sastoji iz 8 glava, ona se zapravo može podeliti na dve oblasti: 1. klasična mehanika, koja se bavi kretanjem tela koja su velika u poredjenju sa atomima i kreću se brzinama koje su mnogo manje od brzine svetlosti (glave pod nazivom kinematika, dinamika, oscilacije, talasi, analitička mehanika), 2. relativnost, koja predstavlja teoriju koja opisuje kretanje tela bilo kojom brzinom, u tom smislu i brzinama koje su bliske brzini svetlosti (kinematika specijalne teorije relativnosti i dinamika specijalne teorije relativnosti i opšta teorija relativnosti).

Kako bi, sa što manje traganja za matematičkom literaturom, bilo moguće praćenje izlaganja datog u knjizi, autor je osmislio i odgovarajući matematički dodatak.

Niš, septembar 2008. godine,

Autor

Glava 1

Kinematika

Fizika, jedna od bazičnih prirodnih nauka, se bavi osnovnim principima na kojima je zasnovan univerzum. Ona daje osnovu za druge prirodne nauke - astronomiju, biologiju, hemiju, geologiju, Lepota fizike leži u jednostavnosti osnovnih fizičkih teorija koja se ogleda u malom broju fundamentalnih koncepata, jednačina i pretpostavki koje mogu da izmene i prošire naš pogleda na svet oko nas.

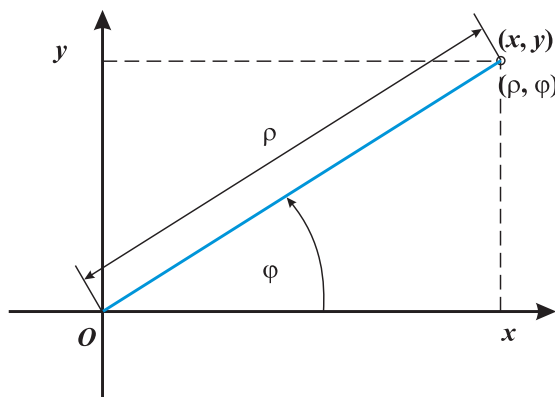
Logički početak prezentovanja koncepata fizike se zasniva na pojmu kretanja čijim opisivanjem se bave i kinematika i dinamika, svaka na svoj način. Kretanja je relativan pojam jer je veoma bitno u odnosu na koje telo se ono posmatra. Stoga, prvo je potrebno izabrati referentno telo za koje se nakon toga vezuje odgovarajući koordinatni sistem. Kao što izbor referentnog tela nije jednoznačan tako je moguće izabrati i više koordinatnih sistema vezanih za njega.

1.1 Koordinatni sistemi u ravni

Za određivanje položaja čestice u ravni potrebno je izabrati dva nezavisna broja - koordinate čijim ćemo poznavanjem u svakom momentu vremena tačno moći da znamo gde se čestica nalazi.¹ Najpoznatija su sledeća dva koordinatna sistemi u ravni: 1) pravougli Dekartov koordinatni sistem - u njemu dva broja (x, y) određuju položaj tačke u odnosu na koordinatni

¹Prostor i vreme u klasičnoj mehanici su neprekidni, što u fizičkom smislu znači da telo ne može da nestane, a u matematičkom da se mogu primenjivati za opisivanje položaja i kretanja tela metode matematičke analize, odnosno da se mogu dobro definisati izvodi i integrali odgovarajućih mehaničkih veličina.

početak² i 2) polarni koordinatni sistem - položaj tačke je određen koordinatama (ρ, φ) .³



Slika 1.1: Dekartov i polarni koordinatni sistem. Koordinata ρ odgovara udaljenosti tačke od koordinatnog početka, dok je φ ugao koji zaklapa vektor položaja tačke sa x osom.

Sa slike 1.1 jasno vidi da je veza jednih i drugih koordinata u ravni zadata relacijama

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \quad (1.1)$$

odnosno

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.2)$$

Primer 1. Dekartove koordinate tačke u (x, y) ravni su a) $(x, y) = (1, 1)$ m, b) $(x, y) = (-1, 1)$ m, c) $(x, y) = (-1, -1)$ m, d) $(x, y) = (1, -1)$ m. Odredi polarne koordinate te tačke.

a) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1m)^2 + (1m)^2} = \sqrt{2}m \tan \varphi = \frac{y}{x} = \frac{1m}{1m} = 1$. Iz poslednje relacije se za traženi polarni ugao φ dobija dva rešenja 45° i 225° (odnosno $\pi/4$ i $5\pi/4$) a na osnovu položaja tačke zadate dekartovim koordinatama x i y tj. na osnovu njihovog znaka da treba uzeti rešenje koje odgovara manjem uglu jer jedino tada tačka leži u prvom kvadrantu. Drugo rešenje odgovara tački koja je navedena pod c) i tom slučaju tačka leži u trećem kvadrantu. U slučajevima b) i c) koordinata ρ ima istu vrednost kao

²Reč je naravno o komponentama vektora položaja \vec{r} koji je u ovom slučaju zadat izrazom $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, gde su \vec{e}_x i \vec{e}_y jedinični vektori koordinatnih osa. U slučaju kretanja čestice u tri dimenzije, vektor položaja će biti predstavljen izrazom $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

³Dok je oblast definisanosti dekartovih koordinata x i y od $-\infty$ do $+\infty$, za polarne važi $\rho \in (0, +\infty)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

i u ostalim slučajevima, tangens ugla φ je jednak -1 a na osnovu znaka x i y su traženi uglovi $3\pi/4$ i $7\pi/4$.

Primer 2. Opisati dekartovim i polarnim koordinatama kretanje po kružnici poluprečnika R , konstantnom ugaonom brzinom ω .

Kako je u ovom slučaju predjeni ugao za vreme t jednak $\varphi = \omega t$, a udaljenost od koordinatnog početka stalno iznosi R , jednačine koje opisuju kretanje u polarnim koordinatama glase

$$\rho(t) = R, \varphi(t) = \omega t,$$

a u dekartovim

$$x = R \cos(\omega t), y = R \sin(\omega t).$$

Lako je primetiti da je u ovom slučaju pogodnije koristiti polarne koordinate umesto dekartovih.

Polarne koordinate nisu jedine moguće u ravni sem dekartovih. Postoje još i npr. eliptične. U tri dimenzije se mogu uvesti cilindrične, sferne, toroidalne, ... Motiv za uvođenje raznih koordinata je što one, ako se na pravilan način izaberu, uprošćavaju opisivanje kretanja. Tako, ukoliko se materijalna tačka kreće po površini neke lopte najzgodnije je njeno kretanje opisivati uz pomoć sfernih koordinata itd.

1.2 Pomeraj i brzina

Kretanje materijalne tačke je u potpunosti poznato ukoliko je poznat njen položaj u svakom momentu vremena. Zgodno je, radi jednostavnosti, za početka posmatrati kretanje čestice u jednoj dimenziji, npr. duž x -ose. Ukoliko se ona kreće od početne/inicijalne pozicije x_i do konačne/finalne pozicije određene koordinatom x_f , promena položaja čestice, tj. njen **pomeraj**, određen je izrazom

$$\Delta x = x_f - x_i.$$

Pomeraj može biti kako pozitivan tako i negativan. Drugim rečima on je određen pravcem, smerom i intenzitetom i predstavlja vektorsku veličinu. Kako se ovde radi o kretanju u jednoj dimenziji plus ili minus predznak pomeraja ukazuje na njegov smer u odnosu na osu.⁴

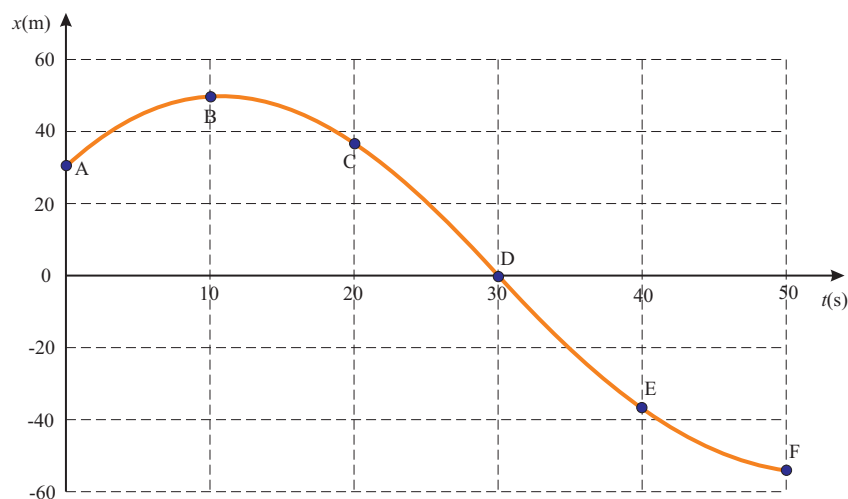
Za precizniju analizu kretanja tela zgodno je posmatrati zavisnost njihove koordinate od vremena. Neka su izmerene vrednosti vremenskih intervala od početka kretanja i položaja tela u odnosu na koordinatni početak

⁴Takođe je potrebno uočiti da pomeraj i pređeni put predstavljaju različite fizičke veličine. Tako, kada ujutro krenemo od kuće u školu i kasnije vratimo kući, pomeraj je nula ali pređeni put je jednak makar dvostrukom rastojanju kuće i škole.

predstavljene u tabeli 1. Na osnovu njih se može nacrtati grafik $x = x(t)$ predstavljen na slici 1.2.

Položaj	$t(\text{s})$	$x(\text{m})$
A	0	30
B	10	52
C	20	38
D	30	0
E	40	-37
F	50	-53

Tabela 1.1: Položaj tela u različitim vremenskim trenucima



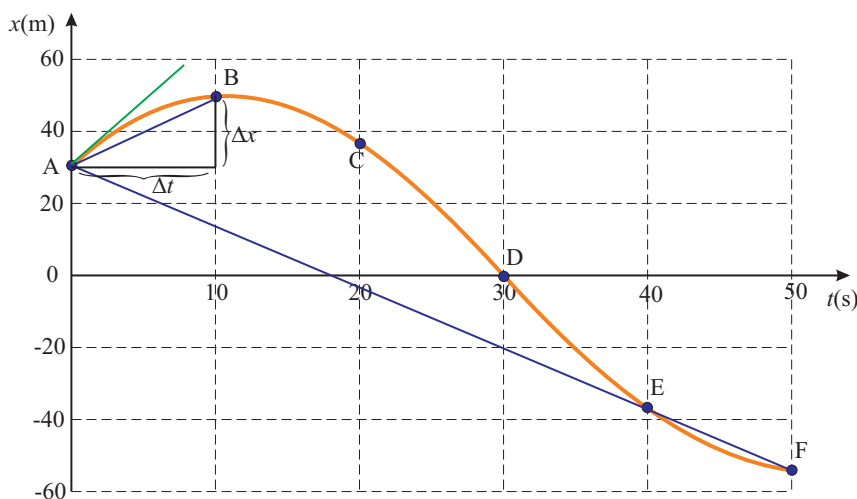
Slika 1.2: Grafik zavisnosti položaja tela od vremena

Kretanje prikazano na slici nije uniformno stoga je zgodno za početak uvesti **srednju brzinu** kao količnik pomeraja i intervala vremena za koji se desio

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (1.3)$$

gde indeks x ukazuje na to da se posmatra kretanje duž x -ose. Geometrijski smisao srednje brzine se lako uočava ukoliko se nacrtava prava linija koja spaja tačke koje su dve tačke na grafiku prikazanom na slici 1.3. Ova linija predstavlja

hipotenuzu pravouglog trougla čije katete su Δx i Δt . Nagib (koeficijent pravca) ove linije je upravo odnos $\Delta x/\Delta t$. U slučaju tačka A i B nagib je jednak srednjoj brzini u posmatranom intervalu vremena $(52 \text{ m} - 30 \text{ m})/(10 \text{ s} - 0) = 2,2 \text{ m/s}$.



Slika 1.3: Grafik zavisnosti položaja tela od vremena

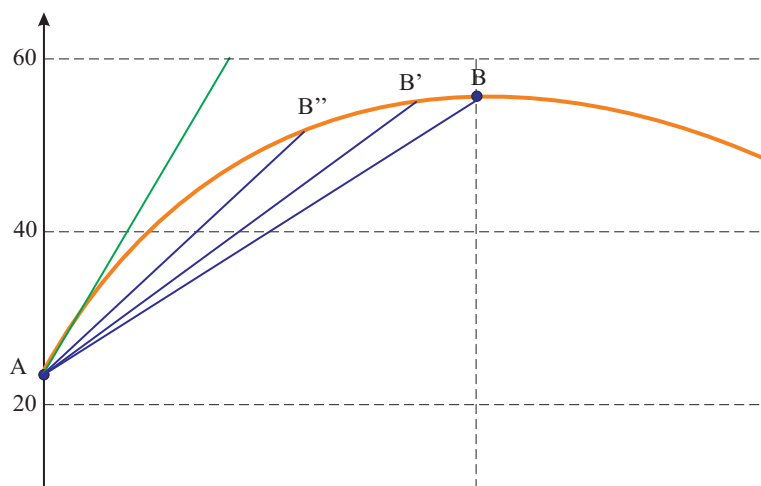
Ukoliko se uzme drugi interval vremena (npr. između tačaka A i F) dobija se druga vrednost za srednju brzinu. Na slici 1.3 ona odgovara nagibu prave linije koja spaja tačke A i F.

1.2.1 Trenutna brzina

Često je, umesto srednje brzine za dati interval vremena, celishodnije znati brzinu čestice u određenom momentu vremena. Tako je npr. umesto da računamo srednju brzinu automobila na celom putu potrebnije znati brzinu u momentu prilaska pored policijske patrole. Sasvim je logična ideja da bi ta brzina trebala da odgovara srednjoj brzini u "nultom" intervalu vremena u izrazu (1.3). Ovakav pristup, iako intuitivno jasan, u fizici nije bio dobro zasnovan sve do kraja XVII veka kada je otkriven diferencijalni račun. Formulisanje diferencijalnog računa je upravo dalo mogućnost opisivanja i razumevanja kretanja u ma kom trenutku vremena.

Da bi se razumelo kako se to radi na slici 1.4 je prikazan uvećan relevantan deo slike 1.3. Ukoliko je cilj dobijanje informacije o brzini u početnom trenutku vremena jasno je da je prosečna brzina od A do B njena bolja aproksimacija nego što bi to bila prosečna brzina izračunata za kretanje

između tačka A do F. Jedan od razloga bi mogao da bude makar to što je ona pozitivna dok je ona druga negativna. Početna brzina je takođe pozitivna (odgovara kretanju u pozitivnom smeru x -ose).



Slika 1.4: Grafik zavisnosti položaja tela od vremena

Takođe je intuitivno jasno da je srednja brzina to bliža brzini u početnom trenutku što je tačka B bliža tački A. Na slici 1.4 je prikazan niz tačaka koje su bliže tački A nego što je to tačka B (tačke B' i B''). Pri tome linija srednje brzine postaje sve strmija i strmija. U graničnom slučaju, kada tačka B postane skroz bliska tački A, posmatrana linija postaje tangenta na krivu liniju. To znači da nagib tangente reprezentuje trenutnu brzinu tela u tački A. Drugim rečima, **trenutna brzina v_x jednaka je graničnoj vrednosti količnika $\Delta x/\Delta t$ kada Δt teži nuli.**⁵

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (1.4)$$

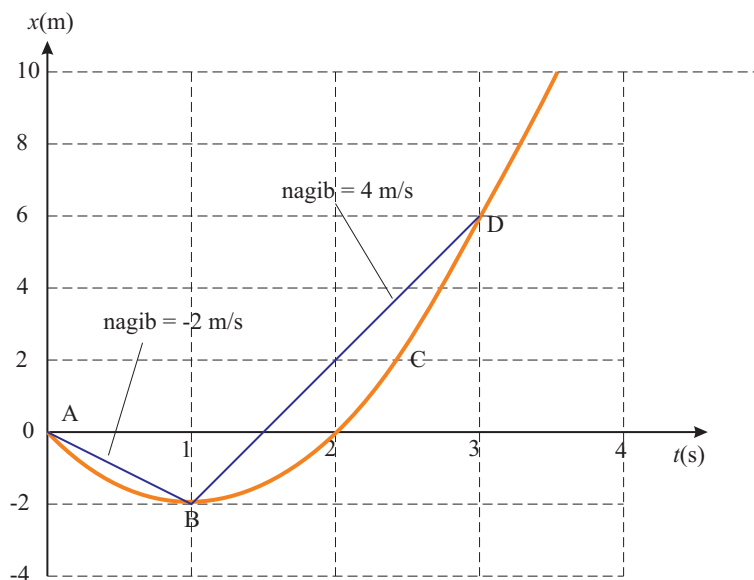
U skladu sa notacijom u oblasti više matematike, ovaj izraz predstavlja *izvod (prvi) x po t* , što se označava kao dx/dt :

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.5)$$

P r i m e r. Čestica se kreće duž x ose tako da se njena koordinata sa vremenom menja prema izrazu $x = -4t + 2t^2$, gde je x izraženo u metrima

⁵Potrebno je uočiti da pomeraj Δx takođe teži nuli kada Δt teži nuli. Kako Δx i Δt postaju sve manji i manji, njihov odnos postaje jednak nagibu tangente na krivu zavisnosti $x = x(t)$.

a t u sekundama. Nacrtati ovu zavisnost. Odrediti pomeraaj čestice u vremenskom intervalu od $t = 0$ s do $t = 1$ s kao i u intervalu od $t = 1$ s do $t = 3$ s. Odrediti trenutnu brzinu u trenutku vremena $t = 2,5$ s.



Slika 1.5: Grafik zavisnosti položaja tela od vremena

Zavisnost je prikazna na slici 1.5. Za prvi interval vremena, $t_i = t_A = 0$ s do $t_f = t_B = 1$ s, odgovarajući pomeraaj je

$$\Delta x_{A \rightarrow B} = x_f - x_i = x_B - x_A = [-4(1) + 2(1)^2] - [-4(0) + 2(0)^2] = -2 \text{ m.}$$

U drugom intervalu vremena, $t_i = t_B = 1$ s do $t_f = t_D = 3$ s, pomeraaj je

$$\Delta x_{B \rightarrow D} = x_f - x_i = x_D - x_B = [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] = +8 \text{ m.}$$

Oba pomeraaja inače mogu i da se direktno očitaju sa grafika.

Prosečne brzine za navedene intervale su

$$\bar{v}_{x_{A \rightarrow B}} = \frac{\Delta x_{A \rightarrow B}}{\Delta t} = \frac{-2 \text{ m}}{1 \text{ s}} = -2 \text{ m/s,}$$

$$\bar{v}_{x_{B \rightarrow D}} = \frac{\Delta x_{B \rightarrow D}}{\Delta t} = \frac{8 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 4 \text{ m/s,}$$

Trenutna brzina se može dobiti preko izvoda

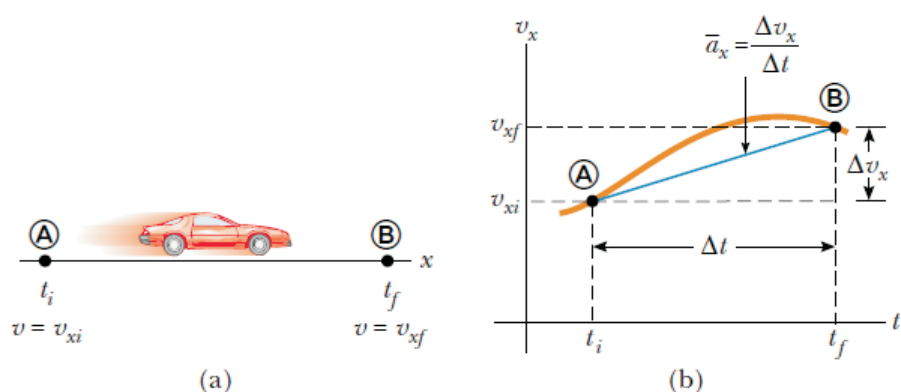
$$v_x = \frac{dx}{dt} = -4 + 4t$$

ili određivanjem nagiba tangente u datoj tački. Na oba načina se dobija da je

$$v_x = +6 \text{ m/s.}$$

1.3 Ubrzanje

Neka se telo kreće duž x ose tako da ima brzinu v_{xi} u trenutku vremena t_i i v_{xf} u trenutku t_f (slika 1.6).



Slika 1.6: a) Ubrzano kretanje i b) grafik zavisnosti brzine od vremena

Srednje ubrzanje čestice definiše se kao količnik promene brzine Δv_x i vremenskog intervala za koji se to desilo:

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}.$$

Slično situaciji sa brzinom, za neka kretanja srednje ubrzanje može da ima različite vrednosti u različitim vremenskim intervalima. Stoga je korisno definisati trenutno ubrzanje kao graničnu vrednost prethodnog izraza kada Δt teži nuli. Koncept trenutnog ubrzanja je u potpunosti analogan definiciji ranije uvedene trenutne brzine. Situacija u kojoj tačka B sa slike 1.6 postaje sve bliža i bliža tački A odgovara graničnoj vrednosti izraza $\Delta v_x/\Delta t$, čime se za trenutno ubrzanje dobija

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}. \quad (1.6)$$

Drugim rečima trenutno ubrzanje jednako je prvom izvodu brzine po vremenu. Sa druge strane prvi izvod je jednak nagibu tangente na krivu zavisnosti brzine od vremena u datoj tački.

Ako se uzme u obzir i izraz za brzinu (1.5), (trenutno) ubrzanje može da se zapiše kao

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (1.7)$$

što znači da se ono može prikazati i kao drugi izvod koordinate x po vremenu.

1.4 Brzina pri kretanju u ravni

Posmatrajmo kretanje materijalne tačke (čestice) po nekoj trajektoriji u ravni. Ukoliko ona, za jednake, ma kako male, vremenske intervale Δt prelazi jednake puteve Δs , kretanje je ravnomerno. Deljenjem ukupnog predjenog puta s , vremenom t za koje je predjen, ili dela predjenog puta Δs i odgovarajućeg intervala vremena Δt dobija se veličina

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.8)$$

koja se naziva intenzitet brzine čestice⁶ i jednaka je putu koji ona predje u jedinici vremena.

Ako je kretanje neravnomerno, veličina koja se dobija deljenjem predjenog puta i vremena

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.9)$$

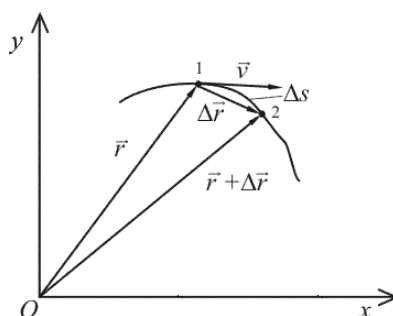
je intenzitet srednje brzine čestice za dati interval vremena. Da bi što preciznije odredili intenzitet brzine v , kojom se čestica kreće u nekom vremenskom trenutku, treba uzeti graničnu vrednost

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1.10)$$

Ukoliko pak želimo da brzinu odmah definišemo kao vektorsku veličinu, potrebno je postupiti na nešto drugačiji način.

Na slici 1.7 je prikazana trajektorija čestice. Za vreme Δt čestica će doživeti pomeraj $\Delta \vec{r}$, koji je jednak priraštaju vektora položaja $\vec{r} = x\vec{e}_x +$

⁶Brzina je vektorska veličina pa je za njeno potpuno poznavanje neophodno navesti još i pravac i smer kojim se telo kreće.



Slika 1.7: U momentu vremena t čestica se nalazi u tački 1, čiji položaj je određen vektorom položaja \vec{r} . Za interval vremena Δt čestica prelazi u tačku 2 čiji položaj je određen vektorom položaja $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, gde je $\Delta\vec{r}$ vektor pomeraja, tj. priraštaj vektora položaja. Kada Δt teži nuli, tačka 2 se "kreće" ka tački 1. Pri tome dužina luka Δs postaje sve približnije jednaka dužini tetive $|\Delta\vec{r}|$. U graničnom slučaju ove dve dužine su jednake jer tetiva tada zauzme pravac tangente na trajektoriju u tački 1.

$y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ za dati vremenski interval. Ukoliko priraštaj $\Delta\vec{r}$ podelimo intervalom vremenom Δt za koji se desio, dobićemo srednju vrednost brzine čestice

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.11)$$

Trenutna brzina čestice \vec{v} će biti jednaka graničnoj vrednosti vektora pomeraja čestice i vremenskog intervala Δt za koji se on desio, uz uslov da vremenski interval teži nuli,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Drugim rečima, brzina je izvod vektora položaja po vremenu.⁷ U fizici je uobičajeno da se izvodi po vremenu označavaju tačkom iznad slova koje označava datu fizičku veličinu tako da se ovaj izraz često piše u obliku

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.13)$$

Sa slike 1.7 se vidi da vektor trenutne brzine \vec{v} ima pravac tangente na trajektoriju u datoj tački gde se nalazi čestica u datom momentu vremena, a

⁷Vektor položaja je vektor koji zavisi od vremena i kako čestica menja položaj u prostoru tako i ovaj vektor menja svoj pravac, smer i intenzitet.

smer joj je u smeru kretanja. Intenzitet brzine je jednak apsolutnoj vrednosti izraza (1.12)

$$v = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}. \quad (1.14)$$

Kako se sa slike 1.7 vidi da odnos $\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s}$ teži jedinici kada $\Delta t \rightarrow 0$, prethodni izraz može da se transformiše na sledeći način

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{ds}{dt}, \quad (1.15)$$

što se poklapa sa formulom (1.10). Ako se prodiferencira po vremenu izraz za vektor položaja, smatrajući da su jedinični vektori koordinatnih osa konstantni, dolazi se do izraza

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad (1.16)$$

iz koga, ako ga uporedimo sa dekartovim zapisom brzine

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z \quad (1.17)$$

za komponente brzine u dekartovom koordinatnom sistemu se dobija

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}. \quad (1.18)$$

1.5 Predjeni put

Ukoliko je poznat intenzitet brzine u svakom momentu vremena, moguće je izračunati put koji je čestica prešla od nekog momenta vremena t_1 do nekog docnijeg momenta t_2 . Početni korak je deljenje intervala vremena $t_2 - t_1$ na N malih (ne obavezno jednakih) intervala vremena Δt_i (i je redni broj intervala koji ide od 1 do N). U skladu sa izrazom $v = ds/dt$, može se smatrati da je put Δs_i , predjen za interval Δt_i , približno jednak proizvodu v_i i Δt_i :

$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i \quad (1.19)$$

(ovde je v_i -bilo koja vrednost brzine iz intervala Δt_i jer se može smatrati da se unutar njega brzina toliko malo menja da se smatra skoro konstatnom - zato je svejedno koja je vrednost uzeta). Ukupan put koji predje čestica jednak je sumi puteva Δs_i

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^N \Delta s_i, \quad (1.20)$$

odnosno, ukoliko u ovaj izraz zamenimo svaki interval njegovom približnom vrednošću (1.19),

$$s \approx \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (1.21)$$

Ako sada počnemo da smanjujemo intervale vremena Δt_i , proizvodi $v_i \Delta t_i$ će sa sve većom tačnošću određivati puteve predjene za te intervale. U graničnom slučaju, kada su svi intervali vremena dovoljno mali, tj. kada teže nuli (N pri tome neograničeno raste), dobija se tačna vrednost predjenog puta kao granična vrednost

$$s = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (1.22)$$

U matematici se izrazi oblika

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i \quad (1.23)$$

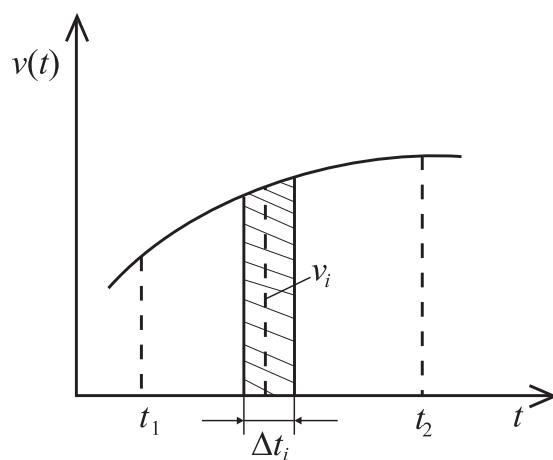
za vrednosti promenljive x u nekom intervalu od a do b , nazivaju određeni integral funkcije $f(x)$, u granicama od $x = a$, do $x = b$ i označavaju se simbolom

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (1.24)$$

Upoređujući izraze (1.22) i (1.23) relativno lako se vidi da predjeni put čestice u vremenskom intervalu od t_1 do t_2 može da se predstavi određenim integralom funkcije $v(t)$ (ona pokazuje kako se menja sa vremenom intenzitet brzine)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.25)$$

Određeni integral ima prost geometrijski smisao koji može da se lako primeti upravo na primeru izračunavanja predjenog puta. Na slici 1.8 se vidi da je proizvod $v_i \Delta t_i$ približno jednak površini osenčene "trake" osnove Δt_i . Zbir takvih proizvoda (1.21) je približno jednak površini oblasti ograničene krivom $v(t)$. Pri deljenju te oblasti na sve uže i uže trake (ovo odgovara procesu $\Delta t_i \rightarrow 0$, odnosno $N \rightarrow \infty$), zbir površina traka daje površinu oblasti ispod krive ograničene odozdo vremenskom osom a s leva i s desna pravima $t = t_1$ i $t = t_2$. Ta površina je jednaka određenom integralu (1.25).

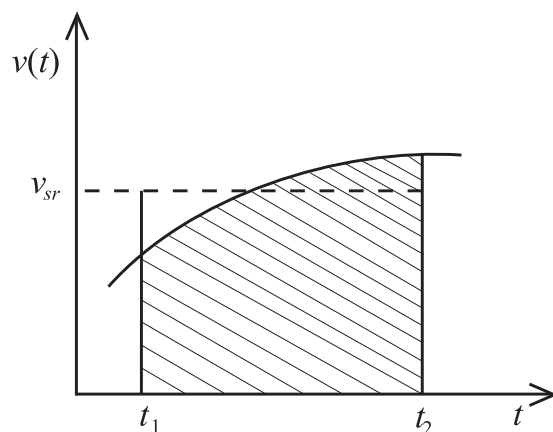


Slika 1.8: Površina šrafirane oblasti je približno jednaka proizvodu $v_i \Delta t_i$

Koristeći ovu formulu i formulu (1.9), srednja brzina može da se napiše u obliku

$$v_{sr} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (1.26)$$

jer je ukupno vreme kretanja iz formule (1.9) t ustvari jednako $t_2 - t_1$. Geometrijski smisao srednje brzine je prikazan na slici (1.9).



Slika 1.9: Površina šrafirane oblasti ispod krive $v(t)$ je jednaka površini pravougaonika visine v_{sr} i osnovice $t_2 - t_1$.

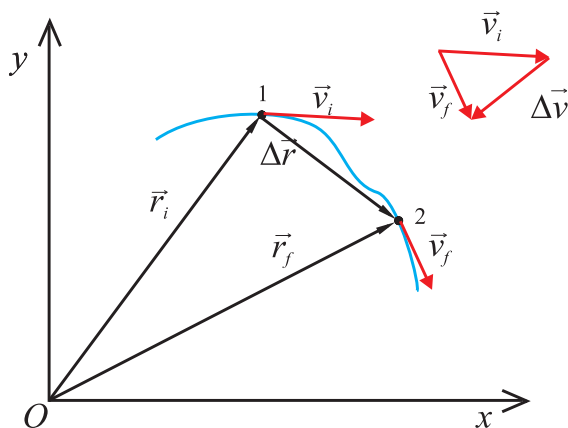
1.6 Ubrzanje u diferencijalnoj formi

Pretpostavimo da se čestica kreće duž neke putanje od jedne do druge tačke u prostoru, pri čemu se njena brzina menja od neke početne vrednosti \vec{v}_i (u momentu vremena t_i) do finalne vrednosti \vec{v}_f u momentu vremena t_f . Poznavanje trenutnih brzina u tim dvema tačkama omogućuje nam da odredimo srednje ubrzanje čestice.

Srednje ubrzanje čestice, prilikom njenog kretanja od jedne tačke do neke druge, jednako je odnosu promene (priraštaja) brzine čestice $\Delta\vec{v}$ i intervala vremena za koji se ta promena u brzini desila:

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.27)$$

Kako se radi o odnosu vektorske veličine $\Delta\vec{v}$ i skalarne Δt , može se zaključiti da je vektor \vec{a}_{sr} usmeren duž pravca vektora $\Delta\vec{v}$ (slika 1.10). Kako sred-



Slika 1.10: Čestica se kreće od tačke 1 do tačke 2. Njen vektor brzine se menja od \vec{v}_i na \vec{v}_f . Na vektorskom dijagramu, u gornjem desnom delu slike, u pokazano kolika je razlika ova dva vektora $\Delta\vec{v}$.

nje ubrzanje zavisi od intervala vremena za koji je izračunato i menja se tokom kretanja čestice, korisno je definisati trenutno ubrzanje \vec{a} : **Trenutno ubrzanje** je granična vrednost odnosa $\Delta\vec{v}/\Delta t$ kada vremenski interval Δt teži nuli

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \quad (1.28)$$

Drugim rečima, trenutno ubrzanje je (prvi) izvod vektora brzine po vremenu. Imajući u vidu da je brzina takodje (prvi) izvod vektora položaja po vremenu

i kombinujući prethodnu jednačinu sa (1.13), dobija se

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}, \quad (1.29)$$

odnosno

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z. \quad (1.30)$$

Na osnovu ovog izraza se za dekartove komponente ubrzanja

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \quad (1.31)$$

dobija

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (1.32)$$

(komponente ubrzanja su drugi izvodi po vremenu komponenti vektora položaja).

Važno je uočiti da promena brzine može da nastane na dva načina. Prvo, brzina može da se menja po intenzitetu (npr. prilikom kretanja čestice duž prave linije). Drugo, brzina može da se menja po pravcu i smeru a da pri tom po intenzitetu ostane ista (npr. prilikom kretanja u ravni). I naravno, postoji mogućnost da se brzina menja i po intenzitetu i po pravcu i smeru.

Primer 1

Razmotrimo pravolinijsko kretanje duž x ose pri čemu je stalno $x = const$. Kako je čestica nepokretna, priraštaj koordinate Δx je jednak nuli pa su i srednja i trenutna brzina takodje jednake nuli, što je u skladu sa činjenicom da je izvod konstantne funkcije nula.

Primer 2

Čestica se kreće tako da se njena koordinata menja sa vremenom po zakonu $x(t) = Bt + C$, gde su B i C konstantni koeficijenti (x je linearna funkcija vremena). Da bi našli srednju brzinu, odredimo pomeraj Δx , koji je čestica doživela za vreme Δt

$$x + \Delta x = x(t + \Delta t) = B(t + \Delta t) + C = Bt + C + B\Delta t,$$

odakle se vidi da je on $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = B\Delta t$. Na osnovu ovoga je srednja brzina konstantna i jednaka koeficijentu B ,

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = B$$

a trenutna brzina je takodje konstantna

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = B.$$

Kretanje koje se odvija konstantnom brzinom se naziva *ravnomernim*. Ukoliko sa x_i označimo početnu vrednost koordinate, odnosno vrednost koordinate u $t = 0$, lako je videti da ona odgovara konstanti C u izrazu za zavisnost $x(t)$. Pomeraj je sa druge strane $s = x - x_i = Bt$, odnosno

$$s = vt.$$

Primer 3.

Zavisnost koordinate od vremena je $x(t) = At^2 + Bt + C$, gde su A, B i C konstantni koeficijenti (x je kvadratna funkcija vremena t). U ovom slučaju je

$$x(t) + \Delta x = A(t + \Delta t)^2 + B(t + \Delta t) + C = (At^2 + Bt + C) + (2At + B)\Delta t + A\Delta t^2$$

što za srednju brzinu daje

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2At + B + A\Delta t.$$

Može da se primeti da srednja brzina zavisi i od vremenskog trenutka t u kome se određuje ali i od intervala vremena Δt za koji se određuje. U graničnom slučaju, kada Δt teži nuli, poslednji član gornjeg izraza takodje teži nuli pa se za trenutnu brzinu dobija

$$v = 2At + B.$$

Može da se primeti da je trenutna brzina linearna funkcija vremena. Srednje ubrzanje se dobija primenom analogne procedure

$$v + \Delta v = 2A(t + \Delta t) + B = (2At + B) + 2A\Delta t, \quad \Delta v = 2A\Delta t, \quad a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2A,$$

odakle je trenutno ubrzanje

$$a = 2A, \quad (A = \frac{a}{2})$$

konstantno. Reč je dakle o kretanju sa konstantnim ubrzanjem, odnosno o jednakoubrzanom kretanju⁸. Kakav bi bio fizički smisao konstanti koje se

⁸Primeri za ovakvo kretanje su slobodni pad u homogenom polju Zemljine teže u slučaju kada se zanemaruje trenje, i kotrljanje niz strmu ravan (takodje sa zanemarivanjem trenja između tela i podloge.

pojavljaju u zavisnosti koordinate x od vremena? Kao što se vidi iz poslednje relacije konstanta A je jednaka polovini ubrzanja. Ukoliko se uzme da su u početnom trenutku vremena brzina i koordinate bile v_i i x_i lako se dobija da je $B = v_i$ i $C = x_i$, pa je

$$x = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v = v_i + a t,$$

dok je pomeraj $s = x - x_i$

$$s = v_i t + \frac{1}{2} a t^2.$$

1.7 Kinematičke jednačine

Ukoliko je poznata zavisnost vektora položaja čestice od vremena $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$ (konačne jednačine kretanja), onda se primenom jednačina (1.13) i (1.28) mogu dobiti brzina i ubrzanje kao

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.33)$$

1.7.1 Ravnomerno ubrzano kretanje tela u jednoj dimenziji

Kretanje koje se ovako naziva je kretanje dužjednog pravca u prostoru koji ćemo poistovetiti sa x osom, sa konstantnim ubrzanjem $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, odakle sledi da je diferencijal brzine

$$dv_x = a_x dt \quad (1.34)$$

a sama brzina je

$$v_x = \int a_x dt = a_x t + C_1 \quad (1.35)$$

gde je C_1 integraciona konstanta. Vrednost integracione konstante zavisi od početnih uslova kretanja. Ako se uzme da je $v_x = v_{xi}$ u trenutku $t = 0$, tj. u momentu kada smo počeli da posmatramo kretanje, zamenom ovih vrednosti u prethodnu jednačinu se dobija

$$v_{xi} = a_x \cdot 0 + C_1 \quad (1.36)$$

odakle se za traženu konstantu dobija $C_1 = v_{xi}$. Sada jednačina (1.35) poprima poznat oblik zakona promene brzine sa vremenom u slučaju kada se telo ravnomerno ubrzava

$$v_x = v_{xi} + a_x t. \quad (1.37)$$

Zavisnost koordinate x od vremena se može dobiti na osnovu izraza za brzinu $v_x = \frac{dx}{dt}$ odakle je

$$dx = v_x dt \quad (1.38)$$

a x je u tom slučaju integral (uz korišćenje izraza (1.37))

$$x = \int v_x dt = \int (v_{xi} + a_x t) dt, \quad (1.39)$$

odnosno

$$x = \int v_{xi} dt + \int a_x t dt = v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2 + C_2, \quad (1.40)$$

gde je C_2 nova integraciona konstanta. Za nalaženje konstante C_2 iskoristićemo početni uslov $x = x_i$ (gde je x_i koordinata koja opisuje početan/inicijalan položaj) kada je $t = 0$. To daje $C_2 = x_i$, pa je izraz koji opisuje zavisnost koordinate x od vremena, za konstantno ubrzanje

$$x = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2. \quad (1.41)$$

Na osnovu ovog izraza je lako videti da je pomeraj prilikom kretanja od multog trenutka (kada smo počeli da posmatramo kretanje) do vremenskog trenutka t

$$x - x_i = v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2. \quad (1.42)$$

1.7.2 Ravnomerno ubrzano kretanje tela u dve i tri dimenzije

Za početak pokušajmo da opišemo ravnomerno ubrzano kretanje čestice u dve dimenzije prilikom koga je ubrzanje konstantno i po pravcu i smeru i po intenzitetu.

Vektor položaja čestice koja se kreće u xy ravni je⁹

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y. \quad (1.43)$$

Ako je poznata zavisnost vektora položaja od vremena, brzina

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y. \quad (1.44)$$

se može dobiti na osnovu relacije (1.33). Kako je ubrzanje \vec{a} konstantno, konstante su mu i komponente a_x i a_y . Iz tog razloga moguće je primeniti

⁹Pri ovome se veličine x , y i \vec{r} menjaju dok se čestica kreće, a jedinični vektori koordinatnih osa \vec{e}_x i \vec{e}_y ostaju konstantni tokom tog vremena.

odgovarajuće jednačine iz prethodnog paragrafa nezavisno na obe komponente vektora brzine. Tako zamena $v_x = v_{xi} + a_x t$ i $v_y = v_{yi} + a_y t$ u prethodnu jednačinu daje

$$\vec{v} = (v_{xi} + a_x t)\vec{e}_x + (v_{yi} + a_y t)\vec{e}_y = [v_{xi}\vec{e}_x + v_{yi}\vec{e}_y] + [a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y]t, \quad (1.45)$$

što se očigledno može zapisati kao

$$\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{a}t. \quad (1.46)$$

Ovaj izraz pokazuje da je brzina čestice u nekom momentu vremena t jednaka vektorskom zbiru vektora početne brzine \vec{v}_i i dodatnog vektora $\vec{a}t$ koji je posledica konstantnog ubrzavanja čestice tokom kretanja.

Slično, iz jednačine(1.41) se dobija da se x i y koordinate čestice koja se kreće sa konstantnim ubrzanjem, menjaju sa vremenom na sledeći način

$$x = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad y = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2. \quad (1.47)$$

Zamena ovih izraza u jednačinu (1.43) daje

$$\vec{r} = (x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\vec{e}_x + (y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\vec{e}_y, \quad (1.48)$$

što nakon grupisanja članova može da se zapiše kao

$$\vec{r} = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \quad (1.49)$$

Ova jednačina govori da je pomeraj čestice (od početnog trenutka $t = 0$ do nekog trenutka t) $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_i$ vektorska suma pomeraja $\vec{v}_i t$, koji je posledica postojanja početne brzine \vec{v}_i , i pomeraja $\frac{1}{2}\vec{a}t^2$ koji je posledica ravnomernog ubrzavanja čestice.

Na kraju vredi napomenuti da relacije (1.46) i (1.49) ostaju u važnosti i u slučaju kada se kretanje odvija u tri dimenzije, uz uzimanje u obzir činjenice da vektor položaja i brzina sada imaju tri komponente, odnosno da su zadati izrazom

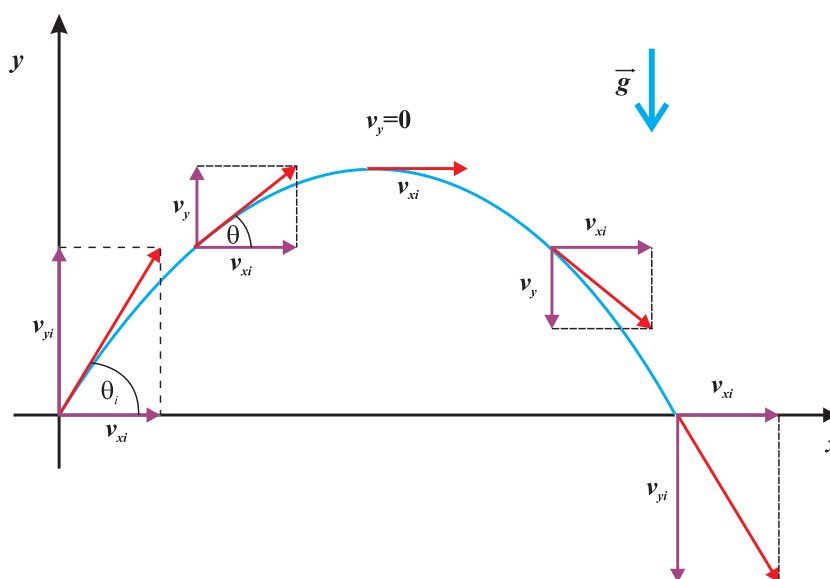
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad (1.50)$$

i

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z. \quad (1.51)$$

1.8 Kosi hitac

Telo koje se, u gravitacionom polju, izbaci pod nekim uglom u odnosu na površinu Zemlje, kreće se po krivolinijskoj putanji. Ovakvo kretanje je relativno lako proanalizirati ako se uzmu u obzir dve pretpostavke: (1) ubrzanje zemljine teže \vec{g} je konstantna veličina u oblasti u kojoj se telo kreće i usmereno je naniže, tj. ka Zemlji¹⁰, (2) zanemaruje se postojanje otpora vazduha. Ukoliko su ispunjene ove dve pretpostavke, može se pokazati da je putanja tela parabola.



Slika 1.11: Parabolična putanja tela izbačenog nekom brzinom v_i i pod nekim uglom θ_i u odnosu na horizontalu.

Izaberimo koordinatni sistem tako da je y osa usmerena naviše. U ovako izabranom koordinatnom sistemu ubrzanje zemljine teže je $\vec{g} = 0 \cdot \vec{e}_x + (-g)\vec{e}_y = -g\vec{e}_y$. Kako je otpor vazduha zanemaren, komponente ubrzanja sa kojim se kreće telo su $a_x = 0$ i $a_y = -g$. Pretpostavimo da je u trenutku $t = 0$ telo izbačeno iz koordinatnog početka ($x_i = y_i = 0$) brzinom \vec{v}_i koja zaklapa ugao θ_i sa horizontom kao što je pokazano na slici 1.11. Sa slike se

¹⁰Ova pretpostavka je tačna ukoliko je oblast u kojoj se telo kreće mala u poredjenju sa poluprečnikom Zemlje ($6,4 \cdot 10^6 m$). Drugim rečima, ovo znači da se Zemlja smatra ravnom u oblasti u kojoj se telo kreće, odnosno u tom delu prostora gravitaciono polje se smatra homogenim.

vidi da su početne koordinate brzine v_{xi} i v_{yi} sa početnim uglom θ_i povezane relacijama

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i, \quad v_{yi} = v_i \sin \theta_i. \quad (1.52)$$

Vektor brzine se menja i po pravcu i po intenzitetu što je rezultat postojanja ubrzanja usmerenog u negativnom smeru y ose. Za to vreme x komponenta brzine ostaje konstantna u vremenu jer duž te ose nema nikakvog ubrzanja, odnosno važe relacije¹¹

$$v_x = v_{xi}, \quad v_y = v_{yi} - gt. \quad (1.53)$$

U skladu sa jednačinom (1.47), uzimajući u obzir da je čestica krenula iz koordinatnog početka i da ima navedene komponente ubrzanja, u proizvoljnom momentu vremena t , njen položaj u ravni je određen sa

$$x = v_{xi}t, \quad y = v_{yi}t + \frac{1}{2}(-g)t^2, \quad (1.54)$$

odnosno

$$x = v_i \cos \theta_i t, \quad y = v_i \sin \theta_i t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.55)$$

Ove dve jednačine predstavljaaju jednačinu trajektorije u takozvanom parametarskom obliku (parametar je vreme t) a da bi je dobili kao zavisnost y od x iz njih treba eliminisati vreme. Kako je iz prve jednačine $t = x/(v_i \cos \theta_i)$, druga postaje

$$y = x \tan \theta_i - \frac{g}{2v_i^2 \cos^2 \theta_i} x^2, \quad (1.56)$$

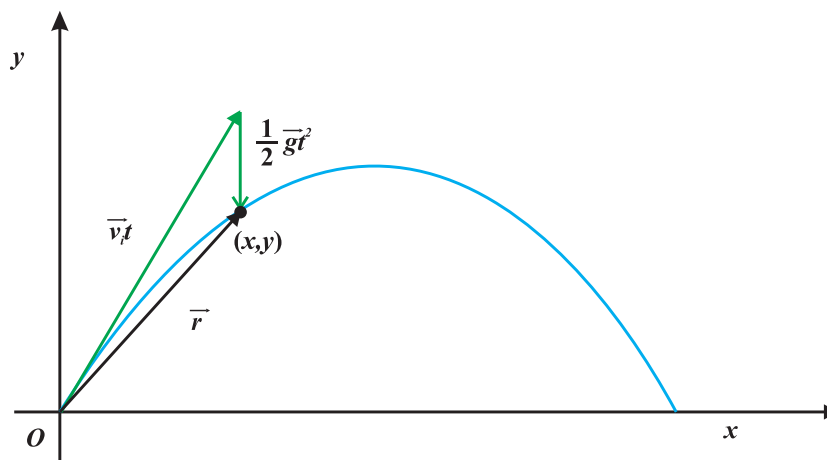
što je jednačina parabole koja prolazi kroz koordinatni početak. Jednačina (1.49) za ovakvo kretanje tela glasi ($\vec{r}_i = 0, \vec{a} = \vec{g}$)

$$\vec{r} = \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \quad (1.57)$$

i prikazana je na slici 1.12. Kao što se vidi sa slike, može se zaključiti da kretanje čestice može da se shvati kao superpozicija kretanja opisanog članom $\vec{v}_i t$ koji odgovara kretanju konstantnom brzinom (bez ubrzanja) i korigovanog članom $\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ izazvanog ubrzanjem Zemljine teže.¹² Može da se zaključi

¹¹Lako je primetiti da y komponenta brzine, koja se stalno menja, u najvišoj tački putanje postaje jednaka nuli.

¹²Drugim rečima, kada ne bi bilo ovog ubrzanja, čestica bi nastavila da se kreće po pravoj liniji u pravcu vektora početne brzine \vec{v}_i . Vertikalni put koji je telo prešlo $\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ je jednako putu koji bi za isto vreme prešlo telo koje slobodno pada u polju Zemljine teže za isti vremenski interval.



Slika 1.12: Vektor položaja materijalne tačke.

da je kretanje tela pri kosom hica superpozicija dva kretanja: (1) kretanja konstantnom brzinom u horizontalnom pravcu i (2) slobodnog padanja po vertikali.

Primer 3. Odredjivanje maksimalne visine i dometa kosog hica. Kada je reč o odredjivanju maksimalne visine koju dostiže telo koje se kreće kao kosi hitac, to se može uraditi odredjivanjem vremena penjanja u tu tačku (u njoj je y komponenta brzine jednaka nuli) na osnovu jednačine (1.53) i zamenom u izraz za promenu y koordinate sa vremenom (1.55) koji u tom slučaju daje baš traženu visinu. Druga mogućnost je da potražimo x koordinatu u kojoj funkcija $y = y(x)$, odredjena relacijom (1.56) ima maksimum. U tu svrhu treba odrediti izvod navedene funkcije

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta_i - \frac{g}{v_i^2 \cos^2 \theta_i} x \quad (1.58)$$

i pronaći tačku x_m u kojoj je on jednak nuli. Lako se vidi da je pethodna relacija jednaka nuli kada je x ima vrednost

$$x_m = \frac{v_i^2}{g} \sin \theta_i \cos \theta_i. \quad (1.59)$$

Vrednost funkcije $y(x)$ u ovoj tački je

$$y_m = y(x_m) = \frac{v_i^2}{2g} \sin^2 \theta_i, \quad (1.60)$$

pa je to i tražena maksimalna visina na koju se može popeti telo. Domet se može dobiti na osnovu simetričnosti trajektorije u odnosu na pravu postavljenu vertikalno na x osu kroz tačku $x = x_m$ pa je domet prosto jednak dvostrukoj vrednosti ove koordinate

$$D = 2x_m = \frac{2v_i^2}{g} \sin \theta_i \cos \theta_i = \frac{v_i^2}{g} \sin 2\theta_i. \quad (1.61)$$

Zadatak 1. Projektil je (u polju zemljine teže) iz oružja ispaljen ka meti tako da napušta oružje istovremeno kada i meta počne da pada. Pokazati da li će, ili ne, projektil da pogodi metu.

1.9 Krivolinijsko kretanje

1.9.1 Kretanje po kružnici konstantnom ugaonom brzinom

ω

Razmotrimo za početak kretanje čestice konstantnom ugaonom brzinom ω po kružnici. Pri ovome je vektor položaja čestice zadat relacijom

$$\vec{r}(t) = r \cos(\omega t) \vec{e}_x + r \sin(\omega t) \vec{e}_y = r(\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y) = r \vec{e}_r, \quad (1.62)$$

gde je

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y \quad (1.63)$$

jedinični vektor duž pravca vektora položaja. Trenutna brzina čestice je sada

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\omega(-\sin(\omega t) \vec{e}_x + \cos(\omega t) \vec{e}_y). \quad (1.64)$$

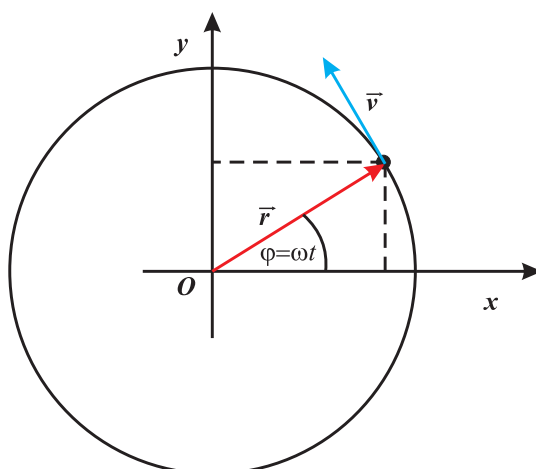
Kako je brzina uvek usmerena po tangenti, može se pisati da je $\vec{v} = v \vec{e}_\tau$, pri čemu važi

$$v = r\omega, \vec{e}_\tau = -\sin(\omega t) \vec{e}_x + \cos(\omega t) \vec{e}_y. \quad (1.65)$$

Treba primetiti da je intenzitet brzine $v = \omega r$ konstantan jer se kretanje odvija konstantnom ugaonom brzinom a telo je stalno na istom rastojanju od koordinatnog početka r . Ubrzanje kod ovakvog tipa kretanja je prema tome jednostavno

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega \vec{e}_\tau) = r\omega \frac{d}{dt}(\vec{e}_\tau) = r\omega^2(-\cos(\omega t) \vec{e}_x - \sin(\omega t) \vec{e}_y) = -\omega^2 \vec{r}. \quad (1.66)$$

Pri ovome je intenzitet ubrzanja konstantan i iznosi $a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$ a usmereno je suprotno od vektora položaja tačke, odnosno ka centru kružne



Slika 1.13:

putanje. Dakle, pri uniformnom kretanju po kružnici ubrzanje je direktno usmereno ka centru kružnice, ima intenzitet v^2/r , gde je v brzina čestice a r je poluprečnik. Ovo ubrzanje se u tom smislu naziva centripetalno ili radijalno.

1.9.2 Tangencijalno i radijalno ubrzanje

Razmotrimo sada kretanje čestice po krivolinijskoj putanji, pri čemu joj se brzina menja i po pravcu i po intenzitetu kao što je pokazano na slici 1.14. Brzina, kao i uvek, ima pravac tangente na putanju ali se pravac vektora ubrzanja \vec{a} menja od tačke do tačke putanje. Taj vektor može da se razloži na dve komponente: radijalnu \vec{a}_r i tangencijalnu komponentu \vec{a}_τ , odnosno

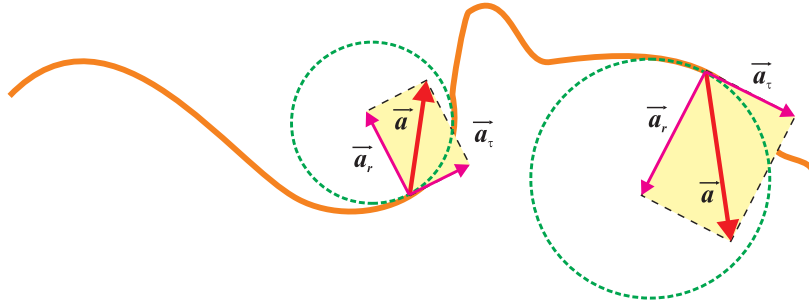
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\tau. \quad (1.67)$$

Tangencijalno ubrzanje opisuje promenu intenziteta brzine čestice. Ono je paralelno vektoru trenutne brzine a intenzitet mu je

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \quad (1.68)$$

Radijalno ubrzanje opisuje promenu pravca vektora brzine a njegov intenzitet je određen ranije kao

$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad (1.69)$$



Slika 1.14: Kretanje čestice duž krive linije koja leži u xy ravni. Promena vektora brzine i po pravcu i po intenzitetu ukazuje na to da ubrzanje \vec{a} ima radijalnu \vec{a}_r i tangencijalnu komponentu \vec{a}_τ .

gde je r poluprečnik krivine u datoj tački. Kako su navedene dve komponente ubrzanja ortogonalne jedna na drugu, intenzitet ukupnog ubrzanje je

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\tau^2}. \quad (1.70)$$

Kao i u slučaju uniformnog kretanja po kružnici, vektor \vec{a}_r , je prilikom neuniformnog kretanja uvek usmeren ka centru krivine (Slika 1.14). Za datu vrednost brzine, a_r je utoliko veće ukoliko je poluprečnik krivine u datoj tački manji a ima manju vrednost u tačkama u kojima je poluprečnik krivine veći, odnosno tamo gde je putanja manje zakrivljena. Smer ubrzanja \vec{a}_τ je ili isti kao i smer brzine \vec{v} (ukoliko ona raste), ili je suprotan od nje (ukoliko se ona smanjuje). Kompletan izraza za ubrzanje je dakle

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau. \quad (1.71)$$

Prilikom uniformnog kretanja po kružnici, prilikom koga je $v = \text{const}$, tangencijalno ubrzanje je nula i ukupno ubrzanje je uvek radijalno, odnosno centripetalno.

Ukoliko se pak smer brzine \vec{v} ne menja, nema radijalnog ubrzanja, odnosno kretanje je jednodimenzionalno a celokupno ubrzanje je tangencijalno.

1.10 Beskonačno male veličine u fizici

Proces graničnog prelaza, pomoću koga se definiše izvod se naziva diferenciranje. Pojam izvoda ima široku primenu u mehanici a i u praktično svim drugim oblastima fizike. Upravo problem određivanja trenutne brzine

proizvoljnog kretanja je i doveo Njutna do uvođenja ovog pojma tako da se on, zajedno sa Lajbnicom, smatra rodonačelnikom diferencijalnog računa. Oznaku za izvode oblika dx/dt , kakve koristimo danas je uveo Lajbnic. U matematici se ovaj simbol smatra celinom a ne odnosom dva "beskonačno mala" priraštaja. U proceduri nalaženja ove veličine se prvo obrazuju odnose konačnih priraštaja $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, pretpostavljajući da priraštaji Δt nisu jednaki nuli. Nakon toga treba nekom pogodnom transformacijom tog odnosa odrediti graničnu vrednost ovog izraza. Drugim rečima, ne sme da se smatra da je prvo napravljen granični prelaz od Δx i Δt na "beskonačno male" veličine dx i dt , koje se nazivaju diferencijalima, pa da je zatim uzet njihov odnos. U stvari, u matematici, pojam izvoda je "stariji" od pojma diferencijala, odnosno, diferencijal promenljive se definiše preko izvoda na sledeći način: $dx = \dot{x}dt$.

Ukoliko nas međjutim interesuje primena matematike u fizici, treba stalno imati u vidu to, da se fizičke veličine dobijaju, u osnovi, kao rezultat merenja, a sva merenja se vrše sa greškom koje ulaze na određeni način u dobijeni rezultat izvršenog merenja. Ovo nam ukazuje na to da je u fizici zapravo nemoguće izvršiti granični prelaz $\Delta t \rightarrow 0$, koji se u matematici uvodi kod definisanja izvoda.

P r i m e r. Merenje brzine kretanja metka kroz vazduh. Zadatak se svodi na merenje rastojanja Δx i intervala vremena Δt za koji metak predje to rastojanje. Ukoliko za interval vremena uzmemo preveliku vrednost, može da se desi da se za to vreme brzina taneta znatno umanja zbog otpora vazduha. Odnos $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, u tom slučaju može da bude znatno manji od brzine taneta u datom momentu vremena. Umanjujući pak, interval vremena Δt , moglo bi da se primeti, da, počev od neke vrednosti, odnos $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, u granicama tačnosti merenja, prestaje da se menja. Dalje smanjivanje vremenskog intervala je besmisleno, jer pri tome ovaj odnos počinje da se menja na neuredjen način, odnosno poprima razne vrednosti, od jako velikih do jako malih.

Razlog leži u tome što je tačnost bilo kog merenja to manja što je manja veličina koja se meri. Na primer, nije naročito teško izmeriti dužinu od oko jedan metar sa tačnošću do jednog milimetra, tj. sa relativnom tačnošću od $1/1000$. Ali izmeriti sa istom relativnom tačnošću rastojanje reda milimetra je znatno teže. Dakle, što je manji vremenski interval Δt , to je manja tačnost sa kojom je izračunat odnos priraštaja $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Iz ovoga sledi da ako interval vremena smanjimo na beskonačno malu veličinu, vrednost pomenutog odnosa neće težiti ni jednoj određenoj vrednosti. Ovo nam ukazuje na to da zbog grešaka koje uvek postoje pri merenju, granični prelaz $\Delta t \rightarrow 0$, ne može da se ostvari u ranije navedenom strogo matematičkom smislu. Drugim rečima, izračunavanje trenutne brzine, odnosno izvoda $v = \dot{x}$, na osnovu

fizičkih merenja je moguće samo približno, i u tom slučaju se izjednačava sa odnosom konačnih priraštaja $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Optimalna vrednost intervala vremena, pri kojem je tačnost izračunavanja trenutne brzine maksimalna, određena je konkretnim uslovima. Mali, ali konačni priraštaji Δx i Δt , čiji odnos sa dovoljnom tačnošću aproksimira izvod \dot{x} , u fizici se nazivaju *fizički beskonačno male veličine*. Označavaju se na potpuno isti način kao i diferencijali i sa njima se operiše kao sa diferencijalima. Na taj način, u fizici pod izvodima se smatra odnos konačnih, ali dovoljno malih priraštaja funkcije i argumenta, a ne granična vrednost tog odnosa.

Ovaj zaključak važi, ne samo za izvode koordinata, već i za izvode svih fizičkih veličina. Pretpostavimo, na primer, da je potrebno odrediti gustinu materije u nekoj tački prostora. U tom slučaju se postupa na sledeći način. Opkoli se data tačka prostora zatvorenom površi koja na taj način obuhvata zapreminu ΔV koja u sebi sadrži tačku u kojoj određujemo gustinu. Označimo sa Δm masu materije koja se nalazi u datoj zapremini. Odnos

$$\rho_{sr} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.72)$$

se naziva *srednjom gustinom materije u zapremini* ΔV . Srednja gustina, uopšteno govoreći, zavisi od oblika zapremine u kojoj se nalazi data tačka (za istu vrednost zapremine kojoj odgovaraju njeni različiti oblici oni mogu da obuhvata različite mase). Da bi eliminisali tu zavisnost, uvodi se (prava) gustina materije koja se dobija putem graničnog prelaza $\Delta V \rightarrow 0$. Kaže se da u tom slučaju srednja gustina ρ_{sr} teži određenoj graničnoj vrednosti ρ , koja se naziva *gustinom materije u datoj tački prostora*

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (1.73)$$

i predstavlja prvi izvod mase po zapremini. Ova veličina na taj način zavisi samo od tačke na koju se odnosi.

Medjutim, ukoliko se u ovoj formuli, granični prelaz shvata u strogo matematičkom smislu, on za realna tela ne može da bude uradjen zbog atomske strukture materije. Pri smanjivanju zapremine u njoj će se pre ili kasnije naći samo mali broj molekula, a ponekad i ni jedan. Osim toga, molekuli vrše termalno kretanje, odnosno jedni molekuli odlaze iz uočene zapremine a neki dolaze u nju. Iz tih razloga se broj molekula u "premalenoj" zapremini brzo i neuredjeno menja u vremenu. Ovo znači da će se pri smanjenju zapremine, odnos $\Delta m/\Delta V$ takodje brzo i neuredjeno menjati od nule, kada unutar izabrane zapremine nema molekula, do vrlo velikih vrednosti kada se u njoj nadju molekuli. Drugim rečima, pri beskonačnom

smanjenju zapremine, odnos $\Delta m/\Delta V$ ne teži određenoj graničnoj vrednosti, pa prilikom određivanja gustine materije, veličine Δm i ΔV ne mogu da budu proizvoljno male. Zapremina mora da ima makroskopske razmere, tj. da sadrži dovoljno veliki broj molekula. Sa druge strane, ova zapremina mora da bude i dovoljno mala da bi se materija sadržana u njoj mogla smatrati približno makroskopski homogenom. Ukoliko su oba zahteva ispunjena, ovako dobijeni odnos $\Delta m/\Delta V$ se u fizici naziva izvodom mase po zapremini. Veličine Δm i ΔV , koje zadovoljavaju navedene uslove, se u fizici nazivaju *fizički beskonačno male* a sa njima se postupa kao sa matematičkim diferencijalima. U matematičkom smislu, tome odgovara zamena realnog tela idealizovanim modelom u kome je masa neprekidno rasposredjena po datom delu prostora u kome se ono nalazi.

Situacija sa integralima je analogna. U matematici je integral određen graničnom vrednošću

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum f(x_i)\Delta x_i. \quad (1.74)$$

Interval (a, b) se pri tom deli na N podintervala $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N$. Dužina svakog od njih se množi vrednošću funkcije u proizvoljnoj tački unutar datog podintervala. Nakon toga se formira suma $\sum f(x_i)\Delta x_i$ i uzima njena granična vrednost kada $N \rightarrow \infty$, što odgovara činjenici da tada dužina svakog podintervala teži nuli. U fizici, zbog grešaka pri merenju, ili pak iz principijelnih razloga (na primer zbog atomske strukture materije), deljenje intervala na podintervale dužine manje od neke određene (čija veličina zavisi od konkretnog slučaja) gubi smisao. Iz tog razloga, granični prelaz $\Delta x_i \rightarrow 0$ ne može da se izvrši do kraja odnosno mora da se prekine na određenoj dužini podintervala. Ovo znači, da u fizici integral nije granična vrednost sume, već suma konačno velikog broja dovoljno malih sabiraka oblika $f(x_i)\Delta x_i$.

Glava 2

Dinamika

U prethodnoj glavi kretanje je opisivano preko veličina kao što su pomeraaj, brzina, ubrzanje, odnosno tražen je oblik zavisnosti ovih veličina od vremena. Pitanja koja su u vezi sa uzajamnim delovanjem tela koja dovode do promene stanja kretanja nisu razmatrana. U ovoj glavi će biti upravo razmatrano ono što izaziva izmene u stanju kretanja čestice a oblast fizike koja se time bavi se zove dinamika. Dva glavna pojma - fizičke veličine koje u vezi s tim treba razmotriti su *sile* koje deluju na objekat i njegova *masa*. Osnovu takozvane klasične¹ ili njutnovske dinamike čine tri zakona koja je pre više od tri stotine godina formulisao Isak Njutn. Njutnovi zakoni nastali su uopštavanjem velikog broja eksperimentalnih rezultata. Mehanika bazirana na njima je nakon formulisanja postigla tako velike uspehe da su mnogi fizičari XIX veka bili ubedjeni u njenu svemogućnost. Smatralo se da je, objasniti neku fizičku pojavu, značilo svesti je na mehaničke procese koji se pokoravaju Njutnovim zakonima. Ipak, sa razvojem nauke su otkrivene nove činjenice koje nisu mogle da se uklope u okvire postojeće teorije. Te činjenice su uspešno objašnjene novim teorijama - specijalnom teorijom relativnosti i kvantnom mehanikom. U specijalnoj teoriji relativnosti (STR), koju je formulisao Albert Ajnštajn 1905. godine, podvrgnute su radikalnom razmatranju njutnovske predstave o prostoru i vremenu. To je dovelo do formulisanja "mehanike velikih brzina" ili, kako se drugačije kaže, relativističke mehanike. Ova nova mehanika, nije međjutim poništila njutnovu mehaniku. Jednačine relativističke mehanike u graničnom slučaju, za brzine male u poredjenju sa brzinom svetlosti, prelaze u jednačine klasične - nerelativističke mehanike. Na taj način je njutnova mehanika ustvari sadržana

¹Pod terminom klasična dinamika misli se na dinamiku makroskopskih tela koja se kreću brzinama koje nisu jako velike, odnosno koje su puno manje od brzine svetlosti.

u ajnštajnovoj i služi, kao i ranije, za opisivanje kretanje tela čija je brzina znatno manja od brzine svetlosti. Analogna je situacija i sa odnosom klasične i kvantne mehanike koja je nastala dvadesetih godina prošlog veka kao rezultat razvoja fizike atoma. Jednačine kvantne mehanike takodje u graničnom slučaju (za tela čije mase znatno prevazilaze mase atoma) daju jednačine klasične - nekvantne mehanike. Iz toga sledi da je i u ovom slučaju njutnova mehanika na određen način sadržana u novoj kvantnoj mehanici.²

2.1 Sile

Verovatno svako ima, u skladu sa iskustvima iz svakodnevnog života, osećaj za pojam sile. Kada odgurnemo prazan tanjir od sebe, mi ustvari delujemo silom na njega. Slično, kada bacimo ili udarimo loptu mi delujemo ustvari nekom silom na nju. U ovim primerima pojam *sila* je u vezi sa nekom mišićnom aktivnošću i sa određenim promenama u stanju kretanja nekog drugog tela na koje se deluje. Sile, međutim ne izazivaju uvek promene u stanju kretanja. Na primer, dok sedite i čitate ovu knjigu, na vas deluje gravitaciona sila a vaše telo svejedno ostaje i dalje nepokretno. Takodje, ukoliko pokušamo da odgurnemo neku veliku stenu ili zid kuće verovatno nećemo uspeti u tome iako sve vreme delujemo silom na dati objekat.

Možemo takodje da se zapitamo da li je način kretanja Meseca oko Zemlje izazvan delovanjem neke sile. Njutn je na ovo i slična pitanja odgovorio tako što je označio silu kao uzrok promene brzine objekta. Na taj način, da bi se održalo uniformno kretanje nekog objekta, nema potrebe za postojanjem sile.³ Kako promene u brzini tela nastaju delovanjem sila, njih treba shvatati kao fizičke veličine (fizičku veličinu) koje telu saopštavaju određeno ubrzanje.

Šta se dešava kada više sila deluje na telo? U tom slučaju, telu se saopštava ubrzanje koje je rezultat ukupnog delovanja svih sila. Kada saberemo vektorski sve sile koje deluju na telo onda se dobija takozvana rezultujuća sila.⁴

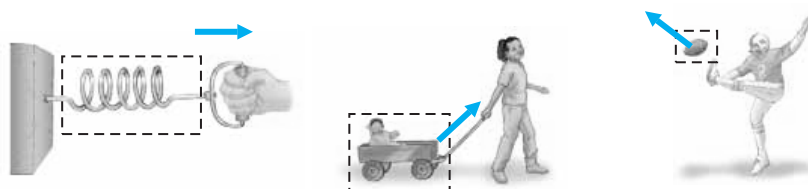
²Ova analiza pokazuje da dalji razvoj naučne misli, nakon formulisanja njutnove mehanike, nije poništio klasičnu mehaniku već je samo ukazao na njenu ograničenost u pogledu primene. Klasična mehanika, bazirana na Njutnovim zakonima, jeste prema tome mehanika tela velikih (u poredjenju sa masom atoma) masa, koja se kreće relativno malim (u poredjenju sa brzinom svetlosti) brzinama.

³Brzina kojom se kreće Mesec nije konstantna jer se on kreće po zakrivljenoj putanji oko Zemlje, što znači da se njegova brzina svakog momenta menja, makar po pravcu. Ove promene u brzini upravo izaziva Zemlja delujući gravitacionom silom na njega.

⁴Na osnovu ovoga je jasno da može da se desi da se brzina tela ne menja čak i kad

Prostom analizom delovanja tela u prirodi se primećuje da ima jako puno sila pa se može postaviti pitanje da li se mogu nekako klasifikovati kao i da li možda medju njima ima odredjen broj osnovnih u smislu da sve ostale mogu da se svedu na njih.

Kada rukom povučemo (dovoljno jako) oprugu prikačenu drugim krajem o npr. zid razvući ćemo je. Ako dovoljno jako povučemo stacionarna kolica da savladamo silu trenja izmedju njih i podloge, uspećemo da ih pokrenemo. Ako šutnemo nogom fudbalsku loptu, prvo ćemo je usled udarca deformisati a onda i naterati da se kreće. Svi ovi primeri su primeri klase sila pod nazivom *kontaktne sile*, obzirom da se dešavaju prilikom kontakta dva objekta.



Slika 2.1: Neki primeri kontaktnih sila. U svim slučajevima sila deluje na telo, uokvireno isprekidanom linijom, putem odredjenih posrednika.

Druga klasa sila su sile koje deluju na objekte preko odgovarajućeg *polja*, pri čemu nema direktnog kontakta tela koja interaguju. Gravitaciona sila je primer takve sile.⁵

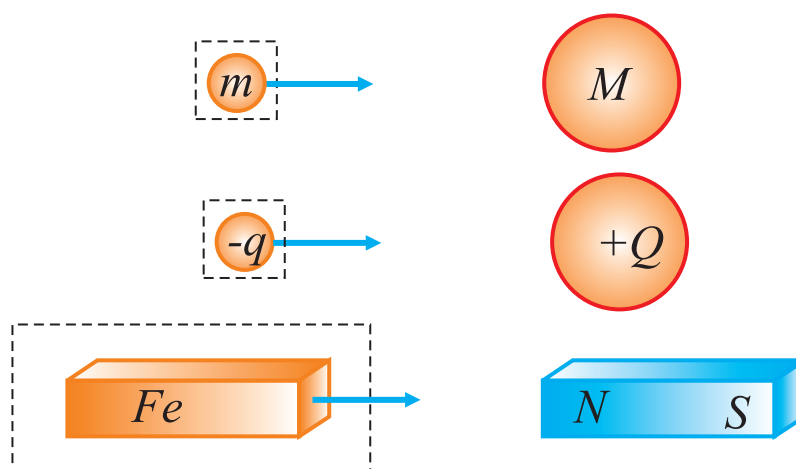
Drugi uobičajen primer za silu čije se delovanje prenosi putem polja je električna sila kojom jedno naelektrisano telo deluje na drugo. To mogu biti na primer elektron i proton u atomu vodonika. Treći primer je delovanje magnetne šipke na komad gvoždja. Sile koje drže na okupu čestice koje čine atomsko jezgro su takodje sile koje deluju preko odgovarajućeg polja ali, za razliku od ostalih pobrojanih, imaju veoma kratak domet. One su interakcija koja je dominantna kada se ove čestice nalaze na rastojanju reda 10^{-15} m.

Kroz istoriju, naučnici su,⁶ bili zbunjeni idejom da tela mogu da deluju jedna na druga a da nisu u kontaktu. Da bi se prevazišao taj, ispostavilo se, konceptualni problem, Majkl Faradej (1791-1867.) je uveo pojam *polja*.

na njega deluje više sila, ukoliko je njihova rezultanta jednaka nuli, tj. ukoliko se njihovo delovanje medjusobno poništava.

⁵Gravitaciona sila nas drži na Zemlji, odgovorna je za egzistenciju i kretanje tela u našem planetnom sistemu a može se reći i da dominira u celom kosmosu.

⁶Uključujući Njutna.



Slika 2.2: Neki primeri sila koje deluju posredstvom polja. Odgovarajuće sile putem svojih polja deluju na isprekidano uokvirena tela.

U skladu sa tim pristupom, kada se objekat 1 nađe u prostoru u nekoj tački P blizu objekta 2, kaže se da objekat 1 interaguje sa objektom 2 (npr. gravitaciono) preko polja koje postoji u tački P kreirano od strane objekta 2. Analogno tome, u tački u kojoj se nalazi objekat 2 takodje postoji polje koje kreira objekat 1. U realnosti, oba objekta kreiraju odgovarajuća polja u prostoru oko sebe.⁷

Treba imati u vidu da razlika između kontaktnih sila i sila čije se delovanje prenosi putem polja nije tako oštra kao što bi moglo da se pomisli na osnovu napred izloženog.

U okviru klasične fizike se srećemo samo sa gravitacionim i elektromagnetnim silama, kao i sa silama trenja i elastičnim silama. Poslednje dve, međutim imaju veze sa međumolekularnim interakcijama koje imaju elektromagnetnu prirodu pa se prema tome svode na ovaj tip interagovanja. Gravitacione i elektromagnetne su pak fundamentalne interakcije jer ne mogu da se svedu na neke druge.

Osim ovih dveju fundamentalnih interakcija postoje još dve i to: jaka nuklearna sila koja deluje između subatomske čestice i slaba nuklearna sila koja se ispoljava prilikom određenih radioaktivnih raspada.

Jake i slabe sile su takozvane kratkodometne (ovo znači da je "lako" osloboditi se njihovog delovanja-treba se samo udaljiti od izvora te sile),

⁷Ukoliko se radi o masivnim i naelektrisanim telima onda ona u prostoru oko sebe stvaraju gravitaciono, električno, a ako se kreću, i magnetno polje.

2.2. PRVI NJUTNOV ZAKON. INERCIJALNI SISTEMI REFERENCE⁴¹

ispoljavaju se na rastojanjima manjim od 10^{-12} cm.

Elektromagnetne i gravitacione sile su pak dalekometne i sa rastojanjem opadaju po zakonu obrnutih kvadrata.

Ako želimo da utvrdimo da li u nekom delu prostora deluje elektromagnetna sila potrebno je u taj deo prostora uneti neko naelektrisanje na osnovu čijeg ponašanja možemo da zaključimo postoje li ili ne ove sile. Takodje je dobro poznato da se one mogu eliminisati takozvanim "Faradejevim kavezom".

Sa gravitacionim silama situacija je malo drugačija - naime one se, u principu, ne mogu poništiti. Medjutim zahvaljujući činjenici da one svim telima saopštavaju jednako ubrzanje, eliminacija gravitacionog polja se može izvršiti lokalno, prelaskom u sistem reference koji "slobodno pada" u gravitacionom polju. Na pojave koje se dešavaju u takvom sistemu reference, homogeno gravitaciono polje ne utiče.

2.2 Prvi Njutnov zakon. Inercijalni sistemi reference

Prvi Njutnov zakon se može formulisati na sledeći način: *Svako telo nalazi se u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja, sve dok ga dejstvo drugih tela ne primora da promeni to stanje.*

Telo koje se nalazi u takvom stanju se naziva slobodnim telom a kretanje slobodnim kretanjem ili kretanjem po inerciji.

Da li u prirodi postoje takva (slobodna) tela? Odgovor glasi **ne**. Slobodna tela su fizička apstrakcija. Možemo medjutim da se zapitamo koji bi to bio kriterijum da utvrdimo da li je telo slobodno ili ne? Odgovor koji se nameće je da je reč o telima koja nisu pod dejstvom sila, tj. koja ne interaguju sa drugim telima.

Iako to do sada nije posebno naglašavano, izbor referentnog sistema u okviru kinematike nije bitan. Drugim rečima svi sistemi reference su kinematički ekvivalentni.

U dinamici to medjutim nije tako. Naime, prvi Njutnov zakon ne važi u svim sistemima reference.⁸ Sistemi reference u kojima važi I Njutnov zakon se nazivaju inercijalnim.⁹ Inercijalnih sistema ima beskonačno mnogo.

⁸Da bi se u ovo uverili dovoljno je da zamislimo dva sistema reference koji se, jedan u odnosu na drugi, kreću sa nekim ubrzanjem. Ukoliko neko telo u odnosu na jedan od njih miruje, u odnosu na drugi će se očigledno kretati sa nekim ubrzanjem.

⁹Sam zakon se naziva zakonom inercije. Sistemi reference u kojim I Njutnov zakon ne važi se nazivaju neinercijalnim.

Bilo koji sistem koji se kreće pravolinijski i ravnomerno u odnosu na neki inercijalni sistem je takodje inercijalan.

2.3 Drugi Njutnov zakon u diferencijalnoj formi

Prvi Njutnov zakon govori o tome šta se dešava sa telom ukoliko na njega ne deluju sile (ili je njihova rezultanta jednaka nuli).¹⁰ Drugi Njutnov zakon daje odgovor na pitanje šta se dešava sa telom ukoliko na njega deluje nenulta rezultujuća sila. Imajući u vidu da se opisivanje kretanje u suštini svodi na određivanje zavisnosti koordinata, kojima opisujemo položaj čestice, od vremena, možemo da se zapitamo kako izgleda jednačina čijim rešavanjem se to može dobiti?

Ako materijalna tačka nije izolovana, usled interakcije sa drugim telima njen impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ se menja (u izolovanom sistemu važi zakon održanja impulsa). Kako opisati promenu impulsa u vremenu? Prirodno je za meru te promene uzeti njegov izvod po vremenu $\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Ono što izaziva tu promenu su interakcije posmatranog tela sa okruženjem. Ta interakcija zavisi od položaja posmatranog tela u odnosu na druga a ponekad i od brzine i može da se opiše nekom funkcijom koordinata i brzina (ustvari relativne brzine datog tela i njegovog relativnog položaja u odnosu na druga tela sa kojima interaguje) $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ koju nazivamo silom koja daje meru te interakcije, odnosno izrazom

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.1)$$

Ovaj izraz ustvari kazuje da je brzina promene impulsa jednaka sili koja deluje na telo i to predstavlja II Njutnov zakon.¹¹ Ova jednačina koja predstavlja matematički izraz II Njutnovog zakona se naziva jednačinom kretanja tela ili **osnovnom jednačinom dinamike**. Ukoliko u nju zamenimo izraz za impuls, $\vec{p} = m\vec{v}$, i izvršimo naznačeno diferenciranje, dobija se

$$\frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (2.2)$$

Za tela kod kojih masa ne zavisi od vremena (prvi sabirak jednak nuli),¹²

¹⁰Kao što je naglašeno u prethodnom paragrafu ono ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja.

¹¹Drugim rečima izvod impulsa materijalne tačke po vremenu je jednak sili koja na nju deluje.

¹²Dve su mogućnosti da ovo bude slučaj i obe će naknadno biti razmotrene - jedna je da se masa tela menja sa vremenom zbog toga što se menja količina supstancije koja čini telo (na primer raketa koja troši gorivo) a druga da se masa tela menja u toku promene njene brzine, što se dešava kada se telo kreće velikom brzinom.

ovaj izraz može da se piše i u sledeća dva vida:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.3)$$

odnosno

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (2.4)$$

iz kojih se vidi da je u tom slučaju proizvod mase tela i njegovog ubrzanja jednak rezultujućoj sili.

Osnovni zadatak mehanike se sastoji, kao što je već više puta napomenuto, u određivanju konkretnog oblika funkcije $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ i u rešavanju na osnovu toga dobijene diferencijalne jednačine

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}) \quad (2.5)$$

čije rešenje je formalnog oblika

$$\vec{p}(t) = \int \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}) dt. \quad (2.6)$$

P r i m e r. Oscilovanje harmonijskog klatna (za male elongacije) bez uračunavanja efekta trenja se može opisati sledećim izrazom

$$x(t) = A \cos \frac{2\pi t}{T} = A \cos \omega t. \quad (2.7)$$

Ako se ovaj izraz diferencira jedan puta po vremenu, dobija se brzina klatna a nalaženjem još jednog izvoda, ubrzanje

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2\pi A}{T} \sin \frac{2\pi t}{T} = -\omega A \sin \omega t, \\ \ddot{x} &= -\left(\frac{2\pi A}{T}\right)^2 \cos \frac{2\pi t}{T} = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x. \end{aligned}$$

Množenjem druge jednačine masom tela m i uvođenjem oznake $k = m\omega^2$ ona postaje

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (2.8)$$

Upoređivanjem ovog izraza sa II Njutnovim zakonom se vidi da je sila koja deluje na harmonijsko klatno oblika $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$ i da ona zavisi samo od elongacije,¹³ odnosno istezanja opruge harmonijskog klatna.¹⁴

¹³Pažljivi čitaoci će u ovome prepoznati Hukov zakon koji daje vezu između veličine deformacije i intenziteta primenjene sile koja je izaziva.

¹⁴Taj rezultat je međutim približan i važi samo ukoliko istezanje opruge nije veliko

2.3.1 Primena drugog Njutnovog zakona na neke konkretne slučajeve

U cilju prostijeg zapisivanja ograničimo se u ovom delu na kretanje materijalne tačke u jednoj dimenziji, i recimo da je duž linije kretanja postavljena x osa. Videli smo do sada da se određivanje konačnih jednačina kretanja, odnosno zavisnosti koordinata koje opisuju položaj tela svodi na rešavanje diferencijalne jednačine tipa $m\ddot{x} = F$. Kako izraz za silu može da zavisi od položaja tela, njegove (relativne) brzine u odnosu na telo sa kojim interaguje i od vremena, potrebno je rešiti jednačinu opšteg oblika

$$m\ddot{x} = F(x, v, t). \quad (2.9)$$

Uopšteno govoreći ova jednačina ne može uvek biti rešena egzaktno po $x(t)$,¹⁵ ali je moguće dobiti njeno rešenje u nekim posebnim slučajevima. Pre nego što izvršimo klasifikovanje situacija u kojima je moguće naći rešenje, pozabavimo se nekim posebnim slučajevima.

Slobodna čestica

Kao što je već rečeno, na slobodnu česticu ili ne deluju sile ili je njihova rezultanta jednaka nuli. U tom slučaju se ona, u skladu sa I Njutnovim zakonom, kreće po inerciji, odnosno ili miruje ili se kreće uniformno pravolinijski. Relacija (2.9) u tom slučaju ima oblik

$$m\ddot{x} = 0, \text{ odnosno } m \frac{dv_x}{dt} = 0. \quad (2.10)$$

Nakon skraćivanja mase, dobija se, da u tom slučaju

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad (2.11)$$

(elastična deformacija). Veličina k koja se pojavljuje u ovim izrazima je poznata pod nazivom koeficijent elastičnosti ili krutost opruge. Prostom ogledom se međjutim može utvrditi da se proces ovakvog oscilovanja, u realnim uslovima, sa vremenom gasi usled trenja-otpora vazduha, odnosno sredine u kojoj se vrši oscilovanje. To naravno znači da diferencijalna jednačina kojom opisujemo ovo kretanje nije kompletna i da joj se zapravo mora dodati još i član koji opisuje otpor sredine, odnosno trenje. Tražena jednačina u tom slučaju ima oblik

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}.$$

¹⁵Precizan iskaz je da ona ne može uvek da se reši analitički ali je uvek moguće rešiti je numerički sa željenom tačnošću.

odnosno da je prvi izvod brzine po vremenu jednak nuli. To znači da je funkcija $v_x(t)$ zapravo jednaka nekoj konstanti C_1 . Kako je trenutna brzina zapravo izvod vektora položaja $\vec{r}(t)$ po vremenu, obzirom da on ima samo x komponentu, može da se piše

$$v_x(t) = C_1, \quad \frac{dx}{dt} = C_1. \quad (2.12)$$

Drugim rečima, potrebno je odrediti funkciju $x(t)$ koja ima takvu osobinu da je njen prvi izvod po vremenu jednak konstanti. Na osnovu toga zaključujemo da je ova funkcija oblika

$$x(t) = C_1 t + C_2, \quad (2.13)$$

što je lako proveriti zamenom ovog izraza u jednačinu (2.12), odnosno nalaženjem njegovog izvoda po vremenu. Dobijeni izraz (2.13) predstavlja *opšte rešenje* jednačine (2.10). Razlog je u tome što u njemu (kao i u izrazu (2.12)) figurišu proizvoljne konstante C_1 i C_2 . Da bi se shvatio njihov smisao potrebno je poći od takozvanih početnih uslova koji važe za posmatrano kretanje. Njega čine početna brzina kretanja (u $t = 0$) i početna koordinata tela. Ukoliko ih označimo sa

$$x(0) = x_i, \quad v_x(0) = v_{xi}, \quad (2.14)$$

izrazi (2.12) i (2.13), za početni vremenski trenutak daju

$$v_{xi} = C_1, \quad x_i = C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2. \quad (2.15)$$

Obzirom da su konstante

$$C_1 = v_{xi}, \quad C_2 = x_i, \quad (2.16)$$

zaključujemo da one imaju smisao početne brzine i početne koordinate čestice. Takozvano *partikularno rešenje* (za date početne uslove) jednačine (2.10) sada glasi

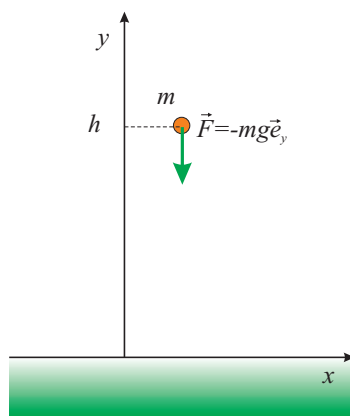
$$x(t) = x_i + v_{xi} t, \quad v_x(t) = v_{xi}, \quad (2.17)$$

odakle vidimo da se čestica kreće konstantnom brzinom pri čemu se njena koordinata uvećava linearno sa vremenom. Ovo je naravno dobro poznat rezultat ali je na njegovom primeru demonstrirana procedura primene II Njutnovog zakona u diferencijalnoj formi.

Čestica u homogenom gravitacionom polju

Pokušajmo sada da primenimo opisanu proceduru na kretanje čestice mase m na malim visinama u polju Zemljine teže. Ukoliko zanemarimo silu kojom se vazduh suprotstavlja kretanju čestice, kao i činjenicu da Zemlja rotira, jedina sila koja deluje na nju deluje je privlačna sila intenziteta mg usmerena ka centru Zemlje. Ukoliko se čestica u početku nalazila na visini h i krenula bez početne brzine (time su zapravo definisani specifični početni uslovi), da bi opisali njeno kretanje gledano iz sistema reference vezanom za Zemlju, dovoljno je rešiti jednačinu (slika)

$$m\ddot{y} = -mg, \text{ odnosno } \frac{dv_y}{dt} = -g. \quad (2.18)$$



Slika 2.3:

U prethodnoj relaciji je izvršeno skraćivanje mase koja je bila sa leve strane jednačine uz ubrzanje i mase na desnoj strani. Verovatno je pravi momenat da se naglasi da se masa u izrazu ma (leva strana gornje jednačine) koristi da izrazi osobine inertnosti tela dok se masa u izrazu mg koristi da ukaže na masu koja učestvuje u gravitacionom interagovanju sa drugim telom (u ovom slučaju Zemljom). U tom smislu se ove "dve" mase nazivaju inertna i gravitaciona i o njima će biti više reči u glavi posvećenoj opštoj teoriji relativnosti a na ovom mestu je dovoljno reći da su ove dve mase, prema rezultatima dosadašnjih eksperimenata, jednake, što i opravdava njihovo skraćivanje.

Predjimo sada na rešavanje (diferencijalne) jednačine koja reprezentuje osnovni zakon dinamike. Prvi korak je, kao i u prethodnom slučaju, da

odredimo brzinu tela kao funkciju vremena čiji izvod po vremenu jednak $-g$. Reč je očigledno o funkciji oblika

$$v_y(t) = -gt + C_1, \quad (2.19)$$

što se lako proverava direktnim difrenciranjem ovog izraza po vremenu. C_1 je, kao i u prethodnom slučaju, proizvoljna konstanta. Kako je $v_y = dy/dt$, u narednom koraku treba da rešimo jednačinu

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \quad (2.20)$$

tj. da odredimo funkciju $y(t)$ čiji je izvod po vremenu jednak $-gt + C_1$. Jednostavno je proveriti da je reč o funkciji

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2, \quad (2.21)$$

gde je C_2 druga proizvoljna konstanta. Dobijeno rešenje predstavlja naravno *opšte rešenje* polazne diferencijalne jednačine, a njegovo *partikularno rešenje* ćemo dobiti uzimanjem u obzir početnih uslova za ovo kretanje

$$y(0) = y_i, \quad v_y(0) = v_{yi}, \quad (2.22)$$

na osnovu kojih se dobija

$$y_i = -g \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2, \quad v_{yi} = -g \cdot 0 + C_1 = C_1. \quad (2.23)$$

Kao što vidimo, konstante imaju isti smisao kao i prethodnom slučaju a partikularno rešenje je, prema tome,

$$y(t) = y_i + v_{yi}t - g\frac{t^2}{2}, \quad v_y(t) = -gt + v_{yi}. \quad (2.24)$$

U posmatranom slučaju smo ove konstante i dodatno odredili zahtevom da telo sa visine h ($y_i = h$) pada bez početne brzine ($v_{yi} = 0$) pa ove jednačine postaju

$$y(t) = h - g\frac{t^2}{2}, \quad v_y(t) = -gt. \quad (2.25)$$

Reč je, kao i u prethodnom slučaju, o dobro poznatim relacijama koje opisuju slobodni pad tela u homogenom gravitacionom polju.

Klasifikacija mogućih slučajeva

Kod rešavanja II Njutnovog zakona u diferencijalnom obliku, je potrebno izvršiti dve integracije. Kod svake od njih je od ključne važnosti odrediti zavisnost sile od odgovarajućih promenljivih. Skoro sva kretanja koja inače razmatramo u mehanici se mogu svesti na tri specijalna slučaja a to su slučajevi u kojima je sila F funkcija samo vremena t , prostorne koordinate x ili pak brzine tela v . Procedura integracije se u određenoj meri razlikuje pa će sva tri biti prikazana u daljem tekstu. Bitno je uočiti da se, da bi integracija bila moguća, funkcije koje zavise od promenljivih moraju naći na istoj strani na kojoj se nalazi i odgovarajući diferencijal (na primer $F(v)$ uz dv , $F(x)$ uz dx , itd.).

- Sila je funkcija samo vremena: $F = F(t)$.

Kako je $a = d^2x/dt^2$, potrebno je dva puta integraliti $a = F/m$ da bi se dobilo $x(t)$. Za početak se $F = ma$ piše kao

$$m \frac{dv}{dt} = F(t), \quad (2.26)$$

pa se onda razdvajaju promenljive i vrši integracija po vremenu obeju strana jednačine

$$mdv = F(t)dt, \quad m \int dv = \int F(t)dt. \quad (2.27)$$

Nakon toga je potrebno, koristeći jednačinu $dx/dt = v$ izvršiti još jednu integraciju da bi se dobila zavisnost $x = x(t)$.

- Sila je funkcija samo koordinate: $F = F(x)$.

U ovom slučaju je pogodno prvo izmeniti oblik na koji je zapisan izvod brzine po vremenu na sledeći način

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx},$$

tako da II Njutnov zakon može da se zapiše kao

$$mv \frac{dv}{dx} = F(x), \quad (2.28)$$

a nakon razdvajanja promenljivih se može izvršiti integracija

$$m \int v dv = \int F(x) dx. \quad (2.29)$$

Dalja procedura je analoga onoj u prethodnom slučaju.

- Sila je funkcija samo brzine: $F = F(v)$.

U ovom slučaju je zgodno razdvajanje promenljivih izvršiti na sledeći način

$$m \frac{dv}{dt} = F(v), \quad m \frac{dv}{F(v)} = dt, \quad (2.30)$$

što omogućuje integraciju

$$m \int \frac{dv}{F(v)} = \int dt, \quad (2.31)$$

nakon koje se postupa kao i u prethodna dva slučaja.

2.3.2 Kauzalnost klasične mehanike

Vektorska jednačina kretanja, kojom se izražava II Njutnov zakon za materijalnu tačku čija masa se ne menja sa vremenom (2.4), se može zapisati u koordinatnoj formi kao

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z, \quad (2.32)$$

što ustvari predstavlja projekciju polazne jednačine $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ na koordinatne ose. Na taj način je data jednačina (2.4) ekvivalentna trima skalarnim diferencijalnim jednačinama (2.32). Svaka od njih je drugog reda.¹⁶ Da bi se lakše proanalizirala situacija i izvukli neki dovoljno opšti zaključci pretpostavimo da na česticu, koja može da se kreće samo po pravoj liniji deluje duž tog pravca sila f konstantna i po intenzitetu i po pravcu. Neka se čestica u početnom vremenskom trenutku nalazila u tači x_i i neka je imala početnu brzinu v_i . Umesto tri skalarne diferencijalne jednačine (2.32) za opisivanje kretanja čestice nam je sada dovoljna samo prva (ukoliko x osu orijentišemo u smeru kretanja čestice)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f. \quad (2.33)$$

Nakon prve integracije po vremenu se dobija

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{f}{m}t + C_1 \quad (2.34)$$

a nakon druge

$$x = \frac{f}{2m}t^2 + C_1t + C_2, \quad (2.35)$$

¹⁶Red diferencijalne jednačine je određen redom najvišeg izvoda koji se pojavljuje u njoj

gde su C_1 i C_2 konstante integracije (lako je proveriti, neposredno zamenom, da je poslednja relacija najopštije rešenje polazne diferencijalne jednačine-opšte rešenje). Na ovom mestu valja uočiti da je broj konstanti koje se pojavljuju u opštem rešenju diferencijalne jednačine jednak njenom redu. Medjutim, da bi rešeje diferencijalne jednačine opisivalo konkretno kretanje kod koga je $x(0) = x_i$ i $v(0) = v_i$, konstante integracije moraju da se odrede upravo iz tih uslova, što dovodi do dveju algebarskih jednačina (u ovom slučaju trivijalnih) po nepoznatim konstantama

$$C_2 = v_i, C_1 = x_i. \quad (2.36)$$

Imajući u vidu ovaj rezultat, izrazi za koordinatu i brzinu čestice u vremenskom trenutku t (2.35) i (2.34) postaju

$$x = \frac{f}{2m}t^2 + v_i t + x_i, \quad (2.37)$$

odnosno

$$v = \frac{f}{m}t + v_i. \quad (2.38)$$

Jednačina (2.35) je takozvano partikularno rešenje polazne diferencijalne jednačine (ovo znači da je ta jednačina, za date početne uslove, jednoznačno rešena). Na ovaj način je rešavanjem polazne diferencijalne jednačine, za date početne uslove, kretanje čestice potpuno određeno. Ova činjenica je u fizici poznata pod terminom kauzalnost¹⁷ klasične mehanike. Primetimo da je polazna diferencijalna jednačina jednačina drugog reda po vremenu a da je za dobijanje njenog partikularnog rešenja potrebno poznavati upravo toliko početnih uslova (dva, za koordinatu i brzinu).

Uopštenje na tri dimenzije.

U ovom slučaju se dobijaju, kao što smo videli, iz jedne vektorske diferencijalne jednačine drugog reda (2.4) tri skalarne diferencijalne jednačine (2.32) takodje drugog reda za čije jednoznačno rešavanje (dobijanje partikularnog rešenja) je potrebno šest veličina koje određuju početne uslove kretanja (tri početne koordinate (x_i, y_i, z_i) i tri komponente početne brzine (v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})).

Uopštenje na sistem od N tela

U ovom slučaju imamo N polaznih vektorskih diferencijalnih jednačina drugog reda što dovodi, nakon projektovanje na koordinatne ose do $3N$ skalarnih

¹⁷Uzročno-posledična povezanost događaja, odnosno stanja sistema. Prethodno stanje (definisano početnim vrednostima koordinate i brzine) jednoznačno određuje potonja.

diferencijalnih jednačina drugog reda. Njihovim rešavanjem se dobija opšte rešenje koje sadrži $6N$ integracionih konstanti koje mogu da se odrede jednoznačno iz isto toliko početnih uslova kojima je zadat početni položaj tela i njegova početna brzina.

2.4 Galilejev princip relativnosti

Iz jednačine (2.4) kojom se izražava drugi Njutnov zakon se vidi da ona nema isti vid u svakom sistemu reference iz prostog razloga što ubrzanje nije isto u sistemima reference koji se kreću jedni u odnosu na druge ubrzano. Što se tiče izraza za silu, on bi trebao da ima isti oblik jer zavisi samo od relativnog položaja i relativnih brzina a to su veličine koje ne zavise od izbora sistema reference. U svakom slučaju iz ovoga se vidi da drugi Njutnov zakon zavisi od izbora sistema reference i da sasvim sigurno nije isti u sistemima koji se kreću ubrzano.

Neka je sa S označen inercijalni sistem reference a sa S' neki drugi inercijalni sistem koji se u odnosu na prvi kreće translatorsno konstantnom brzinom \vec{V} . Neka je poznato kretanje materijalne tačke u odnosu na prvi sistem. Postavlja se pitanje kako odrediti njeno kretanje u odnosu na drugi sistem kao i da li je ono u nekoj vezi sa kretanjem u odnosu na prvi sistem reference. Zadatak se ustvari sastoji u nalaženju formula koje daju vezu između koordinata (x', y', z') koje opisuju kretanje tačke u sistemu S' sa koordinatama (x, y, z) u sistemu S u datom momentu vremena.

Radi jednostavnosti ćemo pretpostaviti da su odgovarajuće koordinatne ose međusobno paralelne i da su oba koordinatna početka bila na istom mestu, tj. da su se sistemi potpuno poklapali u trenutku $t = 0s$. Osim toga, može se smatrati da je brzina \vec{V} paralelna x osi¹⁸.

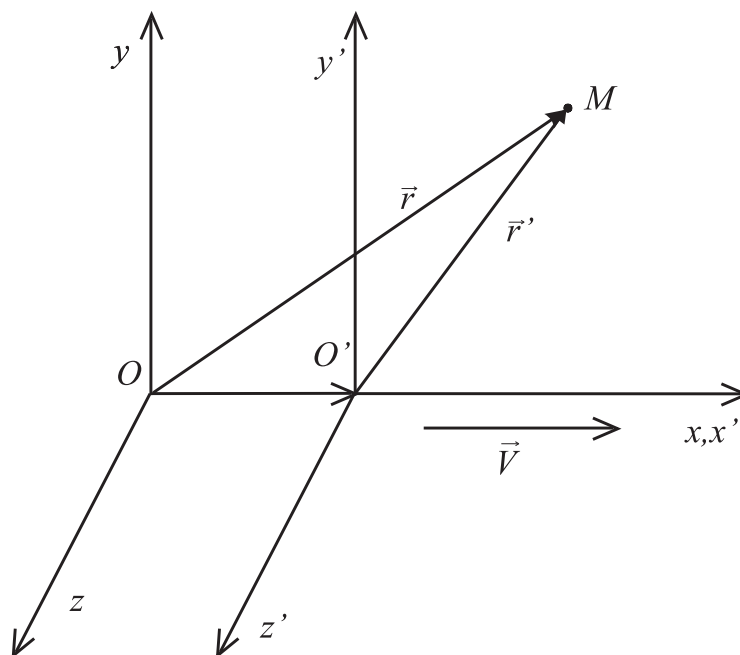
Neka se u momentu vremena t čestica našla u položaju označenom sa M . Tada je $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$. Za navedeno vreme, koordinatni početak drugog sistema je iz položaja O prešao u položaj O' , pri čemu je $\vec{OO'} = \vec{V}t'$, što dovodi do relacije¹⁹

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t', \quad t = t', \quad (2.39)$$

gde su \vec{r} i \vec{r}' vektori položaja materijalne tačke u jednom, odnosno drugom

¹⁸Ove pretpostavke ne umanjuju opštost zaključaka koji će slediti, zato što prelaz na opšte formule može da se izvrši dopunskom translacijom koordinatnog početka (u neku drugu tačku) i rotacijom koordinatnih osa.

¹⁹Vreme u njutnovoju mehanici je apsolutno.



Slika 2.4:

sistemu reference. Projekcije ovog izraza na koordinatne ose su:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (2.40)$$

Odgovarajuća inverzna transformacija je

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t', \quad t' = t, \quad (2.41)$$

odnosno

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (2.42)$$

Ove formule predstavljaju rešenje postavljenog zadatka. One se zovu Galilejeve transformacije. Formulama za transformaciju prostornih koordinata je pridružena i formula $t = t'$ da bi se eksplicitno istakla činjenica da je u nerelativističkoj kinematici vreme apsolutno, tj. ne transformiše se pri prelasku iz jednog u drugi sistem reference.

Diferenciranje izraza za Galilejeve transformacije jednom po vremenu²⁰ daje

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V}, \quad (2.43)$$

²⁰Kako je $t = t'$ onda je svedjedno da li se izvodi traže po vremenu merenom iz S ili S' .

odnosno

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \quad (2.44)$$

gde je sa \vec{v} , označena brzina materijalne tačke u sistemu S , a sa \vec{v}' u sistemu S' . Dobijena formula predstavlja takozvani nerelativistički zakon sabiranja brzina.

Ispisan po komponentama, ovaj izraz prelazi u

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z, \quad (2.45)$$

odnosno

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z. \quad (2.46)$$

Diferenciranjem izraza (2.44) još jednom po vremenu, imajući u vidu da je brzina kretanja drugog sistema reference konstantna, dobija se

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}, \quad (2.47)$$

odnosno

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (2.48)$$

Ovde je \vec{a} , ubrzanje materijalne tačke u sistemu S , a \vec{a}' u sistemu S' i ove dve veličine su jednake u oba sistema reference. Drugim rečima ubrzanje je invarijantno u odnosu na Galilejeve transformacije. Kako je izraz za silu isti u oba sistema reference može da se zaključi da je drugi Njutnov zakon ima isti oblik u oba sistema reference, tj.

$$m\vec{a}' = \vec{F}' \quad (2.49)$$

uz uslove da je $\vec{a} = \vec{a}'$ i $\vec{F} = \vec{F}'$. Jednačine koje ostaju neizmenjene pri prelasku od jednog sistema reference na drugi se nazivaju invarijantnim. Na taj način, jednačine Njutnove mehanike su invarijantne u odnosu na Galilejeve transformacije. Iz ovog principa zapravo sledi potpuna ravnopravnost svih inercijalnih sistema reference.

Da li iz ovoga može da se zaključi da jedno isto kretanje izgleda isto u svim sistemima reference? Odgovor je ne! Kretanje tela koja padne sa stola koji se nalazi u vagonu koji se kreće jednoliko je pravolinijsko ako se gleda u odnosu na vagon. To isto kretanje, ukoliko se gleda iz sistema reference koji je vezan za prugu je parabolično iako su Njutnovi zakoni isti u oba sistema reference! Zašto je to tako? Kretanje izgleda različito jer je drugi Njutnov zakon (osnovni zakon dinamike) izražen takozvanom diferencijalnom jednačinom koja sama po sebi nije dovoljna da se kretanje u

potpunosti odredi. Da bi kretanje moglo da se odredi na jedinstven način, ovim jednačinama moraju da se dodaju i takozvani početni uslovi, tj. da se odredi početni položaj tela i početna brzina. Ovi podaci služe da se, u toku procesa rešavanja diferencijalnih jednačina, pomoću njih odrede konstante integracije koje se tom prilikom pojavljuju. U navedenom primeru diferencijalna jednačina je ista u oba sistema reference ali su upravo početni uslovi različiti. U sistemu reference vezanom za vagon, telo pada sa stola bez početne brzine, tj. ona je u tom slučaju jednaka nuli. U drugom sistemu reference, telo ima početnu brzinu u horizontalnom pravcu i ona je jednaka brzini vagona.

2.4.1 Primeri primene Galilejevog principa relativnosti

Da bi se shvatio značaj Galilejevog principa relativnosti analiziraćemo rezultate primene odgovarajućih transformacija na nekoliko primera koje smo već razmatrali u prethodnom poglavlju. Drugim rečima pokušaćemo da povežemo opisivanje kretanja istog sistema iz dva različita inercijalna sistema reference koji se nalaze u relativnom kretanju.

Slobodna čestica

Za kretanje slobodne čestice su dobijene relacije (2.17). Pretpostavimo da su ovo rešenja koja važe kada se njeno kretanje posmatra i opisuje iz nekog inercijalnog sistema S' u odnosu na koji se ona kreće početnom brzinom v'_{xi} koja ostaje sve vreme konstantna. U tom slučaju će ove jednačine glasiti

$$x'(t) = x'_i + v'_{xi}t, \quad v'_x(t) = v'_{xi}. \quad (2.50)$$

U skladu sa relacijama (2.40) i (2.45) one će u inercijalnom sistemu S , u odnosu na koji se sistem S' udaljava brzinom $\vec{V} = V\vec{e}_x$, imati oblik

$$x(t) = x'_i + v'_{xi}t + Vt = x'_i + (v'_{xi} + V)t, \quad v_x(t) = v'_{xi} + V. \quad (2.51)$$

Iz njih se može zaključiti da će i gledano iz ovog inercijalnog sistema reference kretanje čestice biti slobodno ali sa brzinom koja je jednaka zbiru brzina čestice u odnosu na sistem S' i brzine sistema S' u odnosu na S . Drugim rečima kretanje koje se odvija po inerciji u jednom inercijalnom sistemu reference će se odvijati takodje po inerciji gledano iz ma kog drugog inercijalnog sistema reference, ali sa nekom drugom brzinom na koju utiče brzina relativnog kretanja ova dva sistema.

Interesantno je uočiti da će II Njutnov zakon imati potpuno isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference, odnosno glasiće

$$m\ddot{x}' = 0, \quad m\ddot{x} = 0,$$

i imaće isto opšte rešenje, oblika (2.13), ali će partikularno, koje zavisi od početnih uslova, obzirom da se oni razlikuju, biti različito, što će dovesti do toga da *putanja tela* zavisi od toga iz kog sistema reference se njegovo kretanje posmatra. Ova činjenica će biti jasnija u narednom primeru.

Čestica u homogenom gravitacionom polju

Pretpostavimo da je kretanje čestice mase m u homogenom gravitacionom polju posmatrano i opisivano iz nekog sistema S' , pa će odgovarajuće jednačine biti

$$y'(t) = h - g\frac{t^2}{2}, \quad v'_y(t) = -gt. \quad (2.52)$$

Jednačine koje opisuju kretanje iste čestice gledano iz inercijalnog sistema S u odnosu na koji se sistem S' kreće uniformno duž x ose će, u skladu sa (2.40) i (2.45), biti

$$y(t) = h - g\frac{t^2}{2}, \quad v_y(t) = -gt. \quad (2.53)$$

Ove jednačine su potpuno iste kao i jednačine koje opisuju kretanje duž y ose u sistemu S' . Razlog je jednostavan, sistem S' se kreće duž x ose tako da i ne treba očekivati promene kretanja koje se odvija pod pravim uglom u odnosu na nju. Ako malo bolje razmotrimo kretanje u sistemu S' videćemo da smo mi zapravo u potpunosti ignorisali projekciju vektorskog oblika II Njutnovog zakona na x osu jer je ona glasila

$$m\ddot{x}' = 0.$$

Kako je reč o slobodnom kretanju, rešenje je dato relacijama (2.50) ali sada je početni uslov za brzinu $v'_{xi} = 0$ dok je početna vrednost x' koordinate x'_i . Na osnovu Galilejevih transformacija odgovarajuće jednačine u sistemu S glase

$$x(t) = x'_i + Vt, \quad v_x(t) = V. \quad (2.54)$$

Da bi uprostiti dalja razmatranja pretpostavimo da se u sistemu S' telo kreće duž y' ose, što znači da mu je x' koordinata stalno jednaka nuli. U tom slučaju prethodna jednačina postaje

$$x(t) = Vt, \quad v_x(t) = V. \quad (2.55)$$

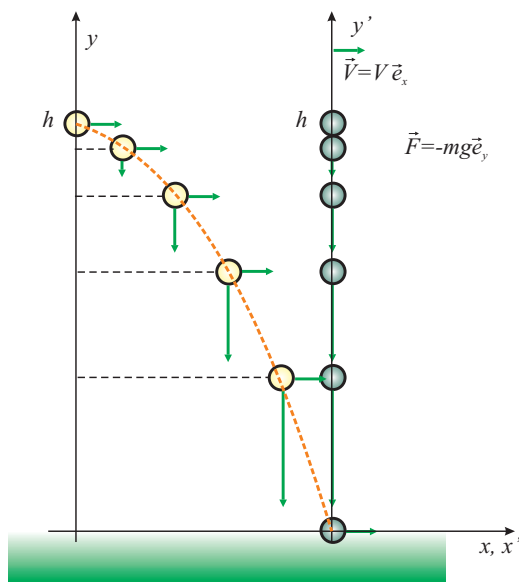
Putanja posmatranog tela u sistemu S' je očigledno prava linija a da bi dobili njen oblik u sistemu S potrebno je naći vezu x i y koordinate koje opisuju njegovo kretanje. One su date relacijama (2.54) i (2.55), odnosno

$$x(t) = Vt, \quad y(t) = h - g\frac{t^2}{2}, \quad (2.56)$$

odakle se vidi da je zanjihovo povezivanje zapravo potrebno eliminisati vreme. Najjednostavnije je iz jednačine $x(t) = Vt$ izraziti vreme kao $t = x/V$ i zameniti u drugi. Lako se vidi da se dobija

$$y = h - \frac{g}{2V^2}x^2, \quad (2.57)$$

što predstavlja jednačinu parabole (slika 2.5).



Slika 2.5: U svim ISR je ista sila i Njutnovi zakoni ali trajektorija tela zavisi od relativnog kretanja sistema.

Ovaj primer jasno ilustruje ravnopravnost inercijalnih sistema reference koja sledi iz Galilejevog principa relativnosti. Prema njemu osnovni zakon dinamike ima isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference (ista je sila i ubrzanje) ali putanja tela, čiji oblik zavisi od zavisnosti koordinata od vremena koje opet zavise od početnih uslova koja za kretanje važe u datom sistemu reference, ne mora da bude ista.

2.5 Zakon održanja impulsa i III Njutnov zakon

Razmotrimo zatvoren sistem, koji se sastoji od dve interagujuće materijalne tačke. Kao što je dobro poznato, u tom slučaju važi zakon održanja impulsa, oblika

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}, \quad (2.58)$$

koji govori o tome da se ukupan impuls takvog sistema ne menja sa vremenom. Diferenciranjem ove relacije jedan puta po vremenu, dobija se

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0, \quad (2.59)$$

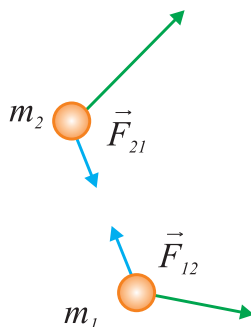
što na osnovu II Njutnovog zakona (2.1) daje

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0, \quad (2.60)$$

odnosno

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.61)$$

U ovim izrazima su \vec{F}_{12} i \vec{F}_{21} sile kojima materijalne tačke deluju jedna



Slika 2.6:

na drugu.²¹ Formula (2.60) i (2.61) predstavljaju matematički iskaz trećeg Njutnovog zakona²²: *Sile interakcije dveju materijalnih tačaka su jednake po intenzitetu, deluju duž pravca koji ih spaja i suprotnog su smera.*

²¹Ovo mogu biti na primer sile koje se javljaju usled gravitacione interakcije ove dve čestice.

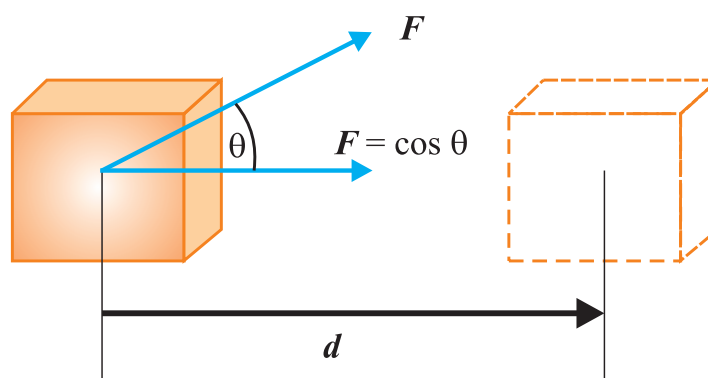
²²Treći Njutnov zakon ne važi uvek. U potpunosti važi samo u slučajevima kontaktnih interakcija, tj. kada se tela koja interaguju nalaze u neposrednom dodiru, kao i u slučaju da su tela koja interaguju nalaze na nekom rastojanju ali u *stanju mirovanja*.

2.6 Rad

U ovom poglavlju će biti prvo uveden koncept rada izvršenog od strane neke sile na nekom telu.

Skoro sve fizičke veličine koje su do sada pomenute (brzina, ubrzanje, sila, ...) imaju isti smisao u fizici kao i u svakodnevnom životu. Ovde će biti obradjen *rad* koji u fizici ima smisao koji je ponekad različit od onog u svakodnevnom životu.

2.6.1 Rad konstantne sile



Slika 2.7:

Da bi razumeli na šta se misli pod pojmom *rad* u fizici, proanalizirajmo situaciju u kojoj se silama jednakog intenziteta pod različitim uglovima deluje na telo u pokušaju da se ono pomeri. Ukoliko nas zanima koliko je sila efikasna u pomeranju tela jasno je da moramo da, osim intenziteta, uzmemo u obzir i pravac delovanja sile. Lako se takodje dolazi do zaključiti da je za pomeranje tela na dužem putu potrebno izvršiti veći *rad*. Sledeća definicija ove fizičke veličine je u skladu sa navedenom analizom: *Rad A izvršen na objektu, od strane konstantne sile je jednak proizvodu komponente sile u pravcu kretanja tela i rastojanja na koje je sila pomerila telo*

$$A = Fd \cos \theta. \quad (2.62)$$

Razlika između navedeno i intuitivnog shvatanja rada se lako uočava ukoliko proanaliziramo izvršeni rad prilikom držanja u rukama nekog teškog predmeta određeno vreme. Na kraju datog vremenskog intervala prirodno će se javiti osećaj umora u mišićima iako predmet nije pomeren. U skladu sa

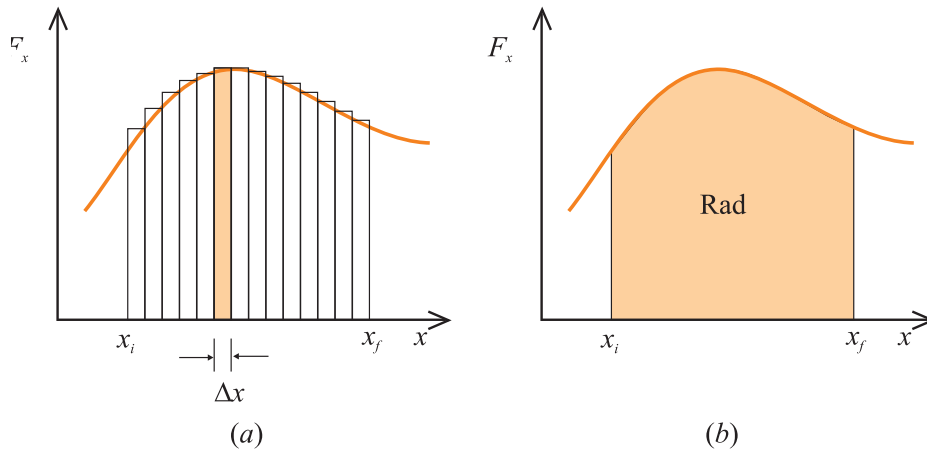
gore navednom definicijom rada nikakav rad međjutim nije izvršen. Mi smo delovali nekom silom na dati predmet ali kako on nije pomeren sa mesta na kome se nalazio na početku posmatranja, rad nije izvršen.²³

Na osnovu jednačine (2.62), rad koji se izvrši nad telom je jednak nuli kada sila deluje pod pravim uglom u odnosu na pravac duž koga telo može da se pomera.²⁴ Takodje se može zaključiti da znak rada zavisi od ugla između pomeraja²⁵ \vec{d} i sile \vec{F} . Tako je rad sile koja podiže telo u vis, u polju zemljine teže, pozitivan jer su smer sile i smer pomeraja isti. Ukoliko nas u ovom istom primeru kretanja zanima rad gravitacione sile, lako se zaključuje da je on negativna jer je sila suprotno usmerena od pomeraja. Na kraju zaključimo da rad konstante sile može da se, na osnovu definicije skalarnog proizvoda, zapiše kao

$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}, \quad (2.63)$$

gde je sa $\Delta\vec{r}$ označen vektor pomeraja $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

2.6.2 Rad sile koja nije konstantna



Slika 2.8:

Posmatrajmo česticu koja se pomera duž x ose pod dejtvom sile koja nije konstantna. Neka se čestica pri tome pomera u smeru porasta koordinate

²³Ustvari, rad se ipak vrši dok se predmet drži u rukama obzirom da se mišići naizmenično kontrahuju i opuštaju i na taj način deluju na naše ruke. Na taj način je rad izvršen nad našim telom a ne nad predmetom.

²⁴Tada je ugao $\theta = \pi/2$.

²⁵Prisetimo se ovde da je vektor pomeraja $\Delta\vec{r}$ koji je ovde označen sa \vec{d} , jednak $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

od $x = x_i$ do $x = x_f$. U ovom slučaju rad ne može da se piše da se računa na osnovu formule $A = Fd \cos \theta$ jer se postavlja pitanje koju vrednost uzeti za silu obzirom da ona nije konstantna već se menja. Medjutim, može da se postupi slično kao u situaciji kada je tražen izraz za predjeni put kod kretanja koje se ne odvija konstantnom brzinom. Naime, posmatra se mali pomeraj Δx unutar koga se sila može smatrati konstantnom pa je rad izvršen na tom pomeranju

$$\Delta A = F \Delta x, \quad (2.64)$$

što je jednako površini osenčenog dela na slici 2.8(a). Ako se pretpostavi da je kriva zavisnosti sile od predjenog puta podeljena na veliki broj takvih intervala, ukupan rad će približno biti jednak zbiru sabiraka oblika (2.64)

$$A \approx \sum_{x_i}^{x_f} F \Delta x. \quad (2.65)$$

Ako sada pretpostavimo da dimenzija intervala Δx teži nuli, odnosno ukoliko broj intervala teži beskonačnosti, vrednost sume (2.65) teži vrednosti koja je jednaka površini ispod krive zavisnosti sile F od predjenog puta, odnosno integralu (2.64)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F dx. \quad (2.66)$$

Kako je rad sile na pomeranju od x_i do x_f jednak ovoj površini, može se pisati

$$A = \int_{x_i}^{x_f} F dx. \quad (2.67)$$

Ukoliko posmatrana sila deluje pod nekim uglom u odnosu na pomeranje (koje se vrši duž x ose) potrebno je u izraz staviti projekciju sile na x osu, odnosno $F_x = F \cos \theta$ (θ je ugao između pravca sile i pravca duž koga se vrši pomeranje), pa je rad

$$A = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} F \cos \theta dx. \quad (2.68)$$

Prirodna generalizacija dosadašnjih izraza za rad, koja bi se odnosila na rad sile koja nije konstanta na pomeranju tela od tačke određene vektorom položaja \vec{r}_i do tačke određene vektorom \vec{r}_f je

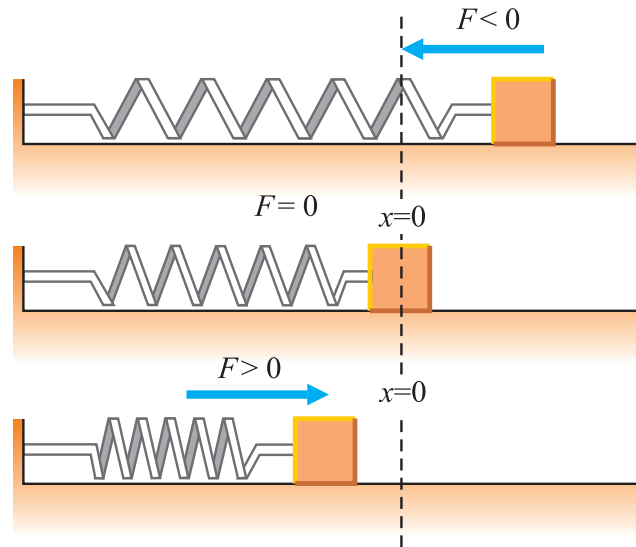
$$A = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.69)$$

U skladu sa time se elementarni rad (rad na elementarnom pomeranju tela $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$, definiše kao

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (2.70)$$

2.6.3 Rad elastične sile

Primer sile koja nije konstantna je sila koja se javlja pri elastičnom istežanju opruge (za relativno mala istežanja u odnosu na situaciju kada je opruga relaksirana). Kako je navedeno ranije ta sila, za slučaj kada se opruga isteže i sabija duž x ose je oblika $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$, odnosno uvek je usmerena ka ravnotežnom položaju ($x = 0$).



Slika 2.9:

Kako je elementaran rad ove sile

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -kx dx, \quad (2.71)$$

ukupna rad na pomeranju tela zakačenog za kraj opruge (Slika 2.9) od tačke x_i u tačku x_f je²⁶

$$A = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2. \quad (2.72)$$

²⁶Uz korišćenje integrala $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ za $n = 1$.

Ukoliko je finalna tačka koordinatni početak, koji je smešten u tačku u kojoj je opruga relaksirana, rad je jednak $A = \frac{1}{2}kx_i^2$. Važno je primetiti da rad ove sile zavisi samo od početne i krajnje tačke u kojima se telo nalazi kao i to da je jednak nuli u slučaju kada se one poklapaju.

2.7 Snaga

Zamislimo da imamo dva automobila jednakih masa ali sa različitim motorima, jedan sa slabijim a drugi sa jačim motorom. Prvo ćemo jednim a onda drugim automobilom da se popnemo na brdo (smatramo da su i polazna i krajnja tačka putanje iste.). Potpuno je očigledno da će automobila će izvršiti isti rad nasuprot gravitacionoj sili ali će onom koji ima jači motor za to trebati kraće vreme. Iz ovog primera je jasno da je sa praktične strane bitno da znamo ne samo rad koji će izvršiti neka mašina već i koliko brzo će ga uraditi. Brzina vršenja rada je nova fizička veličina koja se naziva **snaga**.

Ukoliko neka spoljašnja sila, za vreme Δt izvrši rad A , njena srednja snaga je

$$P_{sr} = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (2.73)$$

Na sličan način kao što smo dolazili do trenutne brzine i ubrzanja, možemo da definišemo **trenutnu snagu** P kao graničnu vrednost

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}, \quad (2.74)$$

gde je sa dA označeno beskonačno mali prira vstaj rada koji se dešava za vreme dt . Koristeći izraz (2.70), izraz za trenutnu snagu postaje

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (2.75)$$

Jedinica za snagu u SI je džul u sekundi (J/s), odnosno *wat* (W).²⁷

2.8 Energija

Energija je jedna od najvažnijih fizičkih veličina i pojmova u fizici i tehnici, zbog svog izuzetnog značaja za dosadašnji i budući razvoj i opstanak ljudskog roda. U svakodnevnom životu o energiji obično razmišljamo kao o gorivu koje koristimo za transport i zagrevanje, o električnoj energiji koju

²⁷Stara jedinica za snagu je konjska snaga (KS) čija je veza sa sadašnjom jedinicom 1 KS=746 W.

koristimo za osvetljavanje i pokretanje mašina, o energiji koju unesemo u organizam kroz hranu, ... Energija ima jako puno oblika u kojima se pojavljuje a uključena je praktično u sve procese u prirodi i našem okruženju. Ona može da se prenosi sa tela na telo, da menja oblike, međutim, ne može da se pojavi niotkuda niti da nestane bez traga. U tom smislu, ona predstavlja jednu od fizičkih veličina koje se očuvavaju (konzervišu) u svim procesima.²⁸ Bez obzira na otkrića raznih oblika energije, eksperimenti su uvek pokazivali da zakon očuvanja ostajen na snazi. Konceptualno veoma bitan doprinos proučavanju raznih oblika energije je dao i Albert Ajnštajn ukazujući na vezu mase i energije,²⁹ odnosno na to da je i masa jedan od oblika energije.

Na osnovu ovoga je jasno da ne postoji dovoljno prosta, a istovremeno dovoljno precizna, definicija energije. Pre svega se moraju imati u vidu njene osnovne osobine a to su da ima razne oblike kao i to da se očuvava u procesima u prirodi. Energiju bi u principu mogli da definišemo kao sposobnost tela da izvrši rad, pri čemu moramo biti oprezni pri ovakvom shvatanju energije, jer moramo imati u vidu da ponekad nije moguće iskoristiti svu energiju koju ima telo svrhu vršenja rada.

2.8.1 Kinetička energija

Tela pod dejstvom sila menjaju svoju brzinu pa se može reći da je rad sile vezan upravo za promenu brzine. Ta veza se može izraziti preko fizičke veličine koja se zove kinetička energija tela.

U cilju lakšeg dobijanja rezultata³⁰ pretpostavimo da se telo kreće u jednoj dimenziji (duž x ose) i da na njega deluje rezultujuća sila F_x . Uzimajući u obzir drugi Njtonov zakon u obliku $ma_x = F_x$, može se pisati

$$A = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} ma_x dx. \quad (2.76)$$

Ukoliko se rezultanta F_x menja duž x ose, menja se i ubrzanje te integraciju u gornjem izrazu nije moguće uraditi u opštem slučaju, te ćemo pribeći sledećem nizu transformacija

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx}. \quad (2.77)$$

²⁸Ova činjenica je zasnovana na eksperimentima a prvi koji je ukazao na nju je bio engleski biolog Majer na osnovu proučavanja toplotnog bilansa živih organizama

²⁹Ova veza je data, verovatno široj javnosti, najpoznatijom relacijom iz fizike, $E = mc^2$.

³⁰Koji je kao što ćemo kasnije videti lako generalizovati.

Zamena ovog izraza za ubrzanje u prethodni izraz za rad dovodi do

$$A = \int_{x_i}^{x_f} mv \frac{dv}{dx} dx = \int_{v_i}^{v_f} mv dv = \int_{v_i}^{v_f} d \left(\frac{mv^2}{2} \right), \quad (2.78)$$

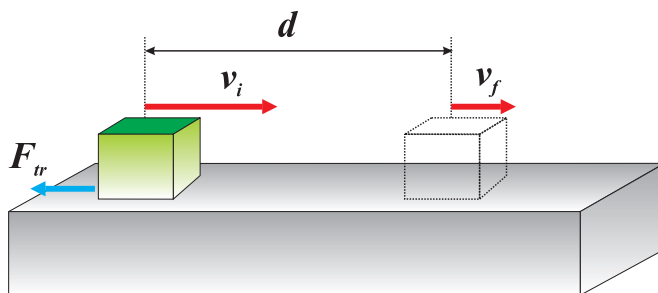
odnosno

$$A = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_i}^{v_f} = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}. \quad (2.79)$$

Veličina $\frac{1}{2}mv^2$ predstavlja energiju koju čestica poseduje usled toga što se kreće i koja se zove **kinetička energija**. Na osnovu poslednje jednačine se može reći da je ukupan rad sila koje deluju na česticu jednak promeni njene kinetičke energije.

Promena kinetičke energije usled delovanja sile trenja

Pretpostavimo da se telo kreće po nekoj horizontalnoj površini koja je takva da ne može da se zanemari postojanje trenja izmedju tela i podloge.



Slika 2.10: Usporavanje tela koje klizi po horizontalnoj površi izazvano gubitkom kinetičke energije.

U tom slučaju, po vetna kinetička energija tela se smanjuje sa vremenom jer stalno mora da se vrši rad na savladavanju sile trenja koja ima smer suprotan smeru kretanja tela. Pretpostavimo da je u toku nekog intervala vremena, telo prešlo rastojanje d (Slika 2.10) pri čemu je na početku kretanja imalo brzinu \vec{v}_i a na kraju \vec{v}_f . Sila koja izaziva usporavanje tela je sila trenja \vec{F}_{tr} koja ima smer suprotan od smera kretanja tela. Obzirom na to da je smer pomeraja suprotan, rad koji je izvršen na savladavanju nje je

$$A = \vec{F}_{tr} \cdot \vec{d} = -F_{tr}d, \quad (2.80)$$

što mora da bude, prema (2.79), jednako promeni kinetičke energije, odnosno

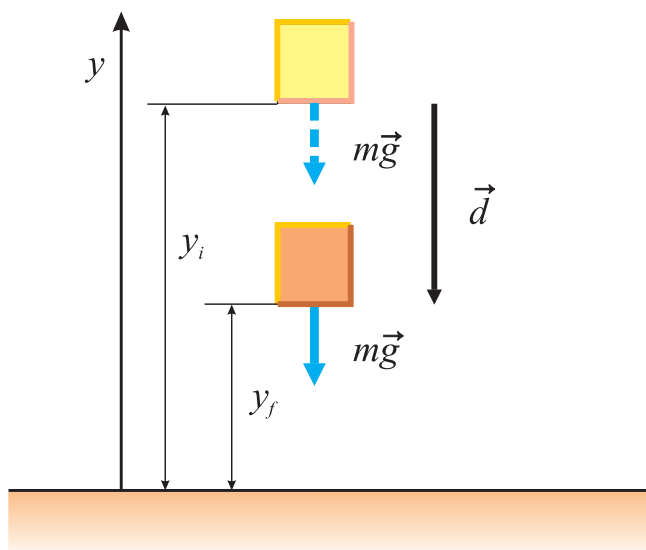
$$-F_{tr}d = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}. \quad (2.81)$$

2.8.2 Potencijalna energija

U prethodnom poglavlju je uvedena kinetička energija, kao energija koju telo poseduje usled svog kretanja. U ovome će biti uvedena druga forma energije pod nazivom potencijalna energija koja je u vezi sa relativnim položajem tela koja interaguju, odnosno sa položajem tela u polju neke sile. Ona se obično označava sa E_p ili sa U , a kako je vezana za relativan položaj tela koja čine sistem, svaka promena položaja tela koja čine sistem, izaziva i promenu potencijalne energije. Potencijalna energija može biti shvaćena kao energija koja je akumulirana i koja može ili da predje u kinetičku ili da se na osnovu nje izvrši neki rad.

Gravitaciona potencijalna energija

Kada neko telo pada ka Zemlji, to se dešava usled toga što Zemlja na njega deluje silom $m\vec{g}$ (za male visine na kojima se može smatrati da je polje Zemljine teže homogeno) u smeru koji se poklapa sa smerom kretanja tela. Gravitaciona sila vrši rad na telu što izaziva povećanje njegove kinetičke energije.



Slika 2.11: Rad sile pri pomeranju kocke (slobodnom padu) u polju Zemljine teže sa visine y_i na y_f .

Zamislimo da je neka kocka, mase m puštena da pada (iz stanja mirovanja). Padajući njoj raste brzina a time i kinetička energija. Sistem kocka-Zemlja

poseduje potencijalnu energiju na kojoj god da se visini kocka nalazi iznad Zemlje. Prilikom pada ta potencijalna energija se konvertuje u kinetičku. Pretpostavimo da je kocka puštena da pada sa visine y_i kao što je to pokazano na slici (2.11). Ako zanemarimo otpor vazduha, jedina sila koja deluje na kocku prilikom njenog pada je Zemljina gravitaciona sila, jednaka $m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$. Rad koji ona izvrši prilikom pomeraja $\vec{d} = (y_f - y_i)\vec{e}_y$ je

$$A_g = m\vec{g} \cdot \vec{d} = (-mg\vec{e}_y) \cdot (y_f - y_i)\vec{e}_y = mgy_i - mgy_f. \quad (2.82)$$

Rad gravitacione sile dakle, zavisi samo od izmene y koordinate tela, odnosno od promene u visini tela³¹. Veličina $U(y) = mgy$ se naziva gravitacionom potencijalnom energijom posmatranog sistema, a rad je

$$A = U_i - U_f = -(U_f - U_i) = -\Delta U. \quad (2.83)$$

Može se reći da je rad gravitacione sile jednak negativnoj promeni u gravitacionoj potencijalnoj energiji između početnog i konačnog položaja tela.

Potencijalna energija kod elastičnih deformacija

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od kocke i opruge (Slika 2.12). Sila kojom opruga deluje na kocku je $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$. Kao što je već izračunato, rad koji izvrši opruga na kocku pomerajući je iz početnog položaja x_i u finalni x_f , je

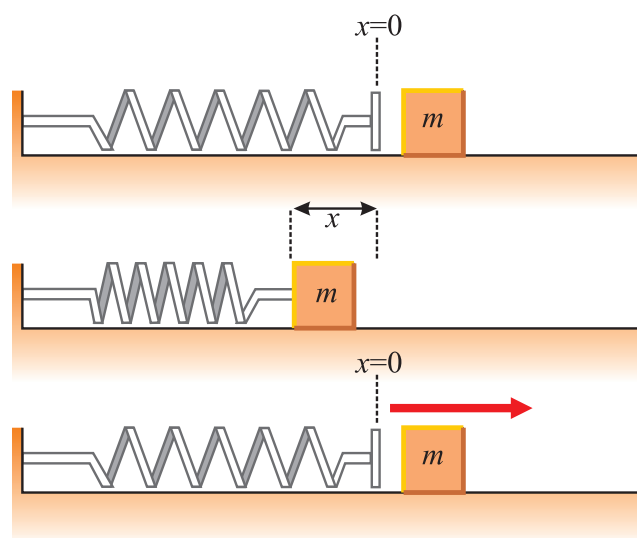
$$A = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2}. \quad (2.84)$$

Potencijalna energija elastične opruge se, u skladu sa time, može uvesti kao

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (2.85)$$

Važno je primetiti da, kao i u prethodnom slučaju, rad elastične sile zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja tela na kojem se vrši, kao i da je za "zatvorenu putanju" (kada se poklope početna i krajnji položaj) jednak nuli. Potencijalna energija elastične deformacije se može shvatiti kao energija koja je akumulirana u deformisanoj opruzi (bilo da je sabijena ili istegnuta). Prvi deo slike 2.12 predstavlja nedeformisanu oprugu na podlozi po kojoj kocka može da klizi bez trenja. Na drugom delu je opruga deformisana tako što je pritisnuta kockom i na taj način sabijena za x . Na trećem delu je

³¹Ukoliko kretanje ima i x komponentu, tada je pomeraj $\vec{d} = (x_f - x_i)\vec{e}_x + (y_f - y_i)\vec{e}_y$ ali rad i dalje ima istu vrednost obzirom da je $-mg\vec{e}_y \cdot (x_f - x_i)\vec{e}_x = 0$.



Slika 2.12: Potencijalna energija sabijene opruge prelazi u kinetičku energiju kocke.

prikazano kretanje kocke koje je izazvano delovanjem elastične sile opruge na nju. Potencijalna energija sabijene opruge je prešla u kinetičku energiju kocke.

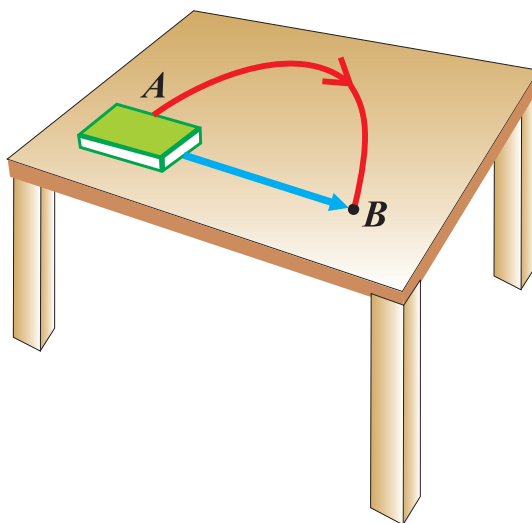
2.8.3 Konzervativne i nekonzervativne sile

Rad gravitacione sile ne zavisi od toga da li telo slobodno pada u polju Zemljine teže ili klizi niz strmu ravan, već zavisi samo od promene položaja tela po visini. Sa druge strane, gubitak energije usled trenja, u skladu sa (2.81), **zavisi** od puta koji je telo prešlo. Drugim rečima konkretna putanja je nebitna kada je reč o radu u polju Zemljine teže (taj rad kao što smo videli zavisi samo od kranje i početne tačke putanje, tj. od njihove "visinske" razlike), dok je veoma bitna kada je reč o gubitku energije usled postojanja sile trenja. Upravo ova razlika služi za klasifikovanje sila u dve grupe: konzervativne i nekonzervativne sile.

Konzervativne sile

Konzervativne sile imaju dve važne karakteristike

1. Njihov rad je nezavisan od oblika putanje po kojoj se čestica kreće od početne do kranje tačke putanje.



Slika 2.13: Gubitak kinetičke energije tela usled trenja zavisi od puta kojim se telo kreće.

- Rad koji izvrši jedna konzervativna sila na putu koji je zatvoren (početna i krajnja tačka putanje su iste) je jednak nuli.

Kao što je lako primetiti, gravitaciona i sila elastičnosti su primeri konzervativnih sila. Obema silama smo pridružili potencijalne energije a rad koji one vrše na nekom telu može da se zapiše kao

$$A = U_i - U_f = -\Delta U, \quad (2.86)$$

ili ako je reč o diferencijalnim promenama energije i elementarnom radu

$$dA = -dU. \quad (2.87)$$

Nekonzervativne sile

2.8.4 Konzervativne sile i potencijalna energija

Pretpostavimo da se čestica kreće duž x ose i neka neka konzervativna sila deluje na česticu deluje komponentom F_x na nju. U prethodnim poglavljima smo videli kako se dolazi do promene potencijalne energije u slučaju da je poznata sila. Sada ćemo videti kako se nalazi sila za slučaj kada je poznata potencijalna energija.

Kao što je poznato, rad konzervativne sile na pomeranju Δx jednak je negativnoj promeni potencijalne energije, odnosno $\Delta A = F_x \Delta x = -\Delta U$.

Ukoliko se pod dejstvom sile čestica pomeri za infinitezimalno rastojanje dx , infinitezimalna promena u potencijalnoj energiji je

$$dU = -F_x dx. \quad (2.88)$$

Odavde se može dobiti da je, u slučaju kretanja u jednoj dimenziji, veza konzervativne sile i potencijalne energije zadata relacijom

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (2.89)$$

Na osnovu ovoga je, u ovom slučaju³² sila, kao vektorska veličina zadata sa

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\vec{e}_x. \quad (2.90)$$

Ovo je veoma važan rezultat koji govori da je **konzervativna sila koja deluje na telo jednaka negativnom izvodu potencijalne energije sistema u odnosu na prostornu koordinatu koju koristimo za opisanje položaja tela.**

Lako je pokazati da u dva primera konzervativnih sila koje smo ranije razmatrali važi ovo tvrdjenje. U slučaju deformisane opruge je potencijalna energija $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, pa je sila

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx. \quad (2.91)$$

U slučaju gravitacione potencijalne energije $U(y) = mgy$, se za silu dobija

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}(mgy) = -mg, \quad (2.92)$$

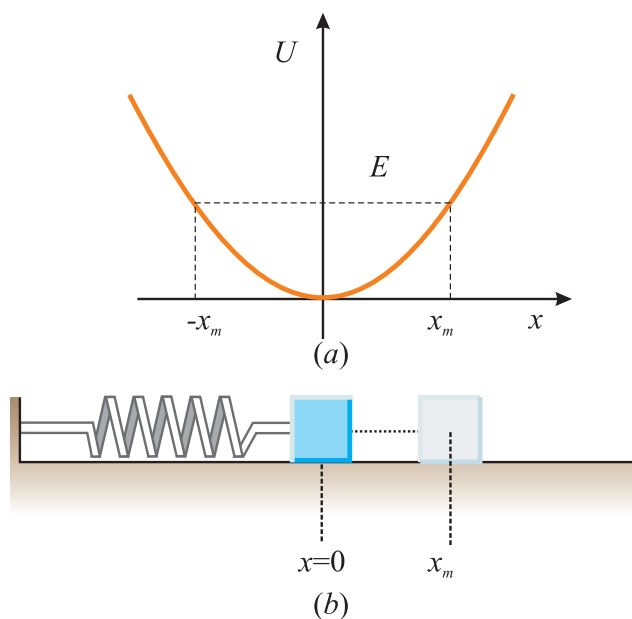
gde se podrazumeva da je y osa usmerena vertikalno naviše.

Može se zaključiti da je potencijalna energija veoma važna funkcija, obzirom da se iz nje (ako je poznata) može lako dobiti izraz za silu. Takođe može da se uoči da je potencijalna energija određena do na konstantan sabirak, što se vidi iz izraza (2.89) jer je sila ista i ukoliko se u tom izrazu traži izvod od $U + C$, gde je $C = const$.

2.8.5 Energijski dijagrami i stabilnost sistema

Kretanje sistema može veoma lepo da se razume kvalitativno (bez konkretnih numeričkih izračunavanja) analiziranjem grafika potencijalne energije u funkciji rastojanja između objekata koji čine sistem.

³²U tri dimenzije, izraz za silu je $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$, gde je $\frac{\partial U}{\partial x}$ takozvani parcijalni izvod.



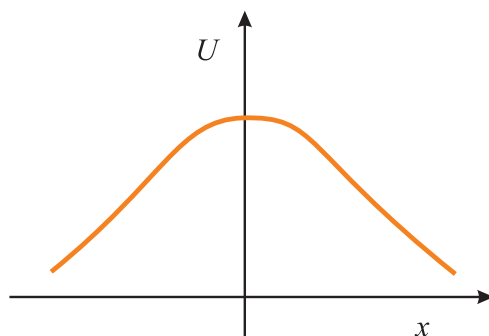
Slika 2.14: (a) Grafik potencijalne energija sistema telo-opruga u zavisnosti od deformacije opruge. (b) Telo osciluje izmedju amplitudnih položaja $\pm x_m$.

Razmotrimo potencijalnu energiju sistema kocka-opruga, oblika $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (Slika 2.14). Sila kojom elastična opruga deluje na telo je

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx. \quad (2.93)$$

Kada se telo nalazi u stanju mirovanja ($x = 0$), tada je $F = 0$, ostaje u njemu ukoliko nema spoljašnjih sila koje bi ga izvele iz tog položaja. Ako spoljašnja sila rastegne oprugu, otklon ela iz ravnotežnog položaja x je pozitivan, $\frac{dU}{dx}$ je takodje pozitivno (tangenta na krivu u toj tački zaklapa oštar ugao sa x osom), dok je sila suprotno usmerena od istezanja, dakle negativna i telo se ubrzava ka položaju određenom sa $x = 0$. Ukoliko spoljašnja sila sabije oprugu, x je negativno, $\frac{dU}{dx}$ je negativno (tangenta na krivu u toj tački zaklapa tup ugao sa x osom), sila je pozitivna, i opet usmerena ka položaju $x = 0$.

Iz ove analize se vidi da je stanje određeno sa $x = 0$ ovog sistema stanje **stabilne ravnoteže**. To se vidi na osnovu toga što bilo kakvo pomeranje tela iz tog položaja rezultira pojavom sile koja je uvek usmerena ka njemu. Uopšteno govoreći položaj stabilne ravnoteže odgovara tački u kojoj funkcija $U(x)$ ima minimum.



Slika 2.15: Grafik zavisnosti $U(x)$ čestice koja u $x = 0$ ima položaj nestabilne ravnoteže.

Razmotrimo sada česticu koja se kreće duž x ose pod dejstvom konzervativne sile F_x , gde je grafik zavisnosti U od x predstavljen na slici 2.15. Za $x = 0$ je sila $F_x = 0$ i telo je u ravnoteži u tom položaju. Međutim, to je položaj **nestabilne/labilne ravnoteže** iz sledećeg razloga: Pretpostavimo da se čestica pomeri na desno ($x > 0$). Kako je u toj oblasti prvi izvod $\frac{dU}{dx} < 0$, sila koja je $F_x = -\frac{dU}{dx}$ je stoga pozitivna i čestica se ubrzava od koordinatnog početka. Ako se umesto toga čestica pomeri na levo ($x < 0$), sila je negativna jer je izvod $\frac{dU}{dx}$ pozitivan i čestica se opet ubrzava u suprotnom smeru od koordinatnog početka. Na osnovu ovoga se vidi da je položaj $x = 0$ položaj nestabilne ravnoteže jer ma kako mali otklon, bilo levo bilo desno, od njega, kao posledicu ima pojavu sile koja teži da telo još više otkloni od položaja ravnoteže. Zapravo sile deluju na telo tako da se ono kreće ka položaju gde je potencijalna energija manja. Može se zaključiti da je **položaj nestabilne ravnoteže odgovara tački u kojoj funkcija $U(x)$ ima maksimalnu vrednost.**

Na kraju, može da se desi da je U konstantno u nekoj oblasti, te je stoga $F_x = 0$. To odgovara položaju **indiferentne ravnoteže**. Mali pomeraj iz takvog položaja nema za posledicu ni pojavu sile koje bi vratile telo u ravnotežni položaj niti onih koje bi ga još više udaljile.³³

Primer 1 Potencijalna energija koja odgovara interakciji dva neutralna atoma u molekulu može biti predstavljena Lennard-Jones potencijalom

$$U(x) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right] \quad (2.94)$$

³³Primer za telo koje je u indiferentnoj ravnoteži je lopta koja se nalazi na ravnom stolu.

gde je x rastojanje izmedju atoma. Funkcija $U(x)$ sadrži dva parametra σ i ϵ koji se odredjuju eksperimentalno. Tipične vrednosti za interakciju dva atoma u molekulu su $\sigma = 0,263$ nm i $\epsilon = 1,51 \times 10^{-22}$ J. (a) Odrediti najverovantije rastojanje izmedju molekula, (b) Odrediti silu F_x kojom jedan atom deluje na drugi u molekulu, (c) Skicirati potencijalnu energiju i silu.

◇ (a) Atomi se nalaze na najverovatnijem rastojanju onda kada su u stabilnoj ravnoteži, a to se dešava kada potencijalna energija ima minimum. Tačka minimuma će se dobiti kada potražimo prvi izvod i izjednačimo ga sa nulom:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\epsilon \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^6 \right] = 4\epsilon \left[\frac{-12\sigma^{12}}{x^{13}} - \frac{-6\sigma^6}{x^7} \right] = 0. \quad (2.95)$$

Rešavanje po x daje za traženo ravnotežno rastojanje izmedju atoma u molekulu $x = \sigma(6)^{1/6} = 2,95 \times 10^{-10}$ m. (b) Pošto atomi formiraju molekul, tražena sila mora da bude privlačna kada se atomi udalje od ravnotežnog položaja a odbojna kada se to rastojanje smanji. Ukoliko ne bi bilo tako, molekul bi se ili sam od sebe dezintegrisao ili bi pak atomi pali jedni na druge. Ovo znači da u tački stabilne ravoteže sila mora da promeni znak, slično kao sila kod elastične opruge. Sila je prema izrazu za potencijal

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = -4\epsilon \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^6 \right] = 4\epsilon \left[\frac{12\sigma^{12}}{x^{13}} - \frac{6\sigma^6}{x^7} \right]. \quad (2.96)$$

Primer 2 Potencijalna energija ima oblik $U(x, y) = 3x^3y - 7x$. Odredi oblik sile koja deluje na telo koje se nalazi u tački određenoj koordinatama (x, y) .

◇ Kako se radi o kretanju u ravni, sila je $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$, pri čemu su komponente

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, F_y = -\frac{dU}{dy},$$

gde prilikom traženja izvoda funkcije $U(x, y)$ po promenljivoj x , treba smatrati da je promenljiva y konstantna i obrnuto. Na taj način se dobija

$$F_x = -9x^2y - 7, F_y = -3x^3.$$

Primer 3 Potencijalna energija sistema je $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2$, gde su k_x, k_y i k_z konstante. Odrediti silu koja deluje na telo u tački (x, y, z)

• Sila je zadata sa $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$, pri čemu je, kao što se lako vidi, u konkretnom slučaju

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}k_x x\vec{e}_x - \frac{1}{2}k_y y^2\vec{e}_y - \frac{1}{2}k_z z\vec{e}_z.$$

2.8.6 Ukupna mehanička energija. Zakon održanja energije

Ukupna mehanička energija

Telo koja podignemo i držimo na visini h iznad površine Zemlje nema kinetičku energiju. Međutim, ono poseduje gravitacionu potencijalnu energiju mgh , odnosno potencijalnu energiju jer se nalazi u polju gravitacione sile. Ako pustimo telo ono će početi da pada, pri čemu mu brzina, počev od nule raste, što znači da mu se potencijalna energija smanjuje, dok kinetička počinje da raste.

Ukupna mehanička energija tela je prema tome zbir kinetičke i potencijalne energije

$$E = E_k + U. \quad (2.97)$$

Kinetička energija se preko impulsa može zapisati kao $E_k = \frac{p^2}{2m}$ a vrlo često se označava i velikim slovom T , tako da ukupnu mehaničku energiju možemo pisati kao

$$E = \frac{p^2}{2m} + U = T + U, \quad (2.98)$$

a kako je potencijalna energija (kada je reč o konzervativnim silama) funkcija od međusobnog prostornog rasporeda tela koja čine sistem (ovo se izražava njihovim vektorima relativnog položaja npr.), ovaj izraz ima oblik

$$E(\vec{p}, \vec{r}) = T(\vec{p}) + U(\vec{r}), \quad (2.99)$$

Zakon održanja mehaničke energije

Ukoliko se zanemari otpor vazduha, prilikom pada tela u polju Zemljine teže, smanjenje potencijalne energije je tačno jednako povećanju kinetičke. Ovo je iskaz zakona održanja mehaničke energije, odnosno **u jednom izolovanom sistemu, koji interaguje samo konzervativnim silama, ukupna mehanička energija ostaje konstantna.**

Generalizacija zakona održanja energije

Ovaj iskaz je dobro poznata činjenica koja je više puta pokazana kada je reč o kretanju tela koja čine sistem u kome nema nekonzervativnih sila. Takodje je dobro poznato da se mehanička energija sistema smanjuje kada su prisutne nekonzervativne sile.

Kao što je poznato iz termodinamike, mehanička energija tela može da se transformiše u energiju koja može biti akumulirana *unutar* samih tela koja čine sistema. Ta energija se naziva *unutrašnja energija*. Na primer, kada telo

klizi po neravnoj površi, gubi mehaničku energiju koja se usled pojave trenja transformiše u unutrašnju koja prelazi delom na telo a delom na površ po kojoj telo klizi, što u konačnom izaziva promenu njihovih temperatura. Ako se pak dublje sagledaju procesi u telima, na atomskom nivou, ispostavlja se da se to što u termodinamici nazivamo unutrašnjom energijom potiče od oscilacija atoma oko ravnotežnih položaja³⁴, što znači da se opet radi o kinetičkoj i potencijalnoj energiji tela, pa se na taj način može reći da ona ostaje očuvana.

Ovo je bio samo jedan primer kako prilikom sve dublje i dublje analize jednog izolovanog sistema, možemo uvek doći do zaključka da se ukupna količina energije ne menja, ukoliko uračunamo sve forme energija. To znači da **energija ne može biti ni stvorena ni uništena. Energija može samo da menja formu od jedne na drugu ali ukupna energija izolovanog sistema ostaje konstantna.** Ukoliko maksimalno generalizujemo ovaj iskaz možemo reći da je **ukupna energija Univerzuma konstantna.** Ovo znači da, ako u jednom delu Univerzuma imamo porast energije, to obavezno znači da je ostatak Univerzuma ostao bez tačno tolikog iznosa energije (u nekoj njenoj formi).

2.9 Teorema o kretanju centra masa

Centar mase ili centar inercije sistema materijalnih tačaka, masa m_1, m_2, \dots, m_N , čiji su položaji, u odnosu na neki referentni sistem, određeni vektorima položaja $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$, je zamišljena tačka čiji je vektor položaja određen relacijom

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{m} \quad (2.100)$$

gde je $m = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ ukupna masa sistema. Ako se ovaj izraz prodiferencira po vremenu i pomnoži masom sistema, dobija se

$$m\dot{\vec{r}}_{CM} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 + \dots + m_N\dot{\vec{r}}_N, \quad (2.101)$$

odnosno

$$m\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N, \quad (2.102)$$

³⁴Zagrevanje tela izaziva intenzivnije oscilovanje atoma oko ravnotežnih položaja, većom brzinom i sa većim otklonom od ravnotežnih položaja.

gde je sa \vec{v}_{CM} označena brzina centra masa sistema. Kako ovaj izraz može da se zapiše kao

$$m\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{p}_{tot}, \quad (2.103)$$

može da se zaključi da je ukupni impuls sistema jednak proizvodu njegove ukupne mase i brzine centra masa. Drugim rečima, ukupan impuls sistema je jednak impulsu jedne čestice mase jednake ukupnoj masi sistema m koja se kreće brzinom centra masa \vec{v}_{CM} . Takodje se može uvesti impuls centra masa kao $\vec{p}_{CM} = m\vec{v}_{CM}$ koji je prema tome jednak ukupnom impulsu sistema. Ako se sada diferencira jednačina (2.102) po vremenu dobija se

$$m \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad (2.104)$$

što se može zapisati kao

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i. \quad (2.105)$$

Imajući u vidu II Njutnov zakon ovaj izraz postaje

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N. \quad (2.106)$$

gde se na desnoj strani relacije nalaze rezultujuće sile koje deluju na odgovarajuće čestice sistema (npr. sa \vec{F}_1 je označena rezultujuća sila koja deluje na prvu česticu, itd.). Te sile se mogu podeliti na unutrašnje (koje potiču od interagovanja posmatrane čestice sa ostalim česticama sistema) i spoljašnje (koje potiču od interagovanja čestica sistema sa telima koja ne pripadaju njemu), pa tako na primer na prvu česticu sistema deluje rezultujuća sila

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1un} + \vec{F}_{1sp} \quad (2.107)$$

što znači da prethodni izraz može da se zapiše kao

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{1in} + \vec{F}_{1sp} + \vec{F}_{2un} + \vec{F}_{2sp} + \dots + \vec{F}_{Nun} + \vec{F}_{Nsp}. \quad (2.108)$$

Kako unutrašnja sila koja deluje npr. na prvu česticu u principu može da potiče od svih preostalih čestica ona je zbir $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N} = \sum_{k \neq 1} \vec{F}_{1k}$, pa je ukupna sila koja deluje na nju

$$\vec{F}_1 = \sum_{k \neq 1} \vec{F}_{1k} + \vec{F}_{1sp}, \quad (2.109)$$

dok je ukupna sila koja deluje na i -tu česticu

$$\vec{F}_i = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_{isp}, \quad (2.110)$$

gde je sa \vec{F}_{ik} označena sila kojom na i -tu česticu deluje k -ta. Analogno tome je \vec{F}_{ki} sila kojom na k -tu česticu deluje i -ta. Prema trećem Njutnovom zakonu ove sile su istog intenziteta i pravca a razlikuju se samo po smeru, odnosno za njih važi $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$. Važno je uočiti da svaka od unutrašnjih sila ("akcija") u prethodnim izrazima ima svoj par ("reakciju"), a pošto one u zbiru daju nulu, na desnoj strani izraza (2.108) ostaju neponištene samo spoljašnje sile, odnosno taj izraz sada glasi

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{isp} = \vec{F}, \quad (2.111)$$

u kome je sa \vec{F} označena rezultanta svih spoljašnjih sila. Drugim rečima proizvod ukupne mase sistema i ubrzanja centra masa jednak je rezultanti spoljašnjih sila. Uporedi li se ovaj iskaz sa II Njutnovim zakonom za jednu česticu, možemo da primetimo sledeće: *Centar mase sistema se kreće kao materijalna tačka, čija masa je jednaka ukupnoj masi celog sistema, pod dejstvom sile koja je jednaka zbiru svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem.* Ovaj iskaz predstavlja teoremu o kretanju centra masa.

Ukoliko je rezultanta spoljašnjih sila jednaka nuli, dobija se

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = m\vec{a}_{CM} = 0, \quad (2.112)$$

pa je

$$\vec{p}_{tot} = m\vec{v}_{CM} = const, \quad (\vec{F} = 0). \quad (2.113)$$

Ovo znači da je ukupan impuls sistema čestica očuvan kada ne postoje spoljašnje sile, odnosno za izolovan sistem čestica i ukupan impuls i brzina centra masa su konstantne tokom vremena.³⁵

Pretpostavimo da posmatramo izolovan sistem koji se sastoji od dve ili više čestica koje su u stanju mirovanja. Centar masa takvog sistema ostaje u stanju mirovanja ukoliko ne postoji delovanje spoljašnjih sila. Zamislimo na primer da čovek stoji na splavu koji se nalazi na vodi i pretpostavimo da su i splav i čovek u početku bili u stanju mirovanja, kako jedan u odnosu na drugi tako i u odnosu na vodu. Ako čovek skoči u horizontalnom pravcu u

³⁵Ovaj iskaz predstavlja generalizaciju zakona održanja impulsa na sistem čestica.

2.10. ODREĐJIVANJE POLOŽAJA CENTRA MASA KRUTIH DELA RAZLIČITOG OBLIKA 77

vodu, centar masa sistema ostaje, prema gornjem iskazu, u stanju mirovanja (ukoliko zanemarimo silu trenja između npr. vode i splava). Takođe je impuls čoveka koji je skočio u vodu jednak po intenzitetu impulsu koji ima splav ali je suprotnog smera.

2.10 Odredjivanje položaja centra masa krutih dela različitog oblika

2.10.1 Centar masa krutog tela

Kruto telo je telo kod koga se uzajamna rastajanja njegovih delova tokom vremena ne menjaju. Ukoliko za jedan takav objekat želimo da primenimo relaciju (2.100) koja važi za sistem čestica, onda izdělamo u mislima kruto telo na veliki broj delića koje smatramo česticama koje su veoma blizu jedna drugoj, toliko blizu da su praktično kontinualno rasporedjene u delu prostora koji zauzima kruto telo. Kako je masa svake od tih "čestica" jednaka Δm_i a nalaze se u tačkama čiji je vektor položaja $\vec{r}_i = x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z$, x koordinata centra masa je približno

$$x_{CM} \approx \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{m}, \quad (2.114)$$

gde je m ukupna masa krutog tela. Izrazi za preostale dve koordinate centra masa y_{CM} i z_{CM} imaju analogan oblik.

Ukoliko broj delića na koje smo izdělili kruto telo teži beskonačnosti suma u ovom izrazu postaje integral po masi

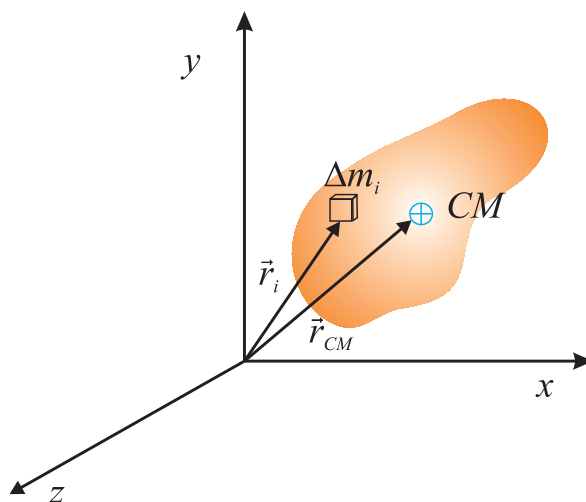
$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{m} = \frac{1}{m} \int x dm, \quad (2.115)$$

a za ostale dve koordinate pri tom važe izrazi

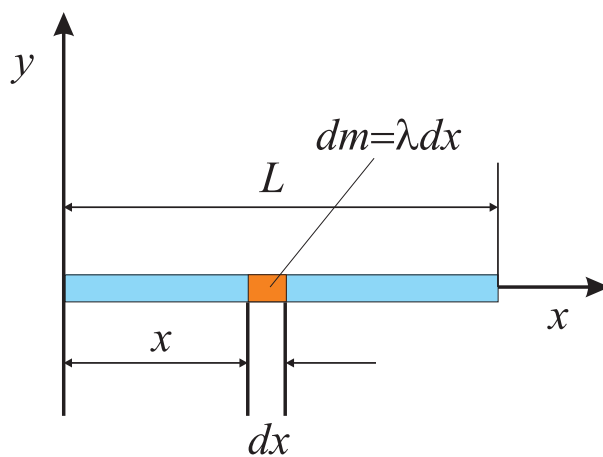
$$y_{CM} = \frac{1}{m} \int y dm, \quad i \quad z_{CM} = \frac{1}{m} \int z dm. \quad (2.116)$$

Na osnovu ovih izraza se može pisati da je vektor položaja centra masa

$$\vec{r}_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{r}_i \Delta m_i}{m} = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm. \quad (2.117)$$



Slika 2.16: Kruto telo razmatrano kao skup delića masa Δm_i . Centar masa se nalazi u nekoj tački određenoj vektorom položaja $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\vec{e}_x + y_{CM}\vec{e}_y + z_{CM}\vec{e}_z$.



Slika 2.17: .

Odredjivanje položaja centra masa homogenog štapa

Primer 1. Pokazati da se centar mase štapa kod koga je masa uniformno raspoređena po dužini štapa, nalazi na njegovoj sredini.

◊ Ukoliko x osu postavimo duž štapa, y i z koordinate centra masa su jednake nuli, tako da treba odrediti samo njegovu x koordinatu. Kako je masa štapa uniformno raspoređena po njegovoj dužini (štap je homogen), može da se uvede podužna gustina mase λ kao $\lambda = m/L$, gde je m ukupna masa štapa. Ukoliko sada podelimo štap na deliće dužine dx , masa svakog takvog delića je $dm = \lambda dx$, tako da izraza za odredjivanje x_{CM} postaje

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{m} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\lambda}{m} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2m}. \quad (2.118)$$

Ako se još podsetimo da je $\lambda = m/L$, za položaj centra masa se dobija

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{m}{L} \right) = \frac{L}{2}. \quad (2.119)$$

Odredjivanje položaja centra masa štapa čija se gustina menja linearno

Odrediti položaj centra masa kod štapa čija masa se menja linearno po dužini.

◊ U ovom slučaju nema principijelno novih stvari sem što je podužna gustina sada zavisna od x koordinate kao $\lambda = \alpha x$, gde je α konstanta. U integral sada zamenjujemo dm sa λdx imajući u vidu da λ nije konstanta

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{m} \int_0^L x \lambda dx = \frac{1}{m} \int_0^L x \alpha x dx = \frac{\alpha}{m} \int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha L^3}{3m}. \quad (2.120)$$

Konstanta α koja se pojavljuje u ovom izrazu se može eliminirati ako podjemo da je ukupna masa štapa određena izrazom

$$m = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L \alpha x dx = \frac{\alpha L^2}{2}. \quad (2.121)$$

Zamena ovog izraza u prethodni dovodi do

$$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3 \alpha L^2 / 2} = \frac{2}{3} L. \quad (2.122)$$

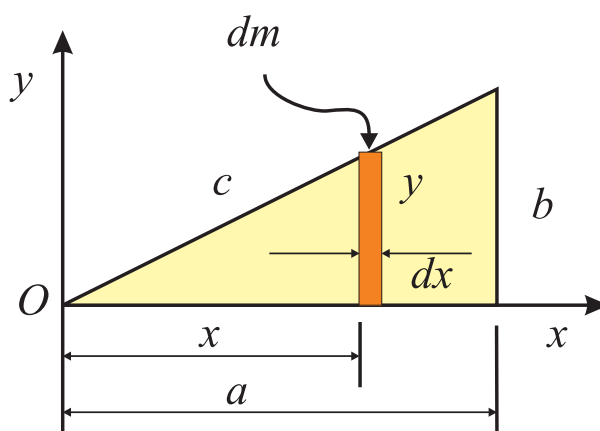
Određjivanje položaja centra masa homogenog pravouglog trougla

Kruto telo mase m ima oblik pravouglog trougla. Smatrajući da je njegova masa uniformno raspoređena, odrediti položaj centra masa.

◊ U cilju odredjivanja x koordinate centra masa, podelimo trougao na tanke pojaseve širine dx i visine y , čija je površina prema tome $dS = ydx$ (Slika 2.18). Masa svake ovakve trake je

$$dm = \sigma dS = \sigma y dx, \quad (2.123)$$

gde je sa σ označena površinska gusitna mase $\sigma = m/S = m/(\frac{1}{2}ab)$.



Slika 2.18: .

U skladu sa time, x koordinata centra masa je odredjena izrazom

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{m} \int_0^a x \sigma y dx = \frac{1}{m} \int_0^a x \frac{2m}{ab} y dx = \frac{2}{ab} \int_0^a xy dx. \quad (2.124)$$

U ovom integralu se osim promenljive x pojavila i promenljiva y koja za različito x ima različite vrednosti. Stoga je potrebno naći vezu ove dve veličine, izraziti potom y preko x i zameniti u gornji integral. Na osnovu sličnosti odgovarajućih trouglova sa slike 2.18 je

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}, \quad \text{odnosno} \quad y = \frac{b}{a}x. \quad (2.125)$$

Uzimajući to u obzir, jednačina (2.124) daje

$$x_{CM} = \frac{2}{ab} \int_0^a x \left(\frac{b}{a}x \right) dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{3}a. \quad (2.126)$$

Analognim proračunom se pokazuje da je y koordinata centra masa

$$y_{CM} = \frac{1}{3}b, \quad (2.127)$$

čime je položaj centra masa potpuno određen.

2.11 Redukovana masa

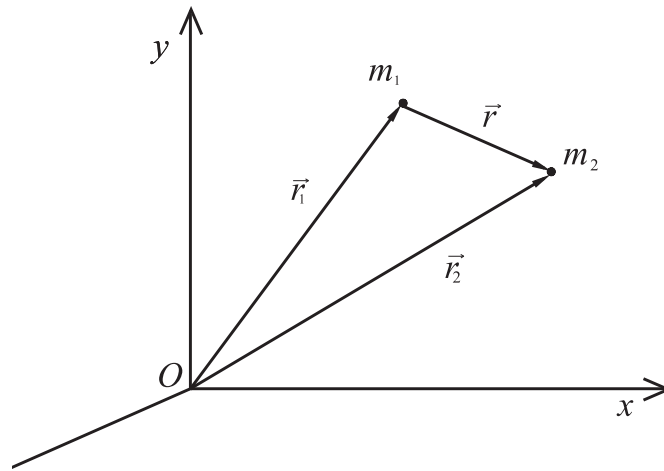
Ako se posmatra sistem koji se sastoji od dve interagujuće materijalne tačke masa m_1 i m_2 na koje ne deluju spoljašnje sile, njihove jednačine kretanja se mogu zapisati u obliku

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{\vec{F}_1}{m_1}, \quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_2}{m_2}, \quad (2.128)$$

pri čemu je prema trećem Njutnovom zakonu $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Uzimanje u obzir ove činjenice, oduzimanjem prve jednačine kretanja od druge dobija se

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}_2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right). \quad (2.129)$$

Ova jednačina opisuje kretanje jedne materijalne tačke u odnosu na drugu,



Slika 2.19:

zato što je razlika vektora $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$, vektor položaja čiji je početak na

prvoj tački a kraj na drugoj. On jednoznačno određuje položaj druge tačke u odnosu na prvu. Ako se još uvede i oznaka

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad (2.130)$$

koja za veličinu μ daje

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.131)$$

jednačina kretanja (2.129) postaje

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_2. \quad (2.132)$$

Ova jednačina je formalno analogna drugom Njutnovom zakonu. Ulogu sile igra sila \vec{F}_2 koja deluje na drugu materijalnu tačku (od strane prve), a ulogu mase - pomoćna veličina μ , koja se zove redukovana masa. Naravno, jedna jednačina ne može da bude ekvivalentna dvema polaznim jednačinama (2.128). Ipak, ekvivalentnost se može postići, ako se jednačini u kojoj figuriše redukovana masa (2.132) doda jednačina (2.111) koja izražava teoremu o kretanju centra masa. U ovom slučaju, zato što nema spoljašnjih sila, iz te teoreme sledi da se centar masa kreće ravnomerno pravolinijski. Na taj način, opisivanje kretanja sistema dve izolovane materijalne tačke se dekomponuje na dva nezavisna zadatka: 1) opisivanje (ravnomernog) kretanja centra masa, 2) opisivanje relativnog kretanja jedne materijalne tačke u odnosu na drugu. Ovaj drugi zadatak se, kao što smo to videli, formalno svodi na određivanje kretanja materijalne tačke mase μ u polju sile koja deluje na drugu materijalnu tačku.

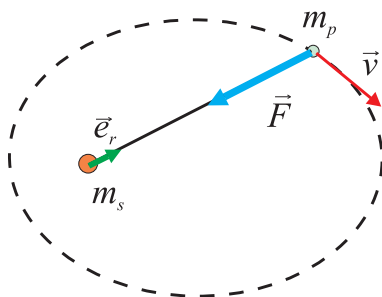
2.12 Kretanje u centralnom polju sila. Problem dva tela

Kretanje planeta oko Sunca, se opisuje Njutnovim zakonom gravitacije

$$\vec{F} = -G \frac{m_p m_s}{r^2} \vec{e}_r \quad (2.133)$$

u kome je vektor \vec{e}_r jedinični vektor čiji je početak vezan za Sunce a usmeren je ka trenutnom položaju planete, G je Njutnova univerzalna gravitaciona konstanta, m_p i m_s su mase planete i sunca, respektivno.

Ovaj zakon (kao i Kulonov koji opisuje naelektrisanih čestica) opisuje delovanje tela preko centralnih sila, odnosno preko odgovarajućih centralnih



Slika 2.20:

polja. Centralno polje sile je takvo polje u kome je pravac delovanja sile na česticu, u svakoj tački polja usmeren ka jednoj tački O koja se naziva centar polja, pri čemu intenzitet sile zavisi samo od rastojanja od tog centra.

2.12.1 Centralno polje sile

Na osnovu napred rečenoga, izraz za silu koja spada u centralne je oblika

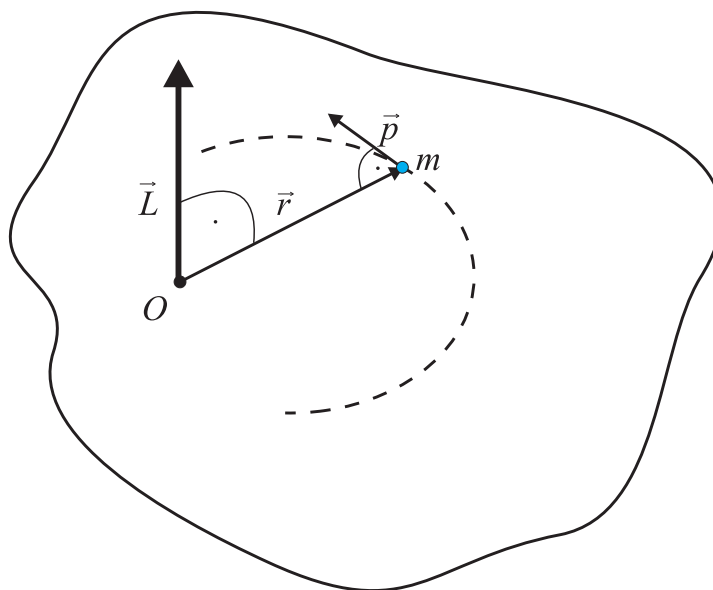
$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_r, \quad (2.134)$$

gde je $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ jedinični vektor vektora položaja \vec{r} , a $f(r)$ je projekcija vektora sile na pravac radijus vektora. Ukoliko je data sila odbojna, funkcija $f(r)$ je pozitivna, dok je za privlačne sila negativna. Prilikom pisanja prethodne jednačine je uzeto u obzir da se koordinatni početak nalazi u tački O odnosno u centru polja.

Moment, \vec{M} , svake centralne sile (2.134) u odnosu na tačku O je očigledno jednak nuli.³⁶ Odatle sledi zaključak da se moment impulsa čestice, koja se kreće u polju centralne sile ne menja tokom vremena.³⁷ Vektor $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, je obzirom na svoju definiciju, u svakom momentu vremena ortogonalan na ravan koju obrazuju vektori \vec{r} i \vec{p} (kao njihov vektorski proizvod). Kako je osim toga moment impulsa konstantan tokom vremena ta ravan, u odnosu na koju se on nalazi pod pravim uglom, je fiksna. Na taj način, pri kretanju u polju centralne sile, vektor položaja čestice leži stalno u istoj ravni. U toj istoj ravni leži i vektor impulsa čestice. Posledica ovih činjenica je da je trajektorija čestice kriva u ravni, koja zadržava stalno istu orijentaciju u prostoru, pri čemu ta ravan prolazi kroz centar polja.

³⁶Razlog je jer je $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = f(r)\vec{r} \times \vec{e}_r = 0$ pošto su vektori \vec{r} i \vec{e}_r kolinearni.

³⁷Na osnovu osnovnog zakona dinamike rotacije $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{sp}$.



Slika 2.21:

Ovaj rezultat ima interesantnu geometrijsku interpretaciju. Vektor položaja čestice \vec{r} za vreme dt predje preko površine dS . Ta površina je jednaka polovini površine paralelograma konstruisanog nad vektorima \vec{r} i $d\vec{r}$, odnosno

$$dS = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|. \quad (2.135)$$

Kako je pomeraj čestice za vreme dt jednak $d\vec{r} = \vec{v}dt$, dobija se

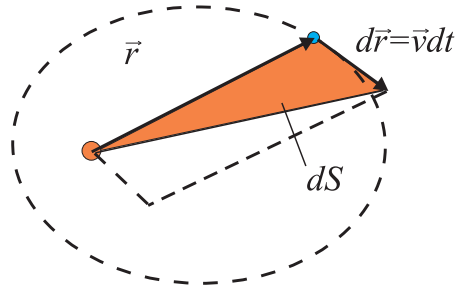
$$dS = \frac{1}{2} |\vec{r} \times dt\vec{v}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt = \frac{L}{2m} dt, \quad (2.136)$$

gde je L intenzitet vektora momenta impulsa čestice mase m , pri čemu je, kako smo to videli, kod kretanja u centralnom polju to konstanta. Na osnovu ovoga se može zaključiti da *vektor položaja čestice koja se kreće u centralnom polju za jednake vremenske intervale prelazi jednake površine*, drugim rečima, veličina koja se naziva, *sektorska brzina* $\frac{dS}{dt}$ je u ovom slučaju konstantna jer je

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const}. \quad (2.137)$$

Centralne sile spadaju u konzervativne pa je njihov jednak negativnoj promeni potencijalne energije čestice

$$dU = -dA = -f(r)\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = -f(r)dr. \quad (2.138)$$



Slika 2.22:

Integracija ovog izraza daje

$$U = - \int f(r) dr, \quad (2.139)$$

odakle sledi da potencijalna energija čestice koja se nalazi u polju centralnih sila zavisi samo od rastojanja čestice od centra polja.

Naročito su interesantne sile koje zavise od rastojanja od centra polja kao

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \quad (2.140)$$

gde je α konstantna veličina.³⁸ U ovu grupu sila spadaju već pomenute gravitaciona i kulonova sile. Zamena (2.140) u (2.139) daje

$$U = -\alpha \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\alpha}{r} + C \quad (2.141)$$

gde je C integraciona konstanta. Ona se može odrediti iz uslova da je potencijalna energija u beskonačnosti jednaka nuli, što za konstantu C daje $C = 0$, pa je potencijalna energija

$$U = \frac{\alpha}{r}. \quad (2.142)$$

Ukupna energija čestice koja se kreće u polju centralne sile je prema tome

$$E = E_k + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r}. \quad (2.143)$$

³⁸Pri ovome $\alpha > 0$ odgovara slučaju odbijanja od centra a $\alpha < 0$ privlačenju ka centru polja.

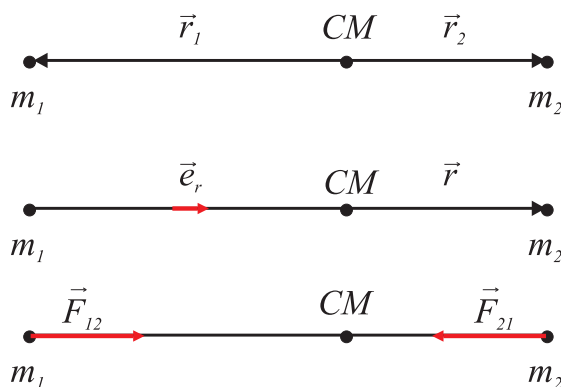
2.12.2 Problem dva tela

Ono što se u fizici naziva problemom dva tela se odnosi na opisivanje kretanja dve interagujuće čestice pri čemu se pretpostavlja da je taj sistem zatvoren. Kao što je zaključeno ranije, centar masa zatvorenog sistema (nema spoljašnjih sila ili im je rezultanta jednaka nuli), ili miruje ili se kreće uniformno pravolinijski. Stoga se za njega može vezati jedan inercijalan sistem reference (sistem CM ili CM sistem) u odnosu na koji se dalje može analizirati kretanje čestica. U tom slučaju je

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad (2.144)$$

jer \vec{r}_{CM} predstavlja vektor položaja centra masa u odnosu na sam centar masa, pa je (slika (2.23))

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2. \quad (2.145)$$



Slika 2.23:

Uvedemo li vektor relativnog položaja druge čestice u odnosu na prvu,

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.146)$$

rešavajući ove dve jednačine po \vec{r}_1 i \vec{r}_2 dobija se

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (2.147)$$

Za slučaj interagovanja dva tela, može se pisati $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = f(r)\vec{e}_r$, gde je $f(r)$ funkcija rastojanja između čestica, pozitivna ako se privlače a

2.13. KRETANJE TELA PROMENLJIVE MASE. REAKTIVNO KRETANJE 87

negativna ako se odbijaju. Jednačine kretanja ovih dveju čestica su sada

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = f(r) \vec{e}_r, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -f(r) \vec{e}_r. \quad (2.148)$$

Deljenjem prve jednačine sa m_1 , druge sa m_2 , nakon njihovog oduzimanja i uvodjena redukovane mase i vektora relativnog položaja, dobija se

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -f(r) \vec{e}_r. \quad (2.149)$$

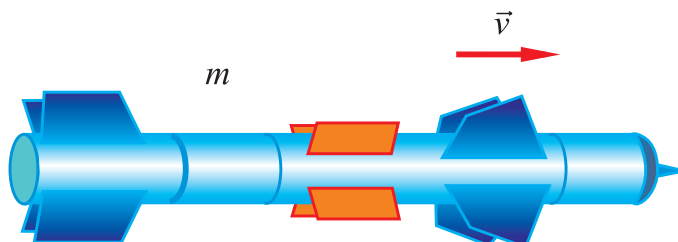
Na taj način, problem opisivanja kretanja dva tela svodi se na opisivanje kretanja jedne čestice u centralnom polju sila. Kada se iz poslednje diferencijalne jednačine odredi vremenska zavisnost vektora relativnog položaja $\vec{r}(t)$, prema formulama (2.147) se mogu odrediti $\vec{r}_1(t)$ i $\vec{r}_2(t)$, čime se postavljeni problem može smatrati rešenim.

2.13 Kretanje tela promenljive mase. Reaktivno kretanje

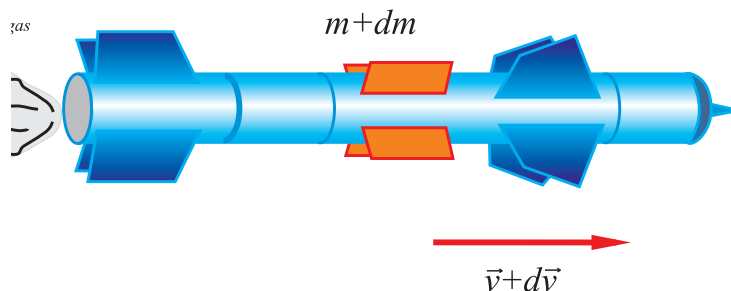
Kada se kaže da telo menja masu, obično se ima u vidu relativistička promena mase tela sa brzinom, koja se dešava kada se telo kreće brzinama bliskim brzini svetlosti. Medjutim, od velikog praktičnog značaja je proanalizirati kretanje tela čija se masa menja usled gubitka ili porasta količine materije koja čini telo. Dakle, u ovom poglavlju će biti analizirana, sa stanovišta Njutnovih jednačina, kretanja tela malim brzinama pri čemu im se masa menja sa vremenom. Na primer masa kamiona-cisterne za pranje ulica se smanjuje usled isticanja vode iz njegovog rezervoara (ili se povećava prilikom punjenja cisterne), masa kišne kapi raste pri padanju kroz vazduh zasićen vodenom parom, masa rakete ili mlaznog aviona se smanjuje usled potrošnje goriva, odnosno usled izbacivanja gasova koji nastaju prilikom njegovog sagorevanja, ... U svim ovim slučajevima je reč o kretanju tela promenljive mase. Jednačine kojima se opisuju ovakva kretanja, iako ne sadrže ništa principijelno novo u poredjenju sa Njutnovim jednačinama već su njihova posledica, su veoma interesantne jer su povezane sa npr. raketnom tehnikom.

Izvećimo jednačinu kretanja tela promenljive mase na primeru kretanja rakete. Princip funkcionisanja rakete je relativno prost. Raketa izbacuje materiju (gas) delujući na njega velikom silom. Materija koju ona pri tom izbacuje, deluje na raketu jednakom ali suprotno usmerenom silom, saopštavajući joj odgovarajuće ubrzanje. Ukoliko nema spoljašnjih sila, raketa i izbačena materija čine zatvoren sistem te se njegov impuls ne može menjati

sa vremenom. Na tom principu i rade rakete. Celishodno je medjutim razmatrati opštiji slučaj, tj. pretpostaviti da na raketu deluju i spoljašnje sile. To mogu biti na primer sila zemljine teže, gravitaciono privlačenje od strane Sunca i planeta, sila otpora sredine kroz koju se kreće raketa, ...



Slika 2.24:



Slika 2.25:

Neka su $m(t)$ i $\vec{v}(t)$ masa i brzina rakete u proizvoljnom momentu vremena t . Impuls rakete će u tom trenutku biti $\vec{p}(t) = m\vec{v}$. Za interval vremena dt masa rakete i njena brzina će imati priraštaje dm i $d\vec{v}$ jer je za navedeno vreme raketa potrošila dm goriva i izbacila ga kao gas (kao produkt sagorevanja goriva) pa se time njena masa promenila za taj iznos³⁹. Impuls rakete će u trenutku $t + dt$ biti $(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v})$. Ukupan impuls sistema sadrži još i impuls gasa izbačenog za dati interval vremena dt , odnosno sabirak $dm_{gas}\vec{v}_{gas}$, gde je \vec{v}_{gas} brzina izbacivanja gasa a dm_{gas} njegova masa. Razlika impulsa u trenutku $t + dt$ i t predstavlja priraštaj a on je, prema II Njutnovom zakonu jednak $\vec{F}dt$, gde je \vec{F} rezultanta svih spoljašnjih sila koje deluju na raketu, odnosno važi jednačina

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{gas}\vec{v}_{gas} - m\vec{v} = \vec{F}dt, \quad (2.150)$$

³⁹Pri ovome je $dm < 0$.

2.13. KRETANJE TELA PROMENLJIVE MASE. REAKTIVNO KRETANJE 89

odnosno

$$m\vec{v} + md\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} + dm_{gas}\vec{v}_{gas} - m\vec{v} = \vec{F}dt. \quad (2.151)$$

Nakon sredjivanja, odbacivanja proizvoda $dmd\vec{v}$ kao infinitezimale višeg reda (drugog) od ostalih, primene zakona održanja mase $dm + dm_{gas} = 0$, i uvođenja relativne brzine isticanja gasa u odnosu na raketu $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{gas} - \vec{v}$, ova jednačina poprima oblik

$$md\vec{v} = \vec{v}_{rel}dm + \vec{F}dt, \quad (2.152)$$

a nakon deljenja sa dt , konačno

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} + \vec{F}. \quad (2.153)$$

Po formi je izraz (2.153) jednak drugom Njutnovom zakonu. Razlika je u tome što u ovom slučaju masa nije konstantna već se menja sa vremenom usled gubitka materije. Spoljašnjoj sili je dodat još jedan član $\vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt}$, koji predstavlja takozvanu reaktivnu silu, tj. silu kojom na raketu deluju gasovi koje ona izbacuje. Ovu jednačinu je prvi dobio ruski naučnik Meščerski (1859-1935) po kome ona i nosi ime (jednačina Meščerskog odnosno jednačina kretanja tela promenljive mase).

P r i m e r 1. Primenimo jednačinu Meščerskog na kretanje rakete na koju ne deluju spoljašnje sile. U tom slučaju ($\vec{F} = 0$) ona glasi

$$md\vec{v} = \vec{v}_{rel}dm.$$

Ovu vektorsku jednačinu je najcelishodnije projektovati na osu koja se poklapa sa pravcem kretanja rakete i usmerena je u smeru toga kretanja. U tom slučaju ona postaje sledeća skalarna jednačina

$$mdv = -v_{rel}dm.$$

Brzina isticanja gasova se u principu menja tokom leta rakete ali se kao prostiji može razmatrati slučaj kada je ona konstantna. U tom slučaju je rešenje prethodne jednačine

$$v = -v_{rel} \int \frac{dm}{m} = -v_{rel} \ln m + C.$$

Vrednost konstante integracije C je određena početnim uslovima. Pretpostavimo da je u početnom momentu vremena brzina rakete bila jednaka

nuli a da je njena masa bila m_0 . Tada ova jednačina daje $0 = -v_{rel} \ln m_0 + C$, odnosno $C = v_{rel} \ln m_0$. Odavde je sada

$$v = v_{rel} \ln \frac{m_0}{m},$$

odakle se za promenu mase rakete sa vremenom dobija jednačina

$$m = m_0 e^{-\frac{v}{v_{rel}}}. \quad (2.154)$$

Ova jednačina se naziva formulom Ciolkovskog (1857-1935). Interesantno je takodje razmotriti i relativističke modifikacije dobijenih jednačina.

P r i m e r 2. Odrediti vezu izmedju mase rakete, brzine koju je ona dostigla i vremena, ukoliko se raketa kreće vertikalno naviše u polju zemljine teže. Brzinu gasne struje u odnosu na raketu smatrati konstantnom. Otpor vazduha i promenu ubrzanja zemljine teže g sa visinom ne uzimati u obzir. Koliku masu gasa mora raketa da izbacuje svake sekunde da bi ostala nepokretna u polju zemljine teže?

Jednačina kretanja rakete

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{rel} \frac{dm}{dt} - mg$$

može da se zapiše u obliku

$$md(v + gt) = -v_{rel} dm$$

koji je formalno isti obliku jednačine koja je kao rešenje imala formulu Ciolkovskog, s tim što v treba zameniti sa $v + gt$ pa je rešenje ove jednačine

$$m = m_0 e^{-\frac{v+gt}{v_{rel}}}. \quad (2.155)$$

Izraz koji daje brzinu je prema tome

$$v = v_{rel} \ln \frac{m_0}{m} - gt. \quad (2.156)$$

Tražena veličina koja opisuje promenu mase sa vremenom je $\mu = -\frac{dm}{dt}$, se može naći iz uslova da je za nepokretnu raketu $\frac{dv}{dt} = 0$,⁴⁰ što dovodi do

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{v_{rel}} e^{-\frac{gt}{v_{rel}}}. \quad (2.157)$$

⁴⁰Jer je brzina konstantna, to jest jednaka nuli.

2.14 Kretanje u prisustvu sila otpora

U prethodnim poglavljima je razmtrano kretanje tela uz zanemarivanje otpora sredine kroz koju se telo kreće.⁴¹ Otpor sredine kretanju se može opisati uvodjenjem sile otpora \vec{R} čiji intenzitet zavisi od brzine tela⁴² a smer je uvek suprotan smeru kretanja tela.

Intenzitet sile otpora sredine može da zavisi od brzine na veoma složene načine a ovde će biti razmatrana dva najčešća oblika zavisnosti. Kada se radi o kretanju tela relativno malom brzinom kroz tečnost ili kada je reč o kretanju malih tela (npr. čestice prašine) koja padaju kroz vazduh može se smatrati da je otpor sredine proporcionalan prvom stepenu brzine. Ukoliko je reč o kretanju velikih objekata sila otpora je srazmerna drugom stepenu brzine.

2.14.1 Kretanje tela u prisustvu sile otpora proporcionalne brzini tela

Ako se telo kreće kroz fluid (gas ili tečnost) pri 'v cemu na njega deluje sila otpora sredine proporcionalna brzini tela,

$$R = bv \quad (2.158)$$

gde je b konstanta čija vrednost zavisi od karakteristika sredine i oblika i dimenzije objekta⁴³, i ukoliko se osim gravitacione sile zanemare ostale⁴⁴ projekcija II Nutnovog zakona na pravac kretanja tela daje

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv. \quad (2.159)$$

Deljenjem ove jednačine masom daje sledeću diferencijalnu jednačinu za određivanje brzine tela

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v. \quad (2.160)$$

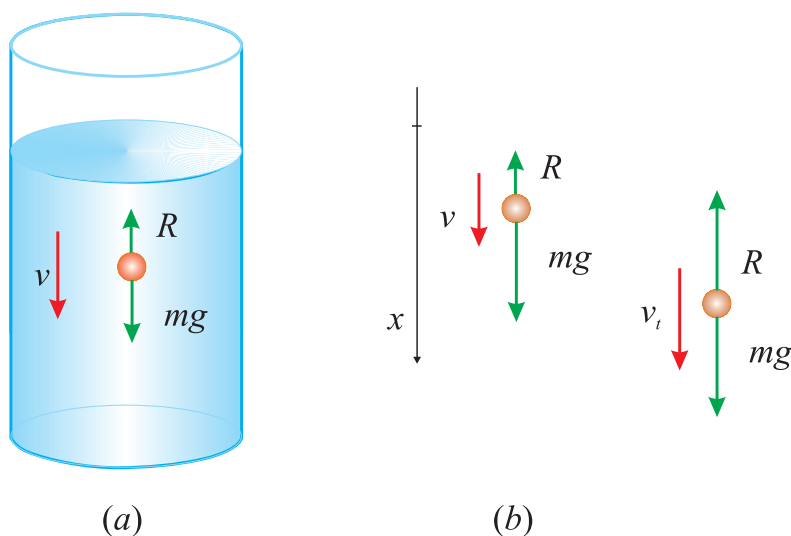
Pre nego što pristupimo rešavanju ove jednačine korisno je proanalizirati je. Ukoliko uzmemo da je početna brzina čestice jednaka nuli, to znači da je u

⁴¹Samo neki od primera su: otpor vazduha prilikom kretanja makroskopskih tela (recimo automobila), viskozna sila koja je značajna pri kretanju tela kroz tečnosti, ...

⁴²Intenzitet sile otpora sredine uvek opada kada se brzina smanjuje.

⁴³Ukoliko je reč o sfernom telu poluprečnika r ova konstanta je proporcionalna r (Stoksov zakon).

⁴⁴U ovom slučaju postoji i sila potiska koja deluje na telo koje je potopljeno u fluid. Prema Arhimedovom zakonu, ova sila je konstantna i jednaka je težini telom istisnute tečnosti i u ovom razmatranju je nećemo nadalje uzimati u obzir.



Slika 2.26:

početku sila otpora $-bv$ također je bila jednaka nuli a ubrzanje čestice dv/dt je prosto jednako g . Sa vremenom, obzirom da se brzina tela povećava, raste i sila otpora a ubrzanje opada. Ubrzanje postaje jednako nuli kada sila otpora sredine postane jednaka težini tela. U tom slučaju telo je postiglo graničnu vrednost brzine v_g sa kojom nastavlja da se kreće nadalje, pri čemu je ubrzanje jednako nuli. Ta brzina se može dobiti ako se u (9.22) uzme da je $a = dv/dt = 0$ što daje

$$mg - bv_g = 0, \Rightarrow v_g = \frac{mg}{b}. \quad (2.161)$$

Diferencijalna jednačina (9.22) se može napisati u obliku

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt, \quad (2.162)$$

koja može da se integriraju jer su promenljive na odvojenim stranama jednakosti

$$\int \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = t + C. \quad (2.163)$$

Integral na levoj strani se svodi na tabličan ukoliko se uvede smena $x = g - \frac{b}{m}v$, odakle je $dx = -\frac{b}{m}dv$ pa on prelazi u

$$-\frac{m}{b} \int \frac{dx}{x} = -\frac{m}{b} \ln x = -\frac{m}{b} \ln(g - \frac{b}{m}v), \quad (2.164)$$

tako da je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine

$$-\frac{m}{b} \ln\left(g - \frac{b}{m}v\right) = t + C. \quad (2.165)$$

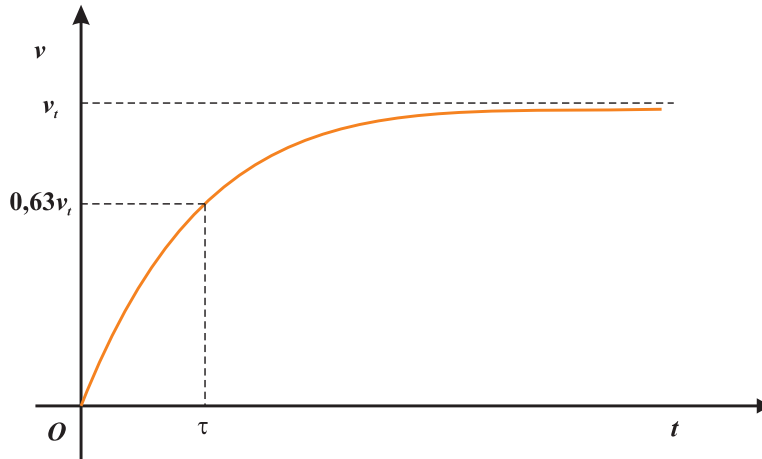
Konstanta C se određuje iz početnog uslova da je u početnom trenutku $t = 0$ telo krenulo iz stanja mirovanja, tj. da mu je brzina bila $v = 0$, pa se za konstantu dobija $C = -\frac{m}{b} \ln g$. Uzimanjem toga u obzir, rešavanjem jednačine (2.165) po brzini daje konačno

$$v = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right), \quad (2.166)$$

odnosno

$$v = v_g \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right). \quad (2.167)$$

Ova zavisnost je predstavljena na slici 2.27. Može da se primeti da je



Slika 2.27:

odnos m/b konstanta koja ima dimenzije vremena a lako je videti da prema jednačini (2.166) predstavlja vreme nakon koga telo dostigne 63,2% od maksimalne moguće brzine, tako da ova jednačina može da se zapiše i kao

$$v = v_g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (2.168)$$

2.14.2 Kretanje tela u prisustvu sile otpora proporcionalne drugom stepenu brzine tela

Na tela koja se kreću velikim brzinama kroz vazduh (avioni, automobili, padobranci, lopte,...) za silu otpora se može uzeti da je proporcionalna

drugom stepenu brzine. U tim slučajevima, sila otpora ima oblik

$$R = \frac{1}{2}D\rho S v^2, \quad (2.169)$$

gde je ρ gustina vazduha, S je površina poprečnog preseka tela merena u ravni normalnoj na smer kretanja a D je konstantni koeficijent.⁴⁵

Pretpostavimo da, kao i u prethodnom slučaju, telo slobodno pada u homogenom polju zemljine teže polazeći iz stanja mirovanja. Jednačina kretanja, projektovana na osu duž koje se vrši kretanje, je

$$ma = mg - \frac{1}{2}D\rho S v^2, \quad (2.170)$$

odakle se vidi da se telo pri padu kreće sa ubrzanjem

$$a = g - \left(\frac{D\rho S}{2m}\right)v^2. \quad (2.171)$$

Na osnovu ovoga je granična vrednost brzine koju telo može da dostigne (dobija se stavljajući da je u tom slučaju $a = 0$)

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho S}}. \quad (2.172)$$

2.15 Rotaciono kretanje krutog tela

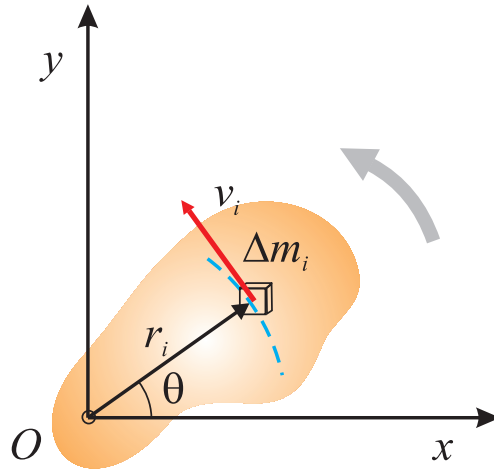
2.15.1 Kinetička energija pri rotacionom kretanju

Kao što smo već videli, kruto telo možemo da razmatramo kao skup delića (koje tretiramo kao čestice), masa Δm_i koji rotiraju oko z ose nekom ugaonom brzinom ω . Kinetička energija svakog takvog delića je određena njegovom masom i linijskom brzinom v_i , odnosno

$$E_{kroti} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2. \quad (2.173)$$

Iako svi delići krutog tela imaju istu ugaonu brzinu ω , linijska brzina im se razlikuje jer zavisi od rastojanja delića od ose rotacije r_i , i zadata je relacijom $v_i = r_i\omega$ (uporedi sa jednačinom (1.64)).

⁴⁵Vrednost ovog koeficijenta se određuje empirijski i za sferna tela ima vrednost oko 0,5 dok je za tela nepravilnog oblika veći od 2.



Slika 2.28: .

Ukupna kinetička energija krutog tela je suma kinetičkih energija delića

$$E_{krot} = \sum_i E_{kroti} = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega^2. \quad (2.174)$$

Ovaj izraz može da se zapiše u obliku

$$E_{krot} = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2, \quad (2.175)$$

gde je iz sume izvučen faktor ω^2 koji je isti za sve deliće krutog tela. Ovaj izraz može da se uprosti ako se uvede da je izraz u zagradi **moment inercije** I

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2, \quad (2.176)$$

pa dobijamo

$$E_{krot} = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (2.177)$$

Ukoliko se ovaj izraz uporedi sa izrazom za kinetičku energiju čestice mase m , vidi se da ulogu mase kao mere inercije, kod rotacije krutog tela, igra upravo veličina I što je i opravdanje za njen naziv.

2.15.2 Izračunavanje momenata inercije krutih tela različitog oblika

Prilikom konkretnog određivanja momenta inercije krutog tela, nakon njegovog deljenja na deliće mase Δm_i , na kraju se uzima granična vrednost

$\Delta m_i \rightarrow 0$, nakon čega moment inercije zapravo postaje jednak integralu

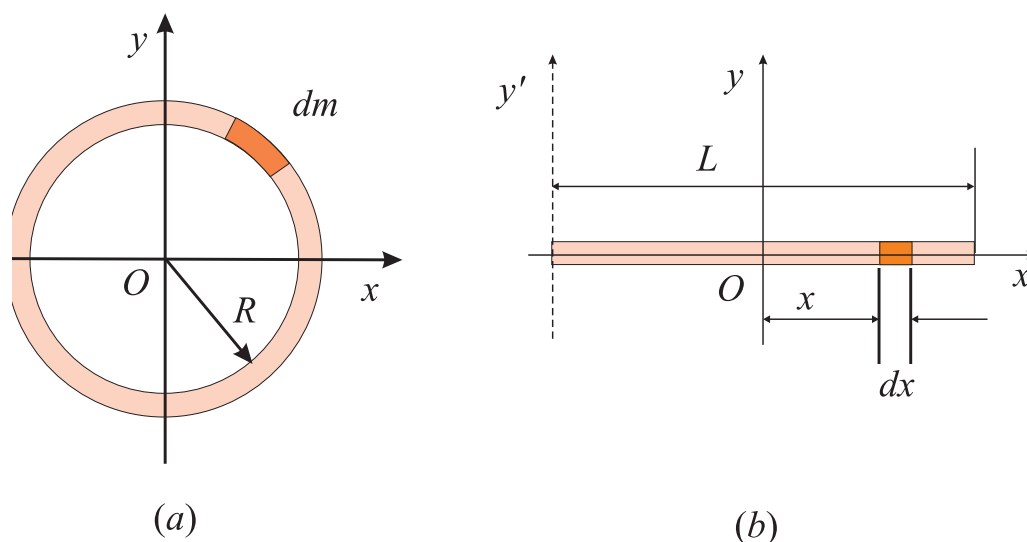
$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm \quad (2.178)$$

gde se integracija vrši po celom telu čiji moment inercije treba da se odredi. Imajući u vidu relaciju (1.73), izražavajući iz nje $dm = \rho dV$ integral po masi tela postaje integral po zapremini

$$I = \int \rho r^2 dV. \quad (2.179)$$

Ukoliko je telo homogeno, gustina je konstantna pa može da se izvuče ispred integrala a ukoliko to nije slučaj, ukoliko želimo da izvršimo integraciju, mora da se zna njena zavisnost od prostornih koordinata.

Homogen prsten



Slika 2.29:

Oredimo moment inercije za homogen prsten mase m i poluprečnika R u odnosu na osu koja prolazi kroz središte prstena i normalna je na njega (Slika 2.29 (a)). Svi elementi mase dm prstena su na istom rastojanju $r = R$ od z ose oko koje zapravo prsten rotira, pa je moment inercije

$$I_z = \int r^2 dm = R^2 \int dm = mR^2. \quad (2.180)$$

Moment inercije homogenog prstena oko ose koja prolazi kroz njegov centar i normalna je na prsten, jednak je momentu inercije čestice koja se nalazi na rastojanju jednakom poluprečniku prstena i koja ima masu jednaku masi prstena.

Homogen štap

Posmatrajmo homogen štap dužine L i mase m koji rotira oko ose koja je normalna na njega i koja prolazi kroz njegov centar masa (Slika 2.29 (b)).

Osenčeni deo štapa dužine dx ima masu dm koja je jednaka proizvodu linijske gustine mase λ i dužine datog segmenta

$$dm = \lambda dx = \frac{m}{L} dx. \quad (2.181)$$

Zamenjujući ovo u (2.178), uz $r = x$, za traženi moment inercije se dobija

$$I_y = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{m}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} mL^2. \quad (2.182)$$

Homogen cilindar

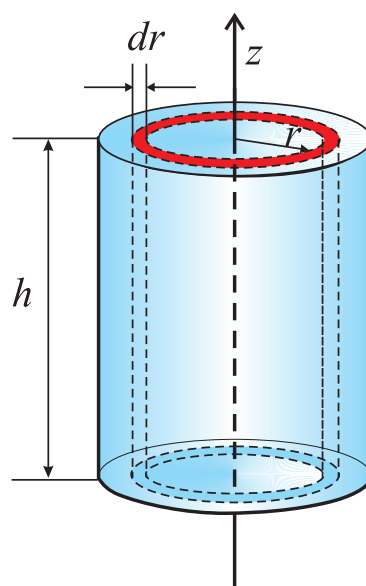
Homogeni puni cilindar, poluprečnika osnove R , mase m i visine h rotira oko svoje centralne ose (z osa na slici 2.30). U cilju određivanja momenta inercije, cilindar se deli na cilindrične ljske, svaka ima poluprečnik r i debljinu dr i visinu h . Zapremina svake takve cilindrične ljske je jednaka proizvodu površine njenog poprečnog preseka i visine, dakle $dV = dS \cdot h = (2\pi r dr h)$. Kako je masa jedinice zapremine (gustina) jednaka ρ , masa posmatrane diferencijalne zapremine je $dm = \rho dV = 2\pi h \rho r dr$, a moment inercije se dobija integracijom izraza (2.178)

$$I_z = \int r^2 dm = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h \rho R^4. \quad (2.183)$$

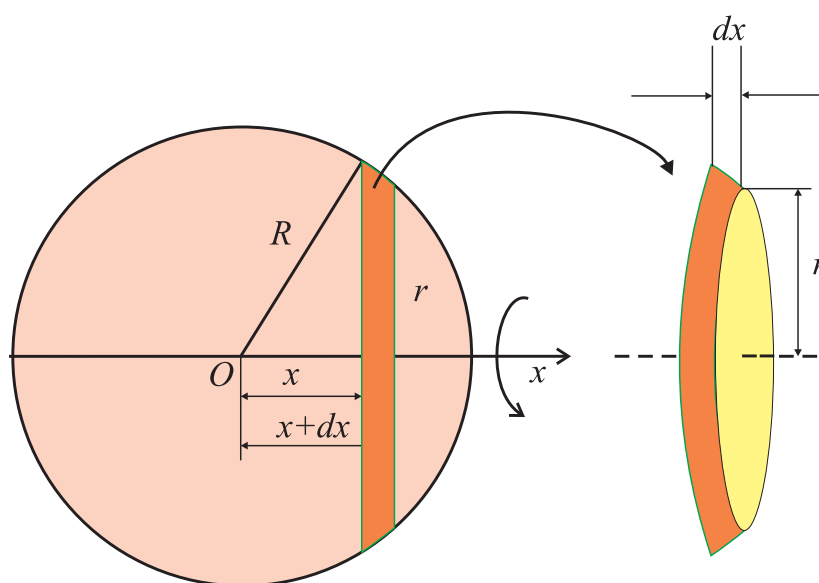
Kako je ukupna zapremina cilindra $\pi R^2 h$, gustina je $\rho = m/V = m/(\pi R^2 h)$. Zamenom ove vrednosti za gustinu u prethodnu jednačinu ona postaje

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2. \quad (2.184)$$

Primetimo da ovaj rezultat ne zavisi od visine cilindra, drugim rečima on važi kako za cilindar veoma velike visine, tako i za disk jako male visine.



Slika 2.30:



Slika 2.31: Lopta i njen isečak.

Lopta

Ako zamislimo da smo loptu izdělili na tanke slojeve (diskove) kao na slici, pri čemu je moment inercije svakog od njih $dI_V = \frac{1}{2}r^2 dm$, ukupan moment inercije lopte će biti suma, odnosno integral⁴⁶

$$I = \int dI_V = \int \frac{1}{2}r^2 dm. \quad (2.185)$$

Sa slike se vidi da se veličine koje se pojavljuju u integralu mogu zapisati kao $r^2 = R^2 - x^2$, $dm = \rho dV$, pri čemu je zapremina proizvoljnog diska čiji je poluprečnik r a visina dx , jednaka $dV = \pi r^2 dx = \pi(R^2 - x^2)dx$. U skladu sa time prethodni integral postaje

$$I = \int \frac{1}{2} * R^2 - x^2 \rho \pi (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \pi \rho \int (R^2 - x^2)^2 dx.$$

Kako je integraljenje potrebno izvršiti po celoj lopti granice integrala su $(-R, R)$, pa je

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx = \frac{1}{2} \pi \rho \left[R^4 x - \frac{2R^2 x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-R}^R,$$

što nakon sredjivanja daje

$$I = \frac{8}{15} \pi \rho R^5.$$

Kako je gustina lopte

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi R^3},$$

prethodni izraza postaje

$$I = \frac{2}{5} m R^2. \quad (2.186)$$

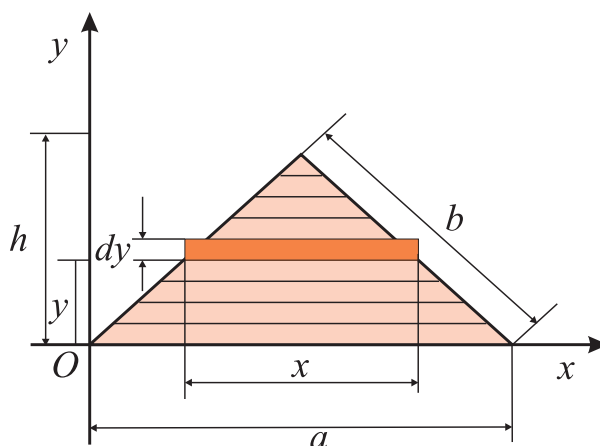
Trougao

Posmatrajmo jednakokraki trougao, mase m , dužine kraka b , koji rotira oko osnovice dučine a . Podelimo u mislima trougao na trake dužine x i mase dm .

Iz sličnosti trouglova se vidi da je

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{y}.$$

⁴⁶Integracija se vrši po diskovima na koje smo izdělili loptu.



Slika 2.32: Ravnokraki trougao koji rotira oko base, odnosno x ose.

Ako je masa jedinice površine trougla $\sigma = \frac{m}{\frac{1}{2}ah}$ (h je visina trougla jednaka $h = \sqrt{b^2 - (a/2)^2}$) masa uočene trake je

$$dm = \sigma dS = \sigma x dy = \frac{2m}{ah} x dy,$$

a njen moment inercije u odnosu na x osu

$$dI_x = dmy^2 = \frac{2m}{ah} xy^2 dy = \frac{2m}{h^2} (h - y)y^2 dy.$$

Moment inercije celog trougla se dobija sabiranjem momenata inercije svih traka, odnosno integraljenjem

$$I = \int dI = \frac{2m}{h^2} \int_0^h (h - y)y^2 dy,$$

što daje

$$I = \frac{2m}{h^2} \left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{m}{24} (4b^2 - a).$$

Za slučaj jednakostraničnog trougla ($a = b$) se dobija

$$I = \frac{1}{8} ma^2.$$

Primer: Gustina Zemlje na rastojanju r od centra je opisana izrazom

$$\rho(r) = \left[14,2 - 11,6 \frac{r}{R} \right] \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

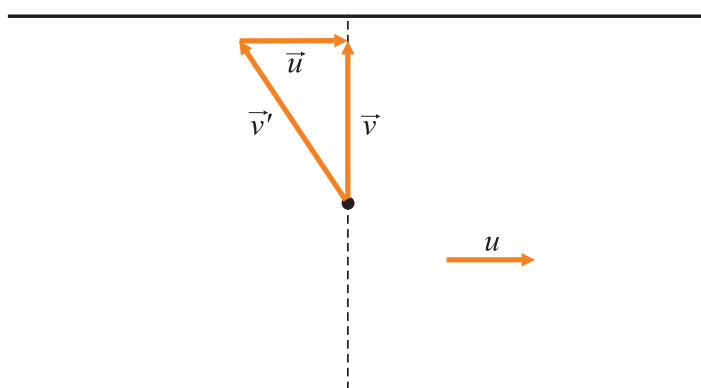
gde je R poluprečnik Zemlje. Pokazati da je moment inercije Zemlje, oko ose koja prolazi kroz centar, $I = 0,330mR^2$, .

2.16 Primeri i zadaci

1. Od plovka koji miruje na sredini široke reke (privezan za rečno dno) otišla su dva čamca. Oni se, u odnosu na obalu, kreću duž uzajamno normalnih pravaca - jedan u pravcu rečnog toka, a drugi popreko. Kada se udalje na ista rastojanja od plovka, čamci se vraćaju nazad. Naći odnos vremena kretanja ovih čamaca od odlaska do povratka ako je brzina svakog čamca u odnosu na vodu 1,2 puta veća od brzine vode.

◊ Neka je l rastojanje do koga se svaki čamac udalji od plovka. Čamcu koji se kreće u pravcu rečnog toka potrebno je vreme $t_1 = \frac{l}{v'-u}$ kada ide uzvodno i $t_2 = \frac{l}{v'+u}$ kada ide nizvodno (u je brzina vode, a v' brzina čamca u odnosu na vodu). Dakle, ukupno vreme kretanja tog čamca je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{v' - u} + \frac{l}{v' + u} = \frac{2lv'}{v'^2 - u^2} = \frac{2l \cdot 1,2u}{1,44u^2 - u^2} = \frac{2,4l}{0,44u}.$$



Slika 2.33: .

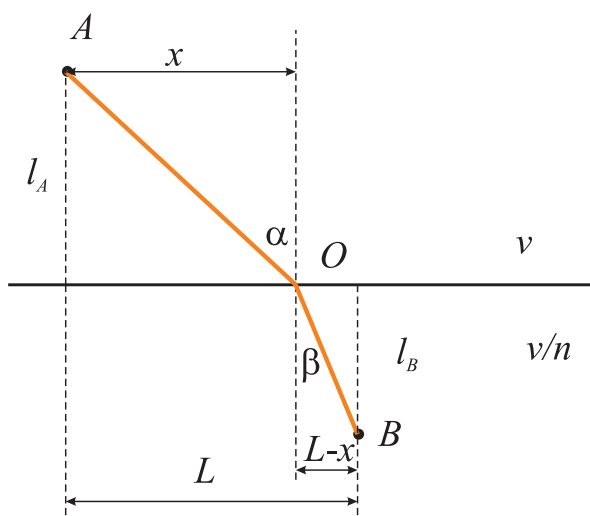
Da bi se drugi čamac kretao u pravcu normale na obalu, njegova brzina u odnosu na vodu (\vec{v}') mora biti usmerenja pod nekim uglom u odnosu na tu normalu tako da je $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$. Po Pitagorinoj teoremi tada je brzina čamca u odnosu na obalu $v = \sqrt{v'^2 - u^2}$. Isto će važiti i kada se čamac bude vraćao ka plovku, pa je ukupno vreme koje je njemu potrebno da ode do mesta udaljenog za l i vrati se

$$t' = \frac{2l}{\sqrt{v'^2 - u^2}} = \sqrt{2}lu\sqrt{1,44 - 1} = \frac{2l}{u\sqrt{0,44}}.$$

Iz ovih rezultata sledi da je traženi odnos vremena

$$\frac{t'}{t} = \frac{1,2}{\sqrt{0,44}} = 1,88.$$

2. Tačka A nalazi se na asfaltiranoj aerodromskoj pisti oblika pravougaonika a tačka B na livadi pored nje. Brzina automobila na livadi je n puta manja od one koju ima na pisti. Da bi se od A do B došlo za najmanje vreme, potrebno je izabrati maršrutu prikazanu na slici. Odrediti odnos između uglova α i β .



Slika 2.34: .

◇ Vreme potrebno automobilu da dodje iz tačke A u tačku B , preko tačke O je zbir vremena t_1 potrebnog da dodje iz tačke A u tačku B krećući se brzinom $v_1 = v$ i vremena t_2 potrebnog da iz tačke O dodje u tačku B krećući se brzinom $v_2 = \frac{v}{n}$, odnosno

$$t = t_1 + t_2.$$

Sa slike se za ova dva vremena dobija

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + l_A^2}}{v}, \quad t_2 = \frac{n\sqrt{(L-x)^2 + l_B^2}}{v},$$

pa je ukupno vreme kretanja

$$t = \frac{1}{v} \left(\sqrt{x^2 + l_A^2} + n\sqrt{(L-x)^2 + l_B^2} \right).$$

Ovaj izraz određuje vreme potrebno za prelaženje datog puta kao funkciju rastojanja tačke A od normale na granicu asfaltnog dela i livade postavljene na tačku O , $t = t(x)$. Potrebno je odrediti kada ova funkcija ima minimum, a za to je potrebno da njen prvi izvod bude jednak nuli. Prvi izvod je

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + l_A^2}} - n \frac{L - x}{\sqrt{l_B^2 + (L - x)^2}} \right),$$

odakle, imajući u vidu da je $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l_A^2}}$ i $\sin \beta = \frac{L - x}{\sqrt{l_B^2 + (L - x)^2}}$, uz uzlov da je $\frac{dt}{dx} = 0$, dobijamo

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Primetimo da rezultat ima formu zakona prelamanja svetlosti prilikom njenog prelaska iz optički redje u optički gušću sredinu. Ovo nije iznenađenje jer se svetlost upravo kreće po putanjama duž kojih joj treba minimalno vreme za prelaženje određenog puta.

3. Saobraćaj je u nekoj ulici organizovan tako da su semafori postavljeni na svakom delu puta dužine $l = 1$ km. Rad semafora je sinhronizovan tako da vozač mora da zaustavlja automobil na svakom semaforu, provodeći u proseku $\tau = 1$ min čekajući da se upali zeleno svetlo.
- Kolika je srednja brzina v_{sr} automobila ako se na putu između dva semafora kreće konstantnom brzinom $V = 60$ km/h?
 - Kako će se izmeniti srednja brzina ako se brzina kretanja između semafora poveća duplo?
 - Kolika je, za date uslove, najveća moguća srednja brzina kretanja automobila?

◇ Neki put s auto predje, ukoliko se semafori ne pale, za vreme

$$t_s = \frac{s}{V}.$$

Ukoliko se na tom putu pale semafori, automobil se zaustavlja s/l puta, za v sta mu je potrebno vreme

$$t_1 = \tau \frac{s}{l},$$

a) ukupno vreme koje je potrebno autu da predje put s je

$$t = t_s + t_1 = \frac{s}{V} + \tau \frac{s}{l} = s \left(\frac{l + V\tau}{Vl} \right).$$

Srednja brzina je prema tome

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{V}{1 + \frac{V\tau}{l}}.$$

a) Srednja brzina za brzinu $V = 60$ km/h se lako dobija iz prethodne jednačine i iznosi $v_{sr} = 30$ km/h.

b) Srednja brzina za duplo veću brzinu kretanja između semafora, odnosno za $V = 120$ km/h je $v_{sr} = 40$ km/h, odakle može da se zaključiti da se srednja brzina mnogo sporije povećava od brzine kretanja između semafora.

c) Najveća moguća brzina kretanja se dobija za slučaj kada $V \rightarrow \infty$ i jednaka je

$$v_{sr} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{1 + \frac{V\tau}{l}} = \frac{l}{\tau},$$

odnosno $v_{sr} = 60$ km/h, što znači da grafik zavisnosti $v_{sr}(V)$ ima horizontalnu asimptotu za navedenu brzinu.

4. Materijalna tačka se kreće u ravni po zakonu $x = A \sin \omega t$, $y = A(1 - \cos \omega t)$, gde je $\omega, A = \text{const} > 0$. Odrediti put koji tačka predje za vreme τ , kao i ugao θ između njenih vektora brzine i ubrzanja.

◇ Komponente vektora brzine i ubrzanja tačke su

$$v_x = \dot{x} = A\omega \cos \omega t, \quad v_y = \dot{y} = A\omega \sin \omega t,$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = A\omega^2 \cos \omega t,$$

dok su intenziteti ove dve fizičke veličine

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = A\omega = \text{const}, \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = A\omega^2 = \text{const}$$

te je prema tome predjeni put prosto jednak proizvodu brzine i vremena

$$s = v\tau = A\omega\tau.$$

Do ugla između brzine i ubrzanja se može doći ako se nađe njihov skalarni proizvod $\vec{v} \cdot \vec{a}$ = koji je sa jedne strane jednak $v_x a_x + v_y a_y$ a sa

druge, prema definiciji skalarnog prozivoda $va \cos \theta$. Ako se iskoristi prvi oblik, dobija se

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x a_x + v_y a_y = A\omega \cos \omega t (-A\omega^2 \sin \omega t) + A\omega \sin \omega t A\omega^2 \cos \omega t = 0$$

odakle, obzirom da su intenziteti ova dva vektora različiti od nule, sledi da je $\cos \theta = 0$, odnosno da je ugao između brzine i ubrzanja prav.

5. Feribot se kreće konstantnom brzinom $v_0 = 8 \text{ m/s}$ prvih 60 s. Nakon toga, obzirom da treba da pristane uz obalu, isključuje motore i kreće se brzinom $v(t) = v_0 t_1 / t^2$ gde je $t_1 = 60 \text{ s}$. Koliki je pomeraj broda od $t = 0$ do $t = \infty$?

◇

U toku prvih 60 s brzina feribota je konstantna pa je pomeraj $\Delta x_1 = v\Delta t = (8 \text{ m/s})(60 \text{ s}) = 480 \text{ m}$. Pomeraj u ostatku vremena se može dobiti kao integral brzine u granicama od 60 s do beskonačnosti, odnosno

$$\Delta x_2 = \int_{60}^{\infty} v dt = v_0 t_1^2 \int_{60}^{\infty} t^{-2} dt = v_0 t_1^2 \left. \frac{t^{-1}}{-1} \right|_{60}^{\infty} = \frac{v_0 t_1^2}{60} = 480 \text{ m},$$

tako da je ukupni pomeraj $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 480 \text{ m} + 480 \text{ m} = 960 \text{ m}$.

6. Telo mase 4 kg se kreće u ravni tako da su x i y koordinate date izrazima $x = 5t^2 - 1$ i $y = 3t^3 + 2$, gde su x i y date u metrima a t u sekundama. Odrediti intenzitet sile koja deluje na telo u trenutku $t = 2,00 \text{ s}$

◇

$$v_x = 10t, \quad v_y = 9t^2,$$

$$a_x = 10, \quad a_y = 18t.$$

U $t = 2,00 \text{ s}$, ubrzanja su $a_x = 10,0 \text{ m/s}^2$ i $a_y = 36,0 \text{ m/s}^2$, t ako da su komponente sile

$$F_x = ma_x = 30,0 \text{ N}, \quad F_y = ma_y = 108 \text{ N}$$

a njen intenzitet

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 112 \text{ N}.$$

7. Telo mase 4 kg ima brzinu $3\vec{e}_x$ m/s u nekom trenutku. Nakon 8 s njegova brzina je $(8\vec{e}_x + 10\vec{e}_y)$ m/s. Pretpostavljajući da je sila koja deluje na telo konstantna odredite njene komponente i intenzitet.

◇

8. Sila oblika $\vec{F} = (8\vec{e}_x - 4t\vec{e}_y)N$ deluje na telo mase 2 kg, koje je u $t = 0$ mirovalo. U kom vremenskom trenutku će ono imati brzinu 15 m/s? Koliki je pomeraj pri tome doživelo?

◇ Kako su komponente sile $F_x = 8$ i $F_y = -4t$, komponente ubrzanja su $a_x = F_x/m$ i $a_y = F_y/m$. Komponente brzine su

$$v_x = \int_0^t a_x dt = \frac{F_x}{m}t = 4t$$

i

$$v_y = \int_0^t a_y dt = \int_0^t \frac{-4t}{m} dt = -\frac{2}{m}t^2 = -t^2.$$

Kvadrat intenziteta brzine je prema tome

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (4t)^2 + (t^2)^2 = 16t^2 + t^4,$$

a vremenski trenutak u kome brzina ima vrednost 15 m/s se može dobiti iz ovog izraza njegovim rešavanjem po vremenu jednačine

$$16t^2 + t^4 = 225$$

koja za t^2 daje

$$t_{1,2}^2 = \frac{-16,0 \pm \sqrt{16,0^2 - 4(-225)}}{2,00} = 9,00,$$

odakle je $t = 3,00$ s. Na osnovu toga se može naći pomeraj na sledeći način

$$x = \int_0^3 v_x dt = \int_0^3 4t dt = \frac{4t^2}{2} \Big|_0^3 = 18,$$

$$y = \int_0^3 v_y dt = - \int_0^3 t^2 dt = -\frac{t^3}{3} \Big|_0^3 = -9.$$

To znači da će vektor položaja (on je jednak pomeraju obzirom da je telo u $t = 0$ bilo u koordinatnom početku) u datom trenutku biti zadata sa

$$\vec{r} = 18\vec{e}_x - 9\vec{e}_y,$$

a njegova dužina je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 20,1 \text{ m.}$$

9. Materijalna tačka mase $m = 0,1$ kg počinje da se kreće pod dejstvom sile $\vec{F} = 2t\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y$. Odrediti rad koji se izvrši nad materijalnom tačkom za vreme $\tau = 2$ s od početka kretanja.

◇ Ubrzanje materijalne tačke je jednako

$$\vec{a} = \frac{2t\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y}{m}$$

a integracijom ovog izraza po vremenu, dobija se da je brzina materijalne tačke (uzeto je da je ona počela da se kreće iz stanja mirovanja pod dejstvom navedene sile)

$$\vec{v} = \frac{t^2\vec{e}_x + t^3\vec{e}_y}{m}.$$

Sila razvija snagu

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = (2t\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y) \cdot \left(\frac{t^2\vec{e}_x + t^3\vec{e}_y}{m}\right) = \frac{2t^3 + 3t^5}{m},$$

a rad se može, obzirom da je snaga $P = \frac{dA}{dt}$, dobiti kao integral snage po vremenu

$$A = \int_0^\tau P dt = \frac{1}{m} \int_0^\tau (2t^3 + 3t^5) dt = \frac{1}{2m} (\tau^4 + \tau^6) = 4 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

10. Na telo deluje sila

$$\vec{F} = 4x\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y$$

i pomera ga duž x ose iz koordinatnog početka u tačku $x = 5$ m. Odrediti rad koji je izvršila data sila.

◇ Kako je sila pomerila telo samo duž x ose, infinitezimalni pomeraj tela je u ovom slučaju $d\vec{r} = dx\vec{e}_x$ pa je elementaran rad

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (4x\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y) \cdot dx\vec{e}_x = 4x\vec{e}_x \cdot dx\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y \cdot dx\vec{e}_x = 4x dx.$$

Rad na pomeranju tela od tačke 0 do tačke $x = 5$ je prema tome

$$A = \int_0^5 4x dx = \frac{4x^2}{2} \Big|_0^5 = 50 \text{ J}.$$

- 11.

12. Štap dužine 30 cm ima linijsku gustinu $\lambda(x) = 50\frac{g}{m} + 20x\frac{g}{m^2}$ gde je x rastojanje od jednog kraja štapa, izraženo u metrima. Odrediti masu štapa i položaj njegovog centra masa.

◊ Kako je masa delića štapa dužine dx jednaka $dm = \lambda dx$, masa štapa je jednaka integralu

$$m = \int_0^L \lambda(x) dx = \int_0^L [50 + 20x] dx = 50x \Big|_0^L + 20\frac{x^2}{2} \Big|_0^L = 50L + 10L^2,$$

što nakon zamene daje $m = 15,9$ g. Položaj centra masa je određen izrazom

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^L x dm = \frac{1}{m} \int_0^L \lambda(x) x dx = \frac{1}{m} \int_0^L [50 + 20x] x dx$$

koji nakon integracije i sračunavanja daje

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \left[50\frac{x^2}{2} \Big|_0^L + 20\frac{x^3}{3} \Big|_0^L \right] = \frac{1}{m} \left[25L^2 + \frac{20}{3}L^3 \right] = 0,153m.$$

13. Motorni čamac isključuje motor pri brzini od 10 m/s i prilazi obali. Jednačina po kojoj se menja njegova brzina u tom periodu kretanja je $v = v_i e^{-ct}$, gde je v_i njegova početna brzina (u momentu kada je isključen motor) a c je neka konstantna. Nakon vremena od 20 s brzina čamca je jednaka 5 m/s. Odrediti konstantu c , brzinu u $t = 40$ s, zavisnost ubrzanja od vremena i oblik sile koja deluje na čamac.

◊ Konstanta c se može odrediti na osnovu izraza za brzinu, koji može da se zapiše kao $\frac{v_i}{v} = e^{ct}$, što nakon logaritmovanja daje

$$\ln \frac{v_i}{v} = ct, \Rightarrow c = \frac{1}{t} \ln \frac{v_i}{v} = \dots$$

Brzina u vremenskom trenutku $t = 40$ s je

$$v(t = 40s) v_i e^{-c40s} = \dots$$

Do izraza za ubrzanje se dolazi nalaženjem izvoda po vremenu brzine

$$a = \frac{dv}{dt} = (-c)v_i e^{-ct} = -cv,$$

na osnovu čega je oblik sile ($ma = F$) određen izrazom

$$F = -m cv = -bv,$$

gde je sa b označena nova konstanta, u ovom slučaju jednaka proizvodu mase tela m i kostante c .

14. Telo mase $m = 4$ kg se kreće duž x ose pri čemu mu se koordinata sa vremenom menja po zakonu $x = t + 2t^3$, gde je x izraženo u metrima a vreme u sekundama. Odrediti njegovu kinetičku energiju, ubrzanje, silu koja deluje na njega, kao i rad te sile od trenutka $t = 0$ s do $t = 2$ s.

◇ Kako je brzina tela

$$v = \dot{x} = 1 + 6t^2$$

kinetička energija, $E_k = \frac{mv^2}{2}$ je,

$$E_k = \frac{m}{2}(1 + 6t^2)^2.$$

Ubrzanje je prvi izvod brzine po vremenu, odnosno

$$a = \dot{v} = 12t,$$

pa je sila

$$F = 12mt.$$

Snaga se može odrediti kao proizvod sile i brzine tela

$$P = Fv = 12mt(1 + 6t^2),$$

a kako je elementaran rad $dA = Fdx = 12mt(dt + 6t^2dt)$, ukupna rad u naznačenom vremenskom intervalu je

$$A = 12m \int_0^6 (t + 6t^3)dt = 12m \left(\frac{t^2}{2} + \frac{6t^4}{4} \right) \Big|_0^6 = \dots$$

15. Loptica mase 2 grama, počinje da se kroz ulje kreće pod uticajem sile Zemljine teže, polazeći iz stanja mirovanja. Nakon nekog vremena dostiže graničnu brzinu od 5 cm/s^2 . Odrediti konstantu τ kao i vreme nakon koga brzina dostiže 90% od granične vrednosti brzine.

◇ Kako je granična brzina određena izrazom $v_g = mg/b$, konstanta b je

$$b = \frac{mg}{v_\tau} = 392\text{g/s}.$$

Vremenska kontanta τ je

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{2\text{g}}{392\text{g/s}} = 5,1 \cdot 10^{-3}\text{s}.$$

Brzina loptice, u funkciji vremena, je predstavljena jednačinom (2.167). Da bi našli vreme za koje ona dostigne 90% granične brzine, potrebno je u navedenu jednačinu staviti da je $v = 0,9v_g$ i rešiti je po vremenu:

$$0,9v_g = v_g(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = 0,9$$

$$e^{-t/\tau} = 0,1$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0,1) = -2,3$$

$$t = 2,3\tau = 11,7 \cdot 10^{-3}\text{s} = 11,7\text{ms}.$$

Kao što rezultat pokazuje, posmatrana loptica dostiže granicu vrednosti brzine za veoma kratko vreme.

16. Kolika je brzina loptice iz prethodnog zadatka u trenutku $t = 11,3 \text{ ms}$? Uporedi ovu brzinu sa brzinom koju bi ta ista loptica imala u istom momentu vremena kada bi padala samo pod uticajem gravitacije.

◇ Brzina loptice prilikom kretanja kroz ulje je $4,5 \text{ cm/s}$, dok bi pri slobodnom padu bila $11,5 \text{ cm/s}$.

17. Tanak čelični lanac sa vrlo malim karikama, dužine $l = 1 \text{ m}$ i mase $m = 10 \text{ g}$, leži na horizontalnom stolu. Lanac je razvučen i položen na sto pod pravim uglom u odnosu na njegov kraj. Kraj lanca bliži kraju stola se povlaži lagano tako da deo lanca počinje da visi sa stola. Kada je deo lanca koji se nalazi na stolu činio $\eta = 0,725$ od dužine lanca, on je samostalno počeo da klizi. Smatrajući da je masa lanca raspoređena homogeno po dužini, odrediti: a) koeficijent trenja između lanca i stola, b) brzinu lanca u momentu kada je u potpunosti skliznuo sa stola.

18. Materijalna tačka pada bez početne brzine na Zemlju sa visine $H = 1000 \text{ km}$. Odrediti brzinu koju će se ona imati na visini od $h = 100 \text{ km}$. Uzeti u obzir da se pri kretanju na tim visinama može zanemariti otpor vazduha.

◇ Kako je otpor vazduha zanemarljiv, ukoliko bi se mogla zanemariti i promena ubrzanja Zemljine teže sa visinom, brzina koju tačka ima bi bila jednaka $v = \sqrt{2g(H-h)}$. Međutim na visini od 1000 km , ubrzanje Zemljine teže ima vrednost $g = \gamma M / (R+H)^2 = 7,33 \text{ m/s}^2$ (γ -univerzalna konstanta gravitacije, R -poluprečnik Zemlje a M njena

masa) što ukazuje da prethodni izraz nije potpuno tačan a da pravi mora da sadrži korekciju koja uzima u obzir promenu Zemljine teže.

U cilju dobijanja tačnog izraza zapišimo jednačinu kretanja u sistemu koordinata čiji početak se nalazi u centru Zemlje, sa x osom usmerenom ka početnom položaju materijalne tačke. Ukoliko je m masa materijane tačke, jednačina kretanja je

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{mM}{x^2}.$$

Ukoliko se iskoristi identitet $\ddot{x} = vdv/dx$, nakon integracije se dobija

$$\frac{v^2}{2} = \gamma \frac{M}{x} + C.$$

Konstanta integracije se određuje iz početnog uslova $x = R + H$, $v = 0$, tako da ovaj izraz, uz $\gamma M = gR^2$ (g je ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje), postaje

$$v = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{R^2}{R+h} - \frac{R^2}{R+H}} = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{H-h}{(1+h/R)(1+H/R)}},$$

što se za $h/R \ll 1$ i $H/R \ll 1$ svodi na izraz $v = \sqrt{2g(H-h)}$.

19. Satelit se kreće oko Zemlje po kružnoj orbiti poluprečnika r . Odrediti njegovu ukupnu mehaničku energiju. Zatim izraziti ukupnu energiju samo preko potencijalne energije U i samo preko kinetičke E_k . Smatrati da su mase sastelita m i Zemlje M poznate.

Glava 3

Oscilacije

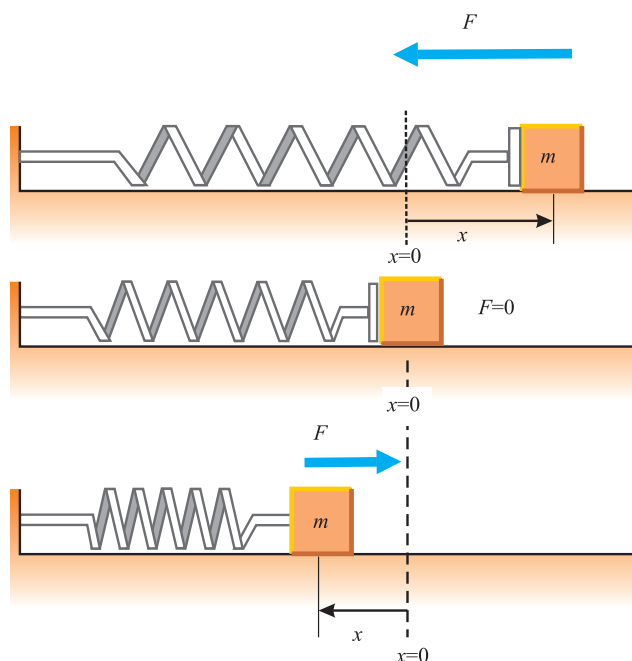
Veoma specifična vrsta kretanja se dešava kada na telo deluje sila proporcionalna odklonu tela od ravnotežnog položaja. Ukoliko je ta sila uvek usmerena ka ravnotežnom položaju, uspostavlja se "napred-nazad" kretanje oko tog položaja. Takvo kretanje se naziva *periodično kretanje*, *harmonijsko kretanje*, *osilovanje* ili *vibriranje*.¹ Primeri takve vrste kretanja su: ljuljanje na ljuljaški, kretanje klatna sata, vibriranje žica zičanih muzičkih instrumenata, ... Osim ovih primera iz svakodnevnog života, postoji niz drugih primera sistema koji se kreću periodično. Na primer, molekuli u telu koje je u čvrstom agregatnom stanju osciluju oko čvora kristalne rešetke (svog ravnotežnog stanja), elektromagnetni talasi (svetlost, radio talasi, ... u svima postoje oscilacije električnog i magnetnog polja), kolo naizmenične struje (jačina struje i napon variraju sa vremenom na periodičan način), ... Većina materijala ove glave će biti posvećena prostom harmonijskom kretanju, odnosno kretanju u kome je položaj tela sinusna funkcija vremena, što je slučaj kada se telo kreće bez gubitka mehaničke energije. U realnim mehaničkim sistemima međjutim uvek postoji gubitak energije koji se manifestuje kao prigušenje oscilatornog kretanja, čemu će takodje biti posvećen deo ove glave.

3.1 Prosto harmonijsko kretanje

Razmotrimo fizički sistem koji se sastoji od tela mase m okačenog na kraj opruge koja može da se kreće bez trenja po horizontali (slika 3.1).

Kada opruga nije ni istegnuta ni sabijena, telo je u tački odredjenoj sa $x = 0$, koja se naziva *položajem ravnoteže* sistema. Iz iskustva je poznato da

¹Ova četiri izraza su u principu ekvivalentna.



Slika 3.1: .

kada se telo izvede iz ovog položaja, počinje da osciluje oko njega. Ukoliko otklon tela iz ravnotežnog položaja, koji se inače naziva *elongacija* označimo sa x , sila koja deluje na telo, težeći da ga vrati u taj položaj je

$$\vec{F} = -kx\vec{e}_x. \quad (3.1)$$

Ovu silu se zove **restituciona** jer je uvek usmerena ka ravnotežnom položaju, odnosno uvek je suprotnog smera od *pomeraja*. Odgovarajuća jednačina kretanja, projektovana na x osu

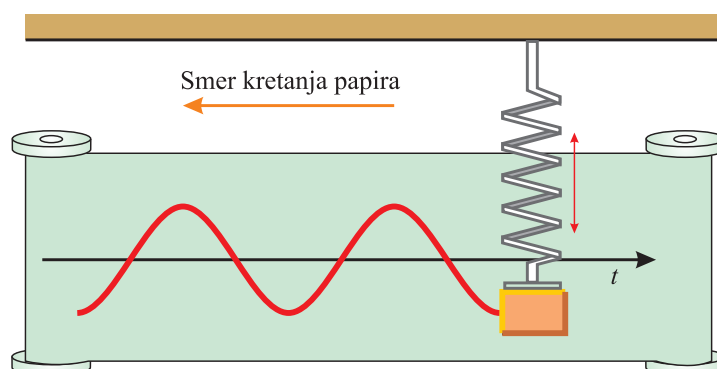
$$m\ddot{x} = -kx, \quad (3.2)$$

uz uvođenje $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, postaje

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.3)$$

a za opšte rešenje ima funkciju

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.4)$$



Slika 3.2: Uredjaj za demonstraciju prostog harmonijskog kretanja. Olovka prikačena za telo koje osciluje ostavlja na pokretnom papiru talasasti trag.

gde su A i φ konstante.² Ilustracija ovakve zavisnosti elongacije tela od vremena se može dobiti pomoću uređaja prikazanog na slici 3.2.

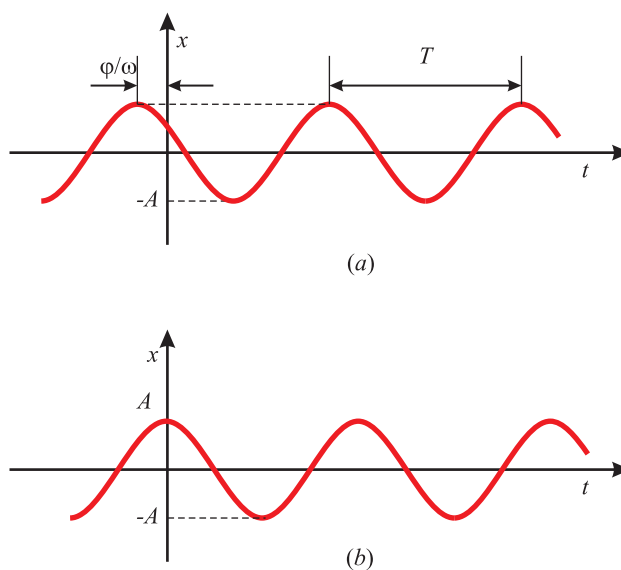
Telo određene mase je zakačeno za oprugu i osciluje u vertikalnoj ravni. Dok se telo kreće oscilujući, papir se kreće pod pravim uglom u odnosu na pravac oscilovanja i za to vreme olovka koja je prikačena za telo opisuje talasastu liniju po papiru.

Da bi videli koji je fizički smisao konstanti A , ω_0 i φ predstavimo grafički vremensku zavisnost elongacije x od vremena t (3.4) (slika 3.3).

Na ovoj slici je u stvari predstavljen deo traga olovke sa slike 3.2. **Amplituda** kretanja je maksimalni otklon (elongacija) čestice. Konstanta ω_0 se naziva **ugaona frekvencija** kretanja i ima jedinicu rad/s (geometrijski smisao ove konstante će biti naknadno diskutovan). Konstantni ugao φ , se naziva početna faza kretanja i određen je početnom vrednošću elongacije i brzinom čestice. U tom smislu argument trigonometrijske funkcije (3.4) $\omega_0 t + \varphi$, se naziva **faza** oscilovanja.

Primetimo da je elongacija x , izražena preko trigonometrijske funkcije (3.4), periodična funkcija vremena sa periodom 2π , odnosno da joj se vrednosti ponavljaju nakon određenog vremena. **Period oscilovanja T je vreme potrebno telu da prodje jedan pun ciklus kretanja.** U tom

²Ovo nije jedini način da se zapiše opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine. Ono se može predstaviti i u obliku $x = B \sin(\omega_0 t + \alpha)$ gde su B i α konstante različite od konstanti A i φ . Treći oblik rešenja je $x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$, uz nove dve konstante C_1 i C_2 (prisetimo se da broj konstanti koje se pojavljuju u opštem rešenju diferencijalne jednačine odgovara njenom redu). Koji god oblik da se iskoristi, kada se za dato kretanje, iz početnih uslova, odrede vrednosti dveju konstanti ono je na jednoznačan način opisano datim izrazom.



Slika 3.3: (a) Zavisnost elongacije tela koje vrši prosto harmonijsko kretanje od vremena. (b) $x - t$ kriva za specijalan slučaj $x = A$ za $t = 0$ i $\varphi = 0$.

slučaju kažemo da je telo napravilo jednu *punu oscilaciju*. Ovakva definicija perioda zapravo kazuje da su vrednosti elongacije x u trenutku t i $t + T$ jednake. Obzirom da je elongacija zadata kosinusnom funkcijom, to znači da se faze u t i $t + T$ razlikuju za 2π , odnosno da važi

$$\omega_0 t + \varphi + 2\pi = \omega_0(t + T) + \varphi. \quad (3.5)$$

Odavde se dobija da je $\omega_0 T = 2\pi$, ili

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (3.6)$$

Recipročna vrednost perioda je **frekvencija** kretanja. **Frekvencija kretanja predstavlja broj oscilacija koje telo napravi u jedinici vremena:**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (3.7)$$

Jedinica za frekvenciju je s^{-1} , ili **herc** (Hz).

Linearna brzina čestice koja vrši prosto harmonijsko kretanje se dobija diferenciranjem jednačine (3.4) po vremenu

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.8)$$

dok je ubrzanje

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.9)$$

Kako je $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, poslednja relacija može da se zapiše u obliku

$$a = -\omega_0^2 x. \quad (3.10)$$

Iz jednačine (3.8) se vidi, pošto sinusna funkcija osciluje između ± 1 , da brzina za ekstremalne vrednosti ima $\pm \omega_0 A$. Pošto za kosinusnu funkciju važi takodje da su joj ekstremalne vrednosti ± 1 , iz jednačine (3.9) se vidi da su maksimalne vrednosti ubrzanja $\pm \omega_0^2 A$. Na osnovu ovih razmatranja su amplitudne vrednosti brzine i ubrzanja

$$v_{max} = \omega_0 A \quad (3.11)$$

$$a_{max} = \omega_0^2 A. \quad (3.12)$$

Na slici 3.4 (a), (b) i (c) su prikazane zavisnosti elognacije, brzine i ubrzanja, respektivno. Sa nje se vidi da se faza ubrzanja razlikuje od faze elongacije za $\pi/2$ rad, odnosno, tamo gde x ima maksimum ili minimum, brzina je nula.

Takodje, tamo gde je elongacija nula, brzina je maksimalna. Osim toga se vidi da je faza ubrzanja pomerena za π radijana u odnosu na fazu elongacije, što znači da tamo gde x ima maksimum i ubrzanje ima maksimalnu vrednost ali suprotnog predznaka u odnosu na znak elongacije. Ako pretpostavimo da je u $t = 0$ početna elongacija bila x_i a brzina v_i , jednačine (3.8) i (3.12) daju

$$x_i = A \cos \varphi, \quad (3.13)$$

$$v_i = -\omega_0 A \sin \varphi. \quad (3.14)$$

Deljenje ovih dveju jednačina eliminiše amplitudu i daje $v_i/x_i = -\omega_0 \tan \varphi$, odnosno

$$\tan \varphi = -\frac{v_i}{\omega_0 x_i}. \quad (3.15)$$

Ukoliko ih pak kvadriramo, podelimo drugu sa ω_0^2 i nakon toga saberemo, dobija se

$$x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega_0}\right)^2 = A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi. \quad (3.16)$$

Ako iskoristimo identitet $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, za amplitudu se dobija

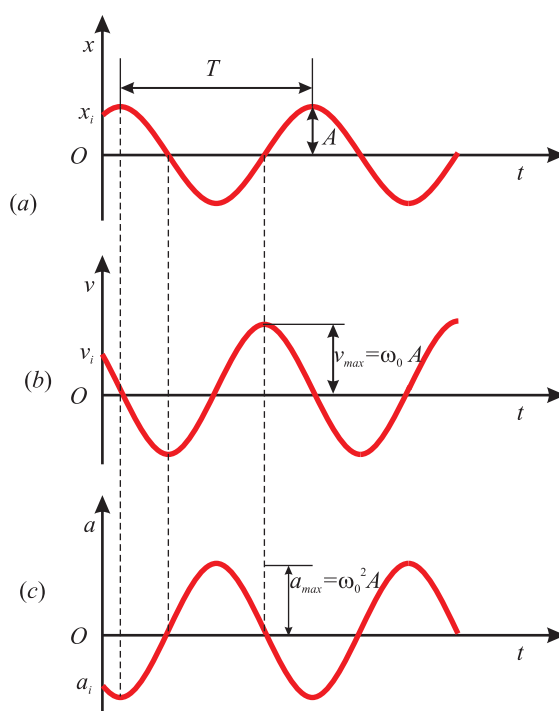
$$A = \sqrt{x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega_0}\right)^2}. \quad (3.17)$$

Kako je veza perioda i frekvencije $T = 2\pi/\omega_0$ a za kretanje tela mase m okačeno za oprugu krutosti k , važi $\omega_0^2 = k/m$, njegov period i frekvencija su dati relacijama

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.18)$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.19)$$

Iz ovih izraza se vidi da **period i frekvencija zavise samo od njegove mase m i krutosti opruge k** . Drugim rečima, frekvencija i period su nezavisni od amplitude kretanja.



Slika 3.4: Elongacija, brzina i ubrzanje kod prostog harmonijskog oscilovanja.

Primeri

Elongacija čestice je zadata

$$x = (4m) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right),$$

gde je t zadato u sekundama a ugao u zagradi u radijanima.

(a) Odrediti amplitudu, frekvenciju, i period kretanja.

◊ Upoređivanje jednačine ovog oscilovanja sa jednačinom (3.4) da su amplituda i ugaona učestnost $A = 4$ m i $\omega_0 = \pi$ rad/s. Odavde je sada frekvencija $\nu = \omega_0/2\pi = \pi/2\pi = 0,5$ Hz, dok je period $T = 1/\nu = 2$ s.

(b) Odrediti brzinu i ubrzanje čestice u ma kom momentu vremena

◊

$$v = \frac{dx}{dt} = -4m \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \frac{d}{dt}(\pi t) = -4\pi m/s \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -4\pi m/s \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \frac{d}{dt}(\pi t) = -4\pi^2 m/s^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right).$$

(c) Odrediti položaj, brzinu i ubrzanje tela u $t = 1$ s.

◊

$$x = (4m) \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (4m) \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 4m(-0,707) = -2,83m.$$

$$v = -4\pi m/s \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\pi m/s(-0,707) = 8,89m/s$$

$$a = -4\pi^2 m/s^2 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\pi^2 m/s^2(-0,707) = 27,9m/s^2.$$

(d) Odrediti maksimalne (amplitudne) vrednosti brzine i ubrzanja.

$$v_{max} = \omega_0 A = 12,6m/s$$

$$a_{max} = \omega_0^2 A = 39,5m/s.$$

(e) Odrediti pomeraj tela za interval vremena od $t = 0$ s do $t = 1$ s.

◊ x koordinata u momentu vremena $t = 0$ je

$$x_i = 4m \cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = 4m(0,707) = 2,83m.$$

Pod (c) smo našli da je u $t = 0$ s elongacija $-2,83$ m, pa je pomeraj

$$\Delta x = x_f - x_i = -2,83m - 2,83m = -5,66m.$$

Obratimo pažnju na to da je ovde reč o kretanju tela u prvoj sekundi, što predstavlja polovinu perioda. U drugoj sekundi kretanja predjeni put tela i njegov pomeraj veće neće biti isti.

(f) Kolika je faza kretanja u $t = 2$ s?

$$\diamond \omega_0 t + \varphi = \pi t + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}.$$

3.1.1 Energija prostog harmonijskog oscilatora

Pošto se smatra da na telo koje se kreće po zakonu prostog harmonijskog oscilatora, ne deluje sila trenja, treba očekivati da je njegova ukupna mehanička energija konstantna.

Kinetička energija takvog oscilatora je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.20)$$

Potencijalna energija je sa druge strane

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.21)$$

Primetimo da su i kinetička i potencijalna energija pozitivne veličine. Kako je $\omega_0^2 = k/m$, ukupna mehanička energija oscilatora je

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}kA^2[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (3.22)$$

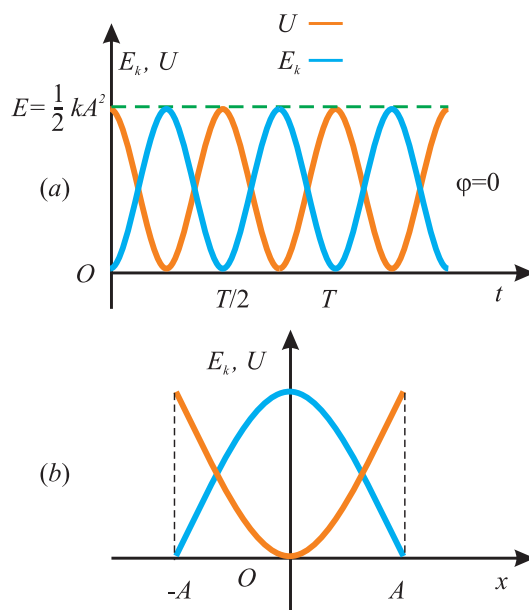
Imajući u vidu da je izraz u uglastoj zagradi prema osnovnom trigonometrijskom identitetu jednak jedinici, izraza za ukupnu energiju postaje

$$E = \frac{1}{2}kA^2. \quad (3.23)$$

Na osnovu ovoga se može reći da je **ukupna mehanička energija prostog harmonijskog oscilatora konstanta kretanja i da je proporcionalna kvadratu amplitude**. Obzirom da je ukupna energija zbir kinetičke i potencijalne, ovo tvrdjenje znaci da onda kada je kinetička velika, potencijalna je proporcionalno mala, itd. Na osnovu onoga što nam je već poznato o kretanju harmonijskog oscilatora, jasno je da je u amplitudnim tačkama, kada je $x = \pm A$, ukupna energija jednaka maksimalnoj potencijalnoj, $E = U_{max} = \frac{1}{2}kA^2$, jer je u tim tačkama $v = 0$. U položaju ravnoteže, je pak, potencijalna energija nula jer je $x = 0$, dok je ukupna mehanička jednaka maksimalnoj kinetičkoj

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}m \frac{k}{m} A^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Zavisnost kinetičke i potencijalne energije od vremena je predstavljena na slici 3.5 (a) za slučaj kada je početna faza $\varphi = 0$. Kao što je već napomenuto, i E_k i U su pozitivne veličine, a njihov zbir je stalno jednak $\frac{1}{2}kA^2$, ukupnoj mehaničkoj energiji sistema. Promena E_k i U sa elongacijom je predstavljena na delu (b) iste slike. Energija se neprekidno transformiše između



Slika 3.5: (a) Zavisnost E_k i U od vremena za slučaj kada je početna faza jednaka nuli. (b) Zavisnost E_k i U od elongacije.

potencijalne energije koja se akumulira u deformisanoj opruzi i kinetičke energije tela koje ona pokreće.

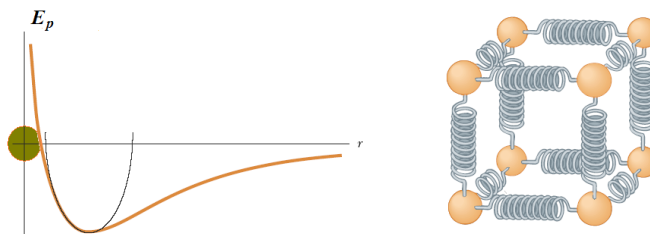
Zakon održanja energije se može iskoristiti za određivanje brzine za proizvoljnu elongaciju sistema koji osciluje na ovaj način, polazeći od izraza za ukupnu energiju

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}. \quad (3.24)$$

Na kraju se može opravdano da postavi pitanje, zbog čega smo puno vremena potrošili na studiranje prostog harmonijskog oscilovanja. To je uradjeno jer je to dobar model za puno fizičkih fenomena. Na primer Lennard-Jones-ov potencijal diskutovan u prethodnoj glavi, je komplikovana funkcija koja opisuje sile koje drže atome na okupu unutar molekula. Slika 3.6 pokazuje da je za mala pomeranja atoma od njihovih ravnotežnih položaja, deo krive koja opisuje potencijalnu energiju atoma u molekulu, približno parabola, a kao što znamo potencijalna energija prostog harmonijskog

oscilatora ima upravo takvu zavisnosto od elongacije (slika 3.5). Ovo znači da možemo sile koje povezuju atome u molekulu da predstavimo tankim oprugama.



Slika 3.6: Za mala pomeranja atoma, grafik potencijalne u zavisnosti od rastojanja molekula je sličan grafiku zavisnosti potencijalne energije oscilatora od elongacije.

3.1.2 Klatno

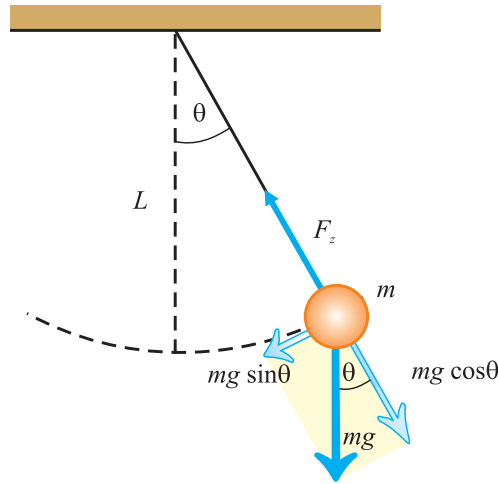
Klatno je mehanički sistem koji se kreće na periodičan način u polju Zemljine teže. U pogledu realizacije razlikujemo sledeće vrsta klatna: matematičko, fizičko, torziono, ...

Matematičko klatno

Matematičko klatno se sastoji od tela mase m (koje smatramo materijalnom tačkom) okačenog o tanku i neistegljivu nit, dužine l , u polju Zemljine teže (slika ...). Kretanje ovog tela, koje se odvija u vertikalnoj ravni, nakon izvodjenja iz ravnotežnog položaja, se na dalje odvija pod dejstvom sile gravitacije. U slučaju da su uglovi otklona mali,³ ovakav sistem se kreće kao prost oscilator.

Sile koje deluju na telo u ovom slučaju su sila zatezanja, F_z , i gravitaciona sila $m\vec{g}$. Tangencijalna komponenta sile zemljine teže $mg \sin \theta$, je uvek usmerena kao ravnotežnom položaju, $\theta = 0$, odnosno uvek je suprotno usmerena od vektora pomeraja. Iz tog razloga je tangencijalna komponenta gravitacione sile, ustvari restituciona sila, tako da drugi Njutnov zakon, za

³Dovoljno "mali" uglovi su uglovi manji od 15° i za njih je $\sin \theta \approx \theta$. Naime, za ovako male uglove je greška prilikom zamene $\sin \theta$ sa θ manja od 1%. U to se je lako uveriti ako ugao θ predstavimo u radijanima a zatim izračunamo na digitronu vrednost $\sin \theta$.



Slika 3.7: Kada je ugao otklona θ dovoljno mali, matematičko klatno se kreće kao prosti harmonijski oscilator oko ravnotežnog položaja $\theta = 0$. Restituciona sila je u ovom slučaju $-mg \sin \theta$.

kretanje po tangenti glasi

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta, \quad (3.25)$$

gde je s deo luka koji je prešlo telo mase m a znak $-$ pokazuje da je tangencijalna sila usmerena ka ravnotežnom položaju. Kako za male uglove važi, $s = L\theta$, ta jednačina postaje

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta. \quad (3.26)$$

Na prvi pogled ova jednačina ne opisuje linearno harmonijsko oscilovanje jer na desnoj strani ne stoji veličina od koje se traži izvod na levoj strani jednačine (uporedi sa jednačinom (3.2)), već njen sinus. Medjutim, kako smo pretpostavili da je ugao otklona mali, $\sin \theta$ se može aproksimirati sa θ , tako da jednačina kretanja matematičkog klatna postaje

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta. \quad (3.27)$$

Kako ova jednačina ima formu jednačine koja opisuje kretanje linearnog harmonijskog oscilatora, zaključujemo da se, za male uglove otklona (ampli-

tude), kretanje matematičkog klatna, svodi na linearno harmonijsko oscilovanje. U skladu sa tim, rešenje poslednje diferencijalne jednačine je

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.28)$$

gde je θ_{max} , maksimalna ugaona elongacija, a ugaona frekvencija je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (3.29)$$

Na osnovu ovoga je period oscilovanja klatna⁴

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (3.30)$$

Drugim rečima, **period i frekvencija matematičkog klatna zavise jedino od dužine klatna i od ubrzanja zemljine teže**. Kako je period nezavisan od mase klatna, može da se zaključi da sva klatna jednake dužine, koja osciluju na istom mestu (isto g), osciluju sa istim periodom.⁵

Fizičko klatno

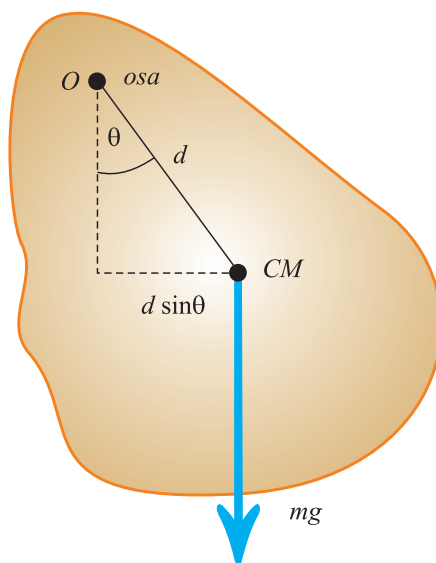
Pretpostavimo da smo na kažiprst okačili ofinger za kačenje odeće. Ukoliko ga sada drugom rukom izvedemo iz ravnotežnog položaja, za neki mali ugao, i pustimo, on će početi da osciluje. Kako osciluje oko fiksne ose koja **ne prolazi** kroz njegov centar masa, ne možemo ga aproksimirativno posmatrati kao materijalnu tačku, a njegovo kretanje se onda ne svodi na kretanje matematičkog klatna. Takvo telo se naziva **fizičko klatno**.

Razmotrimo kretanje krutog tela, okačenog u tački O koja je na udaljenosti d od centra mase tela (slika 3.8). Gravitacija stvara moment sile oko ose kroz tačku O , a intenzitet tog momenta je $mgd \sin \theta$, gde je ugao θ prikazan na slici 3.8. Na osnovu zakona kretanja $I\vec{\alpha} = \vec{M}$, gde je I moment inercije tela u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku O , dobija se

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd \sin \theta. \quad (3.31)$$

⁴Ukoliko se jednačina (3.25) rešava bez aproksimacije da je reč o malim uglovima, za period se dobija formula $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_{max}}{2} + \dots \right]$, iz koje se vidi da se za male amplitudne uglove dobija dobro poznata relacija za period malih oscilacija matematičkog klatna (3.30).

⁵Matematičko klatno može da služi za baždarenje časovnika jer njegov period kretanja zavisi samo od dužine klatna i lokalne vrednosti ubrzanja zemljine teže g . Ono je takodje uobičajeni uredjaj za određivanje ubrzanja zemljine teže. Takva merenja su jako bitna jer varijacije lokalne vrednosti g mogu da ukažu na promene u sastavu zemljišta, odnosno na postojanje izvora nafte ili nekih drugih supstanci ispod zemljine površine.



Slika 3.8: Fizičko klatno.

Negativan predznak izraza na desnoj strani jednačine kretanja ukazuje na tendenciju momenta sile da smanji ugao otklona θ . To znači da gravitaciona sila produkuje restitucioni momenat. Ukoliko razmatramo kretanje fizičkog klatna za male ugaone elongacije, možemo da primenimo aproksimaciju $\sin \theta \approx \theta$, jednačina kretanja postaje

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \left(\frac{mgd}{I} \right) \theta = -\omega^2\theta. \quad (3.32)$$

Kako ova jednačina ima isti oblik kao i jednačina kretanja lineranog harmonijskog oscilatora, kretanje fizičkog klatna je dakle harmonijsko oscilovanje, a rešenje jednačine kretanja je $\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$, gde je θ_{max} maksimalna ugaona elongacija klatna, dok je ugaona frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}. \quad (3.33)$$

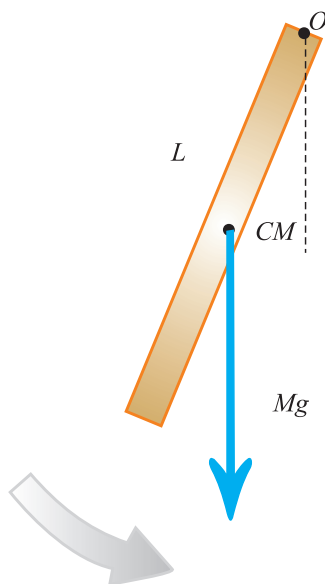
Period fizičkog klatna je prema tome

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}. \quad (3.34)$$

Ovaj rezultat može da se iskoristi za određivanje momenata inercije pljosnatih krutih tela. Ukoliko je za njih poznato kolika je veličina d , tj. gde

se nalazi centar masa, moment inercije može da se izračuna iz obrasca za period. Na kraju, primetimo da se za slučaj kada je $I = md^2$, tj. kada je celokupna masa tela skoncentrisana u centru masa, period fizičkog klatno postaje jednak periodu matematičkog.

Zadatak. Homogen štap, dužine L i mase M , okačen za jedan kraj, osciluje u vertikalnoj ravni (slika 3.9). Odrediti period malih oscilacija.



Slika 3.9: Štap koji osciluje okačen o jedan kraj.

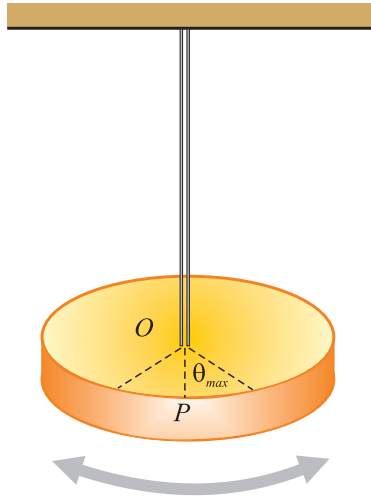
◇ Moment inercije ovakvog sistema je $I = \frac{1}{3}ML^2$. Udaljenost centra masa od tačke vešanja je $d = \frac{L}{2}$. Na osnovu toga je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Torziono klatno

Na slici 3.10 je prikazano telo koje je okačeno žicom za fiksnu tačku. Kada se telo zavrne za mali ugao θ , usled upredanja žice o koju je ono okačeno, javlja se restiticioni (povratni) moment koji je proporcionalan uglu upredanja

$$M = -\kappa\theta. \quad (3.35)$$



Slika 3.10: Torziona klatna je kruto telo okačeno elastičnom žicom koje može da osciluje oko linije OP sa amplitudom θ_{max} .

Veličina označena sa κ je *torziona konstanta* žice. Primena drugog Njutnovog zakona za rotaciona kretanja, dobijamo

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta. \quad (3.36)$$

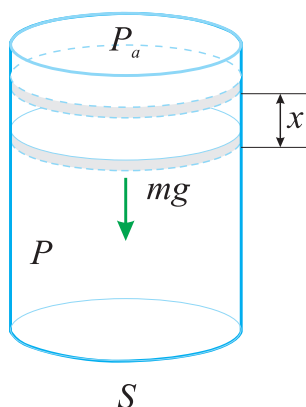
I u ovom slučaju se dakle dobija jednačina koja opisuje harmonijsko oscilovanje, u ovom slučaju sa ugaonom učestanošću $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ pa je period torzionog klatna

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \quad (3.37)$$

Razlika u ovom slučaju u odnosu na prethodno razmatrane je što, sve dok smo u oblasti u kojoj su deformacije žice elastične, izrazi koji opisuju oscilovanje torzionog klatna važe i bez aproksimacije malih uglova deformacije.

3.1.3 Oscilovanje klipa u sudu sa idealnim gasom

Neka se klip mase m površine poprečnog preseka S nalazi u sudu zapremine V_0 u kome se nalazi idealan gas izolovan od okoline (slika 3.11).



Slika 3.11: Oscilovanje klipa koji zatvara sud sa idealnim gasom.

Neka je u stanju ravnoteže pritisak u sudu jednak P_0 . Ovaj pritisak je zbir atmosferskog pritiska P_a i pritiska mg/S , kojim klip deluje na gas u sudu usled delovanja zemljine teže

$$P_0 = P_a + \frac{mg}{S}. \quad (3.38)$$

Podgnemo li na neki način klip na visinu x , zapremina suda će porasti i biti jednaka $V = V_0 + Sx$, što istovremeno dovodi do smanjenja pritiska. Pritisak gasa u ovom stanju, obzirom da je on topolotno izolovan, se može odrediti iz jednačine adijabate

$$PV^\kappa = P_0V_0^\kappa, \quad (3.39)$$

(κ je izložilac adijabate koji zavisi od broja stepena slobode molekula gasa) odakle je

$$P = \frac{P_0}{\left(1 + x\frac{S}{V_0}\right)^\kappa}. \quad (3.40)$$

Ukoliko se klip, nakon izvodjenja iz ravnoteže za malu vrednost⁶ x pusti, počće da osciluje oko svog ravnotežnog položaja. U tom slučaju prethodni izraz se može napisati u aproksimativnoj formi⁷

$$P = P_0 \left(1 - x\frac{\kappa S}{V_0}\right). \quad (3.41)$$

⁶Veličina x treba da bude mala u poredjenju sa visinom suda V_0/S .

⁷Za male vrednosti x , važi približan izraz $(1+x)^b \approx 1+bx$

Na klip u principu deluju tri sile: sila atmosferskog pritiska $-P_a S$, sila pritiska gasa u sudu PS i sila zemljine teže $-mg$ (predzanci navedenih sila odgovaraju smeru x ose na gore, odnosno suprotno od smera delovanja sile zemljine teže), tako da je ukupna sila koja deluje na njega

$$F = -P_a S + PS - mg.$$

Prema (3.38) i (3.41) prethodni izraz prelazi u

$$F = -S \left(P_o - \frac{mg}{S} \right) + SP_0 \left(1 - x \frac{\kappa S}{V_0} \right) - mg = -x \frac{\kappa P_0 S^2}{V_0} \quad (3.42)$$

odakle se vidi da se za male otklone x kretanje klipa svodi na linearno harmonijsko oscilovanje sa ugaonom frekvencom

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa P_0 S^2}{m V_0}}. \quad (3.43)$$

3.1.4 Veza sa uniformnim kretanjem po kružnici

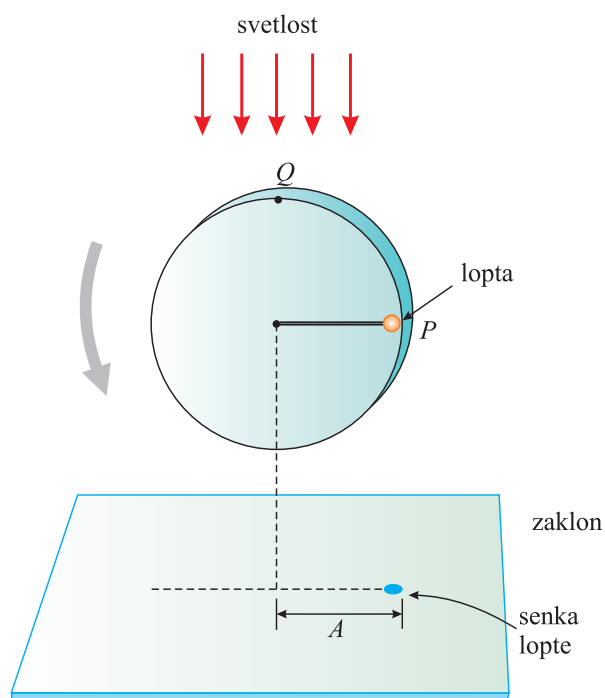
Razni aspekti harmonijskog oscilovanja se mogu bolje razumeti i objasniti ako se proanalizira analogija izmedju njega i uniformnog kretanja po kružnici. Slika 3.12 predstavlja šemu uređaja koji može da demonstrira ovu vezu. Lopta je zakačena za jedan kružni providni ram poluprečnika A , unutar koga može da vrši uniformno kretanje, pri čemu je odozgo osvetljenja tako da prilikom kretanja baca senku na ekran. Očigledno je da će ovom prilikom, ukoliko se lopta kreće uniformno po kružnici-ramu, njena senka da vrši harmonijsko oscilovanje na ekranu.

Razmotrimo kretanje čestice koja se nalazi u tački P , koja može da se kreće po kružnoj putanji (slika 3.13), pri čemu duž OP gradi ugao φ sa x osom u $t = 0$.

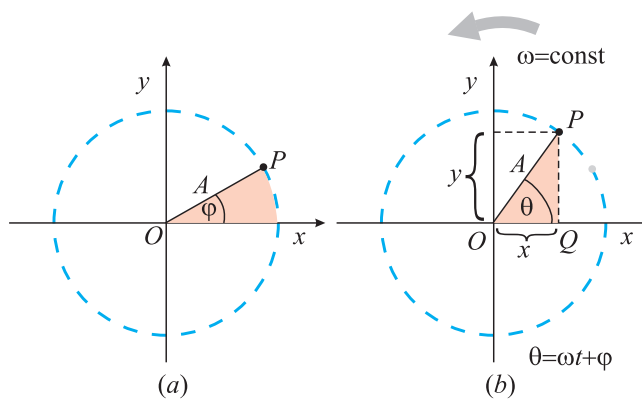
Ukoliko se čestica kreće konstantnom ugaonom brzinom ω po kružnici, u nekom trenutku vremena $t > 0$, duž OP gradi sa x osom ugao θ koji je jednak $\theta = \omega t + \varphi$. Prilikom kretanja čestice P po kružnici poluprečnika A , njena projekcija na x osu, Q , se kreće napred-nazad po x osi izmedju graničnih vrednosti $\pm A$.

Lako je primetiti da P i Q imaju uvek istu vrednost x koordinate. Iz trougla OPQ , se za x dobija

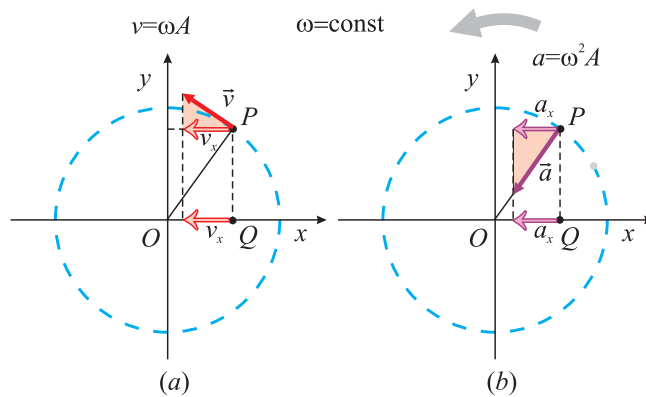
$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.44)$$



Slika 3.12: Eksperiment za pokazivanje veze izmedju uniformnog kretanja po kružnici i harmonijskog oscilovanja.



Slika 3.13: Uniformno kretanje tačke P po kružnici i oscilatorno kretanje tačke Q .



Slika 3.14: x komponente brzine i ubrzanja tačke P i tačke Q su jednake.

Ovaj izraz pokazuje da se projekcija tačke P na x osu, odnosno tačka Q , kreće kao harmonijski oscilator.⁸

Ova geometrijska analogija pokazuje da je vreme potrebno za jedan obrt tačke P po kružnici jednak periodu oscilovanja T linearnog harmonijskog oscilovanja između $x = \pm A$. Pri tome je ugaona brzina ω jednaka ugaonoj frekvenciji ω linearnog harmonijskog oscilovanja duž x ose. Početna faza φ linearnog harmonijskog oscilovanja odgovara početnom uglu koji je gradila duž OP sa x osom. Poluprečnik kružne putanje jednak je amplitudi oscilovanja.

Kako je relacija koja povezuje linearnu, ugaonu brzinu i poluprečnik putanje $v = r\omega$, čestica koja se kreće po kružnici poluprečnika A , ima brzinu $v = A\omega$. Sa slike 3.14 (a), se vidi da je x komponenta brzine $-\omega A \sin(\omega t + \varphi)$.

Ubrzanje tačke P pri kružnom kretanju, je radijarno i ima intenzitet $v^2/A = \omega^2 A$. Sa slike 3.14 (b) se može videti da je x komponenta ubrzanja $-\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$. Ovo je istovremeno i ubrzanje projektovane tačke Q duž x ose.

3.2 Prigušene oscilacije

Oscilatorno kretanje koje je razmatrano do sada se odvija u idealnim sistemima, bez trenja, i jednom kada bi bilo uspostavljeno u sistemu, odvijalo

⁸ Jasno je da je, umesto posmatranja projekcije tačke na x osu, moguće posmatrati njenu projekciju na y osu. Zaključak bi bio analogan, tako da može da se kaže da **uniformno kružno kretanje može da se smatra kombinacijom dva linearna harmonijska kretanja**, pri čemu je jedno duž x ose a drugo duž y ose, koja se u fazi razlikuju za 90° .

bi se večno. U realnim sistemima, čije se kretanje ne odvija u vakuumu, već u vazduhu ili nekoj drugoj sredini, potrebno je uzeti u obzir dejstvo okoline na kretanje tela. Sila kojom sredina deluje na telo u kretanju zavisi od osobina sredine (gustine, viskoznosti, ...), od oblika tela koje se kreće i njegove brzine. Na primer, ljudski organizam je naviknut na kretanje kroz vazduha, i otpor vazduha kretanje koji je mali, uopšte ne osećamo ukoliko nema dodatnog kretanja vazduha, odnosno vetra. Za razliku od kretanja kroz vazduh, prilikom kretanja kroz vodu jako se oseća otpor sredine. Iskustveni plivači osetiće čak i razliku prilikom plivanja u slatkovodnoj i morskoj vodi. Vožnja na motociklu ilil u otvorenim kolima, pokazaće da se otpor sredine povećava sa porastom brzine. Oblik tela koje se kreće je takodje jako bitan, i o njemu se vodi naročito računa prilikom konstrukcije automobila, brzih vozova, šatlova, i slično, kakko bi se smanjio otpor sredine a time smanjila potrošnja goriva i pregrevanja tela⁹ koja se kreću.

Na osnovu ove analize, jasno je da će se realnije opisivanje oscilovanja ostvariti kada osim restitucione sile uzmemo u obzir i silu otpora sredine. Posledica njenog postojanja je da se oscilovanje usporava sa vremenom jer se ukupna mehanička energija sistema troši na savladavanje otpora sredine. Usled toga će se energija smanjivati sa vremenom a oscilacije priguštivati pa se ovaj (realan) tip oscilovanja naziva **prigušeno** oscilovanje.

Radi jednostavnosti analize, a i zbog činjenice da su brzine kretanja oscilujućih tela relativno male, pretpostavićemo da je sila otpora sredine linearno proporcionalne brzini

$$\vec{F} = -b\vec{v}, \quad (3.45)$$

gde je b koeficijent proporcionalnosti izmedju sile otpora sredine i brzine kretanje tela¹⁰. Jednačina (realnog) oscilatora, koji se kreće duž x ose je u skladu sa tim

$$ma_x = -kx - bv, \quad (3.46)$$

odnosno

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}. \quad (3.47)$$

U zavisnosti od vrednosti koeficijenta b , ova jednačina ima različita rešenja o kojima će biti više reči kasnij. U slučaju kada je sila trenja mala u poredjenju sa maksimalnom restitucionom, rešenje jednačine kretanje je

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.48)$$

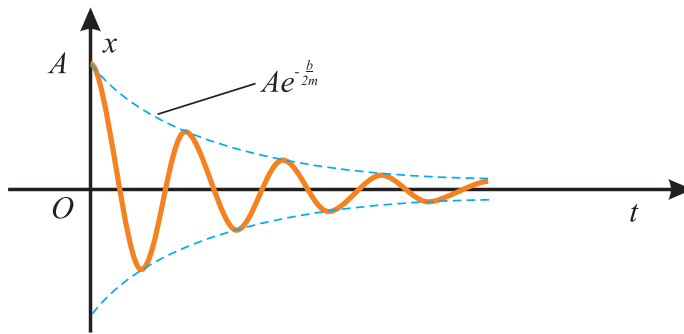
⁹Ovaj efekat je jako bitan pri veoma velikim brzinama.

¹⁰Ovaj koeficijent zavisi od osobina sredine i od dimenzija i oblika tela koje se kreće kroz nju.

gde je ugaona frekvencija oscilovanja

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \quad (3.49)$$

Veličina $b/2m$ se naziva koeficijent prigušenja i obično označava sa β . Zamenom formule (3.48) u izraz (3.47) pokazuje da ona zaista predstavlja rešenje diferencijalne jednačine (3.47).



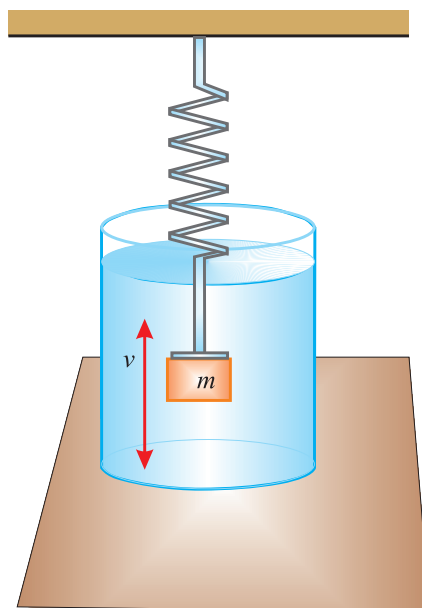
Slika 3.15: (a) Zavisnost elongacije od vremena kod oscilovanja sa (malim) prigušenjem.

Na slici (3.15) je prikazana zavisnost elongacije od vremena za telo koje osciluje u prisustvu sile trenja koja izaziva postepeno gašenje oscilacija. Slika 3.16 prikazuje jedan takav sistem, telo mase m prikačeno za elastičnu oprugu, koja osciluje potopljena u viskozni fluid. Može da se uoči da, kada je sila trenja mnogo manja od restitutionone sile, se oscilatoran karakter kretanja očuvava, ali pri tome amplituda tih (prigušenih) oscilacija opada sa vremenom, sve dok se proces oscilovanja potpuno ne priguši. Svaki sistem koji se kreće na ovaj način se naziva **prigušeni oscilator**. Isprekidana linija na slici (3.15), koja definiše *obvojniciu* oscilatorne krive, predstavlja uticaj eksponencijalnog faktora u jednačini (3.48), koji govori o tome da zapravo amplituda, prilikom ovog kretanja, sa vremenom opada eksponencijalno.

Ugaona frekvencija prigušenog oscilovanja, obično se zapisuje u obliku

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \quad (3.50)$$

gde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, predstavlja ugaonu frekvenciju u odsustvu sile koja prigušuje oscilovanje (neprigušeno oscilovanje) i naziva se **prirodna frekvencija** sistema. Ukoliko je maksimalna vrednost sile koja prigušuje oscilovanje takva



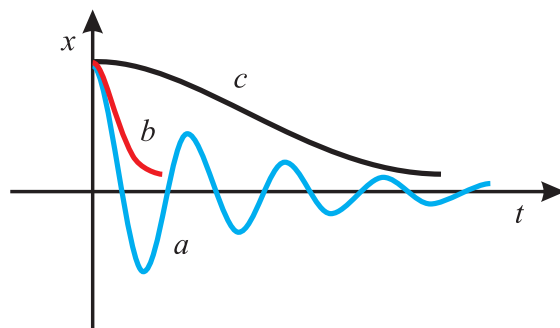
Slika 3.16: (a) Prigušeno oscilovanje.

da je $F_{max} = bv_{max} < kA$, kretanje sistema se naziva **kvazi-periodičnim**.¹¹ Jasno je da što je intenzitet sile bliži vrednosti kA , to se amplituda oscilacija brže smanjuje (kriva *a* na slici 3.17). Kada koeficijent prigušenja *beta* dostigne takozvanu kritičnu vrednost takvu da je $b_c/2m = \omega_0$, sistem uopšte ne vrši oscilatorno kretanje, već je **kritično prigušen**, i nije periodično¹². U tom slučaju, ako se telo izvede iz ravnotežnog položaja i pusti, vraća se u ravnotežni položaj i ostaje tamo (kriva *b* na slici 3.17). I treći slučaj se dešava ukoliko je sredina izuzetno viskozna, tako da je maksimalna vrednost sile koja izaziva prigušenje veća od amplitude restitucione sile, $bv_{max} > kA$ i $b/2m > \omega_0$, nastupa takozvano **prekomerno prigušenja** a kretanje sistema je **aperiodično**. I u ovom slučaju nema oscilovanja, sistem koji je izveden iz ravnoteže, vraća se u ravnotežni položaj, a vreme potrebno

¹¹Kretanje kod prigušenih oscilacija, sa malim prigušenjem, se naziva kvazi-periodičnim jer nije ispunjen uslov periodičnosti elongacije $x(t+T) = x(t)$ pošto se amplituda oscilovanja, kao što smo videli, smanjuje sa vremenom. Međutim, kod ovakvog kretanja postoji periodičnost faze oscilovanja $\Phi = \omega t + \varphi$, odnosno važi $\Phi(t+T) = \Phi(t) + 2\pi$, pa se period kretanja ipak može definisati. Kao što smo videli, kvazi-periodično kretanje je predstavljeno kao proizvod jedne neperiodične ($Ae^{-\beta t}$) i jedne periodične ($\cos(\omega t + \varphi)$) funkcije vremena.

¹²Ovaj tip kretanja se naziva kritično aperiodičnim.

za povratak je utoliko veće ukoliko je veće prigušenje (kriva c na slici 3.17).¹³



Slika 3.17: Grafik elongacije u zavisnosti od vremena kod prigušenog oscilovanja sa različitim vrednostima koeficijenta prigušenja.

U bilo kom slučaju, kada postoji prigušenje, energija oscilatora je na kraju jednaka nuli a izgubljena mehanička energija prelazi u unutrašnju energiju sredine.

Rešavanje jednačine koja opisuje prigušeno oscilovanje

Jednačina kretanja (3.47) se može zapisati u obliku

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.51)$$

gde je x elongacija, $\beta = \frac{b}{2m}$ koeficijent prigušenja, a ω_0 ugaona frekvencija slobodnih, odnosno neprigušenih oscilacija (pri $\beta = 0$, kada nema gubitka energije).

Ukoliko se elongacija x zapiše u vidu proizvoda dva faktora $x(t) = e^{-\beta t} z(t)$, da bi videli kakav efekat ova smena ima na polaznu jednačinu moramo naći prvi, odnosno drugi izvod i zameniti u izraz (3.51). Kako su traženi izvodi

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} (e^{-\beta t} z(t)) = z \frac{d}{dt} e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \frac{d}{dt} z = e^{-\beta t} (\dot{z} - \beta z)$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} (e^{-\beta t} (\dot{z} - \beta z)) = e^{-\beta t} (\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z),$$

dobija se

$$e^{-\beta t} [\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z + 2\beta(\dot{z} - \beta z) + \omega_0^2 z] = 0. \quad (3.52)$$

¹³Kao što se vidi sa slike na kojoj su predstavljena ova tri tipa kretanja sa prigušenjem, gubitak energije je najbrži kod kritičnog aperiodičnog kretanja.

Dobijena jednačina je proizvod faktora $e^{-\beta t}$ i faktora koji je izdvojen uglastom zagradom. Kako relacija mora da bude jednaka nuli u svakom momentu vremena,¹⁴ odatle sledi da je izraz u uglastoj zagradi mora da uvek bude jednak nuli. Kao što je lako primetiti ovaj izraz nakon sredjivanja može da se zapiše u obliku

$$\ddot{z} + [\omega_0^2 - \beta^2]z = 0. \quad (3.53)$$

Ukoliko je $\beta < \omega_0$ može da se uvede nova veličina $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, tako da prethodna jednačina postaje

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad (3.54)$$

a to je, kao što je poznato, jednačina linearnih harmonijskih oscilacija, čije opšte rešenje je oblika $z = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, tako da je, obzirom na uvedenu smenu, opšte rešenje jednačine prigušenih oscilacija, oblika

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.55)$$

pri čemu je $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

3.2.1 Koeficijent prigušenja i period prigušenih oscilacija

U mnogim sistemima je koeficijent prigušenja mali u poredjenju sa frekvencijom sopstvenih oscilacija ω_0 , $\beta \ll \omega_0$. U tim slučajevima kretanje sistema može da se razmatra kao skoro harmonijsko oscilovanje frekvence ω i sa amplitudom koja se menja po zakonu $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ (slika). Koeficijent prigušenja β na taj način određuje brzinu smanjenja amplitude oscilacija.

Period prigušenih oscilacija je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (3.56)$$

Neka se prvi najveći otklon tela A_1 dostiže u momentu vremena t_1 . Sledeći najveći otkloni A_2, A_3, \dots , obrazuju geometrijsku progresiju:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 e^{-\beta t_1}, \\ A_2 &= A_0 e^{-\beta(t_1+T)}, \\ A_3 &= A_0 e^{-\beta(t_1+2T)}, \dots \end{aligned} \quad (3.57)$$

¹⁴Prvi faktor, $e^{-\beta t}$, je jednak nuli samo za $t \rightarrow \infty$.

Odnos dveju amplituda koje odgovaraju momentima vremena koji se razlikuju za jedan period je

$$\frac{A(t_1)}{A(t_1 + T)} = e^{\beta T}. \quad (3.58)$$

Veličina $e^{\beta T}$, koja definiše taj odnos, naziva se *dekrement prigušenja* a njen logarima *logaritamski dekrement prigušenja*

$$\lambda = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_1 + T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (3.59)$$

Vreme za koje se amplituda smanji e puta se naziva vreme relaksacije i ono je jednako $\tau = 1/\beta$. Broj oscilacija sistema za to vreme je

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda},$$

pa je znači, logaritamski dekrement prigušenja jednak recipročnoj vrednosti broja oscilacija, koje se izvrše za vreme relaksacije $\tau = 1/\beta$.

3.2.2 Faktor dobrote

Često se za opsivanje oscilatornih sistema koristi i veličina koja se naziva *faktor dobrote* koja se definiše kao

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \quad (3.60)$$

koja je proporcionalna broju oscilacija N_e koje se izvrše za vreme relaksacije τ .

Kako je ukupna energija oscilatora proporcionalna amplitudi, pri oscilovanju sa malim prigušenjem važi

$$E = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (3.61)$$

odnosno, njegova energija opada sa vremenom, pri čemu je E_0 ukupna energija oscilatora u početnom momentu vremena. Gubitak energije oscilatora za vreme od jednog perioda T je

$$-\Delta E = E 2\beta T$$

odakle je

$$\frac{E}{-\Delta E} = \frac{Q}{2\pi}$$

3.3 Prinudne oscilacije

Gubitak energije oscilatora, izazvan oscilovanjem u sredini koja prigušuje kretanje, se može nadoknaditi primenom spoljašnje sile koja bi vršila pozitivan rad na sistemu. Energija može biti dodati sistemu u bilo kom momentu vremena, delovanjem sile koja deluje u smeru kretanja oscilatora. Na primer, dete na ljuljaški će se stalno kretati ukoliko ga pravovremeno poguramo. Amplituda kretanja će, pri ovakvom načinu kretanja, ostati konstantnom, ukoliko pri svakom ciklusu kretanja u sistem ubacimo energiju jednaku onoj koju je sistem izgubio usled prigušenja. Kretanje ovakve vrste se naziva **prinudno oscilovanje**.

Kao što je jasno iz ovog razmatranja, prinudna sila koja deluje na oscilator koji osciluje prigušeno, da bi održala oscilacije mora da bude takodje periodična, odnosno oblika $F = F_m \cos \omega t$, gde je ω frekvencija periodične spoljašnje sile a F_m njena amplituda. Jednačina kretanja sada postaje

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega t. \quad (3.62)$$

Nakon dovoljno dugo vremena, energija koju prilikom ciklusa-jedne pune oscilacije, u sistem ubaci prinudna sila postane jednaka energiji koja se izgubi, sistem počne da osciluje sa konstantnom amplitudom. U tom slučaju rešenje ove jednačine je oblika

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.63)$$

Rešavanje jednačine koja opisuje prinudno oscilovanje

Jednačina (3.62) može da se zapiše u obliku

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t, \quad (3.64)$$

gde je $f = F_m/m$. Kao što je lako videti, leva strana ove jednačine je ista kao i leva strana jednačine (3.51), a razlika je u tome što, za razliku od jednačine koja opisuje prigušeno oscilovanje, ovde na desnoj strani nemamo nulu nego neko funkciju vremena. U tom smislu se ova jednačina naziva nehomogenom diferencijalnom jednačinom. Kada ne bi bilo prinudne sile i sile trenja, odnosno otpora sredine, ova diferencijalna jednačina bi opisivala slobodno oscilovanje ugaonom frekvencom ω_0 .

Interesantno je proveriti pod kojim uslovima je (3.63) rešenje diferencijalne jednačine prinudnog oscilovanja. U tu svrhu treba ovo, pretpostavljeno, rešenje zameniti u jednačinu i proveriti uslove koji mora da važe da bi

je ono zadovoljavalo. Zapravo, reč je o uslovima na konstante A i φ koji će time biti namentnuti.

Iz izraza (3.63), se za prvi, odnosno drugi izvod po vremenu dobija

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.65)$$

što nakon zamene u (3.64) daje

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta A\omega \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t + \varphi) = f \cos \omega t.$$

Koristeći pravila za razlaganje trigonometrijskih funkcija zbira uglova, ovaj izraza može da se zapiše kao

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)(\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) - 2\beta A(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = f \cos \omega t.$$

Da bi ova jednačina bila zadovoljena, moraju koeficijenti (izrazi) koji stoje uz $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ sa obe strane jednačine da budu jednaki, što dovodi do toga da mora da važe sledeći uslovi

$$\begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta A\omega \sin \varphi &= f \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta A\omega \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Iz druge jednačine se dobija

$$\tan \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.67)$$

a dizanje na kvadrati i sabiranje obeju jednačina daje

$$A^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = f^2,$$

odakle je amplituda uspostavljenih prinudnih oscilacija

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (3.68)$$

3.3.1 Amplituda prinudnih oscilacija

Ukoliko se rešenje (3.63), zameni u jednačinu kretanja (3.62), za amplitudu prinudnih oscilacija se dobija

$$A = \frac{F_m/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}. \quad (3.69)$$

U ovoj jednačini je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, ugaona frekvencija neprigušenih oscilacija ($b = 0$).

3.3.2 Rezonancija

Amplituda oscilacija kod prinudnog oscilovanja, je proporcionalna amplitudi prinudne sile. Interesantno je primetiti da ako menjamo frekvencu prinudne sile ω pri konstantnoj frekvenci ω_0 spostvenih oscilacija, menja se i amplituda prinudnih oscilacija. Za neku vrednost frekvence prinudne sile ona će imati maksimum koji može da se odredi na osnovu analize zavisnosti amplitude od frekvence date jednačinom (3.69). Ustvari, amplituda će imati maksimalnu vrednost kada imenilac tog izraza bude minimalan, a on će biti minimalan kada mu je izvod po frekvenci prinudne sile (koja je jedina promenljiva koja utiče na njegovu promenu) jednak nuli, odnosno kada je

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2)2\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Ovaj izraz može biti jednak nuli u dva slučaja. Prvi odgovara situaciji kada je $\omega = 0$, što bi odgovaralo situaciji da je prinudna sila konstantna, a znamo da to nije, već se periodično menja, a drugi da je

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

Ova frekvencija prinudne sile se naziva rezonantnom, a pojava da amplituda dobija maksimalnu vrednost se naziva rezonancijom. Rezonantna frekvencija ω_{rez} je prema tome

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

a rezonantna amplituda je

$$A_{rez} = \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Oдавde se vidi da, kada je otpor sredine jednak nuli, tj. $\beta = 0$, rezonantna amplituda postaje jednaka amplitudi slobodnih oscilacija $\omega_{rez} = \omega_0$ a amplituda u tom slučaju teži beskonačnosti.

3.4 Slaganje oscilacija

Kako je u prirodi prava retkost da na telo deluje samo jedna sila, interesantno je razmotriti kretanje oscilatora pod dejstvom dve sile od kojih svaka za sebe može da izazove oscilatorno kretanje. Rezultujuće kretanje je u tom slučaju takodje periodično. Ovakva slučaj je recimo ukoliko pomoću opruge obesimo teg o tavanicu vagona u kretanju. Teg će oscilovati oko svog ravnotežnog

položaja, ali će pri tome njegova tačka vešanja takodje oscilovati u skladu sa oscilovanjem opruga samog vagona pa će on na taj način vršiti kretanje koje se sastoji iz dva oscilovanja duži iste prave.

Elongacije ova dva kretanja su

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (3.70)$$

a ukupna elongacija je zbir

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (3.71)$$

Rezultujuće kretanje je takodje oscilatorno, što znaci da bi trebalo da ima oblik (3.4), a da bi se odredilo kolike su mu amplituda, frekvencija i početna faza, treba ustvari videti pod kojim uslovima se prethodna jednačina za ukupnu elongaciju svodi na ovaj izraz. To u opštem slučaju nije lak posao pa ćemo ga uraditi za neke specijalne slučajeve koji se relativno lako rešavaju.

3.4.1 Slaganje oscilacija istog pravca i istih frekvencija

Ima smisla razmotriti prvo rezultat slaganja dva oscilovanja istog perioda koje se vrše sa nekom razlikom faza i imaju različite amplitude. U tom slučaju je rezultujuća elongacija

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (3.72)$$

Ukoliko se primene pravila za razvoj trigonometrijskih funkcija od zbira uglova, dobija se

$$x = A_1[\cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1] + A_2[\cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2], \quad (3.73)$$

odnosno, nakon izdvajanja sabiraka koji sadrže vreme kao promenljivu

$$x = [A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2] \cos \omega t - [A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2] \sin \omega t. \quad (3.74)$$

Da bi ovaj izraz mogao da se svede na izraz koji opisuje harmonijsko oscilovanje (3.4), faktori koji se nalaze u uglastim zagradama treba da se zapišu u obliku

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A \cos \varphi, \quad (3.75)$$

$$A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = A \sin \varphi, \quad (3.76)$$

tako da je sada elongacija rezultujućeg oscilovanja

$$x = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.77)$$

gde je A amplituda rezultujuće oscilacije, ω njena frekvencija, a φ njena početna faza. Frekvencija rezultujuće oscilacije se poklapa sa frekvencijama pojedinih oscilacija čijim slaganjem je nastala, dok amplitudu i početnu fazu treba odrediti iz jednačina (3.75) i (3.76) kojima su definisane. Tako se kvadriranjem i sabiranjem tih dveju jednačina za amplitudu dobija

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (3.78)$$

dok njihovo deljenje daje izraz za početnu fazu ukupne oscilacije

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (3.79)$$

3.4.2 Slaganje oscilacija bliskih frekvencija (udari)

Interesantan je slučaj slaganja harmonijskih oscilacija istog pravca i frekvencija koje nisu iste ali se malo razlikuju. Videćemo da se rezultujuće kretanje može razmatrati kao harmonijsko kretanje sa pulsirajućom amplitudom koje se naziva *udari* ili *izbijanja*.

Označimo frekvenciju jednog oscilovanja sa ω , a drugog sa $\omega + \Delta\omega$ pi čemu je $\Delta\omega \ll \omega$. Pretpostavimo da su amplitude iste¹⁵ i da su jednake A . Takođe možemo da pretpostavimo da su početne faze obeju oscilacija jednake nuli.¹⁶ Jednačine oscilovanja u tom slučaju postaju

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t, \quad (3.80)$$

a njihov zbir je

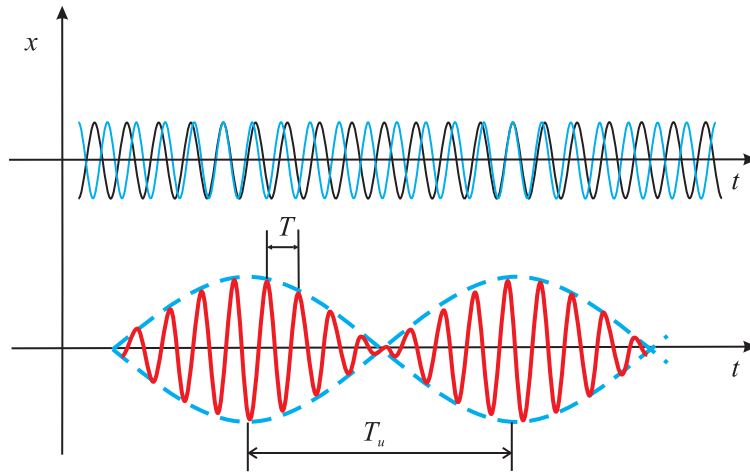
$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2}\right) \cos \omega t, \quad (3.81)$$

pri čemu je u drugom faktoru zanemaren član $\Delta\omega/2$ u poredjenju sa ω .

Grafik ove funkcije je predstavljen na slici 3.18. Kao rezultat superponiranja dva oscilovanja bliskih frekvencija dobija se kretanje čija elongacija (3.81) je proizvod dva faktora koja zavise od vremena. Prvi, odnosno, faktor koji se nalazi u zagradi se menja sa vremenom sporije od drugog faktora.

¹⁵Ova i druge pretpostavke ne utiču na opštost zaključaka ali znatno uprošćavaju analizu problema.

¹⁶Naime, kako se kretanja odvijaju nejednakim ugaonim brzinama, fazna razlika oscilovanja se menja sa vremenom, pa možemo za početni trenutak da uzmemo upravo onaj kada su one jednake, što znači da će početne faze u tom trenutku biti jednake nuli. Iz ovoga vidimo da, uzimanje da su početne faze jednake nuli, znači ustvari pogodan odabir nultog vremenskog trenutka.



Slika 3.18: Udari.

Zbog činjenice da je $\Delta\omega \ll \omega$, za vreme dok množitelj $\cos \omega t$ izvrši nekoliko punih oscilacija, množitelj koji se nalazi u zagradi, se veoma malo promeni. Na osnovu ovoga možemo, oscilovanje definisano jednačinom (3.81) da razmatramo kao harmonijsko oscilovanje frekvence ω čija amplituda se menja po periodičnom zakonu. Kako je amplituda pozitivna veličina, u ovom slučaju je predstavljena izrazom

$$A(t) = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \right|. \quad (3.82)$$

Ova funkcija je periodična funkcija, a kako se radi o apsolutnoj vrednosti kosinusne funkcije, period promene vrednosti amplitude je određen izrazom

$$\frac{\Delta\omega}{2} T_u = \pi,$$

odakle je traženi period

$$T_u = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (3.83)$$

Frekvencija promene amplitude je, prema tome,

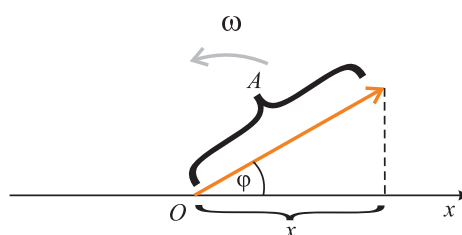
$$\nu_u = \frac{1}{T_u} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \Delta\nu, \quad (3.84)$$

odnosno, ona je jednaka razlici frekvencija $\nu_2 - \nu_1$ posmatranih oscilovanja.

3.4.3 Vektorski dijagram

Slaganje oscilacija, kada je reč o oscilacijama istog pravca, postaje elegantnije i očiglednije ako se oscilacije predstave grafički u obliku vektora u ravni, odnosno vektorskim dijagramom.

Kao što je već napomenuto u 3.1.4, harmonijsko oscilovanje može da se zada uz pomoć vektora koji uniformno rotira (slika 3.19) i čija je dužina jednaka amplitudi oscilovanja. Projekcija ovog vektora na x osu vrši harmonijsko oscilovanje amplitude jednake dužini vektora, ugaone frekvence jednake ugaonoj brzini rotiranja vektora i početne faze jednake uglu koji je vektor obrazovao sa ovom osom u početnom momentu vremena.



Slika 3.19: Vektorski dijagram.

Da vidimo sada kako izgleda superponiranje dva harmonijska oscilovanja istog pravca i iste učestanosti. Ukupna elongacija tela je zbir elongacija

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (3.85)$$

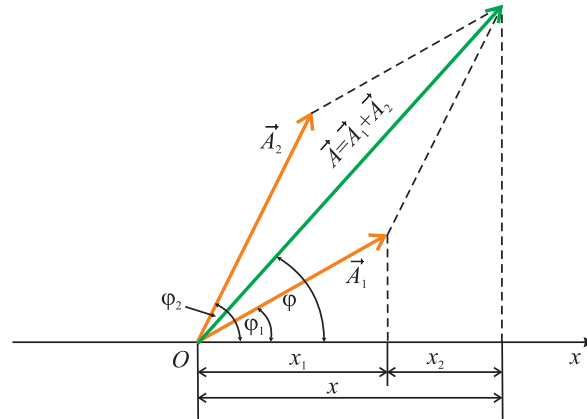
Oba oscilovanja ćemo, u skladu sa osnovnom idejom, predstaviti pomoću dva vektora \vec{A}_1 i \vec{A}_2 (slika 3.20). Vektor \vec{A} je zbir ova dva vektora a, kao što je lako videti sa slike, njegova projekcija na x osu je jednaka zbiru projekcija vektora \vec{A}_1 i \vec{A}_2

$$x = x_1 + x_2. \quad (3.86)$$

U skladu sa tim, rezultujući vektor \vec{A} predstavlja rezultujuće oscilovanje. On rotira istom ugaonom brzinom kao i vektori \vec{A}_1 i \vec{A}_2 , tako da će rezultujuće oscilovanje biti harmonijsko sa frekvencom ω , amplitudom A i početnom fazom φ . Iz konstrukcije slike se vidi (primena kosinusne teoreme ili primenom pravila za skalarni proizvod vektora $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ sa samim sobom¹⁷) da je

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3.87)$$

¹⁷Iz $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \cdot \vec{A}_2 + 2\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2$, imajući u vidu da je ugao između vektora \vec{A}_1 i \vec{A}_2 jednak $\varphi_2 - \varphi_1$ se dobija tražena relacija.



Slika 3.20: Vektorski dijagram za slaganje dveju oscilacija.

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (3.88)$$

Može da se kaže da predstavljanje harmonijskih oscilacija preko uniformno rotirajućih vektora omogućuje da se sabiranje više oscilacija svede na sabiranje odgovarajućih vektora. Ovaj način sabiranja oscilacija je prostiji i očigledniji od direktnog sabiranja elongacija x_1 i x_2 tokom koga je, kao što smo ti videli u prethodnom poglavlju, neophodno vršiti odredjen trigonometrijske transformacije.

Proanalizirajmo sada izraz (3.87) za amplitudu rezultujućeg oscilovanja. Ukoliko je razlika faza posmatranih dveju oscilacija $\varphi_2 - \varphi_1$ jednaka nuli, amplituda rezultujućeg oscilovanja je jednaka zbiru amplituda A_1 i A_2 . Ukoliko je razlika faza jednaka $+\pi$ ili $-\pi$ (oscilacije se nalaze u protivfazi) amplituda rezultujućeg oscilovanja je jednaka $|A_1 - A_2|$. Ukoliko frekvencije oscilovanja nisu jednake, vektori \vec{A}_1 i \vec{A}_2 rotiraju nejednakim ugaonim brzinama. U tom slučaju rezultujući vektor \vec{A} pulsira po intenzitetu i rotira nenuniformno. U skladu sa tim, rezultujuće kretanje nije prosto harmonijsko oscilovanje, već neki složeni oscilatorni proces.

3.4.4 Slaganja medjusobno normalnih oscilacija

Posmatrajmo rezultat slaganja dva oscilovanja koja se vrše u medjusobno normalnim pravcima. To znači da materijalna tačka učestvuje istovremeno u dva medjusobno normalna oscilovanja i pretpostavimo, da bi lakše izvršili analizu, da je reč o oscilovanjima istih frekvencija, odnosno perioda. Ukoliko

se ta dva kretanja vrše po x i po y pravcu, jednačine oscilovanja će biti

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \quad y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \quad (3.89)$$

gde su sa A_x , A_y , φ_x i φ_y , označene odgovarajuće amplitude i početne faze. Trajektorija materijalne tačke, budući da je funkcija koja povezuje x i y koordinatu, se dobija iz prethodnih dveju jednačina, eliminacijom vremena iz njih. Ona će predstavljati jednačinu krive linije u xOy ravni, a da je dobili zgodno je prethodne jednačine zapisati u obliku

$$\frac{x}{A_x} = \cos \omega t \cos \varphi_x - \sin \omega t \sin \varphi_x, \quad (3.90)$$

$$\frac{y}{A_y} = \cos \omega t \cos \varphi_y - \sin \omega t \sin \varphi_y. \quad (3.91)$$

Množeći jednačinu (3.90) sa $\cos \varphi_y$, a (3.91) sa $\cos \varphi_x$ i uzimajući njihovu razliku, dobija se

$$\frac{x}{A_x} \cos \varphi_y - \frac{y}{A_y} \cos \varphi_x = \sin \omega t \sin(\varphi_y - \varphi_x). \quad (3.92)$$

Množeći sada (3.90) sa $\sin \varphi_y$ a (3.91) sa $\sin \varphi_x$ i opet uzimajući njihovu razliku, dobijamo

$$\frac{x}{A_x} \sin \varphi_y - \frac{y}{A_y} \sin \varphi_x = \cos \omega t \sin(\varphi_y - \varphi_x). \quad (3.93)$$

Dižući na kvadrat i sabirajući poslednje dve jednačine, dobijamo jednačinu u kojoj nema eksplicitne vremenske zavisnosti, odnosno jednačinu trajektorije

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - 2 \frac{xy}{A_x A_y} \cos(\varphi_y - \varphi_x) = \sin^2(\varphi_y - \varphi_x). \quad (3.94)$$

Ova jednačina, u opštem slučaju predstavlja jednačinu elipse, čije osobine su određene vrednošću razlike početnih faza posmatranih međusobno normalnih oscilacija.

Razlika početnih faza jednaka nuli

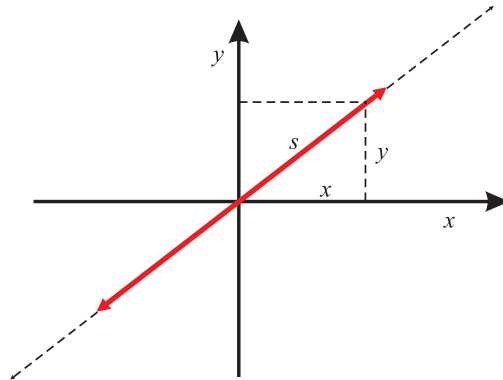
U ovom slučaju, obzirom na vrednosti kosinusne i sinusne funkcije za vrednost argumenta od nula radijana, jednačina trajektorije (3.94) je

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - 2 \frac{xy}{A_x A_y} = 0 \quad (3.95)$$

što se može zapisati kao kvadrat razlike x/A_x i y/A_y , ili kao

$$y = \frac{A_y}{A_x} x. \quad (3.96)$$

Odavde se vidi, da je trajektorija u tom slučaju prava linija (slika 3.21) koja prolazi kroz koordinatni početak i zaklapa sa x osom ugao čiji je tangens jednak odnosu amplituda A_y/A_x .



Slika 3.21: Rezultat slaganja dve normalne oscilacije istih faza.

Da bi videli kakav je karakter kretanja materijalna tačke dužove prave linije, potrebno je videti kako se sa vremenom menja njen položaj na putanji. On je određen odsečkom s za koji, obzirom da su početne faze oba oscilovanja iste, žaži

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_x^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + A_y^2 \cos^2(\omega t + \varphi)} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.97)$$

odakle se vidi da je reč o harmonijskom oscilatornom kretanju sa amplitudom

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}.$$

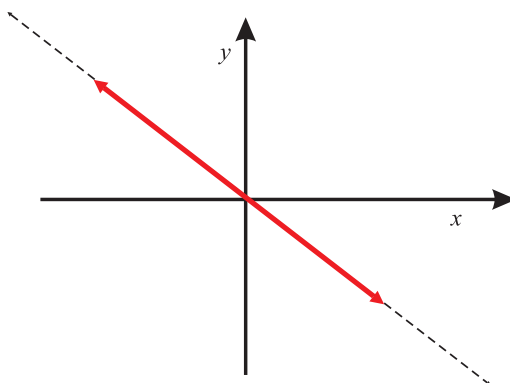
Razlika početnih faza jednaka π

U ovom slučaju, obzirom da je $\varphi_y - \varphi_x = \pi$, jednačina trajektorije je

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} + 2 \frac{xy}{A_x A_y} = 0, \quad (3.98)$$

što znači da je opet reč o pravoj liniji ali sa jednačinom

$$y = -\frac{A_y}{A_x} x. \quad (3.99)$$



Slika 3.22: Rezultat slaganja dve normalne oscilacije suprotnih faza.

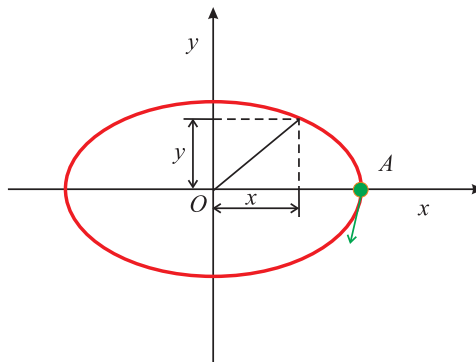
Amplituda rezultujućeg oscilovanja je ista kao i u prethodnom slučaju.

Razlika početnih faza $\pi/2$ ili $3\pi/2$

Ako je fazna razlika $\varphi_y - \varphi_x$ jednaka $\pi/2$ ili $3\pi/2$, jednačina trajektorije ima oblik

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1, \quad (3.100)$$

što predstavlja jednačinu elipse, čije se ose poklapaju sa koordinatnim osama (3.23). Ukoliko je fazna razlika $\pi/2$, tačka se po elipsi kreće u smeru kretanja



Slika 3.23: Eliptično kretanja kao rezultat slaganja dva međusobno normalna harmonijska oscilatorna kretanja.

kazaljke na časovniku. To se može pokazati ako se jednačine oscilacija (3.89)

napišu u sledećem obliku

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi), \quad y = A_y \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -A_y \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.101)$$

U trenutku vremena kada je argument oba izraza jednak nuli ($\omega t + \varphi = 0$), telo koje osciluje se nalazi u tački A (slika 3.23). U sledećem trenutku argument poraste, pa je x koordinata pozitivna a y negativna, što znači da se tačka pomerila nadole, u smeru kretanja kazaljke na časovniku. Ako je pak, fazna razlika $3\pi/2$, analognim rasudjivanjem se može pokazati da se tačka po elipsi kreće u suprotnom smeru od kazaljke na časovniku.

Takodje se može zaključiti da, uvek kada se promeni znak fazne razlike, kretanje po elipsi menja svoj smer. Osim toga, kada su amplitude oscilacija koje se sabiraju jednake, elipsa postaje kružnica.

Prema tome, dva uzajamno normalna harmonijska oscilovanja

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

mogu da se predstave u obliku

$$x = A \cos \omega t, \quad y = -A \sin \omega t,$$

a kao rezultujuće oscilovanje daju ravnomerno kretanje po kružnici poluprečnika A i sa ugaonom brzinom ω , koje se vršiu smeru kretanja kazaljke na satu. Važi naravno i obrnuto, ravnomerno kretanje po kružnici poluprečnika A u smeru kazaljke na časovniku, ugaonom brzinom ω , može da se razloži na dva međusobno normalna harmonijska oscilovanja predstavljena prethodnim izrazima.

Takodje i dva međusobno normalna harmonijska oscilovanja

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = A \sin \omega t$$

daje rezultujuće kretanje po kružnici poluprečnika A sa ugaonom brzinom ω koje se vrši u smeru suprotnom od smeru kretanja kazaljke na časovniku.

3.4.5 Modulacija

Složeno oscilovanje prilikom koga se amplituda sporo menja (u poredjenju sa periodom oscilacija) naziva se modulirano oscilovanje¹⁸. Modulirano oscilovanje nije harmonijsko oscilatorno kretanje, ali može da se razloži na niz

¹⁸Tačnije rečeno ovo je slučaj amplitudne modulacije (AM). Osim nje postoji i frekventna (FM) i fazna modulacija (PM)

harmonijskih kretanja. Uzmimo za primer oscilovanje

$$x = A \cos \omega_0 t$$

čija se amplituda menja npr. po zakonu

$$A = A_1 + A_2 \cos \omega t,$$

gde su A_1 i A_2 kontante pri čemu je $A_2 < A_1$ i $\omega \ll \omega_0$. To znači da se amplituda A menja u toku vremena između vrednosti $A_1 + A_2$ (kada je $\omega t = 0$) i $A_1 - A_2$ (kada je $\omega t = \pi$). Ukoliko zamenimo navedenu vrednost amplitude u izraza za elongaciju dobija se

$$x = (A_1 + A_2 \cos \omega t) \cos \omega_0 t = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \cos \omega t \cos \omega_0 t,$$

odnosno

$$x = A_1 \cos \omega_0 t + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_0 + \omega)t + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_0 - \omega)t. \quad (3.102)$$

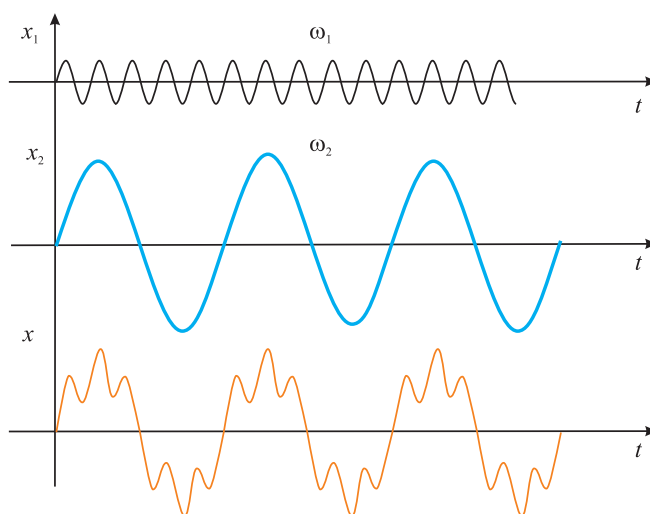
Ovo znači da posmatrano (modulisano) kretanje, iako nije harmonijsko, može da se prikaže kao zbir tri harmonijska oscilatorna kretanja sa frekvencijama ω_0 , $\omega_0 + \omega$ i $\omega_0 - \omega$ i sa amplitudama A_1 , $A_2/2$ i $A_2/2$.

3.4.6 Razlaganje oscilacija. Spektar

U prethodnim poglavljima je pokazano da se, pri slaganju dva harmonijska oscilovanja koja se vrše duž iste prave i imaju iste frekvencije, kao rezultat dobija takodje harmonijsko kretanje **iste frekvencije**. Ukoliko se slažu dva oscilovanja različitih frekvencija, rezultujuće oscilovanje ima složeniji karakter (slika 3.24). Na ovoj slici, u gornjem redu je prikazano harmonijsko oscilovanje frekvencije ω_1 i određene amplitude A_1 . U srednjem redu je prikazano drugo, takodje harmonijsko, oscilovanje čija je frekvencija ω_2 određen broj puta manja od frekvencije ω_1 a čija je amplituda A_2 određen broj puta veća od amplitude A_1 . U donjem redu je prikazano oscilovanje koje nastaje superpozicijom prva dva; elongacija x tačke koja vrši to složeno oscilovanje je u svakom trenutku jednaka zbiru elongacija prvog i drugog oscilovanje

$$x = x_1 + x_2.$$

Interesantno je postaviti pitanje da li može da se reši obrnut zadatak, odnosno da li je moguće dato složeno oscilovanje, u opštem slučaju razložiti na harmonijska. U navedenom slučaju je to moguće jer je složeno oscilovanje ustvari zbir dva predstavljena harmonijska oscilovanja prikazana na prva dva reda slike.



Slika 3.24: Slaganje dva harmonijska oscilatorna kretanja frekvencija ω_1 i ω_2 .

Kao što smo do sada videli rezultat slaganja dva harmonijska oscilovanja zavisi od odnosa njihovih frekvencija, amplituda i početnih faza. Ukoliko imamo više od dva harmonijska oscilovanja, rezultujuće oscilovanje poprima još složeniji karakter. Ovo usloznavanje rezultujućeg oscilovanja, ukazuje na to da je oscilovanje vrlo složenog oblika verovatno moguće prikazati kao zbir većeg broja harmonijskih oscilovanja različitih amplituda i frekvencija.

U višim kursevima matematike se pokazuje da svaka periodična funkcija $x = F(\omega t)$, perioda 2π , može da se predstavi u obliku beskonačnog zbira trigonometrijskih funkcija

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots \\ + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (3.103)$$

koji se naziva Furijeov red, pri čemu se koeficijenti A_0, A_1, A_2, \dots i B_0, B_1, B_2, \dots za dati oblik funkcije $F(\omega t)$ izračunavaju preko određenih formula koje nećemo ovde navoditi, već ćemo na ovom mestu proanalizirati posebno interesantne slučajeve.

Prvi od njih se odnosi na situaciju kada je funkcija $F(\omega t)$ parna, tj. kada za nju važi

$$F(-\omega t) = F(\omega t).$$

Obzirom na oblik funkcije (3.103), to je moguće jedino ukoliko su koeficijenti uz sinusne sabirke jednaki nuli, tj. $B_1 = B_2 = B_3 = \dots = 0$, i u tom slučaju

razvoj funkcije u red izgleda ovako

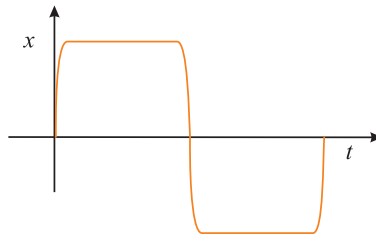
$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (3.104)$$

Za neparnu funkciju, odnosno funkciju koja menja znak prilikom promene znaka argumenta, tj. $F(-\omega t) = -F(\omega t)$, koeficijent A_0 kao i svi koeficijenti uz kosinuse (A_1, A_2, \dots) moraju da budu jednaki nuli, pa je razvoj (3.103) sada

$$x = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (3.105)$$

Na osnovu prethodne analize se može zaključiti da svako **periodično** oscilovanje, u principu može da se razloži na sumu harmonijskih oscilovanja čije su frekvencije $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$

Na osnovu ovde izloženog, relativno je lako pokazati kako može, da se jedna pravougaona oscilacija (slika 3.25) da se razloži na harmonijske oscilacije odgovarajućih frekvencija.



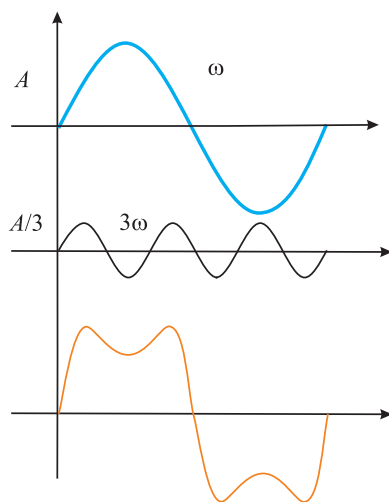
Slika 3.25: Rezultat slaganja dve harmonijske oscilacije čije frekvencije stoje u odnosu 1:3 a amplitude u odnosu 1:1/3.

U tu svrhu pogledajmo kako izgleda rezultujuće oscilovanje dobijeno slaganjem, za početak dve harmonijske oscilacije frekvenci ω i 3ω čije su amplitude A i $A/3$ (slika 3.26).

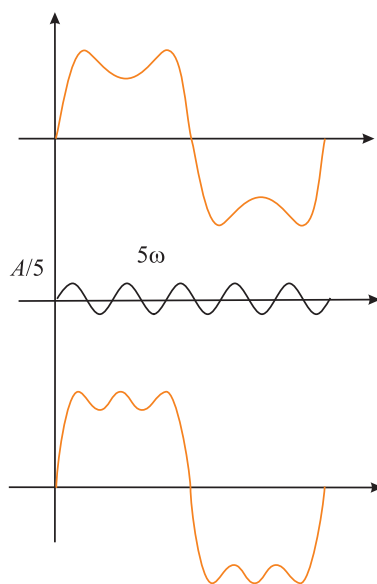
Dodajemo sada na ovo još jednu harmonijsku oscilaciju čija je frekvencija 5ω a amplituda $A/5$. Rezultat slaganja je prikazan na slici 3.27.

Ovakav postupak treba nastaviti i dalje, dodavanjem novih harmonijskih oscilacija sve veće i veće frekvencije, pri čemu je lako zaključiti da će rezultat slaganja biti oscilacija koja će sve više i više da podseća na pravougaonu oscilaciju. Na osnovu ovoga se može zaključiti da se jedna takva oscilacija može prikazati kao sledeći beskonačan zbir

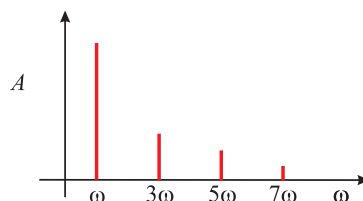
$$x = A \sin \omega t + \frac{A}{3} \sin 3\omega t + \frac{A}{5} \sin 5\omega t + \frac{A}{7} \sin 7\omega t + \dots \quad (3.106)$$



Slika 3.26: Rezultat slaganja dve harmonijske oscilacije čije frekvencije stoje u odnosu 1:3 a amplitude u odnosu 1:1/3.



Slika 3.27: Rezultat slaganja tri harmonijske oscilacije čije frekvencije stoje u odnosu 1:3:5 a amplitude u odnosu 1:1/3:1/5, dobijen dodavanjem treće na rezultat slaganja prve dve oscilacije.



Slika 3.28: Rezultat harmonijske analize složenog pravougaonog kretanja.

Postupak razlaganja složene periodične funkcije na prosta harmonijska oscilovanja se naziva **harmonijska analiza**, a oscilacije dobijene razlaganjem čine harmonijski spektar složene oscilacije sa različitim amplitudama i frekvencijama.

Rezultati harmonijske analize se prikazuju tako što se na apscisnu osu nanose vrednosti frekvencija a na ordinatu amplituda oscilacija. Dobijeni *spektar* složenog periodičnog kretanja se sastoji od odvojenih linija.

3.5 Primeri i zadaci

1. Odrediti period oscilovanja tega mase 2,5 kg, obešenog o oprugu ako se ona, pod dejstvom sile 30 N istegne za 9 cm.

◇ Koeficijent elastičnosti opruge se dobija kao odnos sile od 3 N i istežanja od 9 cm koje ona izaziva

$$k = \frac{30N}{0,09m} = \frac{1}{3}10^3 \frac{N}{m}.$$

Koristeći ovaj rezultat, period ovog oscilatora je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2,5kg \cdot 3m}{10^3N}} = 0,54s.$$

2. Matematičko klatno osciluje po zakonu $x = x_0 \sin \omega t$. Odrediti odnos kinetičke i potencijalne energije u sledećim vremenskim trenucima: $t_1 = \frac{T}{12}$, $t_2 = \frac{T}{8}$ i $t_3 = \frac{T}{6}$.

◇ Argument sinusne funkcije koja opisuje elongaciju oscilovanja je $\omega t = \frac{2\pi}{T}t$ a za tražene momente vremena ima vrednosti, redom: $\omega t_1 = \frac{\pi}{6}$, $\omega t_2 = \frac{\pi}{4}$ i $\omega t_3 = \frac{\pi}{3}$.

Odnos kinetičke i potencijalne energije oscilovanja, u opštem slučaju je

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{mv^2}{2}}{\frac{kx^2}{2}} = \frac{v^2}{\omega^2 x^2} = \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t},$$

a za tražene momente vremena se dobija da je, redom: 3, 1 i $\frac{1}{3}$.

3. Odrediti odnos perioda oscilovanja matematičkog klatna koje se kreće u zemljinom gravitacionom polju vertikalno naviše sa ubrzanjem $a = 1\text{m/s}^2$, i matematičkog klatna iste dužine koje se kreće naniže po intenzitetu jednakim ubrzanjem.

◊ Period matematičkog klatna $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ se modifikuje u $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$, odnosno $T'' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$, u zavisnosti od toga da li se klatno, kao celina, kreće naviše ili naniže. Odnos ova dva perioda je

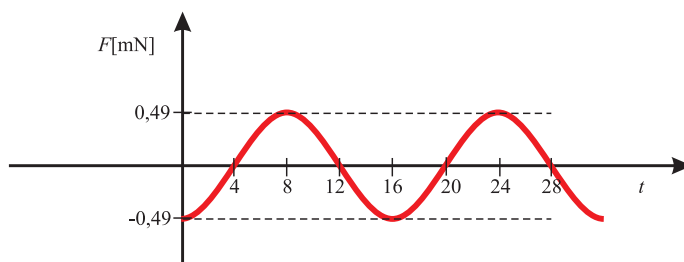
$$\frac{T''}{T'} = \sqrt{\frac{g+a}{g-a}} = 1,11.$$

4. Materijalna tačka mase $m = 32\text{ g}$ se kreće po zakonu

$$x = x_0 \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

gde je $x_0 = 0,1\text{ m}$, $T = 16\text{ s}$. Odrediti: maksimalnu vrednost sile pod čijim dejstvom se odvija ovo kretanje, vrednost sile u $t = 0$ kao i grafik zavisnosti sile od vremena.

◊ Maksimalna vrednost sile je $F_m = ma_m$ i iznosi $F_m = m\frac{4\pi^2}{T^2}x_0 = 0,49\text{ mN}$, dok ona u početnom trenutku ima vrednost $F(0) = -kx_0 = -m\omega_0^2 x_0 = -m\frac{4\pi^2}{T^2}x_0 = -0,49\text{ mN}$.



Slika 3.29:

5. Štap dužine $L = 1,5$ m može da osciluje oko horizontalne ose koja prolazi kroz jedan njegov kraj. Gustina štapa raste linearno počev od neke vrednosti $\rho_0 = 2$ g/cm³ koju ima na kraju o koji je okačen, do vrednosti $\rho_0 + cL$, koju ima na suprotnom kraju ($c = 0,5$ g/cm⁴). Koliki je priod oscilovanja štapa?

◇ Štap se pri ovom kretanju ponaša kao fizičko klatno čiji je period oscilovanja $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$, gde je I moment inercije štapa a d je udaljenost centra mase štapa od tačke vešanja.

Moment inercije štapa dobijamo integracijom izraza dmr^2 , koji predstavlja moment inercije delića štapa dužine dr i mase dm po dužini štapa. Masa jednog takvog delića je $dm = \rho dV$, dok je gustina, prema uslovima zadatka $\rho = \rho_0 + cr$. Zapremina posmatranog delića štapa može da se zapiše kao $dV = Sdr$, gde je S površina poprečnog preseka štapa. Na osnovu ovoga je moment inercije

$$I = \int_0^L (\rho_0 + cr)r^2 S dr = \rho_0 S \int_0^L r^2 dr + cS \int_0^L r^3 dr = SL^3 \left(\frac{\rho_0}{3} + \frac{cL}{4} \right).$$

Položaj centra masa štapa, $r_{CM} = \frac{\int r dm}{m}$, je

$$r_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^L r(\rho_0 + cr) S dr = \frac{\rho_0 S}{m} \int_0^L r dr + \frac{cS}{m} \int_0^L r^2 dr = \frac{SL^2}{m} \left(\frac{\rho_0}{2} + \frac{cL}{3} \right).$$

Kako je on određen u odnosu na tačku vešanja, ovaj izraz istovremeno predstavlja veličinu d u izrazu za period fizičkog klatna. Na osnovu ovako dobijenih podataka, period je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L(4\rho_0 + 3cL)}{2g(3\rho_0 + 2cL)}} = 2s.$$

6. O dve opruge okačeni su tegovi masa m_1 i m_2 , pri čemu je $m_1 > m_2$ a izduženje opruga je jednako i iznosi l . Koji teg ia veći period oscilovanja a koji, pri jednakim amplitudama, ima veću energiju. Mase opruga zanemariti.

◇

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ovde je k koeficijent elastičnosti koji je određen silom koja izaziva izduženje opruge za jedničnu dužinu, $k = \frac{Q}{l}$, pa je

$$k_1 = \frac{m_1 g}{l}, \text{ i } k_2 = \frac{m_2 g}{l}$$

Na osnovu ovoga su period jednaki i iznose

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Energije oscilovanja su

$$E_i = \frac{1}{2}k_i A^2 = \frac{m_i g}{2l} A^2,$$

pa će veću energiju imati teg veće mase.

7. Materijalna tačka osciluje po zakonu $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, gde je $A = 2$ cm. Odrediti početnu fazu φ_0 , ako je $x(0) = -\sqrt{3}$ cm i $\dot{x}(0) < 0$.

◇ Iz jednačine oscilovanja je

$$x(0) = A \cos \varphi_0,$$

odakle je $\cos \varphi_0 = x(0)/A = -\sqrt{3}/2$, odnosno $\varphi_0 = \pi \pm \pi/6$. Da bi odrediti koju od ove dve vrednosti da uzmemo za početnu fazu potreban nam je još jedan podatak a on je dat sa $\dot{x}(0) < 0$. Iz izraza za brzinu

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi),$$

odakle je $\dot{x}(0) = -\omega A \sin \varphi_0$. Početna brzina je negativna pri negativnim vrednostima sinusa, odnosno za uglove između 0 i π , pa je početna faza $\varphi_0 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

8. Materijalna tačka mase $m = 5$ g vrši harmonijske oscilacije sa frekvencijom $\nu = 0,5$ Hz. Amplituda oscilovanja je $A = 3$ cm. Odrediti brzinu tačke u momentu vremena t_0 , kada je eleongacija $x = 1,5$ cm, maksimalnu silu F_{max} koja deluje na tačku i ukupnu energiju oscilovanja tačke.

◇ Iz jednačine oscilovanja je

$$x = A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

se za brzinu dobija

$$v = \dot{x} = -2\pi\nu A \sin(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Ako iz ova dva izraza eliminišemo vreme dobija se

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(2\pi\nu A)^2} = 1,$$

pa je

$$v(t) = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 8,2 \text{ cm/s.}$$

Sila se može dobiti kao proizvod mase i ubrzanja koje je

$$a = \dot{v} = -(2\pi\nu)^2 A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

pa je sila

$$F = -m(2\pi\nu)^2 A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Maksimalna vrednost sile je, prema tome,

$$F_{max} = mA(2\pi\nu)^2 = 1,5 \text{ mN.}$$

Ukupna energija je

$$E = \frac{kA^2}{2} = 2m\pi^2\nu^2 A^2 = 22 \mu\text{J.}$$

9. Dva matematička klatna, jednakih masa ali različitih dužina, osciluju jednakim ugaonim amplitudama α . Koje od ova dva klatna ima veću energiju?

◇ Ukupna energija oscilovanja materijalne tačke je jednaka zbiru kinetičke i potencijalne a takodje je jednaka maksimalnoj kinetičkoj (tada je potencijalna nula) ili maksimalnoj potencijalnoj (kada je kinetička jednaka nuli). U ovom slučaju je zgodno uporediti maksimalne potencijalne energije koje su određene maksimalnim otklonom. U ovim slučajevima tegovi su, u odnosu na njihov ravnotežni položaj, podignuti na visinu

$$h = l(1 - \cos \alpha)$$

gde je l dužina klatna. Kako su kod oba klatna ugaone amplitude jednake, na veću visinu se podiže klatno veće dužine. Drugim rečima, veću energiju ima klatno veće dužine.

10. Dve oscilacije istog pravca su zadate jednačinama $x_1 = A_1 \cos \omega(t + \tau_1)$ i $x_2 = A_2 \cos \omega(t + \tau_2)$, gde je $A_1 = 1 \text{ cm}$, $A_2 = 2 \text{ cm}$, $\tau_1 = 1/6 \text{ s}$, $\tau_2 = 1/2 \text{ s}$, $\omega = \pi \text{ 1/s}$. Odrediti amplitudu i početnu fazu rezultujuće oscilacije.

◇ Zgodno je prvo zapisati ove oscilacije u uobičajenom obliku

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi_i), \quad i = 1, 2$$

gde su početne faze $\varphi_i = \omega\tau_i$, odnosno $\varphi_1 = \pi/6$ i $\varphi_2 = \pi/2$.

Amplituda rezultujuće oscilacije je

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{7} = 2,65 \text{ cm},$$

dok je njena početna faza

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Zamena vrednosti daje

$$\tan \varphi = \frac{\sin \pi/6 + 2 \sin \pi/2}{\cos \pi/6 + 2 \cos \pi/2} = \frac{1/2 + 2}{\sqrt{3}/2} = \frac{5}{\sqrt{3}},$$

odakle je $\varphi = 0,394\pi \text{ rad} = 70,9^\circ$. Pošto oscilacije koje se sabiraju imaju jednake frekvencije, rezultujuća oscilacija će imati istu frekvenciju i biće zadata izrazom $x = A \cos(\omega t + \varphi)$.

11. Materijalna tačka istovremeno učestvuje u dva uzajamno normalna harmonijska oscilovanja, čije su jednačine

$$x = A_1 \cos \omega t, \quad y = A_2 \cos \frac{\omega t}{2},$$

gde je $A_1 = 1 \text{ cm}$, $A_2 = 2 \text{ cm}$, $\omega = \pi \text{ 1/s}$. Nacrtati jednačinu trajektorije tačke i prikazati smer njenog kretanja.

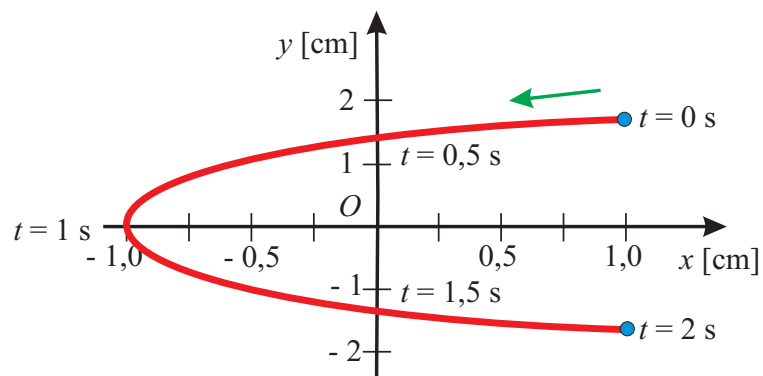
◊ Da bi našli jednačinu trajektorije, treba iz jednačina oscilacija eliminisati vreme t . Koristeći trigonometrijsku formulu $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, za $\alpha = \omega t/2$, se dobija

$$x = \frac{2A_1}{A_2^2} y^2 - A_1.$$

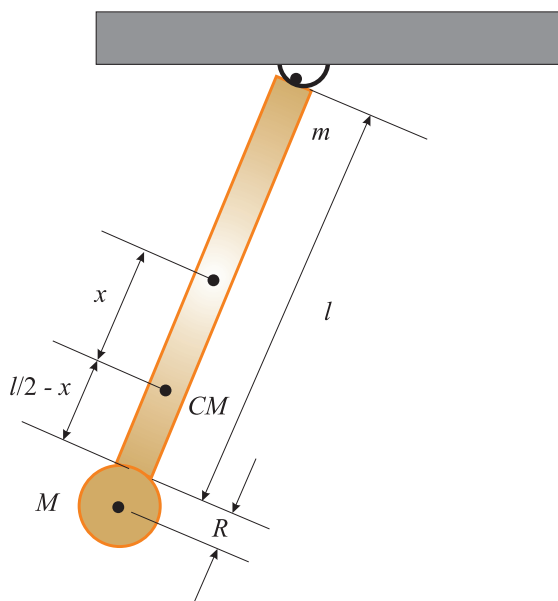
12. Štap dužine $l = 50 \text{ cm}$ i mase $m = 270 \text{ g}$ ima na jednom svom kraju pričvršćen disk poluprečnika $R = 10 \text{ cm}$ i mase $M = 500 \text{ g}$. Odrediti moment inercije ovako formiranog matematičkog klatna, rastojanje od centra masa do tačke vešanja i period malih oscilacija klatna.

◊ Period oscilovanja fizičkog klatna je određen jednačinom

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m_u g d}}$$



Slika 3.30:



Slika 3.31:

gde je m_u ukupna masa klatna ($m_u = m + M = 0,77$ kg), I moment inercije u odnosu na osu oko koje osciluje a d rastojanje centra mase štapa do tačke vešanja (u kojoj se nalazi osa oscilovanja).

Moment inercije klatna je jednak zbiru momenata inercije štapa I_1 i diska I_2 . Moment inercije diska u odnosu na osu koja je normalna na njega i prolazi kroz jedan njegov kraj je $I_1 = ml^2/3$. Moment inercije diska u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar je $I_0 = MR^2/2$, a u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku vešanja udaljenu $l + R$ od njegovog centra, se dobija na osnovu Štajnerove teoreme $I_2 = I_0 + M(l + R)^2 = M(l^2 + 2lR + 3R^2/2)$. Ukupan moment inercije klatna je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{ml^2}{3} + M \left(l^2 + 2lR + \frac{3}{2}R^2 \right) = 0,205 \text{ kgm}^2.$$

Centar mase klatna se nalazi izmedju centra mase diska i štapa, recimo na nekom rastojanju x od centra mase štapa. Ovo rastojanje se može naći iz jednakosti odgovarajućih momenata (sila) koja daje $xm = (l/2 + R - x)M$, odnosno

$$x = \frac{M}{m + M} \left(\frac{l}{2} + R \right) = 0,227 \text{ m.}$$

Rastojanje d od tačke vešanja do centra mase je prema tome $d = l/2 + x = 0,477$ m.

Na osnovu ovoga je period malih oscilacija klatna

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,205}{0,77 \cdot 9,8 \cdot 0,477}} = 1,5 \text{ s.}$$

13. Na vasijskom brodu, u uslovima bestežinskog stanja, za merenje mase tela se može iskoristi apratura čiji princip rada se sastoji u sledećem. Prvo se izmeri frekvencija oscilovanja tega poznate mase m_0 okačenog o oprugu, a zatim se toj masi doda ona koju želimo da izmerimo i ponovo odredi frekvencija oscilacija. Pokazati kako se, na osnovu poznavanja ovih dveju frekvencija, može odrediti nepoznata masa.

◊ Ako sa m označimo nepoznatu masu, frekvencije ω_0 i ω kojima sistem osciluje u prvom, odnosno drugom slučaju će sa masama biti povezane relacijama

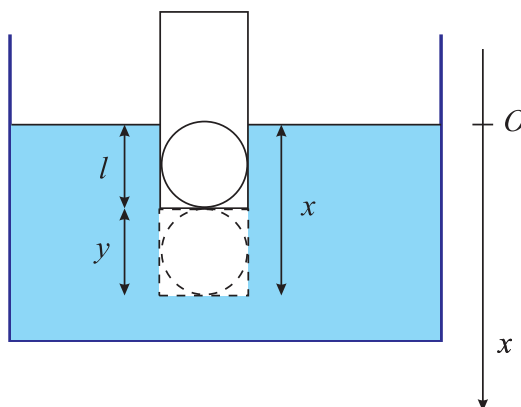
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m}}$$

gde je k koeficijent elastičnosti opruge sistema. Iz ova dva izraza se za traženu masu dobija

$$m = m_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right).$$

14. Teg koji se nalazi u šupljem cilindru površine poprečnog preseka S , pri potapanju cilindra u tečnost gustine ρ zadržava ga u uspravnom položaju. Cilindar sa ovim tegom je prilikom postavljanja u tečnost utonuo do neke dubine. Nakon toga je pritisnut naniže i pušten da osciluje u odnosu na položaj ravnoteže. Masa cilindra sa tegom je m . Zanemarijući viskoznost tečnosti, odrediti period T oscilovanja posmatranog sistema kao i ravnotežnu dubinu na koju je potonuo.

◊ U ovom slučaju ulogu restitucione sile igra sila potiska. Usmerimo x osu vertikalno naniže, izabraši za koordinatni početak njen presek sa površinom tečnosti. Neka je x koordinata donjeg dela cilindra. Sila



Slika 3.32:

potiska je $F_p = -Sx\rho g$. Na cilindar osim toga deluje sila teže $Q = mg$, pa je jednačina kretanja

$$m\ddot{x} = mg - Sx\rho g.$$

U položaju ravnoteže ($x = l$), sila teže i sila potiska su uravnotežene pa je $mg = Sl\rho g$, odakle je dubina na koju je utonuo cilindar sa tegom

$$l = \frac{m}{S\rho}.$$

Ako sa y označimo otklon cilindra od njegovog ravnotežnog položaja, koordinatu donjeg dela cilindra možemo da zapišemo kao $x = l + y$, pa će jednačina kretanja sada biti

$$m\ddot{y} = -S\rho g y,$$

odnosno

$$\ddot{y} + \frac{S\rho g}{m}y = 0,$$

odakle se vidi daje "koeficijent elastičnost" ovog sistema $k = S\rho g$, što znači da je odgovarajuća ugaona frekvencija $\omega_0 = \sqrt{S\rho g/m}$. Na osnovu ovoga je period oscilovanja sistema

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}},$$

ili preko ravnotežne dubine l

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

15. Mala metalna lopta mase m , okačena o neistegljivu nit dužine l , osciluje iznad beskonačne, ravnomerno naelektrisane horizontalne ploče naelektrisane pozitivno (površinska gustina naelektrisanja σ). Odrediti period oscilovanja klatna ukoliko se na njemu nalazi količina naelektrisanja $-Q$.

◇ Harmonijsko oscilovanje ovog klatna se odvija u homogenom gravitacionom i električnom polju. Obe sile su istog smera, a sila električnog polja je $F_e = QE$, gde je električno polje ploče $E = \sigma/2\epsilon_0$. Drugi Njutnov zakon sada ima oblika

$$ma = mg + \frac{Q\sigma}{2\epsilon_0} = m\left(g + \frac{Q\sigma}{2m\epsilon_0}\right),$$

što znači da će period oscilovanja klatna biti

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\epsilon_0 ml}{2\epsilon_0 mg + \sigma Q}}.$$

16. J. J. Tomson je 1906. godine postavio model atoma koji se popularno naziva "puding sa šljivama" prema kome su negativni elektroni uronjeni u prostor pozitivnog naelektrisanja, čija masa predstavlja veći deo mase atoma.

Atom vodonika je, prema ovom modelu, lopta poluprečnika $R = 10^{-10}$ m, naelektrisanja $Q = +e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C i sa jednim elektronom unutar nje, neelektrisanja $-e$ i mase $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, koji se u normalnom stanju nalazi u centru pozitivno naelektrisane lopte. Pretpostavimo da je elektron na neki način pomeren na neko malo rastojanje r_0 od centra pozitivne lopte. Ukoliko se nakon toga prepusti sebi on će početi da osciluje oko ravnotežnog položaja sa amplitudom r_0 . Kolika je frekvencija ovog oscilovanja?

◊ Polazeći od izraza za jačinu električnog polja unutar naelektrisane lopte

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

za silu koja deluje na elektron (restituciona sila) prilikom otklona od ravnotežnog položaja dobijamo

$$F = -eE = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r.$$

Jednačina kretanja je dakle

$$m\ddot{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

i opisuje harmonijsko oscilovanje čija je frekvencija

$$\omega_0 = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ Hz.}$$

Ovoj frekvenciji odgovara sledeća talasna dužina

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 120 \text{ nm,}$$

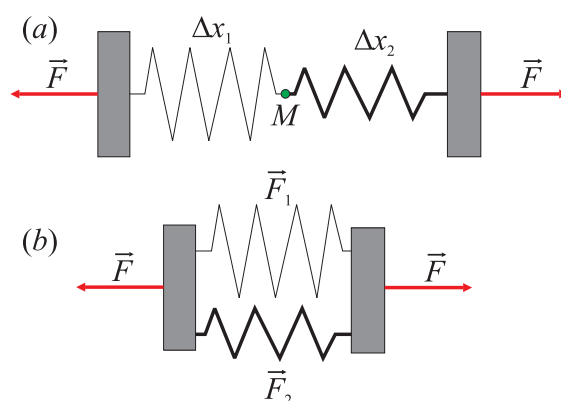
koja se skoro poklapa sa talasnom dužinom elektromagnetnog zračenja koje se dobija kada elektron vodonikovog atoma predje sa prvog pobudjenog na osnovno stanje (prva linija Lajmanove serije). Ovaj rezultat pokazuje da Tomsonov model nije potpuno besmislen jer kao što vidimo, daje neke tačne rezultate bitne za vodonikov atom.

17. Koliki je efektivni koeficijent elastičnosti k opruga sastavljenih od dve opruge, koeficijenata elastičnosti k_1 i k_2 , ukoliko su spojene redno, a koliki ako su spojene paralelno?

◊ Ako razvlačimo dve redno spojene opruge, u svakoj od njih se javlja sila istog intenziteta i jednaka sili F kojom delujemo na opruge da bi

ih rastegli (slika 3.33 (a)), tako da se tačka M , u kojoj su opruge spojene, nalazi u ravnoteži. To znači da su istezanja opruga $\Delta x_1 = F/k_1$, $\Delta x_2 = F/k_2$ (F je intenzitet restitucione sile a ne njena komponenta duž pravca istezanja pa zato ne pišemo znak $-$ u izrazu). Ukupno istezanje kombinovane opruge je $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = F(1/k_1 + 1/k_2)$. Ekvivalentni koeficijent elastičnosti spojenih opruga se dobija iz relacije

$$\frac{1}{k} = \frac{\Delta x}{F} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \text{ odnosno } k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$



Slika 3.33:

Pri razvlačenju paralelno povezanih opruga, jednaka su im istezanja Δx , tako da su sile koje se javljaju u oprugama $F_1 = k_1 \Delta x$ i $F_2 = k_2 \Delta x$. Suma tih dveju sila je jednaka sili koja rasteže opruge (slika 3.33 (b)) i iznosi $F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \Delta x$, tako da je ekvivalentan koeficijent elastičnosti ovih dveju opruga

$$k = \frac{F}{\Delta x} = k_1 + k_2.$$

18. Logaritamski dekrement prigušenja matematičkog klatna ima vrednost $\lambda = 0,02$. Odrediti koliko puta se smanji njegova amplituda nakon 100 punih oscilacija.

◇ Amplituda klatna u $t = 0$ s je A_0 a u nekom docnijem momentu vremena se može naći iz relacije

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}.$$

Nakon 100 punih oscilacija, odnosno nakon vremena $t = 100T$ (T je period oscilovanja), amplituda oscilovanja je

$$A_{100} = A_0 e^{-100\lambda},$$

odakle je

$$\frac{A_0}{A_{100}} = \frac{1}{e^{-100\lambda}} = e^{100\lambda} \approx 7,4.$$

19. Odrediti logaritamski dekrement prigušenja oscilacija matematičkog klatna dužine $l = 50$ cm, ako ono za 8 minuta oscilovanja izgubi 99% svoje energije.

◊ Ukupna energija oscilatora je proporcionalna kvadratu amplitude, pa kako se ona kod prigušenih oscilacija menja sa vremenom, i energija se menja. Ukoliko sa E_0 označimo energiju koju je imao oscilator u početnom momentu vremena, a energiju njegovog oscilovanja nakon 8 minuta sa E_t , onda je njihova veza

$$E_0 - E_t = 0,99E_0, \quad E_t = 0,01E_0 = \frac{E_0}{100}.$$

Obizrom na pomenutu vezu energije i amplitude, odnos odgovarajućih amplitude je

$$\frac{A_t}{A_0} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}.$$

Sa druge strane ove dve amplitude su povezane na sledeći način

$$A_t = A_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$$

pa je dekrement prigušenja

$$\lambda = \frac{T}{t} \ln 10.$$

Kako je reč o slabom prigušenju, period oscilovanja može da se izrazi preko uobičajene formule za period oscilovanja klatna

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

pa je traženi dekrement

$$\lambda \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\ln 10}{t} = 0,0068.$$

20. Telo mase $m = 400$ g obešeno je o oprugu. Ukoliko na nju, u vertikalnom pravcu, deluje sila od 40 N ona se pri tom istegne za 1 cm. Logaritamski dekrement prigušenja tela koje osciluje je $\lambda = 1,57$. Smatrajući da je reč o slabom prigušenju, odrediti period oscilovanja pri kome nastupa rezonanca i rezonantnu amplitudu, ako je amplituda prinudne sile jednaka $F = 200N$.

◊ Za malo prigušenje je $\omega \approx \omega_0$ pa je logaritamski dekrement $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}\beta \approx \frac{2\pi}{\omega_0}\beta$, pa izraza za rezonantnu frekvencu postaje

$$\omega_{rez} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2} \approx 0,94\omega_0,$$

odakle je

$$T_{rez} = \frac{1}{0,94}T_0 = 1,07T_0,$$

gde je T_{rez} period pri kome se javlja rezonanca, a T_0 je period sopstavnog oscilovanja tela na opruzi. Iz datih podataka se dobija

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,63 \text{ s},$$

pa se dakle rezonanca javlja pri periodu

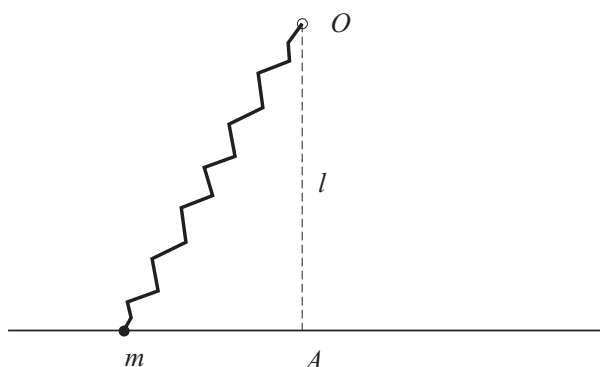
$$T_{rez} = 1,07 \cdot 0,63s \approx 0,67 \text{ s}.$$

Tražena rezonantna amplituda je

$$A_{rez} = \frac{F/m}{\omega_0^2 \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2}} \approx 10 \text{ cm}.$$

21. Tačkasto telo mase m može da se kreće po horizontalnoj pravoj bez trenja pod dejstvom opruge za koju je zakačeno, čiji je kraj pričvršćen u nepokretnoj tački O na rastojanju l od prave (slika). Opruga je krutosti k i dužine l_0 u neistegnutom stanju. Odrediti frekvenciju malih oscilacija ukoliko za 1) $l > l_0$, 1) $l < l_0$ i 1) $l = l_0$. Pri kakvim pomerajim se oscilacije mogu smatrati malim?

◊ Kada je $l > l_0$ izgleda logično da je položaj ravnoteže zapravo vertikalni položaj opruge u kome je ona rastegnuta za $l - l_0$, pri čemu se materijalna tačka nalazi u tački A . Ukoliko se materijalna tačka



Slika 3.34:

pomeri sa ovog mesta na malo rastojanje x , njena kinetička energija je $E_k = m\dot{x}^2/2$, dok je potencijalna

$$U = \frac{1}{2}k \left(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0 \right)^2 \quad (3.107)$$

Ukoliko nismo sigurni da li je $x = 0$ zaista položaj ravnoteže, potrebno je rešiti jednačinu $dU/dx = 0$, odnosno odrediti vrednosti promenljive x za koje je potencijalna energija minimalna. Traženi izvod je

$$\frac{dU}{dx} = kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + l^2}} \right). \quad (3.108)$$

Gornja jednačina je jednaka nuli za $x = 0$ i za $x^2 = l_0^2 - l^2$, odakle vidimo da je drugo rešenje u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom da je $l > l_0$. Karakter položaja ravnoteže se ispituje malim pomeranjem tela iz njega. Ukoliko nas zanima kako se u tom slučaju menja potencijalna energija, razvićemo izraz (3.107) za male vrednosti x oko tačke A

$$U = \frac{1}{2}k \left(l^2 + x^2 - \frac{l_0 x^2}{l} - 2ll_0 + \frac{l_0 x^4}{4l^3} + \dots + l_0^2 \right). \quad (3.109)$$

Pri ovome je iskorišćena formula za Tejlorov razvoj funkcije $f(x)$ oko tačke x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)|_{x=x_0}}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x)|_{x=x_0}}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

Ako se ograničimo na mala pomeranja iz ravnotežnog položaja (to znači da treba zanemariti članove višeg reda od x^2), energija će biti

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)x^2 + const.$$

odakle sledi da će frekvencija oscilacija, u ovom slučaju, biti

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)}$$

Primitimo da, prema ovom izrazu, $\omega \rightarrow 0$ kada $l \rightarrow l_0$.

Kada je $l < l_0$, opruga je u vertikalnom stanju zapravo sabijena pa je reč o položaju labilne ravnoteže. U skladu sa time, kretanje oko tog položaja neće biti oscilatorno. Položaj(i) stabilne ravnoteže će odgovarati situaciji u kojoj je opruga neistegnuta, jer ukoliko se iz takvog stanja izvede opruga, u njoj će se javiti sila koja će telo mase m stalno vraćati u ravnotežni položaj, odnosno ono će se kretati oscilatorno. Deluje logično da će položaju stabilne ravnoteže u ovom slučaju odgovarati tačka koja je od tačke A udaljena za $x_0 = \pm\sqrt{l_0^2 - l^2}$. Postoje zapravo dve takve tačke, jedna sa leve a druga sa desne strane tačke A što je i istaknuto predznakom \pm . Do ovakvog zaključka se može doći i analizom izraza (3.107) za potencijalnu energiju, odnosno nalaženjem vrednosti x za koje ona ima minimum. Prisetimo se da je na osnovu izraza (3.108), osim $x = 0$ postojao i položaj ravnoteže za $x^2 = l_0^2 - l^2$ koji u prethodnom slučaju ($l > l_0$) nije imao smisla. Vrednost potencijalne energije u ovoj tački je jednaka nuli što se lako proverava a interesantno je zapitati se šta se dešava u tački $x = 0$ u kojoj ona takodje ima ekstremum. Jednostavno se pokazuje da je vrednost potencijalne energije u njoj jednaka $\frac{1}{2}k(l - l_0)^2$, odnosno da je reč o lokalnom maksimumu ove funkcije koja, u skladu sa gornjom analizom ima dva minimuma.

Da bi se odredila frekvencija oscilovanja tačke mase m oko njih, potrebno je razviti potencijalnu energiju oko ovih tačaka i zanemariti popravke višeg reda od $(x - x_0)^2$. Dobija se

$$U = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right)(x - x_0)^2.$$

Frekvencija oscilovanje je, u ovom slučaju,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right)}.$$

I u ovom slučaju je $\omega \rightarrow 0$ kada $l \rightarrow l_0$.

Razmotrimo sada situaciju u kojoj je $l = l_0$, odnosno kada opruga u vertikalnom stanju nije ni istegnuta ni sabijena. Njenim pomeranje levo ili desno od tačke A , javlja se povratna sila pa se iz toga može zaključiti da je reč o položaju stabilne ravnoteže. Potencijalnu energiju je potrebno razviti oko tačke $x = 0$ a rezultat (za $l = l_0$), na osnovu relacije (3.109) pokazuje da član uz x^2 postaje jednak nuli, pa je neophodno zadržati, kao prvi nenulti, član koji sadrži x^4 . To pokazuje da ove oscilacije nisu harmonijske.

Veoma je interesantno skicirati grafike potencijalne energije u sva tri slučaja i izvršiti njihovu analizu.

22. Molekuli u kojima su naelektrisanja sferno simetrično raspoređena, usled toga, ne interaguju međusobno električnim silama. Ukoliko se malo poremeti raspodela naelektrisanja unutar molekula, on dobija dipolni moment a time i mogućnost da interaguje sa susednim molekulima. Pojava dipolnog momenta u jednom molekulu izaziva u okolnom prostoru polje i indukuje dipolni moment u susednim molekulima.

Dva takva električna dipola nalaze na međusobnom rastojanju r , i imaju jednake mase i jednaka naelektrisanja raspoređena duž jednog pravca. Neka su trenutna rastojanja naelektrisanja u dipolima x_1 i x_2 .

a) Odrediti tačnu formulu koja opisuje energiju njihove interakcije a zatim i oblik u koji prelazi za slučaj $x_1, x_2 \ll r$. Odrediti sile kojima odgovara ovakav izraz za energiju.

b) Napisati jednačine kretanja čestica dipola i naći zavisnost elongacija od vremena

a) Kako je interakcija Kulonova i ima sabirke koji se odnose na odbijanje istoimenih i privlačenje raznoimenih naelektrisanja, potencijalna energija je

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{e^2}{r-x_1} - \frac{e^2}{r+x_2} + \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{r-x_1+x_2} \right)$$

$$U_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2$$

Obzirom na znak u izrazu vidimo da ova potencijalna energija interakcije odgovara privlačenju izmedju molekula.

$$F_{12} = -\frac{dU_{12}}{dx_1} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^3} x_2 = k' x_2, \quad k' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^3}.$$

$$F_{21} = -\frac{dU_{12}}{dx_2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^3} x_1 = k' x_1$$

b) Ako bi između molekula bilo veoma veliko rastojanje oni ne bi interagovali međusobno a poremećaj rastojanja naelektrisanja unutar njih bi samo izazvao oscilovanje u oba molekula koje bi se, obzirom na njihovu identičnost, odvijalo jednakom frekvencijom $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, gde je k konstanta restitucione sile. Jenačine kretanja bi bile

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1, \quad m\ddot{x}_2 = -kx_2,$$

medjutim pošto između dipola postoji interakcija, potrebno je dodati i nju u izraze, pa oni postaju

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'x_2, \quad m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k'x_1$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{k'}{m} x_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{k'}{m} x_1 = 0$$

Ako spregnuto osciluju malim elongacijama, i frekvencija mora da im bude ista

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = B \cos \omega t$$

Zamena u diferencijalne jednačine daje

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A - \frac{k'}{m}B = 0, \quad -\frac{k'}{m}A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0$$

Da bi sistem imao rešenje, obzirom da su jednačine homogene, mora da važi

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{k'^2}{m^2} = 0$$

odakle slede dve vrednosti za frekvencije

$$\omega_+ = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k'}{m}}, \quad \omega_- = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{k'}{m}}$$

Za prvu vrednost se za konstante dobija

$$A = B,$$

dok je za drugu

$$A = -B = \cos \pi B$$

pa su rešenja za elongacije

$$\omega = \omega_+, \quad x_1 = A \cos \omega_+ t, \quad x_2 = A \cos \omega_+ t$$

$$\omega = \omega_-, \quad x_1 = A \cos \omega_- t, \quad x_2 = A \cos(\omega_+ t + \pi)$$

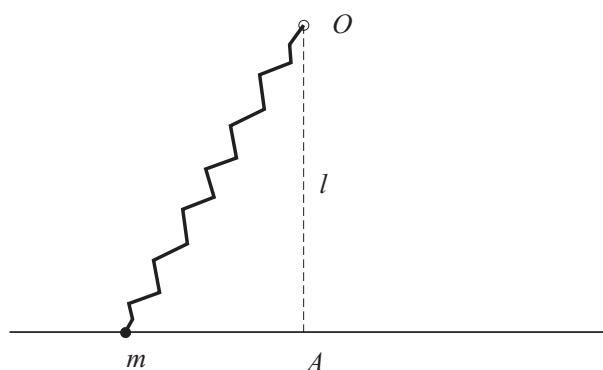
1. Molekuli u kojima su naelektrisanja sferno simetrično raspoređena, usled toga, ne interaguju međusobno električnim silama. Ukoliko se malo poremeti raspodela naelektrisanja unutar molekula, on dobija dipolni moment a time i mogućnost da interaguje sa susednim molekulima. Pojava dipolnog momenta u jednom molekulu izaziva u okolnom prostoru polje i indukuje dipolni moment u susednim molekulima.

Dva takva električna dipola nalaze na međusobnom rastojanju r , i imaju jednake mase i jednaka naelektrisanja raspoređena duž jednog pravca. Neka su trenutna rastojanja naelektrisanja u dipolima x_1 i x_2 .

a) Odrediti tačnu formulu koja opisuje energiju njihove interakcije a zatim i oblik u koji prelazi za slučaj $x_1, x_2 \ll r$. Odrediti sile kojima odgovara ovakav izraz za energiju.

b) Napisati jednačine kretanja čestica dipola i naći zavisnost elongacija od vremena

2. Tačkasto telo mase m može da se kreće po horizontalnoj pravoj bez trenja pod dejstvom opruge za koju je zakačeno, čiji je kraj pričvršćen u nepokretnoj tački O na rastojanju l od prave (slika). Opruga je krutosti k i dužine l_0 u neistegnutom stanju. Odrediti frekvenciju malih oscilacija ukoliko za 1) $l > l_0$, 2) $l < l_0$ i 3) $l = l_0$. Pri kakvim pomerajim se oscilacije mogu smatrati malim?



Slika 3.35:

Glava 4

Talasi

Prve predstave o talasnom kretanju se obično vezuju za formiranje talasa izazvano bacanjem kamena u vodu. Tom prilikom se lako uočava da se poremećaj, koji je izazvao kamen, širi cirkularno od mesta na koje je pao. Moglo bi da se zaključi da se pri ovakvom kretanju pomeraju delovi vode od mesta pada kamena, međutim pažljivom analizom pojave se uočava da se to ne dešava. Tako ako na primer po vodi pliva lišće drveća, pažljivim posmatranjem može da se uoči da listovi ostaju na mestu na kome su i bili, i da se samo podižu gore-dole, pri čemu se taj tip kretanja širi simetrično od centra u kome je nastao. Ovo nas navodi na zaključak da se, iako se *talas* koji je nastao na mestu pada kamena kreće od njega radijalno, to ne izaziva pomeranje vodenih masa u smeru njegovog prostiranja.



Slika 4.1: Formiranje više talasa na vodi.

U prirodi možemo da uočimo jako puno procesa koji se mogu svrstati u talase, ali sve ih možemo podeliti u dve vrste *mehaničke* i *elektromagnetne*. U mehaničke spadaju: akustički, odnosno zvučni talasi, talasi na vodi, ... U ova dva slučaja se prilikom formiranja talasa dešavaju pomeranja delića materijalne sredine (medijuma) oko njihovih ravnotežnih položaja. Kada je reč pak

o elektromagnetnim talasima, njima za nastanak i prostiranje nije potrebna materijalna sredina, odnosno medijum.¹ Primeri elektromagnetnih talasa su: vidljiva svetlost, radio talasi, x-zraci, ... Bez detaljnog udublivanja u teoriju elektromagnetnih talasa, recimo samo da je u njihovom slučaju reč o oscilovanju električnog i magnetnog polja koje se prenosi kroz prostor (pri tom su promene ova dva polja u fazi, odnosno ona istovremeno imaju jednake elongacije), dakle nije mu neophodan medijum-materijalna sredina.

Kada je reč o mehaničkim talasima, kao što je već napomenuto, reč je o prostiranju nečim izazvanog poremećaja kroz materijalnu sredinu.² Drugim rečima, da bi postojao mehanički talas, potrebno je da postoje

- izvor poremećaja,
- sredina u kojoj može da se izvede poremećaj,
- određena fizička veza između čestica sredine kojom su povezani njeni susjedni delovi i putem koje utiču jedni na druge.

Kao što će se pokazati talasi u principu prenose energiju kroz sredinu.³

4.1 Osnovne veličine potrebne za opisivanje talasnog kretanja

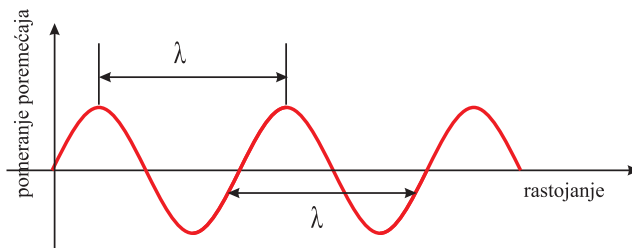
Zamislimo da se nalazimo na splavu koji pluta po velikom jezeru. Mogli bi da uočimo da se stalno podižemo i spuštamo, u ritmu kretanja talasa jezerom. Takodje bi bilo lako uočiti kretanje talasa po površini jezera, odnosno njihovo približavanje splavu na kome se nalazimo. Tačka u kojoj je pomeranje vode u odnosu na njen normalni nivo maksimalno se naziva **breg** talasa. Jasno je da će, u zavisnosti od uslova nastanka, talasi na vodi imati različitu

¹To je stanovište današnje nauke, međjutim, veliki uspeh koji je postignut u proučavanju mehaničkih talasa je doveo do toga da se pokuša da se na analogan način predstavi nastanak i prostiranje elektromagnetnih talasa. U tu svrhu je uvedena hipotetička, veoma retka i veoma elastična sredina pod nazivom etar koja je trebala da postoji samo radi toga da bi se kroz nju prostirali elektromagnetni talasi. Eksperimenti su međjutim pokazali da ona nije neophodna za prostiranje elektromagnetnih talasa. O hipotezi postojanja etra će biti više reči u glavi posvećenoj teoriji relativnosti.

²Na primer, "vodeni" talas ne postoji bez vode, talas na žici ne postoji ako nema žice u kojoj bi se izazvao poremećaj, zvučni talas ne bi mogao da se prostire kroz vakuum, odnosno kroz prostor u kome nema molekula vazduha,

³Količina energije koja se prenosi kroz medijum i mehanizam putem koga se prenosi energija se razlikuju od tipa do tipa talasa a zavise i od uslova pri kojima nastaje i prostire se talas. Na primer, snaga (a samim tim i energija) talasa koji nastaju u vreme oluje na okeanu je mnogo veća od snage zvučnog talasa generisanog glasom jednog čoveka.

udaljenost susednih bregova. U skladu sa time je potrebno uvesti fizičku veličinu koja bi opisala ovu činjenicu. Ona se naziva *talasna dužina* i, prema izloženoj ideji, predstavlja udaljenost dva **susedna** brega talasa. Obično se označava grčkim slovom λ . Tačnije, kada je reč o mehaničkim talasima,⁴ talasna dužina je rastojanje izmedju bilo koje dva dela sredine koji su u identičnom stanju oscilovanja.



Slika 4.2: Talasna dužina.

Ako bi izmerili vreme izmedju nailaska dva susedna brega talasa, dobili bi veličinu koja se naziva *period* talasa i označava sa T .

Ista informacija o talasu se često zadaje veličinom, koja je inverzna periodu talasa, koja se naziva *frekvencijom* i obično označava grčkim slovom ν . Frekvencija talasa je, prema tome, broj bregova talasa koji prodju kroz jednu tačku u prostoru, u jedinici vremena.

Maksimalno pomeranje delića sredine, od njihovog ravnotežnog položaja se naziva *amplituda* talasa. Za talas na vodi to je očigledno maksimalna visina na koju se podižu delići vode, merena od normalnog nivoa vode kada nema talasa.

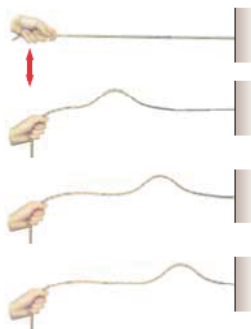
Talasi se prostiru odredjenom brzinom, koja zavisi od osobina sredine u kojoj je nastao i kroz koju se prostire. Na primer, zvučni talas koji se prostire kroz vazduh na sobnoj temperaturi, se kreće brzinom oko 343 m/s, dok se kroz čvrsta tela kreće većom brzinom.

4.2 Pravac poremećaja delova sredine

Jedan od načina za demonstriranje talasnog kretanja je formiranje talasa na kanapu čiji je jedan kraj pričvršćen a drugi držimo u ruci. Talas će nastati ako pomerimo naglo ruku iz ravnotežnog položaja i vratimo je u

⁴Ograničenje u ovoj definiciji je uvedeno zbog elektromagnetnih talasa kojima za prostiranje, kao što je navedeno, nije potrebna materijalna sredina. U slučaju ovih talasa, talasna dužina je minimalno rastojanje izmedju dve identične tačke na talasu.

njega. Talasni puls koji je pri tome nastao na kanapu se prostire odredjenom brzinom duž njega. Takav tip poremeća je progresivni talas (slika 4.3).



Slika 4.3: Nastanak talasnog pulsa na zategnutom kanapu.

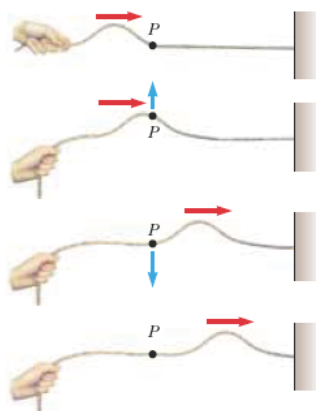
Za razliku od niza pulseva (na koje obično mislimo kada zamišljamo talas), puls koji je kreiran na ovakav način, nema frekvenciju, period i talasnu dužinu. Međutim, on ima odredjenu amplitudu i brzinu prostiranja. Kao što će kasnije biti pokazano, veličine koje odredjuju brzinu pulsa (i talasa) kod zategnutog kanapa (i žice) su sila zatezanja i linijska gustina (masa po jedinici dužine). Može da se takodje primeti da se oblik pulsa praktično ne menja pri kretanju duž kanapa.

U toku prostiranja pulsa kroz kanap, svaki delić kanapa biva pobudjen na kretanje, čiji je pravac normalan u odnosu na pravac prostiranja pulsa. Slika 4.4 ilustruje ovo tvrdjenje na primeru jedne izabrane tačke na kanapu, označene slovom P . Takodje se može zaključiti da se ni jedan delić kanapa ne kreće u pravcu prostiranja talasa.

Progresivni talas, kod koga se čestice sredine kreću u pravcu normalnom na pravac prostiranja talasa, naziva se *transverzalnim talasom*.⁵

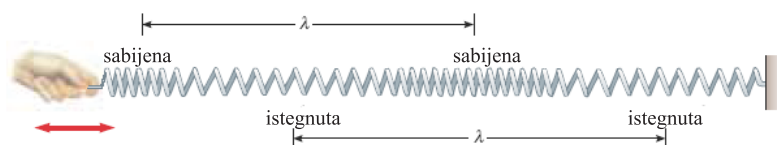
Osim ovakvog tipa talasa postoji i drugi koji nastaje duž zategnute (spiralne) opruge (slika 4.5), u slučaju kada se opruga lagano rasteže i opušta duž njene ose simetrije. Ovakvo kretanje formira oblasti u kojima je opruga više sabijena i mesta na kojima je više istegnuta, pri čemu se ove oblasti, prateći jedna drugu, kreću duž opruge, od mesta na kojem su nastali ka njenom drugom kraju. Važno je primetiti da su, u ovom slučaju, pravac

⁵Drugi primer bi bio puls koji se formira na stadionu prilikom naizmjeničnog ustajanja navijača. Rezultat je obilazak ovog pulsa oko celog stadiona. Primer nemehaničkog transverzalnog talasa je elektromagnetni talas u kome su vektori električnog i magnetnog polja ortogonalni na pravac prostiranja svetlosti (oni su takodje ortogonalni jedan u odnosu na drugog).



Slika 4.4: Kretanje delića kanapa pri prostiranju pulsa duž njega.

pomeranja delova opruge (u odnosu na njihov ravnotežni položaj) i pravac pomeranja oblasti u kojima je opruga sabijena, paralelni.



Slika 4.5: Talas nastao kada se vrši deformacija zategnute opruge duž pravca njene ose simetrije.

Progresivni talas, u kojem se čestice sredine kreću⁶ paralelno pravcu prostiranja talasa, naziva se *longitudinalni*⁷ talas.⁸

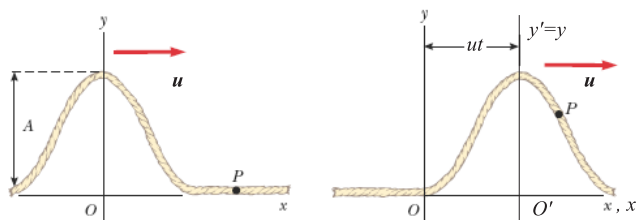
⁶Misli se naravno na kretanje čestica izazvano poremećajem usled koga je i nastao talas. Čestice sredine mogu naravno učestvovati i u drugim tipovima kretanja koji nisu od interesa za ovo razmatranje.

⁷Zvučni talas je drugi primer longitudinalnog talasa. Poremećaj u vazduhu izaziva niz oblasti u kojima je naizmenično, pritisak niži, odnosno viši u odnosu na ravnotežnu vrednost pritiska kada nema izvora zvuka. Drugi primer bi bio puls koji nastaje u (idealnom) redu ljudi koji čekaju da kupe kartu kada prvi u tom redu kartu kupi i izadje iz njega a svi ostale se pomere napred za jedno mesto.

⁸Neki talasi u prirodi su kombinacija transverzalnih i longitudinalnih pomeranja čestica sredine. Površinski talas na vodi je dobar primer takvog tipa kretanja. U tom slučaju, kada se po površini duboke vode prostire talas, molekuli vode koji se nalaze na površini se kreću po približno kružnim putanjama. Kao što je dobro poznato, takvo kretanje se može razložiti na transverzalnu i longitudinalnu komponentu. Drugi primer ovako složenog

4.3 Jednodimenzionalni progresivni talas

Razmotrimo puls koji se prostire s leva na desno duž zategnute žice, konstantnom brzinom u (slika 4.6). Taj puls se kreće duž x ose dok se pomeranja delića žice dešavaju duž y ose. Na prvom delu slike je predstavljen izgled i pozicija pulsa u $t = 0$. U tom momentu vremena, njegov oblik je neka funkcija veličine x , koju ćemo zapisati u najopštijem obliku $y = f(x)$, pri čemu je sa y označen otklon neke tačke x od njenog ravnotežnog položaja koji je određen sa $y = 0$. Otklon y se obično naziva *talasna funkcija* i, u principu, zavisi i od pozicije tačke na horizontalnoj osi i od momenta vremena u kojem nas zanima, pa se to naglašava zapisom $y = y(x, t)$.



Slika 4.6: Puls koji se kreće u jednoj dimenziji u trenutku $t = 0$ i u nekom docnijem trenutku t .

Uočimo sada neku tačku P čija je elongacija u početnom trenutku vremena jednaka nuli (slika 4.6). Kada puls dodje do tačke P , njena y koordinata poraste, dostiže maksimum a onda opadne do nulte vrednosti. Kako je brzina prostiranja pulsa u , puls za vreme t predje rastojanje ut . Ukoliko se oblik pulsa ne menja sa vremenom, on će, u sistemu reference koji ima početak u tački O' , biti zadata istom funkcijom oblika ali sa promenjenom

talasa je talas koji nastaje pri zemljotresu. Longitudinalna komponenta ovakvog talasa je brža (kreće se brzinom od 7-8 km/s) blizu površine Zemlje. Ovakvog talasa se naziva "P" talasom (od reči primarni) jer je brži od transverzalnog i prvi se može registrovati seizmografom. Sporiji, transverzalni talas, se naziva "S" (sekundarnim) talasom i on se kreće brzinom od 4 do 5 km/s u blizini Zemljine površine. Registrovanjem vremenskog intervala između dolaska P i S talasa u seizmograf, može da se izračuna rastojanje od njega do mesta nastanka ovih talasa. Na osnovu jednog takvog merenja može da se nacрта zamišljena sfera, sa centrom u seizmografu, čiji je poluprečnik određen vremenskim intervalom kašnjenja sekundarnih talasa u odnosu na primarne. Mesto nastanka talasa se u tom slučaju nalazi negde na toj sferi (naravno u delu gde se sfera nalazi pod površinom Zemlje). Ukoliko se na pogodan način postave još dva seizmografa, i na osnovu njihovog merenja nacrtaju odgovarajuće sfere, u njihovom preseku se dobija mesto na kome se desio zemljotres.

vrednošću koordinate x , koja je sada x' , odnosno $y = f(x')$. U skladu sa Galilejevim transformacijama, veza ovih koordinata je $x' = x - ut$, pa će jednačina koja pokazuje kako se talasna funkcija menja sa vremenom i sa rastojanjem koje je puls prešao biti oblika

$$y(x, t) = f(x - ut). \quad (4.1)$$

Ukoliko se puls prostire sa desna na levo, biće opisan jednačinom

$$y(x, t) = f(x + ut). \quad (4.2)$$

Interesantno je proanalizirati brzinu prostiranja brega pulsa. Neka je breg u početku ($t = 0$) bio na mestu čija je x koordinata x_0 . Kako se puls prostire brzinom u , za vreme dt je prešao rastojanje udt i došao u tačku x zadatu sa $x = x_0 + udt$, pri čemu je puls prešao rastojanje dx , za koje mora da važi $dx = x - x_0 = (x_0 + udt) - x_0 = udt$, odakle je

$$u = \frac{dx}{dt}. \quad (4.3)$$

4.3.1 Puls koji se prostire na desno

Proanalizirajmo jedan instruktivan primer. Neka je talasni puls koji se kreće duž x ose zadat jednačinom

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}, \quad (4.4)$$

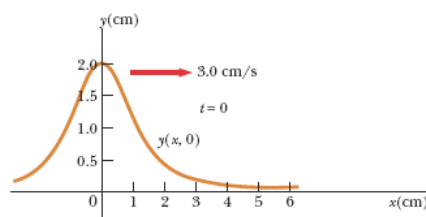
gde je x izraženo u centimetrima a t u sekundama.⁹ Nacrtajmo izgled ovih pulseva u trenucima vremena $t = 0$, $t = 1$ s i $t = 2$ s.

Iz jednačine pulsa se vidi da je njegova brzina $u = 3$ cm/s, dok mu je amplituda $A = 2$ cm. U trenutku $t = 0$ talasna funkcija je

$$y(x, 0) = \frac{2}{x^2 + 1},$$

a nalaženjem prvog i drugog izvoda se lako vidi da ima maksimum u $x = 0$. Takodje, obzirom da u $x = \pm\infty$ postaje jednaka nuli, jasno je da je x osa je njena horizontalna asimptota. Obzirom na to da je parna ona je i simetrična u odnosu na y osu, a daljom analizom se dolazi do toga da je njen grafik predstavljen na slici 4.7.

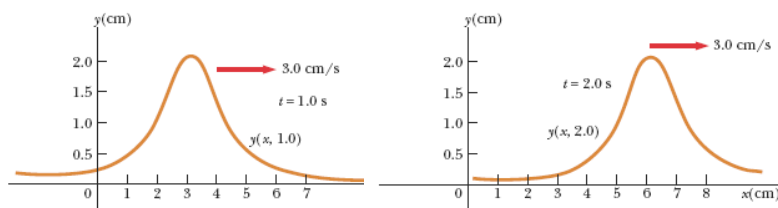
⁹Primetimo da ova funkcija ima oblik $y = f(x - ut)$.

Slika 4.7: Talasna funkcija pulsa za $t = 0$.

Talasne funkcije pulsa u druga dva momenta vremena su

$$y(x, 1) = \frac{2}{(x - 3)^2 + 1}, \quad y(x, 2) = \frac{2}{(x - 6)^2 + 1}$$

a jedina razlika njihovih grafika u odnosu na onaj za $t = 0$ je u tome što ima se maksimum nalazi u tački $x = 3$ cm, odnosno $x = 6$ cm (slika 4.8).

Slika 4.8: Talasna funkcija pulsa za $t = 1$ s i $t = 2$ s.

Na osnovu izvršene analize se vidi da se puls zadat jednačinom (4.4), zaista prostire sa leva na desno, pri čemu mu se oblik ne menja.

4.3.2 Brzina talasa na žici

Razmotrimo prostiranje transverznog pulsa po zategnutoj žici. Sila zatezanja žice je, prilikom prostiranja pulsa duž nje, odgovorna za povratak svakog njenog deformisanog delića u ravnotežni položaj, saopštavajući mu određeno ubrzanje. U skladu sa II Njutnovim zakonom ubrzanje delića je direktno proporcionalno sili zatezanja. Ukoliko se delić vraća u ravnotežu pod dejstvom većeg ubrzanja (veće sile zatezanja), to će automatski značiti da je i brzina prostiranja pulsa veća. Dakle ona je upravno srazmerna sili zatezanja.

Sa druge strane, brzina pulsa je obrnuto proporcionalna masi i opada kada masa žice po jedinici njene dužine raste. Ovaj zaključak sledi iz

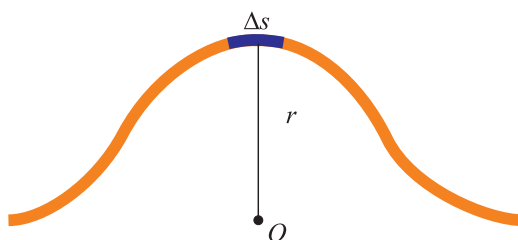
činjenice da je masa mera inercnosti pa je prema tome masivnije deliće teže ubrzati od manje masivnih.

Detaljniji proračun, kao što će kasnije biti pokazano, dovodi do sledećeg izraza za brzinu talasnog pulsa u žici

$$u = \sqrt{\frac{F_z}{\mu}}, \quad (4.5)$$

čija je masa po jedinici dužine $\mu = m/l$ i koja je zategnuta silom zatezanja F_z .¹⁰

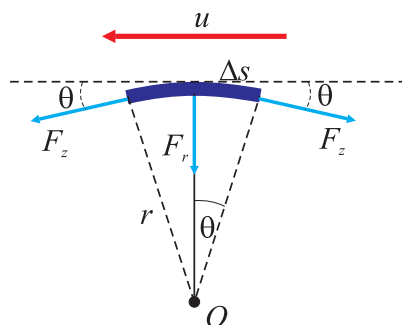
Kada kažemo da se duž zategnute žice, brzinom u , prostire puls sa leva na desno, time smo automatski rekli da prostiranje pulsa posmatramo iz nekog nepokretnog inercijalnog sistema reference. Pogodno je međjutim preći u sistem reference koji prati kretanje ovog pulsa, koji je takodje inercijalan. Prema Galilejevom principu relativnosti, II Njutnov zakon će u njemu, kao i u nepokretnom sistemu reference, imati potpuno isti oblik. U ovom sistemu reference, dati delić žice koji se u početku nalazio desno od pulsa (odnosno ispred njega), kreće se na levo, podižući se u vis i prateći oblik pulsa a nakon dostizanja maksimalne visine spušta se na dole. Na slici 4.9 prikazan je jedan takav delić u trenutku kada je dostigao maksimalnu visinu.



Slika 4.9: Delić žice koji je dostigao maksimalnu visinu. Ovaj delić se kreće radijalnim ubrzanjem $a_r = u^2/r$

Delić žice dužine Δs može da se smatra lukom kružnice poluprečnika r . U sistemu reference koji se kreće na desno brzinom u , osenčeni delić se kreće na levo brzinom jednakog intenziteta. Na njega deluje sila zatezanja, kao što je prikazano na slici 4.10. Ova sila deluje sa obe strane na delić žice (luk dužine Δs) i ima dve komponente, horizontalnu i radijalnu.

¹⁰Ako se podje od kvalitativne analize koja je pokazala da je brzina pulsa direktno srazmerna sili zatezanja a obrnuto masi po jedinici dužine, dimenzionalnom analizom se može pokazati da je ovo jedini mogući izraz koji povezuje ove dve veličine na taj način.



Slika 4.10: Uvećan prikaz delića na maksimalnoj visini. Ukupna sila koja deluje na njega ima samo radijalnu komponentu jer se tangencijalne poništavaju.

Horizontalne komponente, obzirom da su jednakog intenziteta a suprotno usmerene, se poništavaju, tako da od obe ostaju samo radijalne komponente $F_z \sin \theta$ koje su usmerene ka centru kružnice. Ukupna radijalna sila je $2F_z \sin \theta$. Kako je delić žice veoma mali, mali je i ugao θ , pa se može uzeti da je približno $\sin \theta \approx \theta$, pa je ukupna radijalna sila

$$\sum F_r = 2F_z \sin \theta \approx 2F_z \theta.$$

Posmatrani delić ima masu $m = \mu \Delta s$, a kako ugao nad kojim je formiran luk dužine Δs , iznosi 2θ , masa luka je

$$m = \mu \Delta s = \mu r(2\theta).$$

Primeni li se II Njutnov zakon na ovaj delić žice, za radijalnu komponentu sile se može pisati

$$\sum F_r = ma_r = \frac{mu^2}{r},$$

odnosno

$$2F_z \theta = \frac{2\mu r \theta u^2}{r}.$$

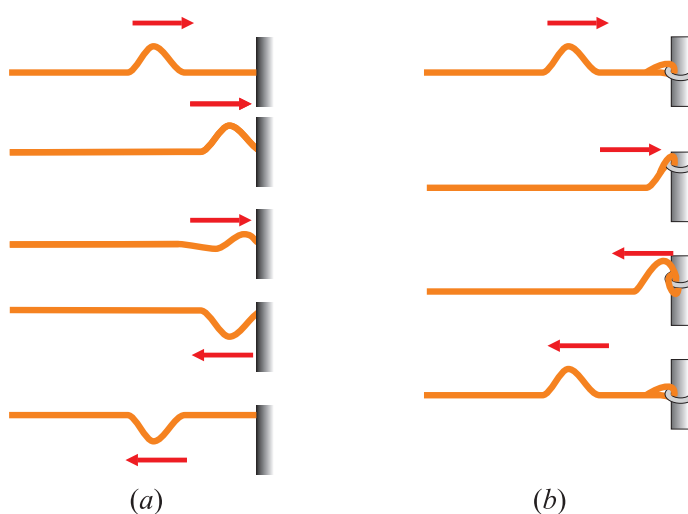
Kada se ovaj izraz reši po u , dobija se izraz (4.5).¹¹

¹¹Potrebno je uočiti da je ovakvo izvodjenje izraza za brzinu talasa u žici zasnovano na pretpostavci da je visina pulsa mala u poredjenju sa dužinom žice. Na osnovu te pretpostvke je na primer uzeto da je $\sin \theta \approx \theta$. Takodje je prećutno uzimano da je sila zatezanja ima istu vrednost u svakom deliću žice iako to nije tako jer je onda deformisana pulsom. Primitimo takodje, da je izraz za brzinu dobijen nezavisno od oblika pulsa te je prema tome brzina pulsa ma kog oblika koji se prostire duž žice jednaka $u = \sqrt{F_z/\mu}$.

4.3.3 Refleksija i transmisija

U dosadašnjim razmatranjima su analizirani talasni procesi kroz sredinu čije se karakteristike uniformne, odnosno ne menjaju se. Interesantno je razmotriti šta se dešava sa talasom kada sredina nije takva. Posmatrajmo za početak prostiranje pulsa koji se prostire na konopcu čiji je jedan kraj pričvršćen (slika 4.11(a)).

Kada puls dodje do mesta na kome je konopac učvršćen, više ne može da se prostire kroz homogenu sredinu - došao je do njenog kraja. Rezultat je refleksija (odbijanje) pulsa i njegov povratak nazad.



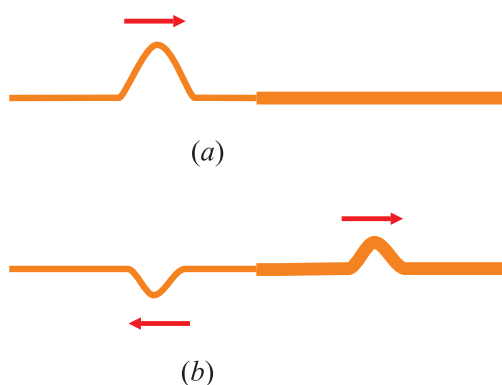
Slika 4.11: (a) Refleksija progresivnog pulsog talasa na zategnutom konopcu sa učvršćenim krajem. Reflektovani puls se invertovao bez promene oblika. (b) Refleksija progresivnog pulsa na zategnutom konopcu sa nepričvršćenim krajem. Reflektovani puls se nije invertovao i nije promenio oblik.

Primetimo da je puls invertovan. Ta inverzija se može objasniti na sledeći način: kada puls stigne do pričvršćenog kraja konopca, on deluje na mesto pričvršćenja silom na gore. Prema III Njutnovom zakonu nosač za koji je pričvršćen konopac deluje na njega silom jednakog intenziteta ali suprotnog smera (na dole).

Ukoliko se pak desi slučaj da puls stigne do kraja konopca koji može da se kreće vertikalno (slika 4.11(b)) jer je recimo zavezan za neku alku zanemarljive mase koja može da se pomera duž šipke na koju je nataknuta. Sila zatezanja će povući na gore konopac na visinu pulsa a zatim će ga na

dole usmerena komponenta sile zatezanja povući nazad. Ovakvo pomeranje prstena će proizvesti reflektovani puls koji nije invertovan i koji ima istu amplitudu i oblik kao i dolazni puls.

Na kraju, interesantno je razmotriti situaciju koja je između ove dva. To je slučaj kada se deo upadnog pulsa reflektuje a deo prodje kroz granicu između dve sredine. Pretpostavimo da je relativno tanak konopac prikazan na deblji (veće mase po jedinici dužine, slika (4.12)). Kada puls koji se kreće duž tanjeg konopca dodje do razdeobne površine sa debljim konopcem, deo njega se reflektuje i invertuje a deo prodje u deblji konopac bez invertovanja.¹²



Slika 4.12: (a) Puls koji se prostire kroz tanji konopac prikazan za deblji konopac. (b) Deo upadnog talasa se reflektovao i invertovao a deo je prošao u drugi konopac i nije invertovan.

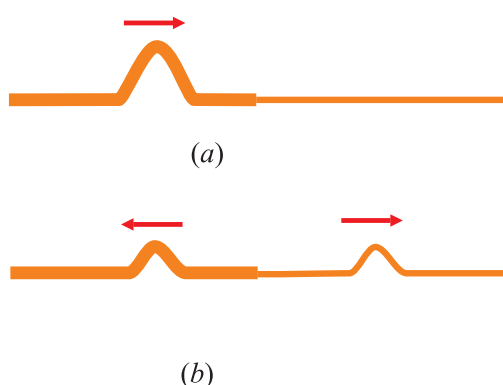
Primetimo da reflektovani puls ima manju amplitudu od upadnog. Kasnije ćemo videti da amplituda ima vezu sa energijom koju nosi talas, tako da je činjenica da su amplitude reflektovanog i transmitovanog pulsa manje od amplitude upadnog pulsa u stvari u vezi sa zakonom održanja energije.

Ukoliko je situacija obrnuta, odnosno ako puls prolazi prvo kroz deblji konopac, deo se opet reflektuje a deo prolazi u drugi konopac. U ovom slučaju reflektovani puls nije invertovan.¹³

Može da se zaključi da od odnosa linijskih gustina ovih dveju sredina zavisi da li će pri refleksiji doći do invertovanja pulsa.

¹²Reflektovani talas je invertovan iz razloga već opisanih kod situacije kada se puls odbija o fiksiran kraj konopca.

¹³Ovo je posledica zaključaka koji su se odnosili na odbijanje pulsa o kraj konopca koji može da se kreće u vertikalnoj ravni.



Slika 4.13: (a) Puls koji se prostire kroz deblji konopac prikačen za tanji. (b) Deo upadnog talasa se reflektovao i nije invertovao a deo je prošao u drugi konopac i takodje nije invertovan.

U skladu sa jednačinom (4.5), brzina talasa opada kada masa po jedinici dužine raste. Drugim rečima, puls se kreće sporije kroz gušći konopac (ukoliko su oba zategnuta jednakim silama zatezanja).

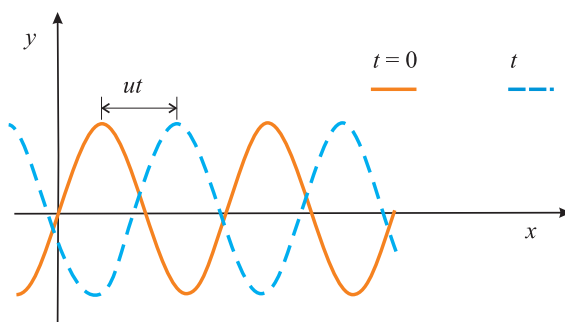
Može da se zaključi da važi sledeće pravilo: **Kada se puls kreće iz sredine A u sredinu B i $u_A > u_B$ (sredina B je gušća od sredine A), puls se pri refleksiji invertuje. Ako puls prelazi iz sredine A u sredinu B i $u_A < u_B$ (A je sredina gušća od B), puls se ne invertuje pri refleksiji.**

4.4 Sinusoidalni talasi

Talas predstavljen punom krivom linijom sa slike 4.14 se naziva sinusoidalnim, obzirom da ova linija ima isti oblik kao i grafik funkcije $\sin \theta$. Sinusoidalni talas je najprostiji primer periodičnog neprekidnog talasa i može da se iskoristi za predstavljanje složenijih talasa. Puna linija na ovom grafiku predstavlja sinusoidalni progresivni talas u $t = 0$, dok isprekidana predstavlja isti talas u nekom docnijem trenutku vremena t . Sa slike se vidi da u $t = 0$ funkcija koja opisuje položaj delića sredine koja je podvrgnuta talasnom kretanju, može da se zapiše u obliku

$$y(x, 0) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right), \quad (4.6)$$

gde konstanta A predstavlja amplitudu a konstantna veličina λ je talasna dužina. Ovakva talasna funkcija odražava činjenicu da je elongacija čestica



Slika 4.14: Jednodimenzionalni progresivni sinusoidalni talas koji se kreće sa leva na desno brzinom u . Puna linija predstavlja sliku talasa u $t = 0$, dok isprekidana linija predstavlja isti talas u nekom docnijem momentu vremena t .

sredine ista kada se njihova x koordinata promeni za celobrojni umnožak talasne dužine.¹⁴

Kako se talas kreće na desno brzinom u , talasna funkcija u nekom docnijem momentu vremena t je

$$y(x, t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ut) \right], \quad (4.7)$$

i ovo bi bila jednačina koja opisuje talas koji je za vreme t prešao put ut na desno, kao što je prikazano isprekidanom linijom na slici 4.14.¹⁵

Po definiciji, talas predje put od jedne talasne dužine za vreme od jednog perioda T . Na osnovu toga su brzina, period i talasna dužina talasa povezani jednačinom

$$u = \frac{\lambda}{T}. \quad (4.8)$$

¹⁴Drugim rečima vrednost koordinate y je ista tačkama $x, x + \lambda, x + 2\lambda, \dots, x + k\lambda, \dots$ gde je k ceo broj, što je lako proveriti zamenom u jednačinu(4.6). Do ove jednačine se može doći i na sledeći način. Zavisnost koordinate y od x je u $t = 0$ očigledno sinusna funkcija, odnosno oblika $y = A \sin(\alpha x)$, koja, kao i svaka takva funkcija, ima period 2π . Nepoznati parametar α koji pokazuje koliko brzo se ponavljaju vrednosti veličine y se može odrediti na osnovu sledeće analize. Naime, prema smislu talasne dužine λ ova funkcija mora da ima istu vrednost y baš kada je $x = \lambda$, odnosno u tački za koju važi da je $\alpha\lambda = 2\pi$. Iz ovog izraza se dobija da je $\alpha = 2\pi/\lambda$.

¹⁵Primetimo da ova talasna funkcija ima oblik $f(x - ut)$ i da prema tome opisuje talas koji se kreće u pozitivnom smeru x ose, odnosno sa leva na desno. Ukoliko je reč o talasu koji se kreće sa desna na levo, izraz $x - ut$, treba zameniti sa $x + ut$, kao što je ustanovljeno prilikom analize jednačina (4.1) i (4.2).

Ako se iskoristi ovaj izraza za brzinu i zameni u jednačinu (4.7) ona postaje

$$y(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]. \quad (4.9)$$

Ovakva forma talasne jednačine jasno odražava periodičnu prirodu veličine y . Za bilo koji izabrani momenat vremena, t , kao što je već naglašeno, y ima istu vrednost u tačkama x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ itd. Iz ovog izraza se međjutim vidi da postoji periodičnost i u vremenu, pa tako za datu vrednost x koordinate, vrednost y je ista za momente vremena t , $t + T$, $t + 2T$, itd.

Talasna funkcija se može zapisati i u drugoj uobičajenoj formi ako se definišu dve nove veličine, talasni broj k i ugaona frekvencija ω :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4.10)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.11)$$

Sada se jednačina (4.9) može zapisati u kompaktnijoj formi

$$y = A \sin(kx - \omega t). \quad (4.12)$$

Frekvencija sinusoidalnog talasa je povezana sa periodom izrazom

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (4.13)$$

Ako se iskoriste jednačine (4.10), (4.11) i (4.13) izraz za brzinu (4.8) se može zapisati u dve alternativne forme

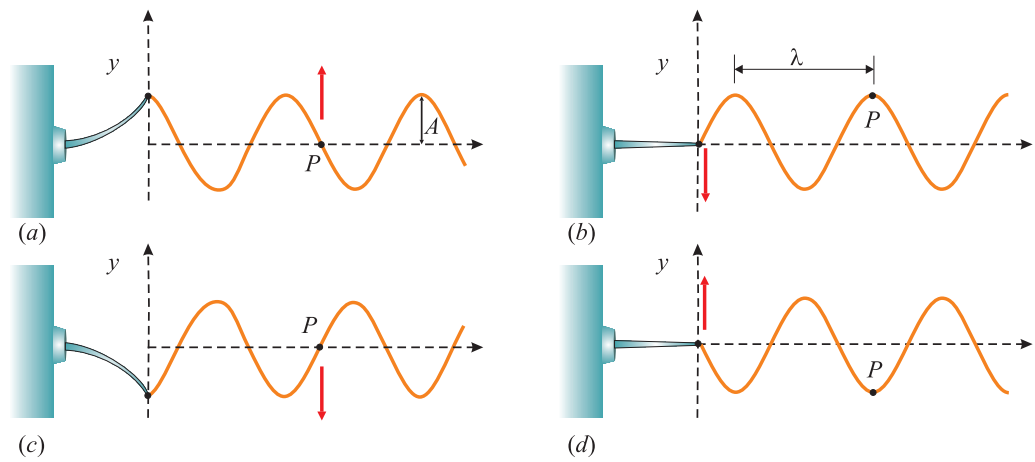
$$u = \frac{\omega}{k}, \quad (4.14)$$

$$u = \lambda\nu. \quad (4.15)$$

Talasna funkcija zadata jednačinom (4.12) podrazumeva da je vertikalno pomeranje delića sredine y u $x = 0$ i u momentu $t = 0$ jednako nuli. Kako to ne mora da je slučaj, opštiji izraz za talasnu funkciju je oblika

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi), \quad (4.16)$$

pri čemu je φ početna faza talasa.



Slika 4.15: Jedan od metoda za kreiranje niza talasnih pulseva na zategnutoj žici. Levi kraj žice je prikazan za polugu koja harmonijski osciluje. Svaki delić žice, na primer tačka P , učestvuje u prostom harmonijskom oscilovanju u vertikalnom pravcu.

Sinusoidalni talasi na žici

Na slici 4.3 je prikazano kreiranje pulsa na zategnutoj žici njenim okidanjem. Da bi se stvorio niz pulseva, talas, potrebno je stalno na ravnomeran način okidati žicu, odnosno, potrebno je da se na njoj, nalazi izvor koji linearno harmonijski osciluje.

Na slici 4.15 se vidi da svaki delić žice osciluje prosto harmonijski frekvencijom jednakom frekvenciji oscilovanja poluge koja izaziva talas na žici. Naravno, iako delići žice osciluju u y pravcu, kreirani (transverzalni) talas putuje duž x ose, brzinom u .

Ukoliko je talas u $t = 0$ izgledao kao na delu (b) slike 4.15, njegova talasna funkcija je

$$y = A \sin(kx - \omega t).$$

Posmatrana tačka P , kao i bilo koja druga tačka na žici, se kreće jedino vertikalno, odnosno njena x koordinata je konstantna. Usled toga, brzina transveralnog kretanja delića sredine v_y (ov brzinu ne treba mešati sa brzinom prostiranja talasa u), i odgovarajuće transverzalno ubrzanje a_y su

$$v_y = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=const} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t), \quad (4.17)$$

$$a_y = \left. \frac{dv_y}{dt} \right|_{x=const} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t). \quad (4.18)$$

Imajući u vidu da talasna funkcija y zavisi od x i t , u prethodnim izrazima se ne nalaze njeni obični već takozvani parcijalni izvodi.¹⁶ Amplitudne vrednost transverzalne brzine i ubrzanja su, na osnovu prethodna dva izraza,

$$v_{y,max} = \omega A, \quad (4.19)$$

$$a_{y,max} = \omega^2 A. \quad (4.20)$$

Kao što se vidi iz jednačina (4.17) i (4.18), ova brzina i ubrzanje ne dostižu istovremeno maksimalne i minimalne vrednosti. Transverzalna brzina ima maksimalnu vrednost kada je $y = 0$ (tada je ubrzanje jednako nuli), dok joj je vrednost nula kada je $y = \pm A$ (tada ubrzanje dostiže svoju amplitudnu vrednost).

P r i m e r X. Delići žice prikazane na slici 4.15 pobudjuju se na oscilovanje frekvencijom 5 Hz. Amplituda ovog kretanja je 12 cm, a brzina nastalog talasa 20 m/s. Odrediti ugaonu frekvenciju ω , talasni broj k i napisati izraz koji opisuje talasnu funkciju. Odrediti maksimalne vrednosti transverzalne brzine i ubrzanja ma kog delića žice.

R e š e n j e. Na osnovu jednačina (4.11), (4.10) i (4.12) se dobija da je

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi(5Hz) = 31,4\text{rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{31,4\text{rad/s}}{20\text{m/s}} = 1,57\text{rad/m}.$$

Kako je $A = 12\text{ cm} = 0,12\text{ m}$, talasna funkcija je

$$y = A \sin(kx - \omega t) = (0,12\text{ m}) \sin(1,57x - 31,4t),$$

dok su amplitudne vrednosti transverzalne brzine i ubrzanja, prema (4.19) i (4.20)

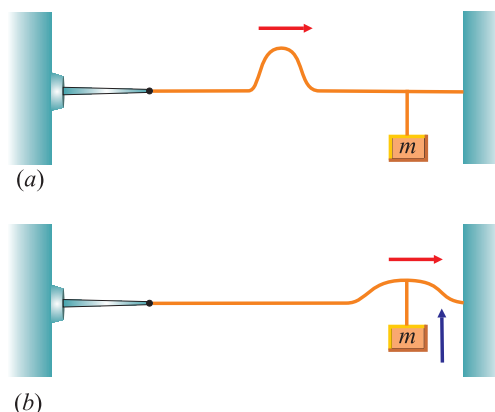
$$v_{y,max} = 3,77\text{ m/s}, \quad a_{y,max} = 118\text{ m/s}^2.$$

4.4.1 Energija i intenzitet talasa

Kada se talas prostire kroz neku sredinu, on zapravo prenosi energiju kroz nju. To može lako da se demonstrira ako se o zategnuti kanap okači neko telo, pa se duž kanapa pošalje jedan puls ka njemu (slika 4.16). Kada puls stigne do okačenog tela, doći će do njegovog pomeranja (slika 4.16 (b)). I kako je za pomeranje tela bila neophodna energija, ona je uzeta iz pulsa odakle

¹⁶Prilikom nalaženja izvoda $\partial y/\partial t$, na primer, nalazi se izvod po vremenu, smatrajući da je promenljiva x konstanta.

sledi da se zaista pri talasnim procesima kroz sredinu transferiše energija. I pošto talasi pri prolasku kroz sredinu prenose energiju, od interesa je izvesti izraz iz koga bi ona mogla da se izračuna. To će biti uradjeno na primeru jednodimenzionalnog sinusoidalnog talasa.



Slika 4.16: (a) Puls koji se prostire kroz zategnutu žicu na koju je okačen teg mase m . (b) Kada puls stigne do tela energija se prenosi na njega.

Razmotrimo sinusoidalni talas predstavljen na slici 4.17. Izvor talasa vrši rad nad žicom, pomerajući je gore-dole. Na taj način se ubacuje energija u sistem koja se, putem nastalog talasa, prenosi kroz žicu prema njenom drugom kraju. Uočimo na žici njen delić mase Δm i dužine Δx . Svaki delić žice vrši prosto harmonijsko oscilovanje po vertikali. Štaviše, svi delići imaju istu ugaonu frekvenciju ω i istu amplitudu A . Kako je ranije pokazano, potencijalna energija pridružena prostom harmonijskom kretanju je $U = 1/2ky^2$, obzirom da se harmonijsko kretanje odvija u y pravcu. Koristeći relaciju $\omega^2 = k/m$, izraz za potencijalnu energiju postaje $U = 1/2m\omega^2y^2$. Ukoliko primenimo tu jednačinu na delić žice mase Δm , njegova potencijalna energija je

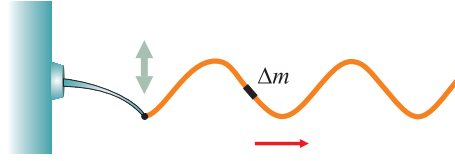
$$\Delta U = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2y^2.$$

Ako se uvede da je masa po jedinici dužine žice $\mu = \Delta m/\Delta x$, potencijalna energija delića žice je

$$\Delta U = \frac{1}{2}\mu\Delta x\omega^2y^2,$$

ili u diferencijalnom obliku (za veoma male deliće dužine dx)

$$dU = \frac{1}{2}\mu dx\omega^2y^2.$$



Slika 4.17: Sinusoidalni talas koji se prostire duž zategnute žice. Svaki delić žice se kreće vertikalno i ima jednaku energiju.

Nakon ubacivanja izraza za talasnu funkciju y , za bilo koji momenat vremena se dobija

$$dU = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \sin^2(\mathbf{k}x - \omega t) dx.$$

Bez da se izgubi na opštosti, moguće je posmatrati talasnu funkciju u $t = 0$, kada je potencijalna energija proizvoljnog delića žice

$$dU = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \sin^2 \mathbf{k}x \, dx.$$

Da bi dobili potencijalnu energiju koju poseduje deo žice dužine jedne talasne dužine, treba integraliti prethodni izraz duž tog segmenta, odnosno

$$\begin{aligned} U_\lambda &= \int dU = \int_0^\lambda \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \sin^2 \mathbf{k}x \, dx = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \int_0^\lambda \sin^2 \mathbf{k}x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4\mathbf{k}} \sin 2\mathbf{k}x \right]_0^\lambda = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda. \end{aligned}$$

Kako se delići žice kreću, poseduju i kinetičku energiju. Ukoliko primenimo analognu proceduru u analizi kinetičke energije na delu žice dužine jedne talasne dužine, dobićemo isti rezultat

$$E_{k,\lambda} = \int dE_k = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda,$$

pa će ukupna energija jedne talasne dužine žice biti jednaka zbiru kinetičke i potencijalne energije

$$E_\lambda = E_{k,\lambda} + U_\lambda = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda. \quad (4.21)$$

Kada se talas kreće duž žice, tolika količina ukupne energije prolazi kroz datu tačku žice u toku vremena od jednog perioda. Na osnovu ovoga se može odrediti snaga talasa, odnosno brzina prenosa energije talasom, kao

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T}.$$

Kako je odnos talasne dužine i perioda jednak brzini prostiranja talasa, za snagu se dobija

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 u. \quad (4.22)$$

Ovaj izraz pokazuje da je brzina prenosa energije sinusoidalnim talasom na žici, proporcionalna: a) brzini talasa, b) kvadratu njegove frekvencije i c) kvadratu amplitude.¹⁷

Na ovom mestu je zgodno uvesti još par korisnih relacija. Podje li se od izraza za gustinu mase $\rho = \Delta m/\Delta V$, kako je $\Delta V = \Delta S\lambda$ gde je ΔS površina poprečnog preseka parčeta žice dužine λ , koristeći činjenicu da je linijska gustina $\mu = \Delta m/\lambda$, ukupna energija tog dela žice je

$$E_\lambda = \frac{1}{2}\rho\Delta S\omega^2 A^2\lambda = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\Delta V.$$

Uvede li se pojam o gustini energije ϵ , kao odnos energije dela sredine E_λ i zapremine tog dela sredine ΔV , dolazi se do sledeće relacije

$$E_\lambda = \epsilon\Delta V.$$

Na osnovu ovoga se za intenzitet talasa (količina energije koja u jedinici vremena prodje kroz jedinicu površine žice, normalno na pravac prostiranja talasa) dobija

$$I = \frac{E}{\Delta S\Delta t} = \frac{E_\lambda}{\Delta ST} = \frac{1}{\Delta ST} \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\Delta V = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 u, \quad (4.23)$$

odnosno

$$I = \epsilon u. \quad (4.24)$$

P r i m e r X2. Žica, linijske gustine mase $\mu = 5 \cdot 10^{-2}$ kg/m, je zategnuta silom od 80 N. Kolika treba da bude snaga talasnog izvora koji bi na žici generisao sinusoidalni talas frekvencije 60 Hz i amplitude 6 cm?

R e š e n j e. Brzina talasa na žici je

$$u = \sqrt{\frac{F_z}{\mu}} = \sqrt{\frac{80 \text{ N}}{5 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}}} = 40 \text{ m/s}.$$

Kako je frekvencija talasa 60 Hz, ugaona frekvencija ω će biti

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi(60 \text{ Hz}) = 377 \text{ s}^{-1}.$$

¹⁷Kako je brzina talasa vezana za karakteristike sredine (kao i linijska gustina μ , može se reći da je snaga talasa zapravo proporcionalna kvadratima amplitude i ugaone frekvencije talasa.

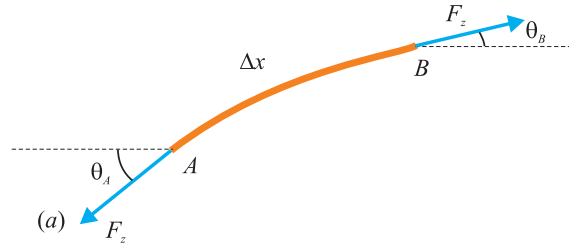
Uzimajući u obzir da je amplituda data i da iznosi $A = 6$ cm, za snagu se dobija

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 u = 512 \text{ W}.$$

4.5 Talasna jednačina

4.5.1 Transverzalni talas na zategnutoj žici

Talasna funkcija je uvedena da bi reprezentovala prostiranje talasa duž zategnute žice. Sve talasne funkcije $y(x, t)$ se u stvari mogu smatrati rešenjima talasne jednačine. Ta jednačina daje kompletan opis talasnog procesa a iz nje se, u principu može dobiti i izraz za brzinu talasa. Štaviše, iako će ta jednačina ovde biti izvedena za prostiranje talasa na zategnutoj žici, ispostavlja se da ona važi i za druge vrste talasnih kretanja.



Slika 4.18: Delić žice zategnute silom zatezanja F_z . Nagibi žice u tačkama A i B su $\tan \theta_A$ i $\tan \theta_B$.

Pretpostavimo da se talas, izazvan malim oscilacijama jednog njenog kraja, prostire duž žice koja ja zategnuta silom zatezanja F_z i posmatrajmo jedan njen deo dužine Δx . Krajevi tog delića zaklapaju male uglove θ_A i θ_B sa x osom. Rezultujuća sila koja deluje na delić u vertikalnom pravcu je

$$\sum F_y = F_z \sin \theta_B - F_z \sin \theta_A = F_z (\sin \theta_B - \sin \theta_A).$$

Kako se radi o malim uglovima, može da se primeni aproksimacija $\sin \theta \approx \tan \theta$, pa će prethodni izraz biti

$$\sum F_y = F_z (\tan \theta_B - \tan \theta_A).$$

Sa druge strane, tangens ugla predstavlja koeficijent pravca tangente na talasnu funkciju, a to je jednako izvodu po x talasne funkcije, odnosno $\partial y / \partial x$, pa ćemo dalje imati

$$\sum F_y \approx F_z \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right]. \quad (4.25)$$

Primena II Njutnovog zakona na posmatrani delić žice, pošto je njegova masa $\Delta m = \mu \Delta x$ daje

$$\sum F_y = ma_y = \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right). \quad (4.26)$$

Kombinovanje ovih dveju jednačina dovodi do izraza

$$\begin{aligned} \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) &\approx F_z \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right] \\ \frac{\mu}{F_z} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &\approx \frac{(\partial y / \partial x)_B - (\partial y / \partial x)_A}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Desna strana ove jednačine može da se zapiše u drugom obliku ako se ima u vidu da se parcijalni izvod ma koje funkcije definiše kao

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

U izrazu (4.27), ulogu $f(x + \Delta x)$ igra $(\partial y / \partial x)_B$, a $f(x)$ sabirak $(\partial y / \partial x)_A$, pa ova jednačina poprima oblik

$$\frac{\mu}{F_z} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (4.28)$$

i predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja žice linijske gustine μ zategnute silom zatezanja F_z .¹⁸

Relativno lako se pokazuje da sinusoidalna talasna funkcija jeste rešenje ove jednačine. Naime, ako je zapisemo u obliku $y = A \sin(kx - \omega t)$, odgovarajući drugi izvodi su

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -\omega^2 A \sin(\mathbf{k}x - \omega t), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -k^2 A \sin(\mathbf{k}x - \omega t). \end{aligned}$$

Zamena ovih izraza u jednačinu (4.28), daje

$$-\frac{\mu \omega^2}{F_z} \sin(\mathbf{k}x - \omega t) = -k^2 \sin(\mathbf{k}x - \omega t),$$

¹⁸Napomenimo da je talasna jednačina direktna posledica II Njutnovog zakona, odnosno njegove primene na delić žice.

na osnovu čega je jasno da mora da važi sledeća veza

$$k^2 = \frac{\mu\omega^2}{F_z}.$$

Kako je $u = \omega/k$, sredjivanjem se dobija ponovo jednačina (4.10)

$$u = \sqrt{\frac{F_z}{\mu}}.$$

Talasna jednačina (4.28) se često piše u obliku

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (4.29)$$

Pokazalo se da je jednačina ovog tipa veoma opšta. U ovom slučaju ona opisuje vertikalno pomeranje delića zategnute žice. Kao što će kasnije biti pokazano, za akustične talase, y predstavlja pomeranje molekula vazduha iz njihovog ravnotežnog položaja ili pak odstupanje pritiska (ili koncentracije) gasa od njihovih ravnotežnih vrednosti. U slučaju pak elektromagnetnih talasa, y opisuje električno ili magnetno polje.¹⁹

P r i m e r X. Alpinista se, koristeći konopac, spušta niz vertikalnu stenu. U momentu kada se spustio $l = 30$ m od vrha stene njegov partner, koji je ostao gore, mu daje znak tresući konopac. Za koje vreme će ovaj signal doći do alpiniste? Njegova masa je 80 kg a masa jedinice dužine konopca je 75 g.

R e š e n j e. Sila zatezanja konopca je, u ovom slučaju, $F_z = Q = mg$ pa je brzina nastalog transverzalnog talasa

$$u = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 9,81}{7,5 \cdot 10^{-2}}} = 102 \text{ m.}$$

Vreme potrebno talasu ove brzine da predje rastojanje od 30 m je $t = l/u = 30/102 = 0,3$ s.

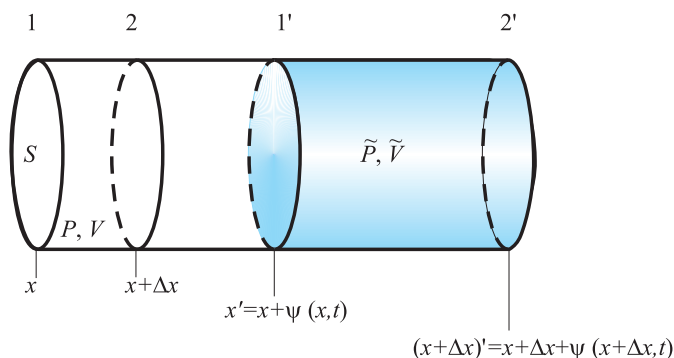
4.5.2 Longitudinalni talas u idealnom gasu

Razmotrimo talasni proces u gasu koji je nastao usled malog poremećaja koji se desio duž x ose. Za razliku od transverzalnog karaktera oscilovanja

¹⁹Ovde je dokazano da je sinusoidalna talasna funkcija jedno od rešenja talasne jednačine. Može da se pokaže, kao što je ranije napominjano, da je bilo koja funkcija oblika $f(x \pm ut)$ takodje rešenje talasne jednačine.

delića žice, delovi gasa se pomeraju u pravcu nastalog poremećaja pa je talas koji pri tom nastaje longitudinalan i sastoji se od niza zgušnjjenja i razredjenja u gasu. Veličina pomeranja delića gasa zavisi od toga gde se nalaze na pravcu prostiranja talasa kao i od momenta vremena pa ćemo ih označiti nekom nepoznatom funkcijom ovih dveju promenljivih $\Psi(x, t)$.

Posmatrajmo malenu zapreminu gasa, ograničenu dvema poprečnim presecima "1" i "2" koji se nalaze u tačkama sa koordinatama x i $x + \Delta x$ (slika 4.19).



Slika 4.19: Longitudinalni talas u gasu.

Masa gasa u ovoj zapremini je $\Delta m = \rho S \Delta x$, gde je ρ gustina gasa, a S površina poprečnog preseka. Neka je u stacionarnom stanju pritisak gasa P .

Kada nastane poremećaj u gasu, molekuli gasa se pomere a to može da se predstavi kao da se ova zapremina pomerila u novi položaj izmedju preseka 1' i 2' sa koordinatama $x + \Psi(x, t)$ i $x + \Delta x + \Psi(x + \Delta x, t) \approx x + \Psi(x, t) + \Delta x[1 + \Psi'(x, t)]$. Zapremina gasa u novom položaju je $\tilde{V} = S \Delta x [1 + \Psi'(x, t)]$, a pritisak je \tilde{P} . Ovaj novi pritisak se može dovesti u vezu sa silom koja deluje na posmatranu zapreminu gasa. U tu svrhu je prvo potrebno izvesti izraz kojim se opisuje pritisak \tilde{P} .

Oscilatorni proces u gasu se odvija dovoljno brzo, tako da se može smatrati da posmatrana zapremina nije stigla da razmeni toplotu sa ostatkom gasa koji je okružuje. Usled toga, se ovaj proces može smatrati adijabatskim pa za posmatrana dva stanja gasa važi relacija

$$PV^\kappa = \tilde{P}\tilde{V}^\kappa,$$

gde je κ izložilac adijabate, odnosno

$$P(S\Delta x)^\kappa = 0\tilde{P}(S\Delta x[1 + \Psi'(x, t)])^\kappa. \quad (4.30)$$

Ako se ova jednačina reši po traženom pritisku, dobija se

$$\tilde{P} = \frac{P}{[1 + \Psi'(x, t)]^\kappa} \approx P[1 - \kappa\Psi'(x, t)]. \quad (4.31)$$

Sila koja deluje na posmatrani delić gasa se može dobiti iz razlike pritisaka u presecima "1" i "2"

$$F = S(\tilde{P}_{1'} - \tilde{P}_{2'}), \quad (4.32)$$

jer pritisak opada u smeru prostiranja talasa. Kako se radi o malim pomeranjima važi aproksimativna formula

$$\tilde{P}' \approx \frac{\tilde{P}_{2'} - \tilde{P}_{1'}}{\Delta x},$$

pa je sila

$$F = -\tilde{P}'S\Delta x. \quad (4.33)$$

Nakon nalaženja izvoda pritiska (zadatog formulom (4.31)), za silu se dobija

$$F = \kappa P\Psi''(x, t)S\Delta x, \quad (4.34)$$

a II Njutnov zakon za posmatrani deo gasa, $\Delta m\ddot{\Psi} = F$, postaje

$$\rho S\Delta x\ddot{\Psi} = \kappa P\Psi''(x, t)S\Delta x. \quad (4.35)$$

Nakon skraćivanja ova relacija može da se predstavi u obliku

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.36)$$

gde je

$$u = \sqrt{\frac{\kappa P}{\rho}}, \quad (4.37)$$

brzina prostiranja posmatranog longitudinalnog talasa.

Jednačina (4.37) ima potpuno istu formu kao i jednačina (4.29) koja opisuje transverzalne talase u zategnutoj žici, i ima rešenja potpuno istog oblika, iako one opisuju procese u potpuno različitim sistemima.

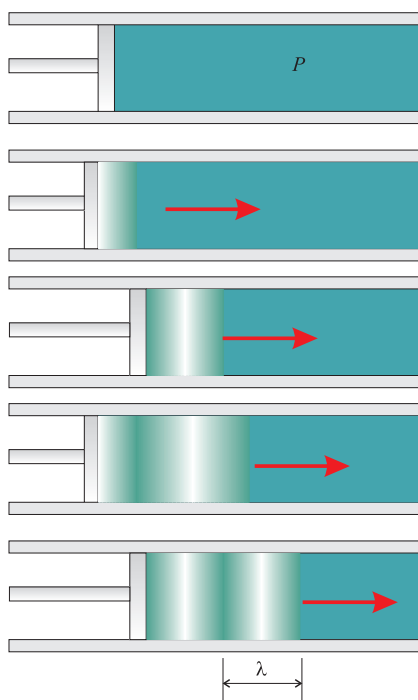
Ako iskoristimo jednačinu stanja idealnog gasa $PV = n_m RT$, pišući broj molova n_m kao odnos mase gasa m i njegove molarne mase M , a gustinu u izrazu (4.37) kao odnos mase gasa i njegove zapremine V , brzina longitudinalnog talasa u gasu poprima veoma važnu formu

$$u = \sqrt{\frac{\kappa R}{M}} T, \quad (4.38)$$

gde je T apsolutna termodinamička temperatura gasa. Kao što se vidi, brzina talasa u gasu je srazmerna sa \sqrt{T} sa faktorom koji, za dati gas, predstavlja konstantu. Na primer za vazduh, ovaj izraz glasi $u = 20\sqrt{T}$ m/s.

Zvučni talasi u vazduhu

Jednodimenzionalni zvučni talas je moguće proizvesti stvaranjem poremećaja u rasporedu čestica gasa, a time i koncentracije, u odnosu na njihov ravnotežni raspored, odnosno ravnotežnu vrednost koncentracije. Jedan od načina da se to uradi je oscilatorno pomeranje klipa koji se nalazi na jednom kraju duge i tanke cevi (slika 4.20).



Slika 4.20: Stvaranje longitudinalnog talasa u cevi sa gasom.

Tamnije obojene oblasti na ovoj slici predstavljaju delove gasa gde je on sabijen i pod većim pritiskom od ravnotežne vrednosti. Ovakve oblasti se formiraju pri utiskivanju klipa u cev. Te oblasti se prostiru kroz cev kao puls koji stalno pritiska oblasti uz koje se nalazi. Kada se klip pomeri u levo, oblast gasa koja se nalazi u njegovoj blizini se širi ka njemu i razredjuje

tako da je to oblast (svetlije obojena) u kojoj je pritisak gasa manji od njegove ravnotežne vrednosti. Ovakve oblasti se takodje kreću kroz gas prateći oblasti u kojima je gas zgusnutiji. I oblasti razredjenja i oblasti zgušnjjenja se kreću kroz gas brzinom zvuka za tu sredinu.

Ukoliko klip osciluje na sinusoidalan načina, i oblasti zgušnjjenja i razredjenja će se tako smenjivati. Rastojanje izmedju dve susedne oblasti zgušnjjenja (ili razredjenja) je jednako talasnoj dužini nastalog longitudinalnog talasa. Kako se te oblasti pomeraju kroz cev, tako neki posmatrani deo zapremine vrši prosto harmonijsko oscilovanje paralelno pravcu prostiranja talasa. Kako je veličina tog pomeranja (od ravnotežnog položaja) označena sa $\Psi(x, t)$, obzirom na karakter kretanja, njena funkcionalna zavisnost se može zapisati u obliku

$$\Psi(x, t) = \Psi_m \sin(\mathbf{k}x - \omega t), \quad (4.39)$$

gde je Ψ_m amplituda talasa, odnosno maksimalno pomeranje delića sredine od njihovog ravnotežnog položaja. Sa k je naravno označen talasni broj, a sa ω ugaona frekvencija oscilovanja klipa.²⁰

Pomeranje čestica gasa dovodi do pojave dodatnog pritiska $\Delta P = \tilde{P} - P$ u datoj oblasti. Ova razlika u pritiscima je, prema jednačini (4.31), jednaka

$$\Delta P = -\kappa P \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = -\kappa P k \Psi_m \cos(\mathbf{k}x - \omega t) = -\frac{\kappa P \omega}{u} \Psi_m \cos(\mathbf{k}x - \omega t). \quad (4.40)$$

Koristeći izraz za brzinu (4.37), dobija se relacija koja opisuje talase pritiska u gasu u obliku

$$\Delta P = -\rho \omega u \Psi_m \cos(\mathbf{k}x - \omega t), \quad (4.41)$$

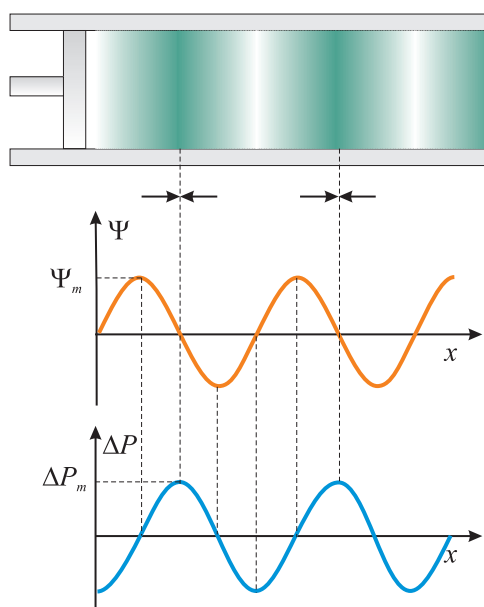
odakle se vidi da je amplituda pritiska

$$\Delta P_m = \rho \omega u \Psi_m. \quad (4.42)$$

Dakle, pokazano je da se zvučni talas može posmatrati ili kao talas pomeranja čestica gasa ili kao talas pritiska. Upoređivanjem jednačina (4.39) i (4.41) se vidi da su ova dva talasa pomerena u fazi za $\pi/2$. Za maksimalno pomeranje $\Psi(x, t) = \Psi_m$, pritisak je jednak stacionarnoj vrednosti P , odnosno promena u pritisku je $\Delta P = 0$ (slika 4.21).²¹

²⁰Primetimo da se pomeranje delića sredine vrši duž x ose, odnosno u pravcu kretanja talasa.

²¹Sa slike se takodje jasno vidi da je, kada je gas maksimalno razredjen, odstupanje pritiska od ravnotežne vrednosti $-\Delta P_m$, a kada je gas maksimalno zgusnut, ono iznosi ΔP_m . Kada je reč o pomeranju čestica gasa, najveće pomeranje doživljavaju one koje se nalaze na mestima gde je odstupanje pritiska od ravnotežnog jednako nuli, jer će se one prilikom nailaska talasa najviše pomeriti, otići ce ili u oblast gde će biti zgusnutije ili u onu gde će biti razredjenije.

Slika 4.21: Pomeranje čestica i pritisak u funkciji x .

Intenzitet zvučnog talasa je, prema (4.23)

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \Psi_m^2 u, \quad (4.43)$$

što, ako se izrazi preko promene pritiska u gasu postaje

$$I = \frac{\Delta P_m^2}{2\rho u}. \quad (4.44)$$

P r i m e r X. izračunati brzinu zvučnog talasa u vazduhu (molarna masa $M = 29 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, izložilac adijabate $\kappa = 1,4$) na sobnoj temperaturi (20°C).

R e š e n j e. Prema relaciji (4.38) se za brzinu zvuka u vazduhu, na sobnoj temperaturi, dobija

$$u = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31 \cdot 293}{29 \cdot 10^{-3}}} \approx 343 \text{ m/s.}$$

P r i m e r X. Najslabiji zvuk frekvencije 1000 Hz koji ljudsko uvo može da čuje ima intenzitet oko $1 \cdot 10^{-12}$ W/m² (prag čujnosti). Najjači zvuk koji uvo može da podnese je intenziteta oko 1 W/m² (granica bola). Odrediti amplitudu pritiska i pomeranja za ova dva granična intenziteta zvuka.

Rešenje. Iz jednačine (4.44), uzimajući za brzinu zvuka 343 m/s, a za gustinu vazduha $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, dobija se

$$\Delta P_m = \sqrt{2\rho u I} = 2,87 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2.$$

Kako je normalan atmosferski pritisak reda veličine 10^5 N/m^2 , ovaj rezultat ukazuje na to da ljudsko uvo predstavlja veoma osetljivi prijemnik jer može da razazna fluktuacije u pritisku u iznosu od $3 \cdot 10^{-10}$.

Amplituda pomeranja molekula se može dobiti iz (4.42), uz $\omega = 2\pi\nu$

$$\Psi_m = \frac{\Delta P_m}{\rho u \omega} = 1,11 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Reč je ponovo o veoma maloj vrednosti, a jasan utisak o tome se stiče ako se ima u vidu da je poluprečnik molekula oko 10^{-10} m .

Na sličan način se dobija da se amplituda pritiska koju ljudsko uvo može da podnese $28,7 \text{ N/m}^2$, a da takvom talasu odgovara amplituda pomeranja od $1,11 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

4.5.3 Talasi u krutom telu

Kada se neki deo krutog tela pobudi na male oscilacije postaje izvor talasa koji se, zahvaljujući elastičnim osobinama krutog tela, prostire kroz njega. Proces prenošenja talasa kroz ovakvu sredinu je veoma sličan procesu koji se odnosi na prostiranje longitudinalnog talasa kroz gas. Neka slika 4.19 predstavlja skicu deformacije krutog tela. Njegova relativna deformacija (sabijanje ili izduženje) pri pomeranju delića za $\Psi(x, t)$ je

$$\delta = \frac{\Delta \Psi}{\Delta x} = \Psi'(x, t). \quad (4.45)$$

Prema Hukovom zakonu, usled toga se javlja elastična sila

$$F = SE_Y \delta = SE_Y \Psi'(x, t), \quad (4.46)$$

gde je E_Y koeficijent koji odražava elastične osobine sredine (Jungov modul elastičnosti). Razlika u silama između preseka "1" i "2" je

$$\Delta F = F_2 - F_1 = SE_Y \Psi''(x, t) \Delta x. \quad (4.47)$$

Polazeći od II Njutnovog zakona za ovaj deo sredine

$$\rho S \Delta x \ddot{\Psi}(x, t) = SE_Y \Psi''(x, t) \Delta x, \quad (4.48)$$

dobija se talasna jednačina, koja se poklapa sa ranijim jednačinama za zategnute žice i gasove:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.49)$$

ali sa brzinom

$$u = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}. \quad (4.50)$$

Ovom prilikom su razmatrane longitudinalne deformacije u krutom telu (i odgovarajući talas koji je pri tome nastao). Za razliku od gasova, elastične sile u krutim telima nastaju i pri deformacijama smicanja. Jednačina takvih, transverzalnih talasa, ima isti oblik (4.49), ali u izraz za brzinu sada ulazi modul smicanja E_s , pa je ona zadata kao

$$u = \sqrt{\frac{E_s}{\rho}}. \quad (4.51)$$

Napomenimo, bez izvodjenja, da za talase u tečnostima takodje važi talasna jednačina oblika (4.49) sa brzinom

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (4.52)$$

u kojoj je sa E označen zapreminski modul elastičnosti tečnosti kroz koju se prostire talas.

P r i m e r X. Kroz čeličnu šipku ($E_Y = 20,6 \cdot 10^{10}$ N/m², $E_s = 8 \cdot 10^{10}$ N/m², $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ kg/m³) se prostire zvučni talas. Odrediti brzine njegovih komponenti (transverzalne i longitudinalne)

R e š e n j e. Brzina longitudinalne komponente $u_{||}$ je prema (4.50)

$$u_{||} = \sqrt{\frac{20,6 \cdot 10^{10}}{7,8 \cdot 10^3}} = 5,1 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 5,1 \text{ km/s},$$

dok je transverzalna u_{\perp} (4.51)

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10}}{7,8 \cdot 10^3}} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 3,2 \text{ km/s}.$$

P r i m e r X. Delfini koriste akustične talase za lociranje riba kojima se hrane. Eksperiment je pokazao da delfin može da detektuje objekte manje

od 10 cm koji su od njega udaljeni 110 metara. Izračunati koliko interval vremena prodje izmedju momenta emitovanja zvučnog talasa i momenta kada delfin registruje reflektovani talas. Zapreminski modul elastičnosti vode je $E = 2,1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

R e š e n j e. Ukupno rastojanje koje predje zvuk do mete udaljene 110 m i nazad do delfina je $\Delta x = 2 \cdot 110 \text{ m} = 220 \text{ m}$, pa je vreme potrebno da delfin čuje reflektovani zvuk $\Delta t = \frac{\Delta x}{u}$, gde je u brzina prostiranja talasa kroz vodu

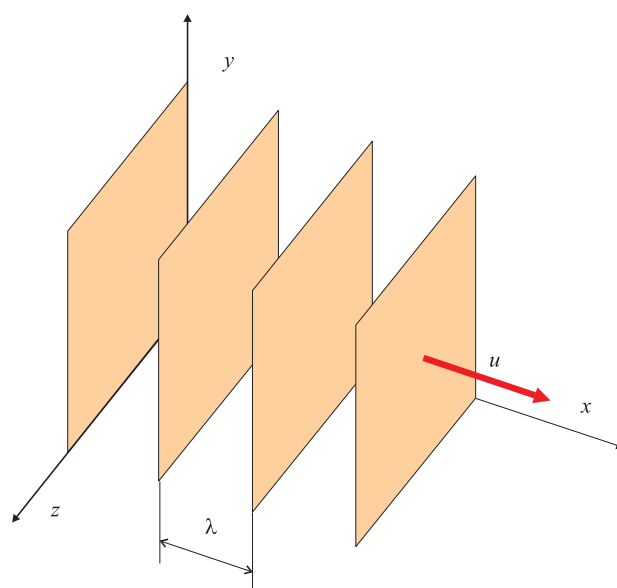
$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1,4 \text{ km/s.}$$

Na osnovu ovoga je traženo vreme

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = 0,16 \text{ s.}$$

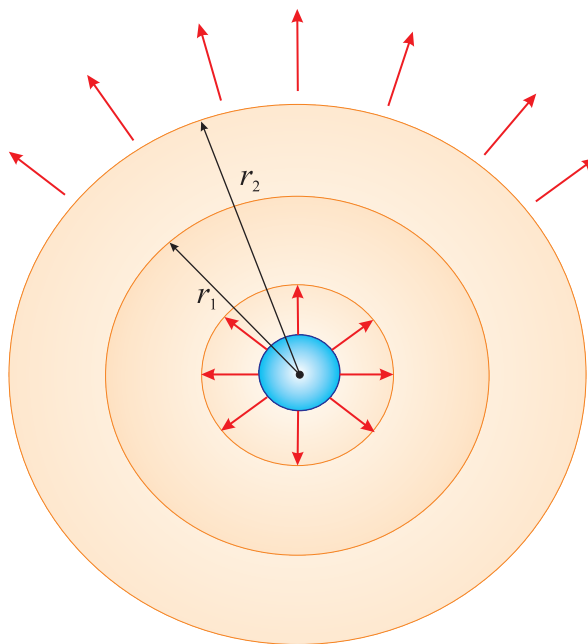
4.6 Sferni i ravanski talasi

Do sada je razmatran specijalan tip talasa čija faza $kx - \omega t + \varphi$, zavisila samo od koordinate x koja je usmerena u smeru kretanja talasa.



Slika 4.22: Skica ravnanskog talasa brzine u koji se prostire u pozitivnom smeru x ose. Talasni front su ravni paralelne yz ravni.

Ukoliko se uoči površ koju čine tačke koje osciluju u fazi, onda je to talasni front (površ konstante faze). Ako se, kod na primer prostiranja transverzalnog talasa, delići sredine osciluju na jednak način u svim tačkama površi normalne na pravac prostiranja talasa (x -osa), onda imamo posla sa ravanskim talasom (u yz ravni) jer je njegov talasni front ravan (slika 4.22).

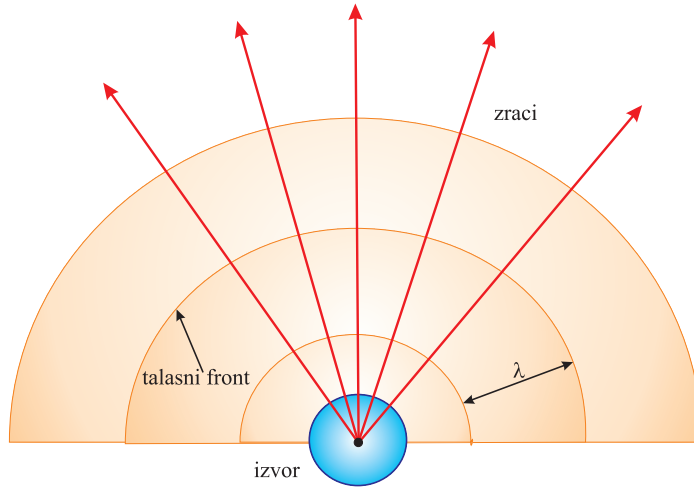


Slika 4.23: Sferni talas koji se prostire od oscilujućeg sfernog tela.

Ukoliko se u nekoj sredini (na primer gasu) nalazi neko sferno telo čiji poluprečnik osciluje sa vremenom, u sredini nastaju sferni talasi (slika 4.24). Ukoliko je sredina uniformna nastali talas se prostire od izvora konstantnom brzinom.

Kako se talas prostire uniformno, može da se zaključiti da se energija, kod sfernog talasa, prenosi u svim pravcima podjednako, jer nema pravca koji bi po necemu bio privilegovan.²² Ako sa P_{sr} označimo srednju snagu izvora koji emituje talase, tada kada je talas došao na rastojanje r od izvora, ona mora da se raspodeli na sfernu površ površine $4\pi r^2$. Drugim rečima,

²²Za ovakve sredine, kod kojih nema ni jednog privilegovanog pravca se kaže da su izotropne.



Slika 4.24: Sferni talas koji se prostire od oscilujućeg sfernog tela koje se ako je malo može smatrati tačkastim izvorom. Zraci su radijalne linije usmerene od izvora normalno na talasne frontove.

intenzitet talasa, na ovom rastojanju od izvora talasa, je

$$I = \frac{P_{sr}}{A} = \frac{P_{sr}}{4\pi r^2}. \quad (4.53)$$

Intenziteti istog talasa, na rastojanju r_1 i r_2 od izvora se razlikuju i iznose

$$I_1 = \frac{P_{sr}}{4\pi r_1^2}, \quad \text{i} \quad I_2 = \frac{P_{sr}}{4\pi r_2^2},$$

a njihov odnos je

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Iz ova dva izraza se vidi da intenzitet talasa opada u obrnutoj proporciji sa kvadratom rastojanja od izvora.

Ako se pak izjednače desne strane jednačina (4.43) i (4.53) dobija se

$$\frac{1}{2}\rho u\omega^2\Psi_m^2 = \frac{P_{sr}}{4\pi r^2}$$

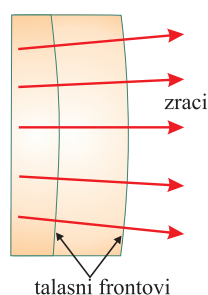
odakle, se vidi da amplituda pomeranja Ψ_m mora da se sa udaljavanjem od izvora smanjuje obrnuto srazmerno rastojanju r od njega, odnosno $\Psi_m \sim$

$1/r$. Na osnovu toga je, talasna funkcija sfernog talasa, koji se širi od tačkastog izvora koji osciluje frekvencijom ω data izrazom

$$\Psi = \frac{\Psi_{m0}}{r} \sin(\mathbf{k}r - \omega t), \quad (4.54)$$

gde je Ψ_{m0} , amplituda pomeraja na jediničnom rastojanju od izvora ($r = 1$).

Sferne talase je pogodno predstaviti kao niz koncentričnih kružnih lukova (slika 4.24), gde svaki od tih lukova predstavlja površ konstantne faze. Takve površi se, kao što je napomenuto zovu talasni frontovi. Rastojanje između dva susedna talasna fronta je jednako talasnoj dužini λ , a radijalne linije usmerene od izvora talasa se zovu zraci.



Slika 4.25: Daleko od tačkastog izvora, talasni frontovi postaju skoro paralelni, a zraci, koji su ortogonalni na njima su takodje međusobno skoro paralelni. To znači da se uočeni mali deo sfernog talasa ponaša kao ravanski talas.

Ako izdvojimo jedan mali deo talasnog fronta, daleko od izvora talasa (slika 4.25, zraci koji prolaze kroz talasni front su skoro paralelni (što smo dalje od izvora talasa, odstupanje od paralelnosti zraka je sve manje), a talasni front je sve ravniji i ravniji. U skladu sa time, ukoliko je rastojanje od izvora talasa mnogo veće od talasne dužine, sferni talasa se može aproksimirati ravnim. U tom slučaju, njegova talasna funkcija ima formu

$$\Psi(x, t) = \Psi_m \sin(\mathbf{k}x - \omega t), \quad (4.55)$$

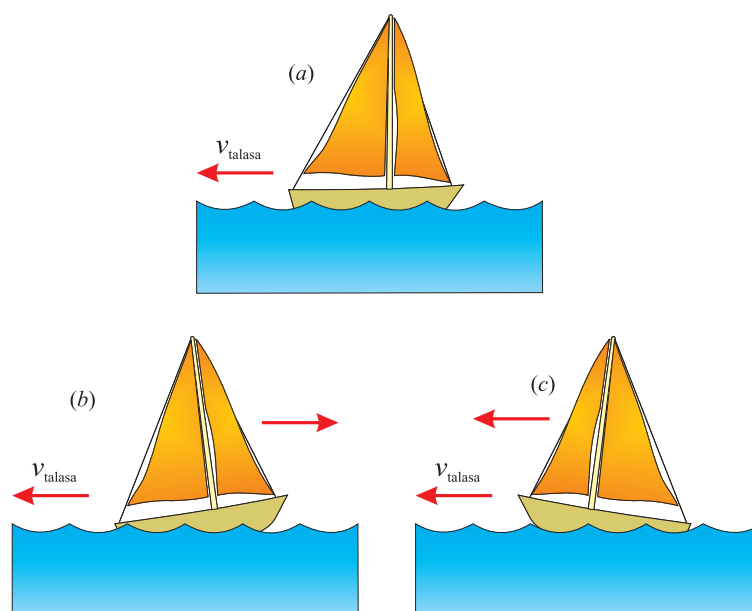
koja je identična funkciji koja je korišćena za opisivanje jednodimenzionalnih progresivnih talasa.

4.6.1 Doplerov efekat

Verovatno smo svi primetili da se zvuk automobilske sirene menja dok automobil prolazi kraj nas. Frekvencija zvuka koji pri tome registruju naše uši,

potaje sve viši i viši dok se automobil približava a opada kada on počne da se udaljava. Pri ovome naravno sirena sve vreme emituje zvuk iste frekvencije, a menja se frekvencija zvuka koji mi registrujemo. To je samo jedan primera takozvanog **Doplerovog efekta**.²³

Da bi razumeli šta izaziva prividnu promenu frekvencije talasa, zamislimo da se nalazimo na čamcu usidrenom na ustalasalom moru sa talasima perioda $T = 3,0$ s. To znači da će na svake 3,0 s čamac pogoditi breg talasa. Slika 4.26 (a) prikazuje tu situaciju, za slučaj kada se talasi kreću sa desna na levo. Ukoliko trenutak kada čamac pogodi breg talasa proglasimo za početni trenutak posmatranja (odnosno resetujemo štopericu tako da u tom trenutku pokazuje nulu), nakon 3 sekunde će brod pogoditi naredni, nakon 6 sekundi drugi, itd. Na osnovu toga zaključujemo da je frekvencija talasa $\nu = 1/T = 1/3.0$ Hz.



Slika 4.26: (a) Talasi se kreću ka stacionarnom brodu. (b) Brod se kreće ka izvoru talasa. (c) Brod se kreće od izvora talasa.

Pretpostavimo da brod više nije usidren i da ga vetar nosi ka nadolazećim talasima (slik 4.26 (b)). Ukoliko opet resetujemo štopericu da bude na nuli u momentu kada breg talasa pogodi brod, primetićemo da će nas naredni

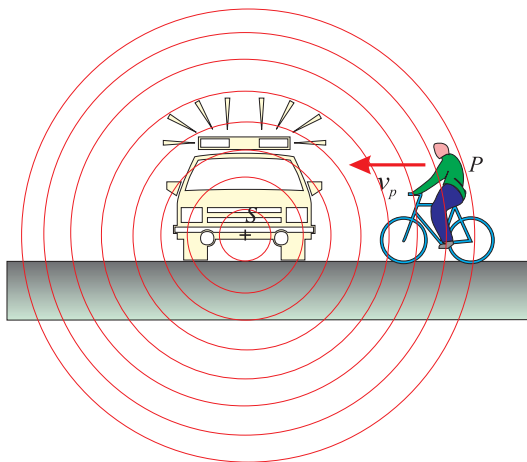
²³Ovaj efekat je dobio ime po Austrijskom fizičaru Kristijanu Johanu Dopleru (Christian Johann Doppler, 1803-1853), koji ga je otkrio kod svetlosnih talasa.

breg pogoditi za manje od 3,0 s nakon prvog. Razlog je naravno taj što se brod kreće u susret talasima. Drugim rečima, period talasa koje "prima" brod je manji od 3,0 s, odnosno od perioda koji je registrovan kada je brod mirovao. Obzirom da je $\nu = 1/T$, to znači da će se na brodu registrovati talas veće frekvencije od one kada je brod bio u stanju mirovanja.

Ukoliko brod promeni smer kretanja i počne da se kreće u istom smeru kao i talasi registrovaće se suprotan efekat. Ponovo resetujemo štopericu u momentu kada brod pogodi talas i merimo vreme do nailaska sledećeg. Primetiće se da je to vreme duže od 3,0 s, obzirom da je smer i talasa i broda isti. Drugim rečima, period registrovanih talasa je veći a njihova frekvencija je manja nego u slučaju kada brod miruje.

Pomenuti efekti se dešavaju usled postojanja *relativne* brzine kretanja broda u odnosu na talase. Kada se brod kreće sa leva na desno, relativna brzina je veća od brzine talasa, što dovodi do registrovanja talasa veće frekvencije. Kada se brod kreće u suprotnom smeru, relativna brzina registrovanih talasa je manja, a time i frekvencija registrovanih talasa.

Izvršenu analizu je moguće proširiti na slučaj zvučnih talasa tako što ćemo prosto umesto da posmatramo prostiranje talasa na vodi, posmatrati prostiranje zvučnih talasa. Sada sredina kroz koju se prostiru talasi nije voda već vazduh, a umesto da pratimo ljuljanje broda na talasima, slušaćemo zvuk.



Slika 4.27: Biciklista se kreće brzinom v_0 ka stacionarnom izvoru talasa S .

Pretpostavimo da se posmatrač P kreće a da je izvor zvučnog talasa S stacionaran. Pretpostavimo da je, takodje i vazduh u stanju mirovanja i da se posmatrač kreće brzinom v_p , direktno ka tačkastom, stacionarnom

($v_s = 0$) izvoru talasa (slika 4.27).²⁴

Neka su ν i λ frekvencija i talasna dužina, respektivno, izvora talasa, a da je brzina zvuka u . U slučaju kada se ne kreću ni izvor ni posmatrač ($v_s = 0$ i $v_p = 0$), frekvencija zvuka koji registruje posmatrač je jednaka frekvenciji zvučnog izvora. Kada se posmatrač kreće ka izvoru zvuka, brzina talasa u odnosu na njega postaje veća, i iznosi $u' = u + v_p$ (kao u slučaju čamca), dok talasna dužina ostaje nepromenjena. Na osnovu jednačine $u = \lambda\nu$, zaključujemo da je frekvencija zvuka koga čuje posmatrač *uvećana* i da iznosi

$$\nu' = \frac{u}{\lambda} = \frac{u + v_p}{\lambda}.$$

Kako je $\lambda = u/\nu$, ovaj izraz može da se zapiše u obliku

$$\nu' = \left(1 + \frac{v_p}{u}\right) \nu \quad (\text{posmatrač se kreće ka izvoru}). \quad (4.56)$$

Ukoliko se posmatrač kreće od izvora, relativna brzina talasa u odnosu na posmatrača je $u' = u - v_p$, pa će frekvencija zvuka koji registruje posmatrač biti

$$\nu' = \left(1 - \frac{v_p}{u}\right) \nu \quad (\text{posmatrač se kreće od izvora}). \quad (4.57)$$

Ove dve formule mogu da se objedine u jednu

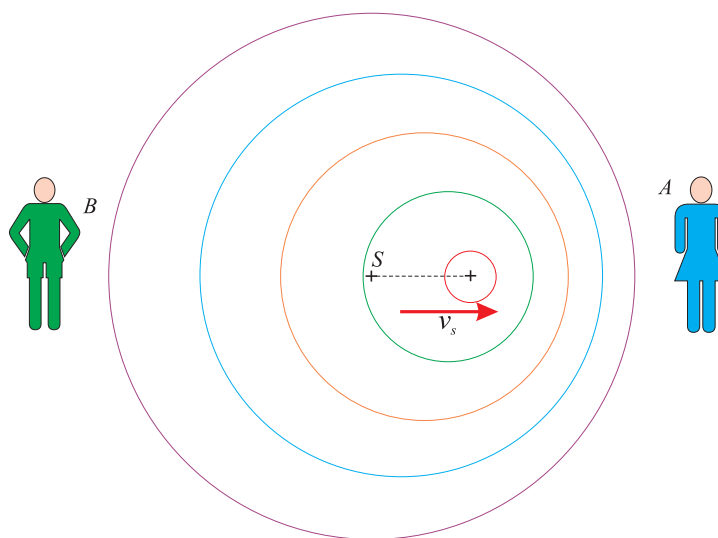
$$\nu' = \left(1 \pm \frac{v_p}{u}\right) \nu, \quad (4.58)$$

gde se znak plus koristi kada se posmatrač kreće ka izvoru, a znak minus kada se kreće od njega.

Razmotrimo sada situaciju kada se izvor kreće direktno ka posmatraču A koji miruje. Sa slike 4.28 se vidi da će, talasni frontovi zvuka koji posmatrač A čuje, u tom slučaju biti bliži jedni drugima nego u slučaju kada je izvor u stanju mirovanja. Stoga je talasna dužina λ' koju meri (uz pomoć nekog instrumenta na primer) posmatrač A , kraća od talasne dužine izvora λ . U toku svake oscilacije, koja traje T , izvor, krećući se brzinom v_s , prelazi rastojanje $v_s T = v_s/\nu$, a talasna dužina koju meri posmatrač λ' je upravo jednaka razlici talasne dužine izvora λ i ovog iznosa

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_s}{\nu}.$$

²⁴Treba imati u vidu da kada se kaže da je izvor stacionaran, misli se da se ne kreće u odnosu na sredinu kroz koju se prostire zvuk, odnosno u odnosu na vazduh.



Slika 4.28: Izvor S se kreće brzinom v_s ka stacionarnom posmatraču A , odnosno od takodje stacionarnog posmatrača B .

Kako je $\lambda = u/\nu$, frekvencija zvuka koji čuje posmatrač A je

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - \frac{v_s}{\nu}} = \frac{u}{\frac{u}{\nu} - \frac{v_s}{\nu}},$$

odnosno

$$\nu' = \frac{1}{1 - \frac{v_s}{u}} \nu, \quad (4.59)$$

odakle se može zaključiti da je, frekvencija koju registruje posmatrač kada se izvor kreće ka njemu, veća od frekvencije talasa koje emituje izvor.

Ako se izvor kreće od posmatrača (slučaj sa posmatračem B sa slike 4.28), posmatrač registruje veću talasnu dužinu λ' , od talasne dužine kojom izvor emituje talase, što znači da frekvencija koju posmatrač registruje *opada*, i iznosi

$$\nu' = \frac{1}{1 + \frac{v_s}{u}} \nu. \quad (4.60)$$

Kombinujući jednačine (4.59) i (4.60), opšti izraz koji opisuje vezu između registrovane i emitovane frekvencije, u slučaju kada se izvor kreće a posmatrač je u stanju mirovanja, je

$$\nu' = \frac{1}{1 \mp \frac{v_s}{u}} \nu, \quad (4.61)$$

gde se gornji znak odnosi na kretanje izvora ka posmatraču a donji na udaljavanje od njega.

Naravno, moguća je i najopštija situacija, u kojoj se i izvor i posmatrač kreću, a izraz za registrovanu frekvenciju, u tom slučaju, može da se napiše uzimanjem u obzir već dobijenih izraza:

$$\nu' = \frac{u \pm v_p}{u \mp v_s} \nu. \quad (4.62)$$

U ovom izrazu, gornji znaci ($+v_p$ i $-v_s$) odgovaraju situaciji kada se izvor i posmatrač približavaju jedan drugome, a donji znaci ($-v_p$ i $+v_s$) situaciji kada se međusobno udaljavaju. Na osnovu iznete analize je jasno da, uvek kada je reč o približavanju, raste frekvencija, a kada imamo slučaj da se izvor i posmatrač udaljavaju, frekvencija opada.²⁵

P r i m e r X. Ambulantna kola se kreću u smeru istoka brzinom 33,5 m/s, pri čemu sirena emituje zvuk frekvencije 400 Hz. Zvuk koje frekvencije će čuti osoba u kolima koja se, brzinom 24,6 m/s kreću na zapad kada se kola približavaju ambulatnim kolima, a koje kada se udaljavaju?

R e š e n j e. Potrebno je iskoristiti u oba slučaja jednačinu (4.62), uz činjenicu da je brzina zvuka 343 m/s. Kada se kola približavaju jedna drugima, osoba u kolima će registrovati frekvenciju

$$\nu' = \frac{u + v_p}{u - v_s} \nu = \frac{343 \text{ m/s} + 24,6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 33,5 \text{ m/s}} 400 \text{ Hz} = 475 \text{ Hz}.$$

Kada se udaljavaju, tražena frekvencija je

$$\nu' = \frac{u - v_p}{u + v_s} \nu = \frac{343 \text{ m/s} - 24,6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + 33,5 \text{ m/s}} 400 \text{ Hz} = 338 \text{ Hz}.$$

Promena u registrovanoj frekvenciji je $475 - 338 = 137$ Hz, odnosno više od 30% prave frekvencije.

4.7 Superpozicija talasa

Do sada je bilo reči o prostiranju jednog talasa kroz sredinu. Veoma je međutim interesantno analizirati ponašanje sredine kada se nadje pod uticajem

²⁵Iako je tipično iskustvo koje imamo sa Doplerovim efektom vezano za zvučne talase, reč je o fenomenu koji se javlja kod svih tipova talasa. Na primer, relativno kretanje izvora i posmatrača, dovodi do promene u registrovanoj frekvenciji i svetlosnih talasa. Doplerov efekat koriste policajci u radarskim sistemima kada mere brzinu kretanja vozila. Astronomi takodje koriste ovaj efekat da bi odredili brzine zvezda, galaksija, i drugih nebeskih tela u odnosu na Zemlju.

dva ili više talasa koji se prostiru kroz nju. Na primer, šta se dešava sa talasom na zategnutoj žici ili konopcu kada dodje do pričvršćenog kraja, odbije se, vrati nazad i sretne sa talasom suprotnog smera koji se i dalje protisire sa leva na desno? Kolike su i kako se menjaju sa vremenom promene u pritisku na jednom mestu u koncertnoj sali kada više instrumenata iz orkestra svira zajedno?

4.7.1 Superpozicija i interferencija sinusoidalnih talasa

Zamislimo da stojimo u bazenu u kome, nedaleko od nas, pluta gumena lopta. Recimo da sada, jednom rukom, neko vreme, pravimo talase koji će se od naše ruke, širiti koncentrično i koji će uskoro zahvatiti i deo vode na kome se nalazi lopte, pomerajući je gore-dole sa amplitudom od na primer 5 cm. Nakon smirivanja vodene površine, pravimo opet neko vreme jednake talase ali sada levom rukom. Primetićemo da će se lopta jednako ponašati kao i u prethodnom slučaju. Možemo da se zapitamo šta bi se desilo kada bi, obema rukama, istovremeno pravili talase? To će, naravno, zavisiti od toga kakva će biti faza talasa koji dolaze do lopte. Može da se desi na primer, da će oba talasa kada dodju do lopte imati tendenciju da je podignu na više, ili pak, drugi krajnji slučaj, da jedan ima tendenciju da loptu podigne a drugi da je spusti. Mogući su i drugi slučajevi koji se nalaze između ova dva. Kako je čest slučaj da se u sredini postoje dva i više talasa, potrebno je razmotriti kako oni interaguju jedni sa drugima.

Princip superpozicije

Prema principu superpozicije, **kada se kroz linearnu sredinu prostiru dva ili više talasa, rezultujuće pomeranje delića sredine (odnosno rezultujući talas) u ma kojoj tački sredine je jednako algebarskoj sumi pomeranja koje izazivaju individualni talasi.** Posmatrajmo dva sinusoidalna talasa koji se prostiru kroz istu linearnu sredinu u istom pravcu i smeru. Ukoliko se oba prostiru sa leva na desno, imaju istu frekvenciju, talasnu dužinu i amplitudu, a razlikuju se u fazi, njihove talasne funkcije su

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t), \quad y_2 = A \sin(kx - \omega t + \varphi). \quad (4.63)$$

Rezultujuća talasna funkcija, prema principu superpozicije, je njihov zbir

$$y = y_1 + y_2 = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)]. \quad (4.64)$$

Koristeći formulu za zbir sinusnih funkcija

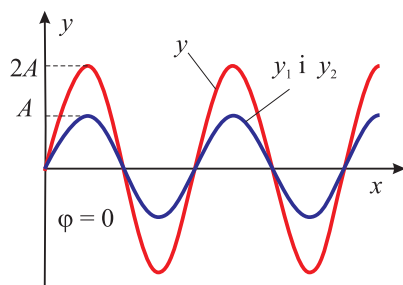
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

dobija se

$$y = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (4.65)$$

Kao što se vidi iz ovog izraza, rezultujuća talasna funkcija y je takodje sinusoidalna i ima istu frekvenciju i talasnu dužinu kao individualni talasi. Amplituda rezultujućeg talasa je $2A \cos(\varphi/2)$, a početna faza $\varphi/2$.

Ako je početna faza drugog talasa (4.63) (zapravo fazna razlika individualnih talasa) jednaka 0, tada je $\cos(\varphi/2) = \cos 0 = 1$, a amplituda rezultujućeg talasa je $2A$, odnosno jednaka je dvostrukoj amplitudi individualnih talasa. U tom slučaju se kaže da su talasi *u fazi* i da **interferiraju konstruktivno**. Bregovi i dolje individualnih talasa y_1 i y_2 se u tom slučaju nalaze na istim mestima i kao rezultat daju talas koji se od njih razlikuje jedino po tome što ima duplo veću amplitudu (slika 4.29). Pošto su indi-



Slika 4.29: Konstruktivna interferencija dva identična progresivna talasa.

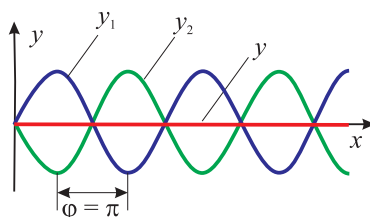
vidualni talasi u fazi, na slici se preklapaju. Konstruktivna interferencija će se javiti uvek kada je $\cos(\varphi/2) = \pm 1$, odnosno za $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, odnosno uvek kada je φ paran umnožak π .

Kada je φ jednako π rad ili bilo koji neparan umnožak π (odnosno breg jednog talasa se nalazi tamo gde je dolja drugog), tada je $\cos(\varphi/2) = \cos(\pi/2) = 0$. Usled toga će rezultujući talas imati *nultu* amplitudu svuda (slika 4.30), odnosno imaćemo slučaj **destruktivne interferencije**.

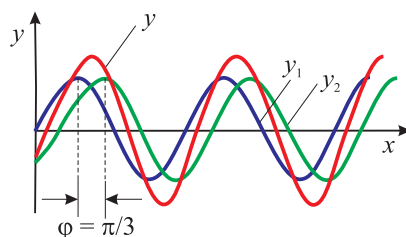
Ukoliko pak fazna razlika talasa φ ima neku proizvoljnu vrednost izmedju 0 i π rad, rezultujuća amplituda ima odgovarajuću vrednost izmedju 0 i $2A$ (slika 4.31).

4.7.2 Stojeći talasi

Pretpostavimo da smo postavili dva identična zvučnika, koja emituju zvučne talase iste frekvencije i amplitude, na određeno medjusobno rastojanje okrenute jednog prema drugome. U ovom slučaju imamo situaciju da dva



Slika 4.30: Destruktivna interferencija dva identična progresivna talasa koja se u fazi razlikuju za π rad.



Slika 4.31: Interferencija dva identična progresivna talasa čija je fazna razlika između 0 i π rad.

identična talasa putuju u suprotnim smerovima kroz istu sredinu. Kad se susretnu oni će se kombinovati u skladu sa principom superpozicije.

Neka je reč o dva transverzalna sinusoidana talasa istih amplituda, frekvencija i talasnih dužina, ali suprotnih smerova, koji se kreću kroz istu sredinu

$$y_1(x, t) = A \sin(\mathbf{k}x - \omega t), \quad y_2(x, t) = A \sin(\mathbf{k}x + \omega t), \quad (4.66)$$

gde y_1 predstavlja talas koji se prostire sa leva na desno a y_2 talas koji se prostire sa desna na levo. Superponiranje ovih dveju funkcija daje

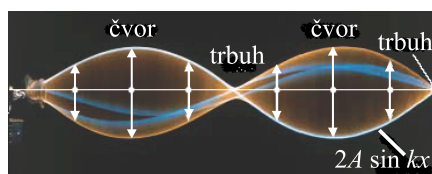
$$y = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[\sin(\mathbf{k}x - \omega t) + \sin(\mathbf{k}x + \omega t)]. \quad (4.67)$$

Prema pravilima za sabiranje trigonometrijskih funkcija rezultat je

$$y = 2A \sin(\mathbf{k}x) \cos \omega t = A(x) \cos \omega t, \quad (4.68)$$

odnosno, dobijena je talasna funkcija koja opisuje takozvani *stojeći talas*.

Primitimo da dobijena talasna funkcija (4.68) ne sadrži kao argument $(\mathbf{k}x - \omega t)$, pa prema tome ne predstavlja progresivni talas. Pažljivija analiza pokazuje da ova jednačina predstavlja zapravo jednačinu oscilovanja pri kome svaka čestica sredine osciluje istom frekvencijom ω (zbog faktora $\cos \omega t$



Slika 4.32: Multifleš fotografija stojećeg talasa na žici.

u jednačini). Medjutim, amplitude čestice, $A(x) = 2A \sin(kx)$, se razlikuju i zavise od mesta na x osi na kome se nalaze.

Proizvoljna čestica sredine, zahvaćena stojećim talasom, osciluje tako da su njeni amplitudni položaji obuhvaćeni *obvojnicom* čija je jednačina $2A \sin(kx)$, gde x određuje položaj čestice u sredini. Ova situacija se, kao što vidimo, razlikuje od one kod progresivnog talasa u kome sve čestice sredine prilikom oscilovanja imaju iste amplitude i frekvencije, pri čemu je amplituda oscilovanja jednaka amplitudi talasa.

Minimalna vrednost amplitude stojećeg talasa, inače jednaka 0, je u tačkama na x osi koje se nazivaju čvorovi, za koje važi $\sin kx = 0$, a to se dešava ako je

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Kako je $k = 2\pi/\lambda$, mesta čvorova su određena sa

$$x = \frac{n}{2}\lambda, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.69)$$

Amplituda stojećeg talasa je maskimalna u tačkama koje se nazivaju trbusi, u kojima je $\sin kx = \pm 1$, odnosno u kojima je

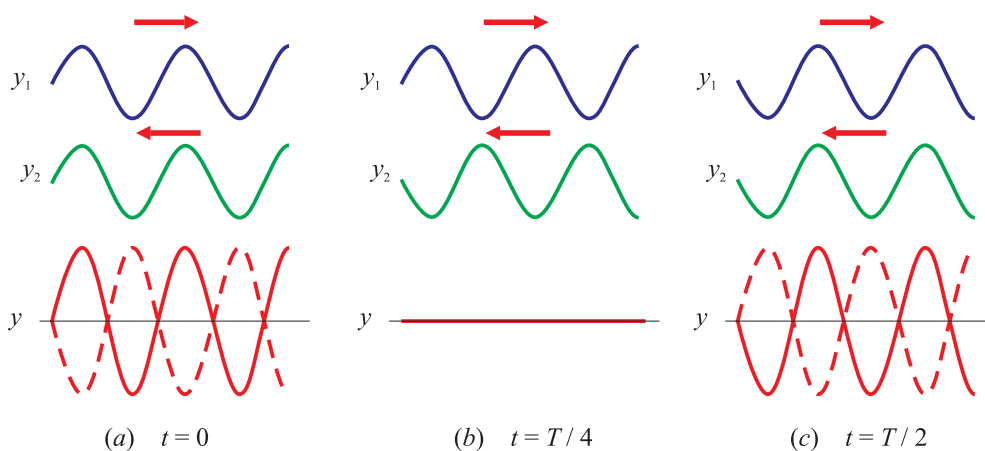
$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

odnosno za

$$x = \frac{n}{4}\lambda, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.70)$$

Upoređivanjem jednačina (4.69) i (4.70), može da se zaključi da je:

- Rastojanje izmedju susednih trbuha $\lambda/2$.
- Rastojanje izmedju susednih čvorova $\lambda/2$.
- Rastojanje izmedju susednog čvora i trbuha $\lambda/4$.



Slika 4.33: Oblik stojećeg talasa u raznim momentima vremena.

Izgled stojećeg talasa koji se dobija od dva individualna progresivna talasa suprotnih smerova, u raznim momentima vremena je prikazan na slici 4.33. U $t = 0$ (deo (a) na slici), progresivni talasi su u fazi i izazivaju maksimalno pomeranje čestice sredine u stojećem talasu. Nakon četvrtine perioda talasa (deo (b) na slici), svaki od progresivnih talasa se pomera za po četvrtinu talasne dužine pa su ova dva talasa u suprotnim fazama. Ovo znači da delići sredine, u tom momentu vremena, prolaze kroz ravnotežne položaje u oscilatornom kretanju koje vrše. U trenutku $t = T/2$ (deo (c) na slici), progresivni talasi su opet u fazi i produkuju elongacije delića sredine koje su inverzne u odnosu na one u $t = 0$. Na slici 4.33 su prikazana samo tri karakteristična slučaja dok se, ostali koji nisu prikazani, nalaze između njih.

Energija stojećeg talasa

Veoma je interesantno analizirati energiju koju imaju čestice sredine u delu koji je zahvaćen stojećim talasom. Neka je, na primer, reč o stojećem talasu koji se formirao na zategnutoj žici. Osim čvorova koji su uvek stacionarni, svi delići žice osciluju istom frekvencijom ali različitim amplitudama koje zavise od mesta gde se nalaze.

U progresivnom talasu, energija se prenosi kroz sredinu, kao što je ranije diskutovano. Taj prenos energije talasom možemo da shvatimo kao rad koji jedan delić žice vrši na narednom. Kada se jedan delić pomeri na više on deluje na susedni, pomera ga i na taj način vrši rad. Kada je reč o stojećem

talasu, delić koji se nalazi u čvoru se ne pomera pa prema tome ne može da vrši rad na susednom deliću žice. Zaključujemo da kod stojećeg talasa ne postoji energija koja se prenosi kroz sredinu, jer kao što vidimo, kroz čvorove se ne prenosi energija. Iz tog razloga se ovaj tip talasa i naziva **stojeći talas**.²⁶

U stojećem talasu, energija oscilujuće žice se neprekidno transformiše između elastične potencijalne energije (kada su delići žice u stacionarnim stanjima, tj. otklonjeni u odgovarajuće amplitudne položaje) i kinetičke energije (kada je žica horizontalna, odnosno kada delići maksimalnom brzinom prolaze kroz ravnotežne položaje). U međuslučajevima delovi žice imaju i potencijalnu i kinetičku energiju.

P r i m e r X. Dva talasa suprotnih smerova formiraju stojeći talas. Njihove talasne funkcije su

$$y_1 = (4,0 \text{ cm}) \sin(3,0x - 2,0t) \quad \text{i} \quad y_2 = (4,0 \text{ cm}) \sin(3,0x + 2,0t),$$

pri čemu su x i y izraženi u centimetrima. Odrediti (a) amplitudu oscilovanja delića sredine koji se nalazi na mestu sa koordinatom $x = 2,3 \text{ cm}$, (b) Odrediti položaje čvorova i trbuha, (c) Kolika je amplituda oscilovanja delova sredine koji se nalaze u trbusima?

R e š e n j e: (a) Kako je $A = 4,0 \text{ cm}$, $k = 3,0 \text{ rad/cm}$ i $\omega = 2,0 \text{ rad/s}$, jednačina stojećeg talasa je

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t = [(8,0 \text{ cm}) \sin 3,0x] \cos 2,0t,$$

odakle se vidi da se amplituda menja po zakonu

$$A(x) = 2A \sin kx = (8,0 \text{ cm}) \sin 3,0x.$$

Prema tome, tražena vrednost amplitude delića žice koji se nalazi na mestu određenom sa $x = 2,3 \text{ cm}$ je

$$A(2,3 \text{ cm}) = (8,0 \text{ cm}) \sin 6.9 \text{ rad} = 4,6 \text{ cm}.$$

(b) Položaji čvorova su određeni sa $x = n\lambda/2$, a talasna dužina je, iz $k = 3,0 \text{ rad/cm}$ i $k = 2\pi/\lambda$, $\lambda = 2\pi/3 \text{ cm}$. Prema tome, položaji čvorova su

$$x = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{\pi}{3} \text{ cm}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

²⁶Situacija u vezi energije stojećeg talasa može da se i predstavi na sledeći način: kako stojeći talas nastaje interferencijom dva progresivna talasa koji prenose jednake energije ali u suprotnim smerovima, ova dva procesa se u energijskom smislu kompenzuju.

Trbusi se nalaze na $x = n\lambda/4$, odnosno

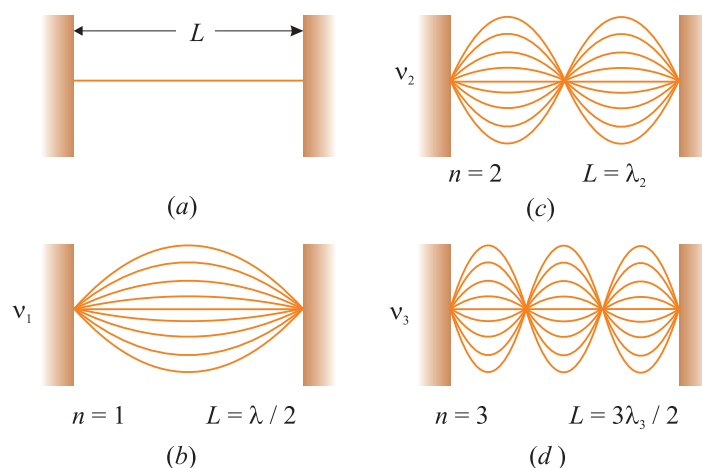
$$x = n\frac{\lambda}{4} = n\frac{\pi}{6} \text{ cm } n = 1, 3, 5, \dots$$

(c) Amplituda čestice koja se nalazi trbuhu je

$$A(n\lambda/2) = 2A = 8,0 \text{ cm.}$$

4.7.3 Uslovi formiranja stojećeg talasa na žici čiji su krajevi fiksirani

Razmotrimo formiranje stojećih talasa na žici zategnutoj na oba kraja. Stojeći talas na žici će nastati kao neprekidna superpozicija talasa koji nailaze ka krajeve žice i onih koji se odbijaju od njih. Krajevi žice, obzirom da su učvršćeni, imaju nultu elongaciju, i prema tome, po definiciji predstavljaju čvorove stojećeg talasa. Na žici može da se formira niz stojećih talasa, odnosno oscilacija koje se nazivaju **normalni modovi** a razlikuju se po frekvencijama koje se mogu relativno lako odrediti.



Slika 4.34: Normalni modovi na zategnutoj žici dužine L .

Oscilovanje zategnute žice je u stvari superpozicija određenih normalnih modova, a koji će od njih biti zastupljeni, zavisi od načina na koji je oscilovanje započelo.

Do oblika normalnih modova se dolazi polazeći od činjenica da na krajevima žica moraju da se formiraju čvorovi a da međusobna udaljenost susednih čvorova i trбуha mora da bude jedna četvrtini talasne dužine. Prvi

normalni mod prikazan na slici 4.34(b), ima čvorove na krajevima žice a trbuh na sredini. To je mod koji odgovara najvećoj talasnoj dužini λ_1 , koja je u tom slučaju duplo veća od dužine žice, $\lambda_1 = 2L$. Sledeći mod, talasne dužine λ_2 se javlja kada je talasna dužina jednaka dužini žice, $\lambda_2 = L$ (slika 4.34(c)). Treći mod, odgovara slučaju u kome je $\lambda_3 = 2L/3$. Možemo da zaključimo da se, na zategnutoj žici dužine L pričvršćenoj na oba kraja, mogu formirati normalni modovi čije su talasne dužine određene izrazom

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.71)$$

gde se indeks n odnosi na n -ti mod oscilovanja. Važno je istaći da su izrazom (4.71) određeni *moгуći* modovi oscilovanja žice. Modovi koji će se *realizovati* zavise od načina na koji se žica, okidanjem, pobudjuje na oscilovanje.

Prirodne frekvencije pridružene odgovarajućim modovima se mogu dobiti iz relacije $\nu = u/\lambda$, gde je u brzina talasa (ista je za sve frekvencije jer, kao što je napomenuto, zavisi od sredine kroz koju se talas prostire). Na osnovu jednačine (4.71), za njih se dobija

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.72)$$

Kako je brzina prostiranja talasa kroz zategnutu žicu $u = \sqrt{F_z/\mu}$, prirodne frekvencije žice su

$$\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_z}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.73)$$

Najniža frekvencija ν_1 se naziva **osnovna (ili fundamentalna) frekvencija** i data je izrazom

$$\nu_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_z}{\mu}}, \quad (4.74)$$

a frekvencije ostalih normalnih modova su njeni celobrojni umnošci. Ovakve frekvencije, koje su celobrojni umnošci, formiraju **harmonijske serije**, a normalni modovi se zovu **harmonici**. Osnovna frekvencija ν_1 se, u tom smislu, zove frekvencija prvog harmonika, frekvencija $\nu_2 = 2\nu_1$ je frekvencija drugog harmonika, a frekvencija $\nu_n = n\nu_1$ je frekvencija n -tog harmonika.²⁷

²⁷Oscilovanje zategnute žice, prilikom formiranja stojećeg talasa na njoj, je relativno prost slučaj u kojem su frekvencije modova celobrojni umnošci osnovne frekvencije, odnosno frekvencije prvog harmonika. Kod drugih sistema takodje postoje modovi oscilovanja ali ono obično nisu celobrojni umnošci osnovne frekvencije te tada ne možemo izdvojiti harmonike.

Kako u realnosti da na zategnutoj žici pobudimo odgovarajuće harmonike? Tako što žicu pri okidanju deformišemo tako da njen oblik podseća na oblik željenog harmonika. Nakon otpuštanja, žica osciluje njegovom frekvencijom. Ukoliko je žica zategnuta tako da njen oblik ne podseća na neki određeni harmonik, rezultujuće oscilovanje uključuje više njih. To se dešava kada zatežemo žicu muzičkog instrumenta (gitara), prevlačimo gudačicom po njoj (čelo) ili je udaramo (klavir). Ako se žica pri povlačenju deformiše u nesinusoidalni oblik, jedino talasi koji zadovoljavaju granične uslove (da čvorovi budu na mestima gde je žica učvršćena) mogu da se formiraju na njoj (i to su naravno harmonici).

Frekvencija žičanih instrumenata varira u zavisnosti od iznosa sile zatezanja i dužine žice (i naravno od njene debljine, odnosno od mase po jedinici dužine). Na primer, zategnutost žica na gitari ili violini menjamo okretanjem čivija za štimovanje. Kada se zategnutost žice poveća rastu i frekvencije normalnih modova u skladu sa jednačinom (4.73). Kada se instrument (podešavanjem sile zatezanja žice) naštimuje, svirač proizvodi zvuke raznih frekvencija pomerajući prste duž njegovog vrata (pritiskajući žicu uz pragove instrumenta) čime skraćuje dužinu dela žice koji osciluje. Kada se smanji dužina žice, prema istoj relaciji, raste frekvencija normalnog moda.

P r i m e r X. Žica C na klaviru ima osnovnu frekvenciju od 262 Hz, a prva A žica iznad nje 440 Hz. (a) Izračunati frekvencije sledeća dva harmonika C žice. (b) Ako A i C žice imaju iste linijske gustine μ i iste dužine L , odrediti odnos sila zatezanja. (c) Pretpostavke navedene pod (b) da su linijske gustine i dužine žica jednake, u realnosti nisu potpuno tačne za klavir. Naime, dok linijske gustine jesu iste, dužina A žice iznosi 64% dužine žice C. Koliki je odnos njihovih sila zatezanja ako se to uzme u obzir?

R e š e n j e. (a) Frekvencije viših harmonika su celobrojni umnošci osnovne frekvencije $\nu_1 = 262$ Hz, odnosno

$$\nu_2 = 2\nu_1 = 524 \text{ Hz}, \quad \nu_3 = 3\nu_1 = 786 \text{ Hz}.$$

(b) Osnovne frekvencije žica su

$$\nu_{1A} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_{zA}}{\mu}}, \quad \nu_{1C} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_{zC}}{\mu}},$$

a njihov odnos

$$\frac{\nu_{1A}}{\nu_{1C}} = \sqrt{\frac{F_{zA}}{F_{zC}}}.$$

Iz njega se za odnos sila zatezanja dobija

$$\frac{F_{zA}}{F_{zC}} = \left(\frac{\nu_{1A}}{\nu_{1C}} \right)^2 = \left(\frac{440}{262} \right)^2 = 2,82.$$

(c) Na osnovu jednačine (4.74), odnos frekvencija je

$$\frac{\nu_{1A}}{\nu_{1C}} = \frac{L_C}{L_A} \sqrt{\frac{F_{zA}}{F_{zC}}} = \left(\frac{100}{64} \right) \sqrt{\frac{F_{zA}}{F_{zC}}},$$

odakle je traženi odnos

$$\frac{F_{zA}}{F_{zC}} = (0,64)^2 \left(\frac{440}{262} \right)^2 = 1,16.$$

P r i m e r X. Slobodni deo tanje žice E na gitari ima dužinu 64,0 cm, pri čemu je osnovna frekvencija 330 Hz. Ako je skratimo na prvom pragu, okidanjem proizvodi notu F frekvencije 350 Hz. Odrediti za koliko je skraćena žica.

R e š e n j e. Jednačina (4.72) povezuje osnovnu frekvenciju sa dužinom žice. Za $n = 1$ se za brzinu talasa na žici dobija

$$u = \frac{2L}{n} \nu_n = \frac{2(0,640 \text{ m})}{1} (330 \text{ Hz}) = 422 \text{ m/s}.$$

Kako se osim dužine žice neće menjati ništa, brzina talasa ostaje ista. Na osnovu relacije (4.72), može da se dobije i nova dužina žice za koju je osnovna frekvencija 350 Hz, odnosno

$$L = n \frac{u}{2\nu_n} = (1) \frac{422 \text{ m/s}}{2(350 \text{ Hz})} = 0,603 \text{ m}.$$

Razlika dužine neskrraćene žice i žice skraćene na prvom pragu je prema tome 3,70 cm.

4.7.4 Stojeći talasi u vazдушnim stubovima

Stojeći talasi mogu da se formiraju i u vazдушnim stubovima, na primer u cevima orgulja, kao rezultat interferencije longitudinalnih talasa koji se prostiru u suprotnim smerovima. U kakvoj međusobnoj fazi će biti incidentni i reflektovani talas zavisi od toga da li je kraj cevi otvoren ili zatvoren.²⁸

²⁸Ova veza je analogna vezi između faza incidentnih i reflektovanih transverzalnih talasa na žici, kada se odbijaju o kraj žice koji može biti fiksiran ili slobodan.

Ako je cev zatvorena na kraju, tu se nalazi čvor longitudinalnog talasa, obzirom da zid na kraju cevi ne dozvoljava longitudinalno pomeranje delića vazduha. Kao rezultat, reflektovani talas doživljava promenu u fazi od 180° , odnosno u kontrafazi je sa incidentnim talasom. Kako je talas pritiska pomeren u fazi za $\pi/2$ u odnosu na talas pomeranja čestica vazduha, na zatvorenom kraju cevi se nalazi trbuh talasa pritiska (tačka maksimalne varijacije pritiska).

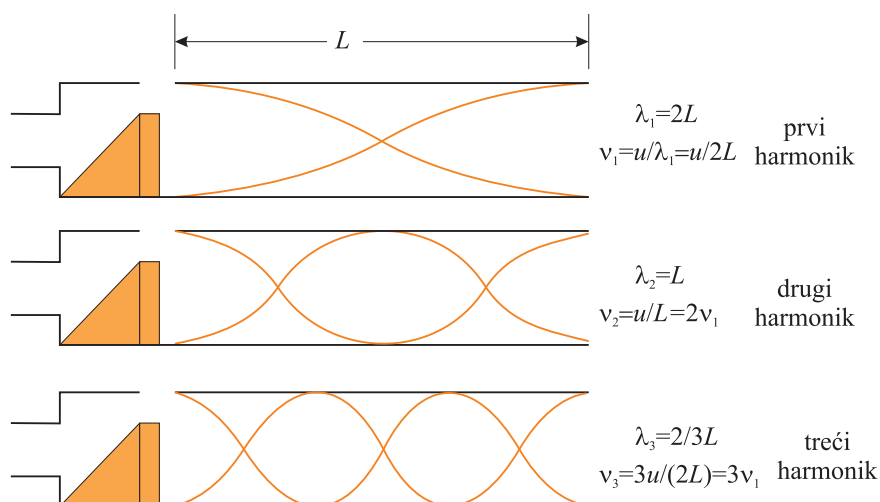
Otvoreni kraj cevi približno odgovara trbuhu talasa pomeraja, odnosno čvoru talasa pritiska.²⁹ Potpuno je jasno zašto na kraju otvorene cevi nema varijacije pritiska (čvor); to je zato što se na kraju cevi, otvorenom prema atmosferi, održava atmosferski pritisak.

Može da nam se učini čudnim tvrdjenje da se zvučni talas odbija o otvoreni kraj cevi, jer na tom mestu nema prekida sredine kroz koju se on prostirao, niti prelaska na neku drugu sredinu. Ovo tvrdjenje je sasvim tačno. Prisetimo se da je zvučni talas u cevi, u stvari talas pritiska koji se prilikom prostiranja unutar cevi ograničen njenim zidovima. Kada dodje do kraja cevi, tog ograničenja više nema, i komprimovani vazduh može slobodno da se širi u atmosferu. Dakle, nije reč o promeni sredine, već o promeni karaktera sredine, unutar i izvan cevi. Ta promena je medjutim, dovoljna da bi se stvorili uslovi za refleksiju.

Prva tri normalna moda oscilovanja u cevi otvorenoj na oba kraja su prikazani na slici 4.35. Kada se struja vazduha usmeri kroz otvor cevi na levom kraju i naidje na prepreku, formira se longitudinalni stojeći talas i cev ociluje njenom normalnom frekvencijom. Svi normalni modovi se pobudjuju istovremeno (mada ne sa istom amplitudom). Trbusi talasa se nalaze (približno) na krajevima cevi. U prvom normalnom modu, stojeći talas se nalazi izmedju dva susedna trbuha koji su na rastojanju polovine talasne dužine. Prema tome, talasna dužina je duplo veća od dužine cevi, dok je osnovna frekvencija $\nu_1 = u/(2L)$. Kao što se vidi sa slike 4.35, frekvencije viših harmonika su $2\nu_1, 3\nu_1, \dots$. Može da se zaključi da se u *cevi otvorenoj na oba kraja, prirodne frekvencije oscilovanja formiraju harmonijsku seriju koja uključuje celobrojne umnoške osnovne frekvencije*.

Pošto postoje svi harmonici, i pošto je osnovna frekvencija data istim izrazom kao za žicu (4.72), prirodne frekvencije oscilovanja možemo

²⁹Strogo govoreći otvoreni kraj cevi sa vazduhom nije trbuh stojećeg talasa. Deo vadašnog stuba u kome je postignuta veća koncentracija čestica gasa neće se odbiti o sam kraj cevi već će se to desiti kada ga prodje. Za cevi sa tankim zidovima, kružnog poprečnog preseka, talas se odbija na rastojanju $0,6R$, gde je R poluprečnik cevi. Usled toga je, efektivna dužina cevi veća od geomerijske dužine L , medjutim obično se ova razlika zanemaruje.



Slika 4.35: Cev otvorena na oba kraja.

da zapišemo kao

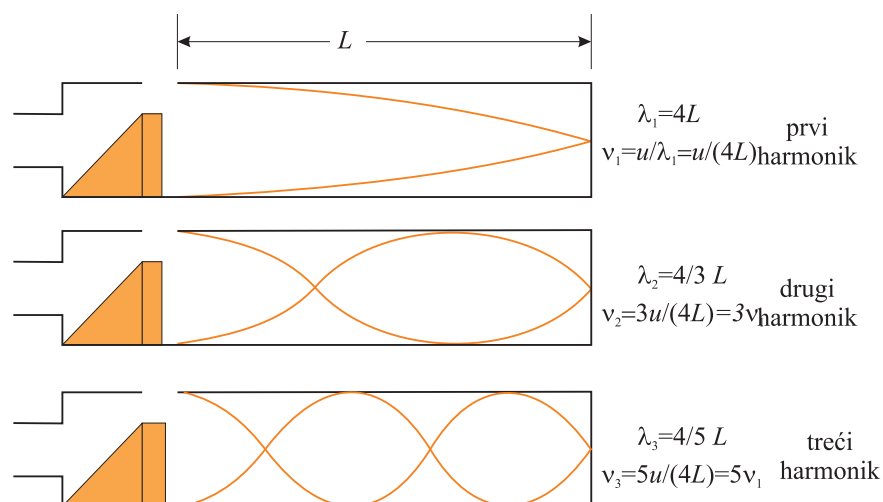
$$\nu_n = n \frac{u}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.75)$$

gde je u naravno brzina zvuka u vazduhu.

Ako je cev otvorena na jednom, a zatvorena na drugom kraju, zatvoreni kraj će biti mesto na kome će se formirati čvor stojećeg talasa kada je reč o pomeranjima delića sredine. U tom slučaju stojeći talas koji odgovara fundamentalnom ili osnovnom modu počinje trbuhom (na otvorenom kraju cevi) i završava se u prvom narednom čvoru (na zatvorenom kraju cevi), koji se nalazi rastojanju od jedne četvrtine talasne dužine. Na osnovu toga zaključujemo da je talasna dužina prvog normalnog moda jednaka $4L$ a da je fundamentalna frekvencija $\nu_1 = u/(4L)$. Na slici 4.36 su prikazani viši modovi, odnosno harmonici, čije frekvencije su $3\nu_1, 5\nu_1, \dots$, tako da može da se kaže da u cevi sa jednim otvorenim i jednim zatvorenim krajem, prirodne frekvencije oscilovanja čine harmonijsku seriju koja se sastoji samo od neparnih celih umnožaka fundamentalne frekvencije. To može da se zapiše kao

$$\nu_n = n \frac{u}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.76)$$

Interesantno je analizirati šta se dešava sa frekvencijama žičanih i instrumentata sa vazдушnim stubovima (duvačkih) u toku koncerta kada temperatura sredine poraste. Zvuk koji emituje flauta, na primer, postaje viši (raste frekvencija) sa povećanjem temperature, jer brzina zvuka u vazduhu raste

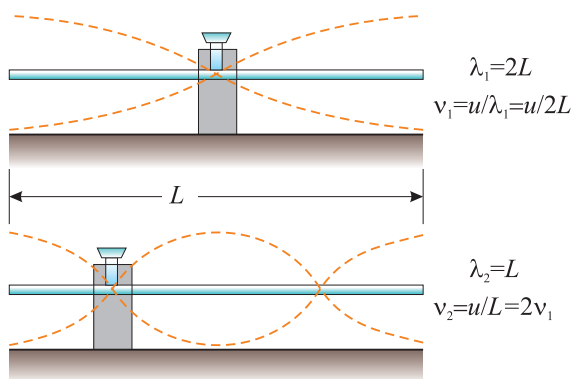


Slika 4.36: Cev otvorena na jednom a zatvorena na drugom kraju.

sa temperaturom što izaziva i povećanje frekvencije (4.75). Sa druge strane, zvuk violine postaje niži jer se usled povećanja temperature žice izdužuju čime opada sila zatezanja, a time i brzina zvuka koji se prostire kroz njih.

4.7.5 Stojeći talasi u šipkama i na pločama

Stojeći talasi mogu da nastanu i u šipkama i na pločama. Na primer štap učvršćen u sredini i udaren u čelo (u smeru ose štapa) štapa osciluje na longitudinalan način, kao što je to prikazano na slici 4.37. Isprekidane linije

Slika 4.37: Normalni modovi oscilovanja štapa dužine L .

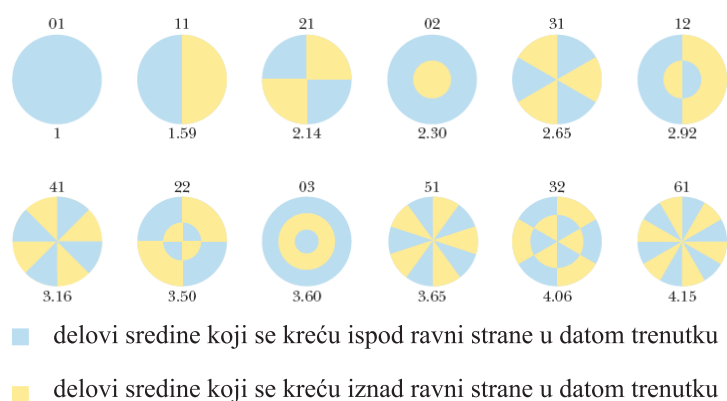
na ovoj slici reprezentuju longitudinalna pomeranja delova štapa. Ona su radi jasnoće nacrtana transverzalno, kao što je to uradjeno i kod talasa u vazušnom stubu. Na sredini štapa se nalazi čvor talasa jer je na tom mestu on učvršćen, dok se na krajevima, budući da su slobodni, nalaze trbusi.³⁰ Isprekidane linije na prvom delu slike predstavljaju prvi normalni mod oscilovanja čija je talasna dužina $\lambda_1 = 2L$ a frekvencija $\nu_1 = u/(2L)$, gde je u brzina longitudinalnog talasa u šipci. Drugi normalni modovi mogu da se pobude ako se šipka pričvrsti na drugim mestima. Na primer, drugi normalni mod se pobudjuje ako se šipka pričvrsti na $L/4$ od jednog kraja (drugi deo slike 4.37).

Stojeći talasi mogu da nastanu i u dvodimenzionalnim sredinama, kao što su na primer, elastične membrane rastegnute preko kružnih okvira (kod bubnjeva). Kada se takva membrana udari na nekom mestu, nastaju talasi koji se šire kroz nju, dolaze do pričvršćenih rubova i reflektuju o njih više puta. Rezultujući zvuk nije harmonijski jer, oscilujuća membrana i šupalj prostor ispod nje zajedno, produkuju skup stojećih talasa čije frekvencije nisu umnošci neke osnovne frekvencije. Budući da ne postoje takve proste veze medju formiranim stojećim talasima, nastali zvuk je ispravnije nazvati šumom.

Neki mogući normalni modovi oscilovanja dvodimenzionalne kružne membrane su pokazani na slici 4.38.

Kod jednodimenzionalnih stojećih talasa čvorovi su, kao što smo videli, tačke u kojima nema pomeranja delića sredine. U slučaju dvodimenzionalne sredine, na primer zategnute membrane, reč je o (krivim) linijama duž kojih se ne pomeraju delići sredine. Najniži normalni mod, frekvencije ν_1 , ima samo jednu čvornu liniju i ona se nalazi na obruču na koji je nategnuta membrana. Drugi mogući normalni modovi imaju dodatne čvorišne linije koje su ili krugovi ili prave linije prikazane na slici 4.38.

³⁰Osilacije koje se na ovaj način stvaraju u štapu su očigledno analogne onima u cevi otvorenoj na oba kraja.



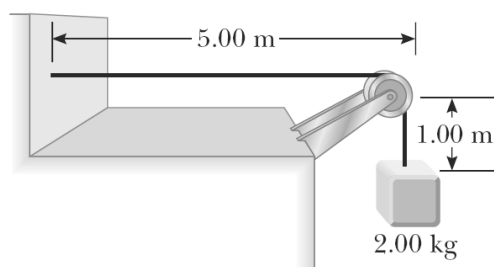
Slika 4.38: Neki mogući normalni modovi na kružno zategnutoj membrani. Par brojeva iznad svake sličice označava broj radijalnih i cirkularnih čvorova. Ispod svake sličice se nalazi broj koji pokazuje koliki multipl je dati mod od 01 moda.

4.8 Primeri i zadaci

1. Odrediti brzinu longitudinalnih talasa u vazduhu (smatrati ga idealnim gasom sa 5 stepeni slobode) na sobnoj temeperaturi ($T = 290 \text{ K}$). Kolika je brzina ovih talasa na $t = 0$ a kolika na 40 stepeni Celzijusa.

◇

2. Teg mase 2 kg okačen je o jedan kraj užeta mase 300 g i dužine 6 m (slika). Izračunati brzinu transverzalnih talasa kroz uže i vreme za koje će talas stići od zida do kotura. Talas se proizvodi kratkotrajnim delovanjem sile normalno na uže.



Slika 4.39:

◇

3. Za linijske talase koji potiču iz harmonijskog izvora i prostiru se kroz sredinu koja ih ne apsorbira dobiti jednačinu koja povezuje $\frac{d^2y}{dt^2}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$

◇

4. Talas u obliku pulsa koji se kreće u pozitivnom smeru x ose se može opisati jednačinom

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}$$

gde su x i y izraženi u santimetrima a t u sekundama. Nacrtaј talasnu funkciju u $t = 0$, $t = 1$ i $t = 2$ s. Kolika je brzina ovog talasnog pulsa?

◇

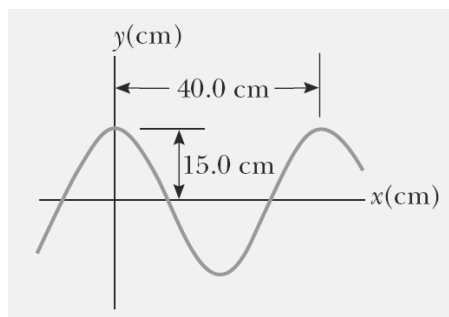
5. Talasna funkcija je oblika

$$y(x, t) = \frac{2}{(x + 3t)^2 + 1}$$

gde su x i y izraženi u santimetrima a t u sekundama. Nacrtaј je za $t = 0$, $t = 1$ i $t = 2$ s. Kolika je brzina ovog talasnog pulsa i kakav je smer njegovog kretanja?

◇

6. Na slici je prikazan sinusoidalni talas kod koga vertikalno pomeranje sredine u $t = 0$ s i $x = 0$ m iznosi 15 cm a frekvencija 8 Hz. Odredi talasni broj, period, ugaonu učestanost i brzinu talasa. Napiži jednačinu koja opisuje ovakvo talasno kretanje u sinusnom i kosinusnom obliku.



Slika 4.40:

◇

7. Za talas sa prethodne slike odrediti: talasni broj, period, kružnu frekvenciju i brzinu talasa. Odrediti početnu fazu φ , i napisati izraza za talasnu funkciju.
8. Od izvora talasa, kroz elastičnu sredinu se prostiru transverzalni talasi amplitude $y_0 = 0,5$ cm. Njihova talasna dužina je $\lambda = 15$ cm. Izračunati elongaciju tačke koja je udaljena $x = 20$ cm od izvora talasa a u trenutku kada je on izvršio jednu punu oscilaciju, računajući od trenutka kada je počelo prostiranje talasa.
9. Transverzalni talas se prostire duž zategnute elastične žice brzinom $u = 15$ m/s, pri čemu je period oscilovanja neke tačke na žici $T = 1,2$ s a amplituda oscilovanja $y_0 = 2$ cm. Izračunati
 - kolika je faza Φ , elongacija y , brzina v i ubrzanje a tačke koja se nalazi na rastojanju $x = 45$ cm od izvora talasa a po isteku vremena od $t = 4$ s od trenutka kada je započeto kretanje talasa od talasnog izvora.
 - kolika je razlika u fazi $\Delta\Phi$ dveju tačaka na žici koje se nalaze na rastojanju $x_1 = 30$ cm i $x_2 = 20$ cm od izvora talasa.
10. Brzina zvuka kroz neki metal iznosi $u = 2600$ m/s. Od kog materijala je napravljena žica dužine $l = 1$ m i poprečnog preseka površine $S = 1$ mm²? Kada se optereti tegom ova žica se istegne za $\Delta l = 0,5$ mm.
11. Na rastojanju $s = 500$ m pucanj se čuje $t = 1,47$ s nakon bleska eksplozije. Odrediti pritisak vazduha u mmHg. Gustina vazduha na tom pritisku je $\rho = 1,22$ kg/m³, gustina žive je $\rho_{Hg} = 13,6 \cdot 10^3$ kg/m³, dok je za vazduh odnos specifičnih toplotnih kapaciteta pri stalnom pritisku i zapremini 1,40.
12. Sinusni talas, koji putuje duž zategnute žice u pozitivnom smeru x ose, ima amplitudu 15 cm, talasnu dužinu 40 cm i frekvenciju 8 Hz. U trenutku $t = 0$ delić žice sa koordinatom $x = 0$ ima elongaciju 15 cm. Odrediti talasni broj, period, ugaonu frekvenciju i brzinu talasa. Napisati jednačinu ovog talasa.
13. Metalni štap dužine L uklješten je u tačkama koje su na rastojanju $L/4$ od krajeva i pobudjen je da osciljuje. Odrediti frekvencije prvih pet harmonika. Brzina talas kroz štap je 5500 m/s a njegova dužina 1m.

14. Transverzalni talas u žici je opisan jednačinom $y = 0,12 \sin \pi(\frac{1}{8}x + 4t)$ m. Odrediti brzinu i ubrzanje tačke na žici koja se nalazi na rastojanju $x = 1,6$ m u trenutku $t = 0,2$ s.
15. Materijalna tačka slobodno pada u homogeno gravitacionom polju. Polazeći od jednačine kretanja odrediti zavisnost položaja materijalne tačke od impulsa. Skicirati dobijenu zavisnost.
16. Za telo mase m koje linearno hamronijski osciluje, polazeći od jednačine kretanja odrediti zavisnost koordinate i impulsa. Skicirati dobijenu zavisnost.
17. Transverzalni talas se prostire duž konopca brzinom 15 m/s. Period oscilovanja delova konopca je 1.2 s a amplituda 2 cm. Odrediti: talasnu dužinu talasa, fazu, elongaciju, brzinu i ubrzanje dela konopca koji se nalazi na rastojanju 45 m od izvora talasa u momentu $t = 4$ s, razliku faza dve tačke koje se nalaze na rastojanju $x_1 = 20$ m i $x_2 = 30$ m od izvora talasa.

◇ Talasna dužina se može odrediti iz izraza $u = \frac{\lambda}{T}$, odakle sledi

$$\lambda = uT = 18 \text{ m.}$$

Polazeći od izraza za talasnu funkciju oblika $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$, faza talasa je data izrazom $\Phi = kx - \omega t = \frac{2\pi}{T}(\frac{x}{u} - t)$. Nakon zamene datih vrednosti, za traženu fazu se dobija

$$\Phi = -\frac{5\pi}{3},$$

čemu odgovara elongacija od

$$y = 2 \text{ cm} \sin(-\frac{5\pi}{3}) = \sqrt{3} \text{ cm.}$$

Brzina dela konopca je određena izrazom

$$\dot{y} = -\omega A \cos(kx - \omega t) = -\frac{2\pi}{1,2} 2 \text{ cm} \cos(-\frac{5\pi}{3}) = -\frac{5\pi}{3} \text{ m,}$$

dok je ubrzanje

$$\ddot{y} = \omega^2 A \sin(kx - \omega t) = \omega^2 y = \dots$$

Fazna razlika navedenih tačaka (posmataju se u istom momentu vremena) je

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = k(x_2 - x_1) = k\Delta x.$$

18. Jedan kraj horizontalne zategnute žice počinje da harmonijski osciluje sa frekvencijom 250 Hz i sa amplitudom 2,6 cm. Sila zatezanja žice je 140 N a linijska gustina 0,012 kg/m. U početnom vremenskom trenutku kraj žice je pomeren na gore na visinu 1,6 cm i pri tom nastavlja da se kreće u istom smeru. Izračunati talasnu dužinu nastalog talasa i njegov talasni vektor. Napisati jednačinu nastalog transverzalnog talasa.

◇ Talasna dužina se može odrediti iz izraza $u = \lambda\nu$, za šta nam je potrebna brzina talasa koja je za zategnutu žicu

$$u = \sqrt{\frac{F_z}{\mu}} = 34,2 \text{ m/s},$$

pa su talasna dužina i intenzitet talasnog vektora

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 0,137 \text{ m}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 45,9 \text{ m}^{-1}.$$

Da bi zapisali jednačinu talasa, potrebno je poći od njenog najopštijeg izraza u kome figuriše i početna faza $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$. Ona se odredjuje iz početnih uslova, obzirom da je $y(0, 0) = A \sin \varphi$. Odavde je

$$\sin \varphi = \frac{y(0, 0)}{A} = 0,615,$$

dok za odgovarajući ugao postoje dve mogućnosti (da bude veći ili manji od $\pi/2$). Te vrednosti su 0,908 rad i $\pi - 0,908$ rad. Koji od ova dva ugla odgovara se odredjuje na osnovu činjenice da je poznato da je u početnom trenutku brzina delića žice i dalje usmerena na gore, odnosno da je pozitivna. Kako je $\dot{y} = -\omega A \cos(kx - \omega t + \varphi)$, u početnom trenutku je $\dot{y}(0, 0) = -\omega A \cos \varphi$, zaključujemo da je potrebno uzeti ugao veći od $\pi/2$ jer je tada njegov kosinus negativan a brzina pozitivna. Prema tome tražena početna faza iznosi $\pi - 0,908$ rad, a jednačina talasa je

$$y(x, t) = 2,6 \text{ cm} \sin(45,9x - 1570,8t + \pi - 0,908).$$

19. Na rastojanju 4 m od izvora ravnog talasa frekvencije 440 Hz, pod pravim uglom u odnosu na njegov zrak, nalazi se zid. Odrediti rastojanje od izvora talasa do tačaka u kojima će se formirati prva tri čvora i trbuha stojećeg talasa koji nastaje superpiniranjem upadnog i odbijenog talasa. Za brzinu talasa u vazduhu uzeti da iznosi 340 m/s.

◊ Neka je x osa usmerena od zida ka izvoru talasa sa koordinatnim početkom na zidu. Upadni talas je onda zadat jednačinom $y_1 = A \sin(kx + \omega t)$ a odbijeni $y_2 = A \sin(kx - \omega t)$. Njihov zbir je

$$y = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

odakle se za mesta na kojima su čvorovi dolazi do uslova $kx = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Izrazi li se talasni broj preko talasne dužine ovaj uslov postaje $x_c = \frac{n\lambda}{2}$, odakle se za mesta prva tri čvora, mereneo od zida, dobija $x_{c1} = 0$, $x_{c2} = 0,039$ i $x_{c3} = 0,77$ m. Da bi se dobila pozicija ovih tačaka od izvora talasa treba ih jednostavno oduzeti od rastojanja izvora i zida, pa su tako tražena mesta, gledano od izvora: 4 m, 3,61 m i 3,23 m.

Trbusi su na mestima gde je amplituda maksimalna, odnosno $\sin(kx) = \pm 1$, odakle sledi da je $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$, odnosno $kx = n\pi/2$ gde je sada n neparan broj. Izraženo preko talasne dužine, mesta trbuha, računata od zida su određena izrazom $x_t = \frac{n\lambda}{4}$, odnosno $x_{t1} = \lambda/4 = 0,19$ m, $x_{t2} = 0,58$ m i $x_{t3} = 0,97$ m, dok su te tačke od izvora udaljene 3,81, 3,42 i 3,03 m.

20. Žica dužine 30 cm i mase 10 g, treperi na svojoj najnižoj noti "do" (prva oktava). Kolika je sila zatezanja žice?

◊ Najniži hamonik kod žice zategnute na oba kraja nastaje kada je $\lambda = 2l$. Odatle je

$$F_z = \mu u^2 = \frac{m}{l} \left(\frac{\lambda}{T} \right)^2 = 4ml\nu^2.$$

Tražena sila zatezanja je 824 N, odnosno jednaka je težini tela mase 84 kg.

21. U prostoriji temperature 293 K, muzičar proizvodi na trubi notu "la" prve oktave ($\nu = 440$ Hz). Koju notu ćemo čuti ako se truba napuni helijumom?

◊ Brzina zvuka u helijum je $u = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$. Kako je Helijum jednatomski gas, broj stepena slobode iznosi 3 pa je $\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3} = 1,67$. Obzirom da je njegova molarna masa 4 g/mol, brzina zvuka u helijumu iznosi

$$u_{He} = \sqrt{1,67 \cdot 8,314 \cdot 293/0,004} = 1008 \text{ m/s}$$

dok je u vazduhu na ovoj temperaturi $u = 343$ m/s. Bez obzira na vrstu gasa, talasna dužina zvučnog talasa je ista (obzirom na uslove

za formiranje odgovarajućeg harmonika) pa se iz jednačina $u\lambda = u$ i $\nu_{He}\lambda = u_{He}$ dobija

$$\nu_{he} = \frac{u_{he}}{u}\nu = 1293 \text{ Hz},$$

što odgovara noti "mi" treće oktave.

22. Ambulantna kola se kreću u smeru istoka brzinom 33,5 m/s, pri čemu sirena emituje zvuk frekvencije 400 Hz. Zvuk koje frekvencije će čuti osoba u kolima koja se, brzinom 24,6 m/s kreću na zapad kada se kola približavaju ambulantnim kolima, a koje kada se udaljavaju?

◊ Potrebno je iskoristiti u oba slučaja jednačinu (4.62), uz činjenicu da je brzina zvuka 343 m/s. Kada se kola približavaju jedna drugima, osoba u kolima će registrovati frekvenciju

$$\nu' = \frac{u + v_p}{u - v_s}\nu = \frac{343 \text{ m/s} + 24,6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 33,5 \text{ m/s}}400 \text{ Hz} = 475 \text{ Hz}.$$

Kada se udaljavaju, tražena frekvencija je

$$\nu' = \frac{u - v_p}{u + v_s}\nu = \frac{343 \text{ m/s} - 24,6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + 33,5 \text{ m/s}}400 \text{ Hz} = 338 \text{ Hz}.$$

Promena u registrovanoj frekvenciji je $475 - 338 = 137$ Hz, odnosno više od 30% prave frekvencije.

Glava 5

Analitička mehanika

Njutnova mehanika je kompletna, logički konzistentna teorija, koja veoma dobro opisuje širok dijapazon pojava. Na osnovu nje može da se upravlja svemirskim brodom koji putuje na Neptun (do prosle godine bi ovde naveli putovanje na Pluton, međutim pošto on dekretom više nije planeta, nećemo ni razmišljati o putovanju na njega) ili da se izračuna kretanje bilo kog objekta na Zemlji koji je dovoljno veliki da može da se vidi običnim mikroskopom i koji je dovoljno spor (nekoliko hiljada puta brži od brzine metka).

Bez obzira na ovako veliku primenu Njutnove mehanike, ispostavilo se da njena osnovna forma nije dovoljno univerzalna a u slučaju kada želimo da iz nje predjemo na teorije koje opisuju mikrosvet se ispostavilo da nije sasvim pogodna. Pogodnija je druga varijanta klasične mehanike koja se naziva Lagranževa ili analitička mehanika.¹

U razvoju klasične mehanike se, u tom smislu, mogu izdvojiti dva pravca. Jedan od njih je dobro poznata Njutnova² ili vektorska mehanika a drugi je poznat pod nazivom analitička mehanika.³ U Njutnovoju mehanici se za dobijanje diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanja tela koriste dva vektora: vektor impulsa i sila. Osnivač analitičke mehanike Lajbnic⁴ tvrdio je da u osnovu mehanike ulaze dve skalarne veličine: energija i rad.

¹Pojam "analitička" označava da je reč o primeni diferencijalnog računa koji su formulisali Njutn i Lajbnic pri kraju 17. veka, u mehanici.

²Njutnova mehanika se može ukratko prikazati kao "primeni sile na tela i vidi kako će da se kreću"

³U ovom prilazu, umesto da se analiziraju sile koje deluju na telo centralno mesto zauzima energija tela. Ovakav pristup iako izgleda samo kao alternativa Njutnovom, uprščava analizu mnogih, u Njutnovoju mehanici, komplikovanih problema, npr. oscilovanja kompleksnih sistema, talase u neprekidnim sredinama, kretanje po orbitama, ...

⁴G.W. Leibniz, 1646-1716.

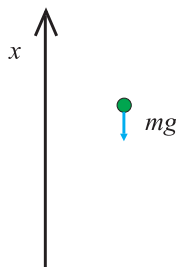
I vektorska i analitička mehanika se mogu koristiti za proučavanje istih problema. I jedna i druga daju istovetene rezultate⁵. Iako na prvi pogled može da se učini da je reč o primeni samo malo drugačijeg matematičkog formalizma u proučavanju istih pojava pokazalo se da su osnovni principi analitičke mehanike toliko duboki da se smatraju jednim od najvećih dostignuća u proučavanju fenomena prirode. Kao posledica te činjenice, iz mehanike, gde je ovaj koncept nastao, proširen je na mnoge oblasti fizike i tehnike.

5.1 Elementi analitičke mehanike

Kao što je dobro poznato u Njutnovoju mehanici kretanje čestice je zadato jednačinom

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (5.1)$$

gde je $\vec{p} = m\vec{v}$ impuls čestice, a \vec{F} ukupna sila koja deluje na posmatranu česticu.



Slika 5.1: Slobodan pad tela mase m .

Razmotrimo kao primer slobodan pad čestice mase m u homogenom polju Zemljine teže. Kako se kretanje tela odvija u jednoj dimenziji, Njutnova jednačina (5.1) projektovana na pravac kretanja daje

$$\frac{dp}{dt} = -mg. \quad (5.2)$$

Obzirom na to da je impuls tela $p = mv = m\dot{x}$, levu stranu ove jednakosti možemo pisati kao

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} \quad (5.3)$$

⁵Procesi u prirodi su nezavisni od načina na koji ih opisujemo.

na osnovu čega jednačinu (5.2) možemo pisati kao

$$m\ddot{x} + mg = 0. \quad (5.4)$$

Kako je kinetička energija $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, član koji sadrži brzinu u poslednjem izrazu može da se dobije ako se uradi sledeći niz izvoda kinetičke energije

$$\frac{dT}{d\dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{x}} \right) = m\ddot{x}. \quad (5.5)$$

Sa druge strane, kako je potencijalna energija u gravitacionom polju $U = mgx$, njen izvod po prostornoj koordinati x je

$$\frac{dU}{dx} = mg \quad (5.6)$$

pa izraz (5.4) može da se zapiše kao

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{x}} \right) + \frac{dU}{dx} = 0. \quad (5.7)$$

Kao naredni primer razmotrimo kretanje linearnog harmonijskog oscilator mase m . Njutnova jednačina koja opisuje njegovo kretanje je

$$\frac{dp}{dt} = -kx, \quad (5.8)$$

odnosno

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (5.9)$$

Za kinetičku energiju važi ista jednačina (5.5), dok je prvi izvod potencijalne energije oscilatora, $U(x) = kx^2/2$, po prostornoj koordinati x jednak

$$\frac{dU}{dx} = kx. \quad (5.10)$$

Na osnovu ovoga Njutnova jednačina postaje

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dv} \right) + \frac{dU}{dx} = 0. \quad (5.11)$$

odnosno ima istu formu kao i u slučaju opisivanja kretanja čestice koja slobodno pada u gravitacionom polju.

5.2 Ojler-Lagranževe jednačine

Dublja analiza pokazuje da je moguće definisati funkciju oblika

$$L = T - U \quad (5.12)$$

koja se naziva Lagranževom,⁶ iz koje se mogu dobiti diferencijalne jednačine kretanja koje opisuju kretanje nekog sistema.

Te jednačine se nazivaju Ojler-Lagranževim i imaju oblik

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dx} \right) - \frac{dL}{dx} = 0. \quad (5.13)$$

Kao što je lako videti iz prethodnih primera Lagranževa funkcija za česticu u gravitacionom polju je

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mgx, \quad (5.14)$$

dok je za oscilator

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \quad (5.15)$$

Pomoću Lagranževe funkcije se može definisati jedna veoma važna funkcija koja se naziva dejstvo

$$S = \int L dt. \quad (5.16)$$

Primer 1. Pokazati da Lagranževa funkcija za linearni harmonijski oscilator koji se kreće u otpornoj sredini ima oblik

$$L = \frac{1}{2} m e^{2\beta t} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$$

5.3 Fazni prostor

Takozvani fazni prostor je prostor koji je kombinacija konfiguracionog prostora (prostor koji čine mogući položaji čestica) i prostora mogućih vrednosti impulsa čestica. Ako je reč o jednoj čestici koja se kreće u tri dimenzije, tada su i konfiguracioni i impulsni prostor Dekartovi trodimenzionalni sa koordinatama (x, y, z) odnosno (p_x, p_y, p_z) a fazni je šestodimenzionalni sa koordinatama (x, y, z, p_x, p_y, p_z) . To je zapravo prostor **dinamičkih stanja** sistema, jer ako znamo gde se on nalazi i koliki mu je impuls u datom trenutku onda mu poznajemo dinamičko stanje.

⁶Žozef Lagranž (1736-1813) je bio veliki francuski matematičar i mehaničar.

Tokom evolucije sistema, tj. sa odvijanjem vremena, sistem menja stanje pa i odgovarajuća tačka u faznom prostoru kojom smo ga predstavili, menja svoju poziciju i opisuje **faznu trajektoriju**. Ovu trajektoriju je nemoguće nacrtati kada se sistem kreće u više od jedne dimenzije. Ukoliko se sistem kreće samo duž jedne ose (na primer x), to jest ako ima samo jedna stepen slobode, fazni prostor u kome prikazujemo njegova dinamička stanja je dvodimenzionalan jer ga osim prostorne koordinatne x čini još i odgovarajuć impuls. U tom slučaju je moguće nacrtati odgovarajuću faznu trajektoriju.

Primer: Odrediti faznu trajektoriju linearnog harmonijskog oscilatora.

Da bi odredili faznu trajektoriju potrebno je da nadjemo vezu x koordinate i odgovarajućeg impulsa oscilatora. Iz jednačine kretanja

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

se dobija da je elongacija

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Na osnovu ovoga je impuls

$$p(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega A \sin(\omega t + \varphi).$$

Veza konfiguracione koordinate i impulsa se može dobiti eliminacijom vremena iz dve poslednje jednačine. To je najlakše uraditi ako drugu jednačinu zapišemo u obliku

$$\frac{p}{m\omega} = -A \sin(\omega t + \varphi)$$

kvadriramo je i saberemo sa kvadratom prve. Dobija se

$$x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} = A^2$$

što nakon množenja sa $\frac{1}{2}m\omega^2$ daje

$$\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \quad (5.17)$$

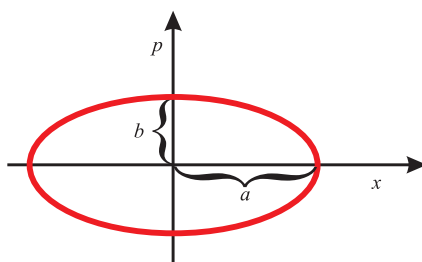
Kako izraz na desnoj stani predstavlja ukupnu mehaničku energiju oscilatora E , jednačina fazne trajektorije postaje

$$\frac{x^2}{2E/(m\omega^2)} + \frac{p^2}{2mE} = 1. \quad (5.18)$$

Ako ovu jednačinu uporedimo sa jednačinom elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gde su a i b takozvane poluose elipse, možemo da zaključimo da je fazna trajektorija linearnog harmonijskog oscilatora ustvari elipsa koja ima poluose $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ i $b = \sqrt{2mE}$.



Slika 5.2: Fazna trajektorija linearnog harmonijskog oscilatora.

Pazljivom čitaocu verovatno nije promaklo da jednačina fazne trajektorije (5.17) ustvari predstavlja zakon održanja mehaničke energije napisan za linearni harmonijski oscilator. Zaključak je univerzalniji i upućuje na činjenicu da je jednačine faznih trajektorija relativno lako dobiti iz zakona održanja energije.

Primer. Nacrtati faznu trajektoriju za česticu koja slobodno pada u homogenom polju Zemljine teže.

5.4 Klasična mehanika i granice njene primenljivosti

Kao što je veće napomenuto, u klasičnoj mehanici je kretanje čestice, u svakom momentu vremena t , okarakterisano vektorom položaja \vec{r} i impulsom $\vec{p} = m\vec{v}$ (koordinatom x i odgovarajućim impulsom $m\dot{x}$ ukoliko je reč o jednodimenzionalnom kretanju). Ustvari, kada znamo ove dve veličine mi znamo gde se, u datom momentu, nalazi čestica i kako se kreće. Sasvim je jasno da, ovakva predstava o telima i njihovom kretanju, podrazumeva da ona tokom vremena opisuju **neprekidne trajektorije**.

Dvadesetih godina prošlog veka je medjutim, zasnovana teorija pod nazivom kvantna mehanika, u okviru koje je pokazano da ovakav pristup opisivanju kretanja čestica ima principijelna ograničenja primenljivosti. Zalaženje u detalje zasnivanja kvantne mehanike daleko prevazilazi ovaj tekst tako da se nećemo upuštati u njih već ćemo samo proanalizirati posledice njenih ograničenja.

Prema ovoj teoriji, stanje čestice u određenom momentu vremena, je nemoguće zadati tačnim vrednostima koordinate i impulsa u tom momentu istom vremena.⁷ Greške koje se javljaju pri merenjima koordinate čestice i njenog impulsa, se nazivaju neodređenosti i, za slučaj kada se telo kreće u jednoj dimenziji, obeležavaju se kao Δx i Δp . Činjenica da je nemoguće tačno odrediti impuls i koordinatu se svodi zapravo na to da je greške, u njihovom određivanju-meranju, nemoguće učiniti proizvoljno malim. Ovo je iskazano relacijom⁸

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad (5.19)$$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ gde je h je Plankova konstanta⁹ $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J · s, tako da je $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ J · s. Važno je napomenuti da Hajzenbergova relacija neodređenosti određuje **principijelnu tačnost istovremenog** merenja koordinate i impulsa, što znači da ona ne može da se prevaziđe usavršavanjem merne aparature i metoda merenja. Dakle nije reč o greškama koje se javljaju prilikom merenja, usled nedovoljno dobre merne aparature ili usled nedovoljno veštog rukovanja njome, već o ispoljavanju prirode realnih čestica da trenutno stanje kretanja ne može biti okarakterisano na **klasičan način**. Čestice se ponašaju komplikovanije nego materijalne tačke u klasičnoj mehanici. Uobičajena, klasična slika kretanja po neprekidnim putanjama, prema tome,

⁷Ovaj stav je u kvantnoj mehanici poznat kao Hajzenbergova relacija neodređenosti po nemačkom teorijskom fizičaru Verneru Hajzenbergu (1901-1976).

⁸Osim ove relacije postoji i relacija koja povezuje grešku u određivanju energije i vremenskog intervala u kome se ona mer koja glasi $\Delta E \Delta t \geq \hbar$.

⁹Ova konstanta je dobila ime po velikom nemačkom fizičaru Maksu Planku (1858-1947) čiji radovi se nalaze u osnovi kvante teorije.

samo približno odgovara zakonima prirode. Međutim, mi znamo da ipak možemo da kretanje tela opisujemo na klasičan način, kao što je to radjeno do pojave kvantne mehanike a radi se i danas. Dakle, reč je samo o proceni da li je, u datoj situaciji, klasičan način opisivanja dovoljno dobar ili ne, pa je zbog toga potrebno odrediti granice primenljivosti klasične fizike.

Granice primenljivosti klasičnog načina opisivanja se mogu odrediti iz relacije (5.19). Iz nje takodje sledi da je nemoguće istovremeno odrediti tačno položaj i brzinu čestice jer važi

$$\Delta x \cdot m\Delta v \geq \hbar. \quad (5.20)$$

Recimo da posmatrano kretanje makroskopskog tela, oblika loptice mase $m = 1$ g. Njen trenutni položaj možemo u realnosti izmeriti sa tačnošću od jednog desetog ili stotog dela milimetra. U svakom slučaju je besmisleno govoriti o merenju položaja loptice sa greškom koja bi bila manja od dimenzija atoma. Prema tome, možemo da uzmemo da je, u jednom veoma idealizovanom merenju (sa najmanjom mogućom greškom), neodređenost položaja $\Delta x = 10^{-10}m$. Na osnovu ovoga se za neodređenost brzine dobija

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{m\Delta x} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{10^{-10}10^{-3}} \approx 10^{-21} \text{ m/s}. \quad (5.21)$$

Primetimo da je dobijena greška izuzetno mala a **istovremena** mala vrednost grešaka u određivanju položaja i brzine loptice je dokaz primenljivosti klasičnog načina opisivanja kretanja u praksi na **makroskopska tela**. Ukoliko je međutim reč o atomima, situacija je potpuno drugačija. Razlog je u maloj masi čestica čije kretanje pokušavamo da opišemo. Recimo da posmatramo kretanje elektrona u atomu vodonika. Masa elektrona je $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg. Greška u određivanju položaja elektrona ne bi smela da bude veća od veličine atoma, odnosno mora da bude $\Delta x < 10^{-10}m$. U tom slučaju, iz relacije neodređenosti (5.20) se dobija

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{m\Delta x} > \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31}10^{-10}} \approx 10^6 \text{ m/s}. \quad (5.22)$$

Ukoliko se ima u vidu da je brzina elektrona pri kretanju oko jezgra atoma takodje reda veličine 10^6 m/s , jasno je da je klasičan način opisivanja neprimenljiv jer je greška jednako velika kao i veličina koja se određuje. Može da se zaključi da je dakle, klasičan način opisivanja kretanja tela primenljiv samo ako se radi o dovoljno velikim telima. Ukoliko je reč o mikročesticama, da bi se dobili dovoljno tačni rezultati treba primeniti kvantnu mehaniku.

Drugo ograničenje klasičnog opisivanja kretanja je vezano za brzinu tela čije kretanje želimo da opišemo. Naime, kao što ćemo videti u narednoj

glavi, klasična mehanika daje pogrešne rezultate ukoliko se tela kreću brzinama koje su velike. Tačniji rezultati se dobijaju ukoliko se za opisivanje primeni Ajnštajnova ili relativistička mehanika. U njenoj osnovi leže transformacije koordinata između dva inercijalna sistema reference koje se nazivaju Lorencovim, i koje, za slučaj kada se ovi sistemi jedan u odnosu na drugi kreću brzinom u duž x ose, za x koordinate ova dva sistema imaju oblik

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (5.23)$$

Lako je uočiti da se ova relacija razlikuje od Galilejevih transformacija (2.42), koje se nalaze u osnovi Njutnove (nerelativističke) mehanike time što postoji faktor $1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ koji je inače karakterističan za relativističku mehaniku. Ukoliko je prema tome reč o tačnijim izrazima od onih koji figurišu u nerelativističkoj mehanici, postavlja se pitanje kako to da je, Njutnova mehanika, tokom više vekova u praksi davala dobre rezultate. Štaviše, i danas se na bazi Njutnove mehanike mogu proračunati kretanja većine nebeskih tela, kosmičkih brodova, automobila, ...

Protivurečnosti ipak nema jer se navedena tela kreću relativno malim brzinama, koje su **znatno** manje od brzine svetlosti u vakuumu. A u tom slučaju relativističke formule sa tačnošću koja je dovoljna za praktične primene prelaze u njutnovske.

Neka se na primer telo kreće brzinom $u = 10$ km/s u odnosu na Zemlju.¹⁰ Neka je za ovo telo vezan inercijalni referentni sistem čija je x osa usmerena u smeru kretanja tela. Tačna veza između x koordinate dva posmatrana inercijalna sistema (jedan je vezan za Zemlju) je data izrazom (5.23). U ovom slučaju je odnos u^2/c^2

$$\frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{10^4}{3 \cdot 10^8} \right)^2 \approx 10^{-9}! \quad (5.24)$$

Kako ovu, izuzetno malu, vrednost treba oduzeti od jedinice u izrazu (5.23) postavlja se pitanje da li je uopšte moguće eksperimentalno registrovati njeno postojanje. Naime, da bi uspeli da izmerimo da je od jedinice oduzeto 10^{-9} potrebna nam je merna aparatura koja ima tačnost do 9 značajnih cifara! U praksi se naravno srećemo sa mernim uređajima znatno manje tačnosti, te je uticaj faktora (5.24), u ovom slučaju, nebitan i možemo ga zanemariti. Pod tim uslovima, izraz (5.23) prelazi u Galilejev pa se može reći da se pri

¹⁰Ovo je brzina kojom se kreću kosmičke rakete. U svakodnevnoj inženjerskoj praksi se obično ima posla sa brzinama koje su znatno manje od ove.

analizi pojava koje se dešavaju sa brzinama koje su znatno manje od brzine svetlosti u vakuumu, sa uspehom može primenjivati Njutnova mehanika. Drugim rečima, primena Ajnštajnovne mehanike, će dati iste rezultate ali će izračunavanja biti znatno složenija. Ova činjenica ukazuje na to da je zapravo Njutnova mehanika sadržana u Ajnštajnovoj kao specijalan slučaj tela koja se kreću (relativno) malim brzinama. Kada je reč o kvantitativnoj granici između relativističke i nerelativističke mehanike, o njoj će više biti reči u narednoj glavi.

I u konačnom, može da se zaključi da je Njutnova mehanika-mehanika (relativno) velikih i (relativno) sporih tela. Ukoliko su tela (relativno) mala, opisivanje njihovog kretanja (ukoliko se žele dovoljno pouzdani rezultati) se mora vršiti u okviru kvantne, a ako su relativno brza, u okviru Ajnštajnovne mehanike.¹¹

5.5 Osobine prostora i vremena u klasičnoj mehanici i njihova veza sa zakonima održanja

U ovom poglavlju ćemo proanalizirati kako su zakoni očuvanja energije, impulsa i momenta impulsa,¹² povezani sa svojstvima *simetrije*¹³ *prostora i vremena*.¹⁴ Videli smo da se kretanje nekog mehaničkog sistema može opisati polazeći od Lagranževe funkcije koja zatim dovodi do odgovarajućih jednačina kretanja. Pomenute simetrije prostora i vremena se u ovom prilazu zapravo svode na simetriju same Lagranževe funkcije a na osnovu toga se može doći do pomenutih zakona održanja. Drugi prilaz, zasnovan na Njutnovom prilazu mehanici, je familijarniji svima koji na ovom nivou izučavaju fiziku, pa ćemo na dalje njega primenjivati. Kao što se pokazuje, zakoni

¹¹Teorija koja opisuje kretanje malih i brzih tela se naziva kvantna teorija polja i ona.

¹²Napomenimo da ovi zakoni održanja važe samo u inercijalnim sistemima reference. Razlog je što su oni izvedeni primenom drugog i trećeg Njutnovog zakona koji važe samo u takvim sistemima reference.

¹³Činjenica postojanja simetrije u evoluciji fizičkog sistema u prostoru i vremenu, je povezana sa činjenicom da, pri promeni prostorno vremenskih koordinata, fizički opis sistema ostaje neizmenjen. Fizički sistemi mogu, sami po sebi, da poseduju određene vrste simetrija, tako su na primer ljudi približno bilateralno simetrični, sfera je simetrična u odnosu na rotaciju oko bilo koje ose koja prolazi kroz njen centar, itd. Ovde međjutim nije reč o simetrijama u tom smislu već o nepromenljivosti **zakona prirode** (matematičkih izraza kojima opisujemo tela i njihove interakcije) pri promeni prostorno-vremenskih koordinata.

¹⁴Napomenimo takodje da se impuls i moment impulsa očuvavaju ukoliko je sistem izolovan (suma svih spoljašnjih sila i njihovih momenata je jednaka nuli), a da je za očuvanje **mehaničke** energije neophodno i da je sistem **toplotno** izolovan.

5.5. OSOBINE PROSTORA I VREMENA U KLASIČNOJ MEHANICI I NJIHOVA VEZA SA ZAKONIMA

održanja se mogu dobiti iz drugog Njutnovog zakona ukoliko prilikom njegove primene/analize imamo u vidu svojstva simetrije prostora i vremena.

5.5.1 Simetrije prostora i vremena.

Pod simetrijama prostora i vremena podrazumevaćemo *homogenost vremena* i *homogenost i izotropnost prostora*. Homogenost vremena označava ravnopravnost svih momenata vremena. Homogenost prostora u istom smislu znači da nema izdvojenih tačaka u prostoru koje su po nečemu specifične već da su sve potpuno ravnopravne. Analogno, izotropija prostora znači da nema pravaca u prostoru koji su iz nekog razloga privilegovani u odnosu na druge već su svi pravci ekvivalentni.

Homogenost vremena se može pojasniti na sledeći način. Recimo da posmatramo mehaničke procese u izolovanom sistemu počev od nekog trenutka t_1 pri čemu su sva tela tog sistema bila u nekom odredjenom stanju. Tela će se u skladu sa svojim početnim uslovima (za trenutak t_1) i jednačinama kretanja pomerati u prostoru i mi ćemo registrovati njihovu evoluciju u toku nekog vremenskog intervala Δt . Pretpostavimo sada da smo sva tela tog istog sistema, u nekom docnijem momentu vremena t_2 doveli u potpuno ista početna stanja koja su imala u trenutku t_1 . Dalje kretanje, za isti interval vremena Δt , će biti potpuno isto kao i kada se odvijalo od počev od vremenskog trenutka t_1 . Ova činjenica predstavlja zapravo tvrdjenje da je vreme homogeno, odnosno da su svi vremenski trenuci potpuno ravnopravni. Napomenimo još da se navedena vremenska transformacija sa t_1 na t_2 , može shvatiti kao translacija u vremenu.

Homogenost prostora, po analogiji sa prethodnim primerom, znači da će, ukoliko tela izolovanog sistema premostimo sa jednog mesta u prostoru na neko drugo mesto, ukoliko ih dovedemo u uslove u kojima su se nalazila na prethodnom mestu, to neće uticati na tok narednih pojava u sistemu. Odgovarajuća transformacija se svodi na prostornu translaciju.

U istom smislu treba shvatiti i izotropiju prostora samo što je u ovom slučaju, umesto translacije u vremenu ili prostoru, reč o rotacijama u prostoru za neki ugao.

Zakon održanja impulsa

Posmatrajmo radi jednostavnosti jednodimenzionalan¹⁵ izolovan sistem, odnosno sistem u kome postoje samo dve unutrašnje sile. Neka se posmatrani sistem sastoji samo od dve čestice, tako da će u sistemu postojati samo dve

¹⁵Sva tvrdjenja se mogu lako generalizovati na dvo i trodimenzionalan sistem.

unutrašnje sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 . Kako je prostor homogen, energija sistema se neće promeniti kada sistem premestimo sa jednog mesta na drugo koje se nalazi na infinitezimalnoj udaljenosti dx . Za potencijalnu energiju će u tom slučaju važiti¹⁶

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + dx, x_2 + dx) \quad (5.25)$$

za bilo koje pomeranje dx . Promena potencijalne energije za infinitezimalni pomeraj sistema u prostoru je takodje infinitezimalna i može prikazati kao

$$dU = \frac{dU}{dx_1} dx + \frac{dU}{dx_2} dx = \left(\frac{dU}{dx_1} + \frac{dU}{dx_2} \right) dx = 0. \quad (5.26)$$

Usled proizvoljnosti dx , izraza u zagradi mora da bude jednak nuli, što dovodi do toga da je zbir sila koje deluju u sistemu jednak nuli. A to je upravo bio uslov iz koga se, uz primenu drugog Njutnovog zakona, dobija zakon održanja impulsa.

Zakon održanja momenta impulsa

Da bi proverili da li zakon održanja impulsa može da bude posledica izotropnosti prostora, posmatrajmo kretanje nekog tela po kružnici. Telo može da se kreće po takvoj putanji jedino u slučaju da na njega deluje centripetalna sila koja će ga terati da stalno savija putanju. U suprotnom, telo bi se kretalo po inerciji, odnosno po pravoj liniji.

Kinetička energija tela će u tom slučaju biti $E_{kin} = mr^2\omega^2/2$, gde je r poluprečnik putanje a ω ugaona brzina tela. Centripetalna sila koja telo zadržava na orbiti poluprečnika r je $\vec{F} = -mr\omega^2\vec{e}_r$.¹⁷ Ukoliko se pri kretanju tela promeni njegova kinetička energija, rad koji je pri tome izvršen je $\Delta E_{kin} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$.

Četiri pomenute veličine: kinetička energija, centripetalna sila, ugaona brzina i rastojanje od ose rotacije, su povezane sledećim jednačinama

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2,$$

$$F = -mr\omega^2,$$

$$\frac{dE_{kin}}{dr} = F.$$

¹⁶Ovo tvrdjenje je povezano sa činjenicom da je potencijalna energija posledica interakcija medju telima a one zavise samo od relativnog položaja tela, koji se neće promeniti pri promeni tačke u prostoru iz koje ga određujemo.

¹⁷Sa \vec{e}_r je označen jedinični vektor vektora položajam pri čemu je uzeto da se njegov početak nalazi u centru kružne putanje a vrh naravno na mestu gde se trenutno nalazi telo.

5.5. OSOBINE PROSTORA I VREMENA U KLASIČNOJ MEHANICI I NJIHOVA VEZA SA ZAKONIMA

Ključno je primetiti da ova tri izraza ne zavise od trenutnog položaja čestice na kružnici. Ovo upućuje na to da ne postoji pravac u prostoru koji bi, iz nekog razloga, bio privilegovan u odnosu na druge već su svi pravci ekvivalentni. Da vidimo da li se, iz ovih jednačina dobija zakon održanja momenta impulsa. Ako ga dobijemo, to će značiti ono što je i napomenuto na početku ovog poglavlja, a to je da je ovaj zakon posledica izotropije prostora.

Zamena prve dve jednačine u treću dovodi do izraza

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} r^2 \omega^2 \right) = -\omega^2 r \quad (5.27)$$

Dobijena je diferencijalna jednačina pri čijem rešavanju moramo da vodimo računa da ugaona brzina zavisi od udaljenosti od ose rotacije. Oblik te zavisnosti mora da bude takav da zadovolji jednačinu (5.27). Ta veza treba ima sledeći oblik

$$\omega^2 = \frac{C}{r^4},$$

jer kad se zameni u jednačinu (5.27), dovodi do

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{C}{2r^2} \right) = -\frac{C}{r^3}.$$

Ukoliko pretpostavljenu vezu ugaone brzine ω i rastojanja od ose rotacije r , zapišemo u obliku

$$\omega^2 r^4 = C,$$

nakon uzimanja kvadratnog korena i množenja masom tela m , dobijamo

$$m\omega r^2 = \text{const.},$$

što predstavlja jedan od oblika u kojima možemo da zapišemo moment impulsa.

Direktnom proverom se vidi da, ako je ova veza oblika

Zakon održanja energije

Već je ukazano na činjenicu da se zakoni fizike neće promeniti ako se promeni početni vremenski trenutak u odnosu na koji se posmatra evolucija sistema. U praksi ovo obezbeđuje ponovljivost procesa u prirodi i u eksperimentima. Na primer, način kretanja klatna neće zavisiti od toga da li ga posmatramo danas ili sutra. Posledica simetrije u vremenu je zakon održanja energije. Naime, kako energija ima veze sa radom, a rad se računa po formuli

$$A = \int F dx,$$

gde se integracija vrši po *prostornim koordinatama*, ma kakva promena u određivanju početnog vremenskog trenutka neće uticati na energiju sistema.

Glava 6

Kinematika specijalne teorije relativnosti

Kada se pomene reč relativnost većina ljudi ima asocijaciju na Ajnštajna. Manje je poznato da je taj termin zapravo prilično star i da su prve uspešne teorije relativnosti razvili još Galilej i Njutn. Pod relativnošću se zapravo podrazumeva proučavanje toga kako različiti posmatrači (koji se kreću jedni u odnosu na druge) vide isti događaj. Ona relativnost koju je Ajnštajn razvio, manje-više sam, se naziva modernom teorijom relativnosti i može se podeliti na specijalnu i opštu. Specijalna relativnost se odnosi na opisivanje merenja koja vrše posmatrači koji se kreću u različitim **inercijalnim** (neubrzanim) sistemima reference, dok se u okviru opšte teorije relativnosti proučavaju i ubrzano relativno kretanje i gravitacija. Značaj Ajnštajna je u tome što su njegove teorije relativnosti napravile radikalne rezove u predstavama o prostoru i vremenu i dale neka nova i revolucionarna predviđanja. Iako nisu odmah po formulisanju prihvaćene, danas su njegove teorije¹ potvrđjene sa velikom preciznošću u velikom broju eksperimenata.

Važno je napomenuti da, klasična fizika i klasična relativnost, iako ne potpuno tačne, predstavljaju veoma dobru aproksimaciju za velika tela koja se kreću sporo. Sa druge strane, primena samo klasične fizike u lansiranju satelita i funkcionisanju na primer modernog sistema za globalno određivanje položaja (GPS sistema) ili konstruisanju nuklearnih elektrana, bi dovela do značajnih grešaka. Kako u klasičnom limesu (tela veća od submiskroskopskih koja se kreću sporije od 1% brzine svetlosti²) Ajnštajnova

¹Osim Ajnštajnovih, postojale su i alternativne teorije koje su međjutim odbačene jer nisu prošle odgovarajuće eksperimentalne testove.

²Termin *brzina svetlosti* treba shvatati u smislu brzine svetlosti (c) u vakuumu, ukoliko

relativnost daje iste rezultate kao i klasična fizika, može se reći da ona u stvari u sebi sadrži Njutnovu mehaniku kao specijalan slučaj.

6.1 Brzina svetlosti i zakon sabiranja brzina

Krajem 19. veka, zdanje klasične fizike je bilo uglavnom završeno. Dva najvažnija kamena temeljca, Njutnovi zakoni i Maksvelove jednačine, su, kako je izgledalo, bili dovoljno čvrsto postavljeni. I dok je o Njutnovim zakonima, koji počivaju na pojmovima o apsolutnom prostoru i vremenu, kao osnovi klasične mehanike bilo puno reči do sada, napomenimo da Maksvelove jednačine opisuju elektromagnetne pojave uključujući i svetlost. Kad je reč o njoj, ove jednačine predviđaju da se svetlost u vakuumu kreće brzinom $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, što predstavlja jednu od osnovnih konstanti u prirodi, ali ne govore ništa o tome u odnosu na koji sistem reference ona iznosi baš toliko.

Za svetlost se tada sa pozdanošću smatralo da je talas,³ što je bilo dokazano u Jungovom eksperimentu sa difrakcijom svetlosti na dva proreza i u mnogim drugim eksperimentima koji su usledili nakon njega. Do tada je bilo poznato više vrsta talasa, doduše mehaničkih, kojima je za kretanje uvek bio neophodan neki medijum (sredina) koji bi ih prenosio.⁴ Na osnovu toga se smatralo da i za svetlost, budući da je talas, mora da postoji neka sredina koja bi služila za prostiranje svetlosnog talasa sa jednog mesta na drugo, u odnosu na koji bi se svetlost prostirala brzinom c . Ta sredina je dobila naziv *etar*.⁵

Ako već imamo medijum, (koji ne vidimo i ne osećamo) koji prenosi svetlosni talas, prirodno je da se zapitamo kakve bi osobine mogao da ima. Obzirom na to da je brzina mehaničkih talasa data izrazom opšteg oblika $u = \sqrt{E/\rho}$, gdje je E , veličina koja opisuje elastične osobine sredine a ρ njena gustina, pretpostavilo se da i za brzinu svetlosnog talasa važi analogan izraz. Kako je za brzinu svetlosti dobijena mnogo veća vrednost nego što je

nije naglašeno drugačije. Brzina svetlosti u materijalnoj sredini je uvek manja od c i može biti manja čak i od brzine kretanja naelektrisanih čestica u istoj sredini. Pojava kretanja naelektrisanih čestica u materijalnoj sredini brzinom koja je veća od brzine svetlosti u njoj je poznato pod nazivom efekat Čerenkova.

³Time je, izgledalo je, rešena dugogodišnja zagonetka prirode svetlosti. Naime, do tada je preovladavalo mišljenje da Njutново čestično objašnjenje ponašanja svetlosti bolje od Hajgensove ideje da je svetlost talas.

⁴Naime, kroz prazan prostor - vakuum, mehanički talasi ne mogu da se prostiru, jer nema šta da ih prenese (na primer zvuk ne može da se prostire kroz vakuum).

⁵Na osnovu ovog bi moglo da se pomisli da je ideja o postojanju etra stara tek nešto više od 150 godina, međutim to nije tačno jer se jos u antičko vreme smatralo da postoji neka tvar koja prožima sve, ...

to kod mehaničkih talasa, nametnuo se zaključak da ta hipotetička sredina, koja prožima sve u kosmosu, mora da bude **izuzetno elastična i jako male gustine**.⁶ Sa druge strane, obzirom da je apsolutno sve uronjeno u nju i da se sva tela kreću kroz etar ne osećajući njegovo postojanje, to je moguće samo ako je trenje između etra i "ostatka" sveta jednako nuli. Drugim rečima, na primer Zemlja kada se kreće kroz etar ne **povlači ga za sobom** zbog ne postojanja trenja.⁷ Drugim rečima ta sredina bi trebalo da apsolutno miruje.

Ukoliko postoji, etar sa takvim osobinama, bi bio jako zgodan i za određivanje nečega što se do tada smatralo nemogućim, a to je **apsolutno kretanje**. Naime, ako je reč o sredini koja miruje, onda bismo mogli da u odnosu na nju posmatramo sva kretanja i da određujemo njihove apsolutne brzine.

Ako smo već zaključili, na bazi analogije sa mehaničkim talasima, da postoji etar kao medijum za njihovo prenošenje i pripisali mu neke osobine koje bi u tom slučaju morao da poseduje, hajde da vidimo do kojih bi još zaključaka mogla da nas dovede dalja primena (u to vreme nesumnjivo tačne) klasične mehanike na kretanje svetlosti.

U osnovi klasične mehanike se nalazi Galilejev princip relativnosti. Naime, kao što je već više puta pomenuto Njutnovi zakoni važe u inercijalnim sistemima reference. Kada je reč o ovakvim sistemima reference, podsetimo se da, prema ovom principu, ne postoje nijedan od njih koji bi po nečemu bio privilegovan u odnosu na druge - drugim rečima svi su ravnopravni. Direktna posledica ove činjenice je da će rezultat bilo kog mehaničkog eksperimenta biti jednak u svim takvim sistemima.⁸ Drugim rečima, kao što je to analizirano u drugoj glavi ove knjige **zakoni mehanike su isti u svim inercijalnim sistemima reference**.

Prirodno je postaviti pitanje da li je moguće primeniti Galilejev princip relativnosti na pojave koje nisu mehaničke, recimo na svetlost.

U tom smislu moramo da se zapitamo u odnosu na koji sistem reference svetlost ima brzinu c ? Naime, besmisleno je govoriti o brzini nečega a ne

⁶Iz ovakvog razmatranja je bilo jasno da sredina sa ovakvim osobinama, ako stvarno postoji, mora da izgleda veoma čudno, najčudnije od svih do tada poznatih. Naime, najelastičnije sredine su sredine koje možemo da smatramo praktično idealnim krutim telom. Dakle, ta hipotetička sredina u kojoj se nalazi sve i kroz koju se sve kreće bi morala da bude neka vrsta krutog tela!?

⁷Slično kretanju lopte kroz idealan fluid - fluid bez unutrašnjeg trenja.

⁸Primer koji se najčešće navodi je izvodjenje mehaničkih eksperimenata u vozu koji se kreće uniformno pravolinijski u odnosu na Zemlju i u vozu koji se ne kreće u odnosu na nju.

reći u odnosu na šta se taj objekat kreće tom brzinom.⁹

Polazeći od klasičnog zakona sabiranja brzina, koji je posledica Galilejevog principa relativnosti, dolazi se do zaključka da u različitim sistemima reference i brzina svetlosti mora da ima različitu vrednost.¹⁰ Drugim rečima, izmerena vrednost za brzinu svetlosti c mora da se odnosi na jedan sistem reference koji bi bio vezan za etar i koji bi prema tome mirovao. Ukoliko bi se posmatrač, u odnosu na taj sistem kretao nekom brzinom u u pravcu kretanja svetlosti, onda bi za njega brzina svetlosti morala da bude različita od c , odnosno iznosila bi $c \pm u$, u zavisnosti od toga da li se on kreće ka izvoru svetlosti ili od njega.

Sve negde do pred kraj 19. veka, merna aparatura kojom su raspolagale laboratorije nije bila dovoljno precizna da bi mogla da izmeri malu razliku između c i $c \pm u$, a i metodologija koja se zasnivala na kretanju aparature u laboratoriji nije puno obećavala. Medjutim 1880. godine se došlo na ideju da se u ovu svrhu iskoristi kretanja Zemlje pri rotaciji oko Sunca koje se odvija brzinom od oko $u = 3 \cdot 10^4$ m/s i da se zapravo za Zemlju veže taj pokretni referentni sistem iz koga bi se merila razlika u brzini svetlosti. Situacija u kojoj se na primer Zemlja kreće u susret svetlosti brzinom u ćemo u tom smislu smatrati, na bazi klasičnog zakona slaganja brzina, ekvivalentnom situaciji u kojoj je Zemlja nepokretna a svetlost se ka njoj kreće brzinom $c + u$.¹¹ Odredjivanje brzine svetlosti u tim uslovima je identično odredjivanju brzine aviona koga nosi vazдушna struja, odnosno vetar. Na taj način, u ovom slučaju možemo situaciju da predstavimo analognom situaciji u kojoj je Zemlja (i aparatura koja se nalazi na njoj) statična a da se etar kreće ka njoj ili od nje (zavisno od doba godine kada strujanje etra promeni smer).

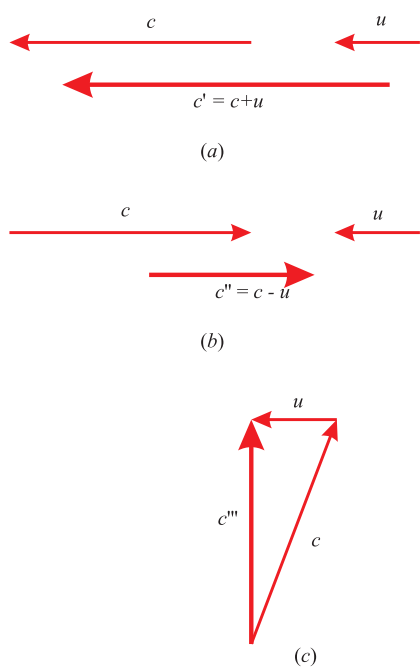
Dalja merenja su se, prema tome, svodila na odredjivanja brzine vetra kojim etar "duva" u Zemlju prilikom njenog kretanja kroz njega brzinom u . U tom slučaju, izmerena brzina svetlosti će imati maksimum $c' = c + u$, kada se svetlost kreće "niz vetar" (slika 6.1), biće minimalna $c'' = c - u$ kada se svetlost kreće "uz vetar", a imaće neku vrednost $c''' = \sqrt{c^2 - u^2}$, koja je između ove dve, kada se meri u smeru normalnom na "vetar".

Ukoliko se pretpostavi da Sunce miruje u odnosu na etar, brzina strujanja etra koji je ekvivalentan kretanju Zemlje oko Sunca će biti upravo jednaka

⁹Ovo su činjenice na koje se već na prvim časovima o kretanju ukazuje učenicima.

¹⁰Ima li se u vidu da je brzina svetlosti u vakuumu zadata relacijom (9.19), odnosno definisana vrednostima električne i magnetne konstante vakuuma, to bi značilo da se ove vrednosti menjaju pri prelasku iz jednog inercijalnog sistema u drugi. To ne zvuči kao da ima previše smisla.

¹¹Brzina u bi bila relativna brzina etra u odnosu na Zemlju, koji "nosi" i svetlost koja se (u odnosu na njega) kreće brzinom c u odnosu na njega.



Slika 6.1: Razlika u brzini svetlosti u zavisnosti od načina kretanja "vetra".

orbitalnoj brzini Zemlje, odnosno oko $3 \cdot 10^4$ m/s. Kako je $c = 10^8$ m/s, očekivalo se da odstupanja od brzine svetlosti koja su u ovom slučaju reda veličine $u/c = 10^{-4}$, mogu da se registruju prilikom merenja "uz vetar" i "niz vetar". Merenja su vršena Majkelsonovim interferometrom koji je imao mogućnost da izvrši merenje potrebne tačnosti, međjutim, svi pokušaji da se odredi ovaj uticaj na brzinu svetlosti (a time i pokaže postojanje apsolutnog referentnog sistema vezanog za etar) su bili neuspešni.

Negativan rezultat je ukazivao na moguću teorijsku kontradikciju između Maksvelove elektrodinamike i Njutnove mehanike. Zaključci koji slede iz ovih razmatranja su da

- ili osnovni zakoni elektromagnetizma nisu isti u svim intercijalnim sistemima reference,
- ili Galilejev zakon sabiranja brzina nije tačan.

Ukoliko je prvi zaključak tačan, morao bi da postoji jedan sistem reference u kojem je brzina svetlosti c a brzine svetlosti koje mere posmatrači koji se nalaze u drugim inercijalnim sistemima moraju onda da bude veće ili manja od ove, u zavisnosti od relativnog kretanja sistema (u skladu sa Galilejevim transformacijama). Ukoliko je tačan drugi zaključak, morale bi da se razmotre predstave o apsolutnom prostoru i vremenu koje predstavljaju osnovu klasične mehanike.

6.2 Majkelson-Morlijev eksperiment

Najpoznatiji eksperiment¹² koji je osmišljen da izmeri očekivanu malu promenu u brzini svetlosti, prvi put je izveo jedan drugi Albert, Albert Majkelson 1881. godine.¹³

Eksperiment je dizajniran tako da se u njemu meri efekat kretanja Zemlje u odnosu na hipotetički etar. Uredjaj koji je u tu svrhu iskorišćen je Majkelsonov interferometar (slika 6.2). U njemu, snop svetlost koji emituje neki svetlosni izvor nailazi na polupropustljivo ogledalo O , koje je postavljeno pod uglom od 45° u odnosu na pravac prostiranja snopa. Polupropustljivo

¹²Osim ovog eksperimenta postavljen je niz drugih koji su imali isti cilj. Samo neki od fizičara koji su se bavili ovim problemom su Fizeau (1860.), Mascart (1872.), Lord Rayleigh (1902). Njihovi eksperimenti su imali za cilj da izmere promene u indeksu prelamanja dielektrika izazvano zemljinim kretanjem kroz etar. Troud i Noble (1903.) su pokušali da odrede promenu u nalektrisanju ploča kondenzatora usled kretanja kroz etar.

¹³Eksperiment je kasnije ponovio više puta u saradnji sa Edvardom Morlijem pa je zato u nauci poznat pod nazivom Majkelsono-Morlijev eksperiment.

ogledalo ima za zadatak da upadni snop svetlosti pocepa na dva koji će se nadalje kretati različitim pravcima. Jedan snop nastavlja da se kreće u istom pravcu i smeru, odnosno ka ogledalu O_2 a drugi se reflektuje i kreće se dalje ka ogledalu O_1 . Recimo da je krak 2 interferometra u početku bio postavljen u pravcu kretanja Zemlje po orbiti. Kao što je već rečeno, kretanje Zemlje kroz etar brzinom u je ekvivalentno strujanju etra prema Zemlji brzinom istog intenziteta ali suprotnog smera. Strujanje etra u smeru suprotnom od realnog kretanja Zemlje, dovodi do toga da će brzina svetlosti u sistemu reference vezanom za Zemlju biti $c - u$ kada se svetlost kreće ka ogledalu O_2 a $c + u$ nakon refleksije o njega.¹⁴

Dva svetlosna snopa, odbijena od ogledala O_1 i O_2 kada se sretnu interferiraju i daju sliku koja se sastoji od niza naizmeničnih tamnih i svetlih traka. Interferenciona slika je takodje posmatrana i kada je interferometar zarotiran za 90° . Rotacija je trebalo da izmeni interferencionu sliku za mali ali merljivi iznos jer je usled rotacije promenjena brzina strujanja etra duž kraka interferometra. Merenja su medjitim pokazala da nema nikakve promene u interferencionoj slici. Eksperiment je ponavljan više puta tokom kalendarske godine jer se očekivalo da je promenjen i smer a i intenzitet brzine strujanja etra oko Zemlje ali je rezultat uvek bio isti: **nije primećena promena interferencione slike koja bi po veličini odgovarala teorijskim predviđanjima.**

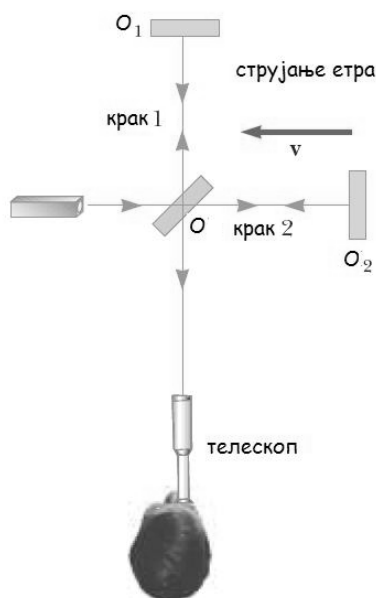
Negativan rezultat Majkelson-Morlijevog eksperimenta nije kontradiktoran samo hipotezi o postojanju etra, već je pokazao da je nemoguće odrediti brzinu apsolutnog kretanja Zemlje u odnosu na etar kao referentno telo.¹⁵ U narednim godinama, u stepenu kako je upoznavana prava priroda svetlosti, se pokazalo da se ideja etra kao prenosioca svetlosnih talas stvarno može odbaciti. Danas se svetlost smatra elektromagnetnim talasom kome za prostiranje nije potreban medijum prenosnik.¹⁶

Razmotrimo postavku Majkelson Morlijevog eksperimenta. Pretpostavimo da oba kraka interferometra imaju istu dužinu L . Kao što je već naglašeno, pod pretpostavkom da postoji strujanje etra, brzina svetlosti duž kraka 2 interferometra je $c - u$, kada se svetlost približava ogledalu O_2 , a $c + u$ nakon reflektovanja svetlosti o ogledalo. Na taj način, vreme potrebno svetlosti da predje put L , krećući se ka ogledalu iznosi $L/(c - u)$, a od ogledala $L/(c + u)$.

¹⁴Podsetimo se da je c brzina svetlosti u sistemu reference vezanom za etar.

¹⁵Kao što ćemo videti u narednim poglavljima, Ajnštajn je uveo jedan postulat koji potpuno drugačije interpretira negativan rezultat ovog eksperimenta, zadirući zapravo u njegovu teorijsku postavku.

¹⁶Posledica toga je da je etar čiji je jedini razlog postojanja bio da prenosi svetlost, postao nepotreban.



Slika 6.2: Majkelson-Morlijev interferometar.

Ukupno vreme potrebno svetlosti da ode do ogledala i vrati se, prema tome je

$$t_1 = \frac{L}{c+u} + \frac{L}{c-u} = \frac{2Lc}{c^2-u^2} = \frac{\frac{2L}{c}}{1-\frac{u^2}{c^2}}. \quad (6.1)$$

Razmotrimo sada kretanje svetlosnog snopa duž kraka 1, koji se nalazi pod pravim uglom u odnosu na strujanje etra. Kako je brzina svetlosti u odnosu na Zemlju u tom slučaju $\sqrt{c^2-u^2}$, vreme potrebno svetlosti da ode do ogledala O_1 je $L/\sqrt{c^2-u^2}$. Vreme potrebno da se vrati nazad je jednako, pa je ukupno vreme za putovanje svetlosti u pravcu kraka 1

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \quad (6.2)$$

Razlika ova dva vremena je

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c} \left[\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right]. \quad (6.3)$$

Kako je $u^2/c^2 \ll 1$, prethodni izraz može da se uprosti razvojem binoma,

uz zanemarivanje članova drugog i višeg reda,

$$(1 - x)^n \approx 1 - nx, \quad x \ll 1. \quad (6.4)$$

Kako je $x = u^2/c^2$, n je u prvom slučaju -1 a u drugom $-\frac{1}{2}$, pa se za razliku vremena dobija

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{Lu^2}{c^3}. \quad (6.5)$$

Ova razlika u vremenima koja su potrebna zracima da dodju na zaklon, izaziva njihovu faznu razliku odnosno ima za posledicu stvaranje interferencione slike na njemu. Kada se interferometar zarotira za 90° , zraci zamenuju mesta pa će doći do promene u interferencionoju slici. To će rezultirati duplo većom vremenskom razlikom ova dva zraka od one date relacijom (6.5). Usled toga će razlika puteva koje su prešli zraci biti

$$\Delta d = c(2\Delta t) = \frac{2Lu^2}{c^2}. \quad (6.6)$$

Promena u putu za jednu talasnu dužinu dovodi do pomeranja u interferencionoju slici za jednu svetlu traku. Na taj način pomeranje interferencione slike zavisi od odnosa putne razlike i i talasne dužine svetlosti

$$S = \frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{2Lu^2}{\lambda c^2}. \quad (6.7)$$

U eksperimentima koje su vršili Majkelson i Morli, svaki zrak je bio reflektovan više puta o ogledalo tako da je efektivno prelazio put od 11 metara. Na taj način će razlika u putevima izmedju zraka biti

$$\Delta d = \frac{2 \cdot 11 \text{ m} (3 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}. \quad (6.8)$$

Ta putna razlika je trebalo da prouzrokuje merljivi pomeraj u interferencionoju slici. Ukoliko se u eksperimentu koristi svetlost talasne dužine 500 nm, predvidjeni pomeraj u interferencionoju slici je

$$S = \frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{2,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \approx 0,44. \quad (6.9)$$

Uredjaj koji su koristili u eksperimentu Majkelson i Morli je mogao da detektuje pomeraj u interferencionoju slici reda veličine 0,01. Medjutim, na njihovo iznenadjenje, nije primećena nikakva promena. Nakon toga, eksperiment je ponovljen mnogo puta, od strane mnogih naučnika i pod različitim

uslovima, ali nikakvo pomeranje nije uočeno. Nužno je sledio zaključak da kretanje Zemlje u odnosu na etar ne može biti registrovano.

Mnogo truda je uloženo da se objasni negativan rezultat ovog eksperimenta tako da se sačuva koncept etra i Galilejev zakon sabiranja brzina. Veoma brzo se međutim pokazivalo da su svi ti pokušaji bili pogrešni.

I tako je bilo sve do 1905. godine, kada je Ajnštajn objavio svoj prvi rad o specijalnoj relativnosti u kome je pošavši od radikalno novih ideja pokazao da postojanje etra zapravo nije neophodno. U ovom radu je, analizirajući Maksvelove jednačine, činjenicu da one za brzinu svetlosti predviđaju c , proglasio postulatom svoje specijalne teorije relativnosti.¹⁷

6.3 Ajnštajnov princip relativnosti

Ajnštajn je zapravo, razmišljajući o tome da se svetlost (u vakuumu) kreće uvek brzinom c , zaključio da postoji kontradikcija između tog predviđanja i Njutnove mehanike, u kojoj se brzine sabiraju kao vektori. Ako je ovo primenljivo i za elektromagnetne talase, onda bi dva posmatrača koja se kreću raznim brzinama registrovali različite brzine kretanja svetlosti.¹⁸

Deo Njutnove mehanike i klasične relativnosti u ovim radovima ipak nije doveden u sumnju. Naime, jasno je da se sve brzine mere u odnosu na neki sistem reference. Najprostiji sistemi reference su oni koji se ne kreću ubrzano i koji ne rotiraju. Njutnov prvi zakon (zakon inercije) važi u takvim

¹⁷Interesantno je istaći da je Ajštajn o relativnosti ozbiljno razmišljao od svoje 16. godine a da ju je formulisao u periodu svog života kada je bio zapošljen kao službenik nižeg ranga u jednom patentnom birou u Bernu u Švajcarskoj. Što je još interesantnije on je iste godine objavio još četiri rada. Osim relativnosti u njima je bilo reči o još dve značajne teme - o Braunovom kretanju (rad koji spada u najcitiranije u istoriji moderne fizike) koji je ukazivao na to kako u eksperimentima može biti određena veličina atoma, a druga tema se ticala objašnjena fotoefekta. Objašnjenje koje je on ponudio je bitno uticalo na zasnivanje kvantne mehanike. Za ovaj rad, Ajnštajn je 1921. godine dobio Nobelovu nagradu.

¹⁸U stvari, on je pokušao da shvati kako bi svetlosni talas izgledao nekome ko se kreće istom brzinom kao i sam talas. Ako bi takvo kretanje bilo moguće, ovaj talas (koji predstavlja spregnuto oscilovanje električnog i magnetnog polja pod pravim uglom u odnosu na pravac prostiranja talasa) bi bio stacionaran (nepromenljiv u vremenu) za posmatrača, sa električnim i magnetnim poljem čiji bi intenziteti imali različite vrednosti na različitim udaljenostima od njega pri čemu se one ne bi menjale sa vremenom. Ajnštajn je međutim znao da tako nešto Maksvelova elektrodinamika ne predviđa. Zaključio je da su ili Maksvelove jednačine pogrešne, ili da je nemoguće kretati se brzinom svetlosti. Ukoliko su jednačine ipak tačne jasno je da to ukazuje na nemogućnost kretanja brzinom c sa jedne strane, a sa druge da je brzina svetlosti u vakuumu jednaka za sve posmatrača. Kao posledica toga se odmah nameće zaključak da za svetlost u tom slučaju ne važi klasičan zakon sabiranja brzina.

sistemima, koji se prema tome nazivaju **inercijalni sistemi reference**. Posmatrano iz njih, tela koja miruju ostaju u stanju mirovanja, a ona koja se kreću konstantnim brzinama po pravoj liniji nastavljaju da se tako kreću sve dok na njih ne deluju spoljašnje sile.

Štaviše zakoni fizike imaju najprostiju formu u inercijalnim sistemima reference. Na primer, sistem reference koji je vezan za Zemlju je samo približno inercijalan. Obzirom da se Zemlja ne kreće uniformno i pravolinijski, može da se primeti da u njoj postoji dodatna sila¹⁹ (Koriolisova), koja komplikuje opisivanje kretanja tela u odnosu na Zemlju.²⁰ I što je još važnije, zakoni fizike imaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference, jer ne postoji ni jedan koji bi bio po bilo čemu privilegovan.

Ajnštajnova specijalna teorija relativnosti počiva na dva postulata

1. **Princip relativnosti:** Zakoni fizike imaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference.
2. **Princip konstantnosti brzine svetlosti:** Svetlost se kroz vakuum kreće brzinom $c = 3 \cdot 10^8$ m/s koja je ista u svim inercijalnim sistemima reference, nezavisno od relativne brzine izvora svetlosti i posmatrača.

Prvi postulat predstavlja tvrdjenje da su **svi** zakoni fizike (iz oblasti mehanike, elektriciteta, optike, magnetizma, termodinamike, ...) isti u svim referentnim sistemima koji se, jedni u odnosu na druge, kreću konstantnim relativnim brzinama. Ovaj postulat je generalizacija Galilejevog principa relativnosti koji se odnosi samo na mehaničke pojave.

Sa eksperimentalne tačke gledišta, Ajnštajnov princip relativnosti kazuje, da svi eksperimenti (na primer merenje brzine svetlosti) izvršeni u laboratoriji koja je u stanju mirovanja, mora da daju iste rezultati i kada se izvrše u laboratoriji koja se kreće konstantnom brzinom u odnosu na onu koja miruje. Drugim rečima nema privilegovanih sistema, te prema tome nije moguće definisati apsolutno kretanje.

Drugi postulat je u odredjenom smislu povezan sa prvim. Naime, ako brzina svetlosti²¹ ne bi bila ista u svim sistemima reference, njeno merenje bi moglo da se iskoristi za pravljenje razlika izmedju sistema, odnosno ne bi bili svi ravnopravni, što je u kontradikciji sa prvim postulatom.

¹⁹U tom slučaju naime, ukupna sila koja deluje na telo nije jednaka proizvodu mase tela m i ubrzanja \vec{a} već se mora dodati još jedan sabirak što komplikuje opsivanje kretanja posmatranog tela.

²⁰Ova sila izmedju ostalog izaziva i dodatnu rotaciju orkanskih vetrova, ...

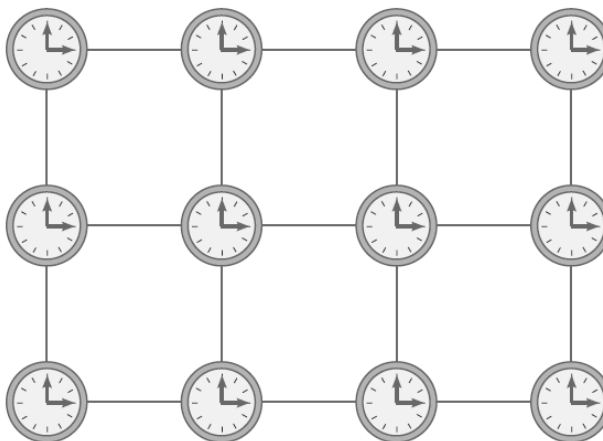
²¹Takodje treba istaknuti da je brzina svetlosti u vakuumu maksimalna brzina kojom se može preneti interakcija.

Istaknimo još i to da je postojanje maksimalne brzine prostiranja interakcije (ili signala) u tesnoj vezi sa problemom istovremenosti događaja za posmatrače u različitim sistemima reference, što je direktno povezano sa pitanjem da li je proticanje vremena isto u svim inercijalnim sistemima.

Iako je Majkelson-Morlijev eksperiment izvršen pre nego što je Ajnštajn publikovao svoj rad o relativnosti, nije potpuno jasno da li je bio upoznat sa detaljima eksperimenta. Međutim, u skladu sa postulatima specijalne teorije relativnosti, jasno je da je osnovna premisa eksperimenta (bazirana na klasičnom zakonu sabiranja brzina i na koncepciji apsolutnog prostora i vremena) pogrešna pa je tako i negativan rezultat eksperimenta logičan.

6.4 Posledice specijalne teorije relativnosti

Pre upuštanja u posledice Ajnštajnovih postulata, razmotrimo na koji način posmatrač koji se nalazi u nekom sistemu reference opisuje događaj. Svaki događaj je, u datom referentnom sistemu S određen trima prostornim (x, y, z) i jednom vremenskom koordinatom t .²² Jasno je da različiti posmatrači, iz svojih sistema reference opisuju iste događaje različitim koordinatama. Sistem reference iz koga opisujemo događaje se u principu sastoji od koordinatne mreže i skupa časovnika koji se nalaze u tačkama preseka mreže, kao što je pokazano na slici 6.3 u dve dimenzije.



Slika 6.3: Koordinatna mreža sa sinhronizovanim satovima.

²²Naime, za svaki događaj, kao i u svakodnevnom životu, moramo da znamo gde se desio i kada je to bilo.

Kako u datom sistemu reference ima više časovnika, oni moraju biti sinhronizovani.²³ To se može uraditi uz pomoć svetlosnih signala na sledeći način. Pretpostavimo da se u tački koja predstavlja koordinatni početak nalazi posmatrač sa glavnim satom i da je, kada je na njegovom satu bilo $t = 0$ s, poslao svetlosni puls. Pulsu je potrebno vreme r/c da dodje do sata koji je na rastojanju r od koordinatnog početka. Prema tome, taj sat je sinhronizovan sa glavnim samo ukoliko pokaže r/c u trenutku kada puls stigne do njega. Ovakva procedura sinhronizacije²⁴ podrazumeva naravno činjenicu da se svetlost kreće jednakom brzinom u svim pravcima i u svim sistemima reference. Posmatrač koji se nalazi u jednom sistemu reference S će neki događaj okarakterisati skupom prostorno vremenskih koordinata (x, y, z, t) koji odgovaraju njegovoj koordinatnoj mreži i satovima koji su sinhronizovani u njoj. Drugi posmatrač, koji se nalazi u nekom drugom sistemu reference S' će istom događaju pripisati druge prostorne vremenske koordinate (x', y', z', t') .

6.4.1 Istovremenost u Ajnštajnovoj relativnosti

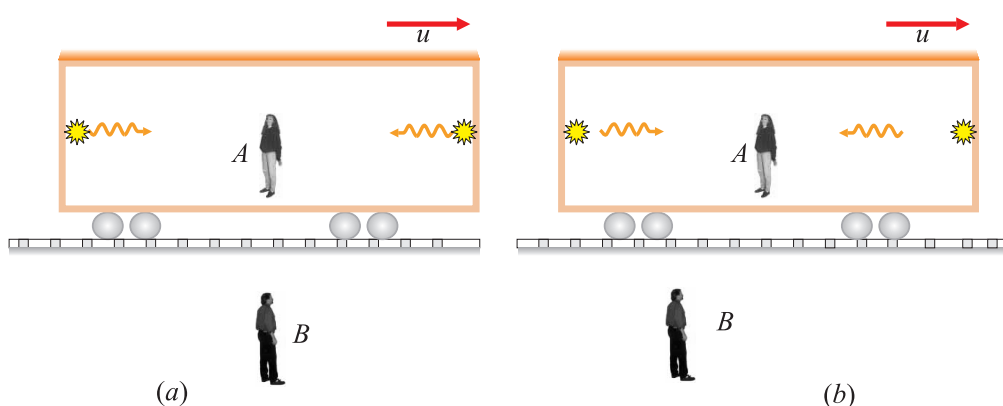
Jedna od osnovnih premisa Njutnove mehanike je da postoji univerzalna vremenska skala koja je ista za sve posmatrače. Iz toga sledi da ako su u jednom sistemu reference dva događaja istovremena, onda su oni istovremeni u svim sistemima reference koji se u odnosu na njega kreću (ma koliko velikom) konstantnom brzinom. Medjutim, ukoliko važe Ajnštajnovi postulati, *dva događaja koja su istovremena u jednom sistemu reference nisu istovremena u drugom.*

Pretpostavimo da želimo da izmerimo vremenski interval izedju dva bljeska svetlosti proizvedena blic lampama koje se nalaze na krajevima vagona (slika 6.4).

Posmatrač A se nalazi tačno na sredini vagona, to jest podjednako udaljen od obe lampe, a vagon se kreće konstantnom brzinom u u odnosu na posmatrača B . Blic lampe emituju svetlost u trenutku kada posmatrač A prolazi kraj posmatrača B , odnosno u trenutku kada su obojica podjednako udaljena od krajeva vagona. Pretpostavimo da posmatrač B svojim satom meri vreme dolaska signala do njega. U skladu sa drugim postulatom, u

²³Da bi imalo smisla da služe za očitavanje vremena.

²⁴Važno je takodje istaći da ovakav način sinhronizacije časovnika ima za posledicu da su ispunjena dva uslova: (a) *uslov simetrije* - ako je časovnik koji se nalazi u tački A sinhron sa časovnikom koji se nalazi u tački B , onda je i časovnik u B sinhron sa časovnikom u A , (b) *uslov tranzitivnosti* - ako je časovnik u A sinhron sa časovnikom u B , a časovnik u B sa časovnikom u C , tada je i časovnik u A sinhron sa časovnikom koji se nalazi u tački C .



Slika 6.4:

odnosu na njega, svetlost prelazi jednaka rastojanja jednakom brzinom²⁵ i on će zaključiti da su događaji emitovanja svetlosti istovremeni.

Razmotrimo sada šta se sa njegovog stanovišta dešava u sistemu reference u kome se nalazi posmatrač A . Analizirajući način kretanja vagona, obzirom da se posmatrač A kreće na desno (ka jednoj lampi), time smanjuje rastojanje koje svetlost treba da pređe da bi došla do njega. Kako se svetlost kreće brzinom c u odnosu na oba posmatrača, ali posmatrač B ostaje na jednakom rastojanju između tačaka iz kojih su emitovani svetlosni impulsi, dok se A približava desnoj tački, zaključuje da će postojati razlika u vremenu pristizanja bljeskova svetlosti do posmatrača A .²⁶

Na osnovu izvršene analize nameće se zaključak da *istovremenost ima relativan karakter*, odnosno da *u raznim inercijalnim sistemima vreme teče različito*.

Primetimo da su u analizi korišćena samo dva principa: smatralo se da se oba sistema reference ravnopravna (princip relativnosti) i da se svetlost u svim pravcima kreće istom brzinom (princip konstantnosti brzine svetlosti).

²⁵Na brzinu svetlosti prema ovom postulatu ne utiče kretanje izvora koji ju je emitovao.

²⁶To narušenje istovremenosti pomenuta dva događaja je vezano za to kako ih vidi posmatrač B . Gledano sa stanovišta posmatrača A događaji su za njega takodje istovremeni, što je u skladu sa postulatima Ajnštajnovе teorije relativnosti. Ukoliko bi na primer on registrovao da su ovi događaji neistovremeni, mogao bi na osnovu toga da zaključi da li se njegov sistem kreće ili ne, a prvi postulat upravo to zabranjuje - egzistenciju fizičkog ogleđa koji bi po nečemu omogućio da se odredi karakter kretanja inercijalnog sistema reference. U ovome nema nikakve kontradikcije jer se radi o upoređivanju intervala vremena između događaja koji se desio u **istoj tači prostora**, npr u tački prostora u kojoj se nalazi posmatrač A . U nju sa stanovišta njega signali stižu istovremeno, dok za posmatrača u odnosu na koga se on kreće to više nije tako.

Neko bi mogao da se zapita a da li su *stvarno* pomenuti događaji istvoremeni ili ne, međjutim to pitanje nema smisla. Razlog je što odgovarati šta se *u stvari* dešava, značilo bi da je izabran neki sistem reference koji je po nečemu privilegovan u odnosu na druge.

Stožer relativnosti (i Galilej-Njutnove i Ajnštajnove) je da *bilo koji sistem reference može da se koristi za opisivanje događaja*. Kao što je već više puta rečeno, **ne postoje privilegovani sistemi reference**.

Činjenica da posmatrači koji se nalaze u različitim referentnim sistemima, svojim časovnicima i lenjirima mere različite vremenske intervale i dužine nije u suprotnosti sa tvrdjenjem o ravnopravnosti sistema reference. Ravnopravnost se svodi zapravo na to da svi posmatrači moraju da se saglase oko forme osnovnih zakona fizike koja mora biti ista za sve posmatrače koji se kreću uniformno. Na primer, relacija $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ u sistemu S mora da ima istu formu $d\vec{p}'/dt' = \vec{F}'$ u sistemu S' koji se kreće uniformno u odnosu na sistem S .²⁷

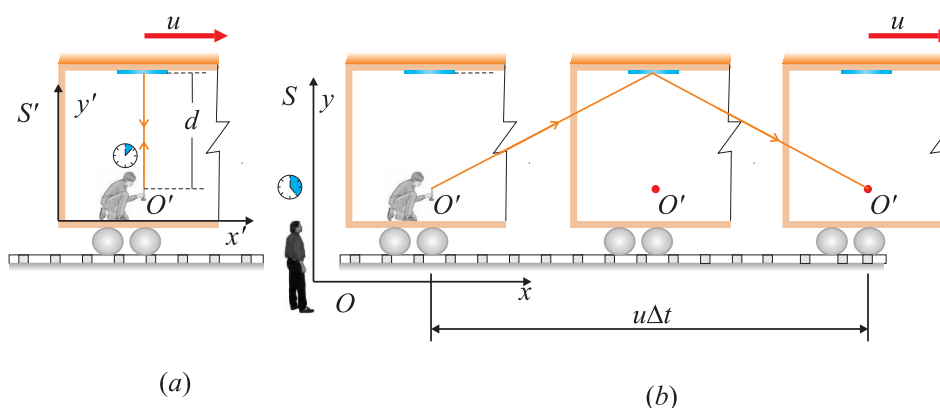
6.4.2 Dilatacija vremena

Razmatranje merenja intervala vremena i problema istovremenosti dovodi do jednog veoma važnog relativističkog efekta koji se naziva dilatacija vremena. On se ispoljava u različitim rezultatima merenja intervala vremena između događaja, od strane dva posmatrača koji se kreću jedan u odnosu na drugoga uniformno.

Proanalizirajmo vremenske intervale između dva događaja merena u "pokretnom" S' i "nepokretnom" sistemu reference S ²⁸ na primeru merenja vremena potrebnog svetlosnom pulsu da predje određeno rastojanje (slika 6.5). Neka je ogledalo je fiksirano za plafon vagona a putnik koji je u stanju mirovanja u odnosu na vagon drži laser na udaljenosti d od ogledala. U nekom trenutku, laser emituje svetlosni puls usmeren ka ogledalu (događaj 1), koji se nakon nekog vremena, merenog u tom sistemu, vraća ka laseru. Neka je na satu u S' za interval vremena između ta dva događaja izmereno vreme $\Delta t'$. Kako se svetlosni puls kreće brzinom c i prelazi put $2d$ (ka

²⁷Ovo je činjenica koja je takodje isticana prilikom analize Galilejevog principa relativnosti. Razlika je u tome što se sada tvrdi da ta činjenica važi i za velike brzine kretanja i za sve fundamentalne (ne samo mehaničke) fizičke zakone. U tom smislu i Maksvelove jednačine, kao osnova klasične elektrodinamike, moraju imati isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference.

²⁸Napomenimo da ni jedan od posmatrača ne zna (nema način da utvrdi) da li se kreće ili ne. Tačnije, svako od njih je u stanju mirovanja u sopstvenom sistemu reference. Iz toga razloga su i sistemi nazvani "pokretni" i "nepokretni".



Slika 6.5: (a) Ogljedalo fiksirano za plafon vagona i svetlosni signal koji šalje posmatrač koji miruje u odnosu na vagon. (b) U odnosu na stacionarnog posmatrača O koji se nalazi pored pruge, vagon se kreće brzinom u .

ogledalu i nazad), ovaj interval vremena je

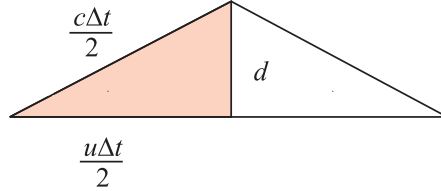
$$\Delta t' = \frac{2d}{c}. \quad (6.10)$$

Podsetimo se da je za njegovo merenje (u sistemu S') dovoljan **samo jedan sat**, koji se sve vreme **nalazi na istom mestu** sa koga je emitovan i na koje se potom vraća svetlosni puls.

Razmotrimo sada kako isti par događaja izgleda posmatraču iz sistema S (slika 6.5 (b)). Za posmatrača koji se nalazi u tom sistemu, ogledalo i laser se kreću na desno brzinom u usled čega niz ova dva događaja za njega izgleda drugačije. Dok svetlost stigne do ogledala, ono se pomeri na desno na rastojanje $u\Delta t/2$, gde je Δt vreme potrebno svetlosnom pulsu da polazeći iz tačke O' nakon odbijanja od ogledala ponovo dodje u nju, ali mereno iz sistema S u odnosu na koji se vagon kreće uniformno brzinom u . Obzirom na ovakvo kretanje vagona i ogledala, on zaključuje da će svetlosni puls doći do ogledala jedino ukoliko napusti laser pod nekim uglom u odnosu na vertikalu. Upoređivanjem situacija (a) i (b) na pomenutoj slici, vidi se da gledano iz njegovog sistema reference svetlost mora da pređe **veći put** da bi došla nazad do lasera.

Važno je takodje napomenuti da on odgovarajuća vremena očitava na dva stacionarna časovnika, jedan se nalazi na lokaciji gde eksperiment započinje (emitovanje signala) a drugi na lokaciji gde se završava (prijem signala). U tom smislu on će upoređivati pokazivanje jednog pokretnog sata koji se

nalazi u vagonu, na mestu odašiljanja i primanja signala, sa pokazivanjem dva nepokretna časovnika koja se nalaze u njegovom sistemu reference.



Slika 6.6:

U skladu sa postulatom o konstantnosti brzine svetlosti, za oba posmatrača se ona kreće jednakom brzinom c . Kako mereno iz sistema S , svetlost prelazi veći put, interval vremena Δt , izmeren izmedju događaja 1 i 2 je veći od intervala vremena $\Delta t'$ koji je izmerio posmatrač koji se nalazi u sistemu S' . Da bi dobili vezu ova dva intervala zgodno je iskoristiti pravougli trougao prikazan na slici 6.6. Primenom Pitagorine teoreme

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2 + d^2. \quad (6.11)$$

za Δt se dobija

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2d}{c\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (6.12)$$

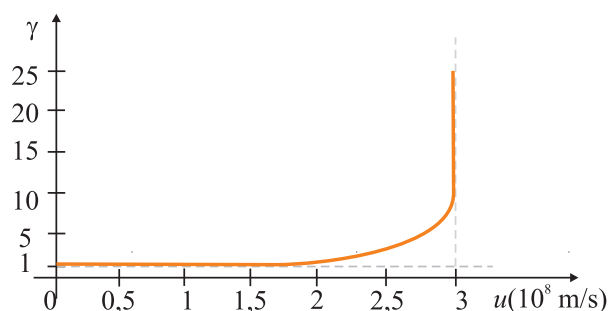
odnosno, uz korišćenje (6.10)

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t', \quad (6.13)$$

gde je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (6.14)$$

Kako je faktor γ uvek veći od jedinice, ovaj rezultat pokazuje da je vremenski interval Δt , izmeren od strane posmatrača u odnosu na koji se uređaj koji je ispuštao svetlosne signale kretao, veći od vremenskog intervala $\Delta t'$ izmerenog u sistemu reference vezanom za uređaj. Kako posmatrač u odnosu na kojeg se uređaj kreće meri veći vremenski interval, efekat je nazvan **dilatacija vremena**. Drugim rečima vreme u pokretnim sistemima teče sporije jer svi časovnici, uključujući i biološke, pokazuju kraće vremenske intervale.



Slika 6.7: Grafik zavisnosti γ od brzine kretanja tela v . Sa približavanjem brzine tela brzini svetlosti, faktor γ rapidno raste.

Vremenski interval $\Delta t'$ meren u sistemu S' koji se kreće zajedno sa instrumentom koji je korišćen za merenje, se naziva sopstvenim vremenskim intervalom i često označava sa Δt_0 jer je mereno u sistemu reference u kome se posmatrano telo-instrument ne kreće. U suštini **sopstveno vreme je vremenski interval između dva događaja meren od strane posmatrača za koga se oni dešavaju na istom mestu u prostoru**. U tom smislu se sopstveno vreme uvek može meriti jednim satom koji miruje u odnosu na referentni sistem u kojem se dešavaju događaji. Ukoliko se taj posmatrani sat kreće u odnosu na nas (a mi se nalazimo u sistemu S), on počinje da zaostaje (kuca sporije) za sinhronizovanim satovima koji se nalaze u čvorovima koordinatne mreže našeg inercijalnog sistema S . Stepen zaostajanja je određen faktorom γ u skladu sa jednačinom (6.14). Iz svega iznetog je jasno da je ovakav zaključak tačan za mehaničke časovnike, međutim on se može generalizovati i na sve fizičke procese (uključujući hemijske i biološke) koji postaju usporeni u odnosu na njihovo trajanje u "nepokretnom" sistemu reference S . Na primer, otkucaju srca astronauta koji putuje brodom kroz vasionu će biti uskladjeni sa radom odgovarajućeg časovnika koji se nalazi u njegovom sistemu reference. I otkucaji srca i taj časovnik će biti usporeni²⁹ u odnosu na "nepokretn" sat koji se nalazi na Zemlji.³⁰

²⁹Astronaut ipak neće ni na koji način moći da oseti efekte tog usporavanja sve dok se nalazi u sopstvenom inercijalnom sistemu (princip relativnosti).

³⁰Dilatacija vremena je fenomen koji može da se verifikuje i pri relativno malim brzinama ukoliko se vreme meri izuzetno preciznim časovnikom. U radu koji su u časopisu Science, 1972. godine objavila dva američka fizičara Joseph C. Hafele i Richard E. Keating, pod nazivom "Around the World Atomic Clocks: Relativistic Time Gains Observed," su prezentovani rezultati eksperimenta sa cezijumskim časovnicima. Četiri takva časovnika se nalazilo u avionu tokom njegovog komercijalnog leta a njihov rad je upoređivan sa radom referentnog cezijumskog časovnika koji se nalazio na Zemlji. Rezultati su u nesumnjivom

- Primer 1. Jedna vrsta nestabilnih elementarnih čestica, koje su nazvane mioni³¹ (odnosno μ mezoni), nastaju u višim slojevima atmosfere prilikom sudara kosmičkog zračenja sa česticama vazduha. Prosečno vreme života miona³² je oko $2,2 \mu\text{s}$, mereno u njihovom sopstvenom sistemu reference (odnosno u sistemu u kome miruju ili se veoma sporo kreću u odnosu na njega).

Ako pretpostavimo da mioni nastaju na visini od oko 5 kilometara, kreću pravo ka Zemlji, brzinom od oko $0,99c$, raspadaju se nakon $2,2 \mu\text{s}$, izračunati da li će mion uspeti da stigne do površine Zemlje pre nego što se raspadne.

◊ Na prvi pogled put koji mioni mogu da predju pre nego što se raspadnu iznosi oko $l' = 600 \text{ m}$, obzirom da je $l' = \tau' \cdot v = 2,2 \mu\text{s} \cdot 0,99 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 600 \text{ m}$. Na osnovu ovoga bi moglo da se zaključi da do površine Zemlje ne bi mogao da dodje ni jedan mion nastao u gornjim slojevima Zemljine atmosfere jer bi se svi oni mnogo ranije raspali. Međutim, eksperimenti pokazuju da na površinu Zemlje stiže jako puno miona. Objašnjenje ove činjenice daje dilatacija vremena. U odnosu na posmatrača koji se nalazi na Zemlji, vreme života miona nije τ' već $\tau = \gamma\tau'$, gde je τ' vreme života miona u njegovom sopstvenom sistemu reference (koji putuje sa njim). Na primer, ukoliko mion ima brzinu od $v = 0,99c$, to znači da je brzina kretanja njegovog sistema reference u jednaka toj vrednosti i da je faktor $\gamma \approx 7,1$, pa je na osnovu toga $\gamma\tau' = 16 \mu\text{s}$. Na osnovu ovoga je srednje rastojanje koje je prešao mion, mereno u sistemu reference vezanom za Zemlju $l = \tau v = \gamma\tau'v \approx 4800 \text{ m}$, što objašnjava činjenicu registrovanja velikog broja miona na zemlji.

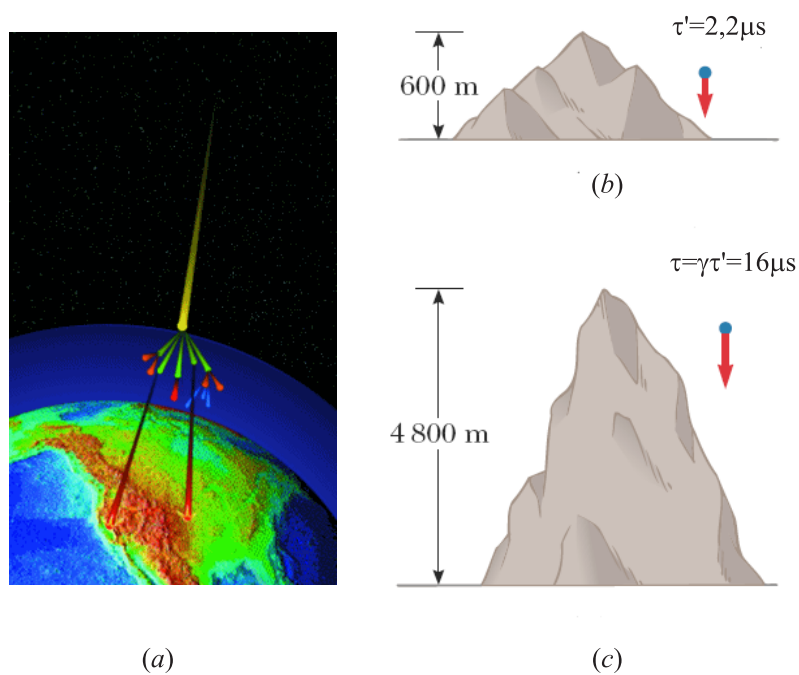
- Primer 2. Period klatna, meren u njegovom sopstvenom sistemu reference iznosi $3,0 \text{ s}$. Koliki je period istog klatna merenog iz sistema reference koji se kreće u odnosu na klatno brzinom $0,95c$?

◊ Opisana situacija u kojoj se posmatrač kreće brzinom od $0,95c$ a sistem reference klatna miruje je ekvivalentna situaciji u kojoj se taj

skladu sa predviđanjima specijalne teorije relativnosti a pokazivali su na to da su "leteći" časovnici kasnili $59 \pm 10 \text{ ns}$ dok je teorija predviđala da kašnjenje bude $40 \pm 23 \text{ ns}$, što predstavlja prilično dobar sklad očekivanja i rezultata merenja.

³¹Mioni imaju naelektrisanje jednako naelektrisanju jednog elektrona dok im je masa oko 207 puta veće od mase elektrona.

³²Nakon isteka tog vremena (u proseku) mion se raspada na elektron, mionski neutrino i elektronski antineutrino.



Slika 6.8: (a) Nastanak kosmičkog zračenja u višim slojevima atmosfere. Proton koji nailazi na atmosferu je prikazan žutom bojom. "Pljusak" kosmičkog zračenja (zelena boja) nastaje usled njegove interakcije sa jezgrom molekula vazduha. Neke od tih čestica (uglavnom π mezoni) u raspadu proizvode mione (crvena boja). Iako se većina miona raspadne relativno brzo, puno njih ipak stigne do površine Zemlje. (b) Krećući se brzinom od $0,99c$ u svom sistemu reference, u kome mu je vreme života $2,2\mu\text{s}$, mion pređe put od 600 m . (c) Mereno iz sistema referencije vezanog za Zemlju, on prelaзи put od 4800 m .

sistem reference kreće istom brzinom u odnosu na nepokretnog posmatrača (klatno je primer mehaničkog časovnika).

Sopstveno vreme, prema datim podacima, iznosi $\Delta t' = 3,0s$. U skladu sa jednačinom (6.13) pokretni sat radi sporije od nepokretnog a interval vremena izmeren u nepokretnom sistemu reference je

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,95c)^2}{c^2}}} \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,902}} \Delta t' = 3,2 \cdot 3,0s = 9,6s.$$

Dobijeni rezultat pokazuje da je klatnu koje se kreće da bi napravilo jednu punu oscilaciju potrebno više vremena nego klatnu koje miruje.

- Primer 3. Krenuli ste na sastanak sa devojkom u drugi grad, vozeći automobil brzinom od 30 m/s. Ona očekuje da stignete za 3 sata. Zakasnili ste pola sata, pa kako ste čuli da se efekat vremenske dilatacije ispoljava pri velikim brzinama, odlučili ste da se pozovete na njega i da kažete kako je vaš sat pokazao da ste stigli za 3 sata ali pošto ste se kretali veoma brzo on je radio sporije od njenog. Međutim, niste znali da je vaša devojka student fizike koji je upoznat sa specijalnom teorijom relativnosti i sa matematičkom analizom. Odvela vas je na kafu i na salveti izračunala koliko je trebalo da bude razlika u pokazivanju vašeg i njenog sata pod pretpostavkom da je vaš zaista pokazao da ste putovali 3 sata navedenom brzinom. Kako je izgledao njen račun?

◊ Ona je verovatno prvo morala da izračuna vrednost faktora γ koji je prema (6.14)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(3 \cdot 10^2 m/s)^2}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 10^{-14}}}.$$

Na ovom mestu ste pokušali da je odobrovoljite rekaši da ćete na digi-tronu da izračunate vrednost dobijenog korena. Pustila vas je da se mučite i da se zaprepastite kada ste za γ dobili rezultat 1 koji vam nije išao u prilog. Nakon toga je razvila binom i ograničila se samo na prva dva sabirka

$$\gamma = (1 - 10^{-14})^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(10^{-14}) = 1 + 5,0 \cdot 10^{-15}.$$

Iz navedenog rezultata se pokazalo da se za tipične brzine automobila ovaj faktor ne razlikuje mnogo od 1. Primena jednačine (6.13) je

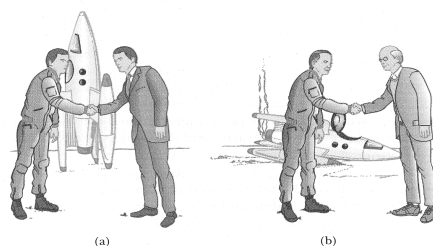
pokazala koliko je vreme ona izmerila, u slučaju da je vaš sat izmerio $\Delta t' = 3 \text{ h}$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = (1 + 5,0 \cdot 10^{-15})(3 \text{ h}) = 3 \text{ h} + 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ h} = 3 \text{ h} + 0,054 \text{ ns}.$$

Dakle, njen sat je, usled relativističkih efekata, išao ispred vašeg 0,054 ns!

Paradoks blizanaca

Jedna od veoma intrigantnih konsekvenci dilatacije vremena je takozvani *paradoks blizanaca*. Razmotrimo jedan eksperiment u kome učestvuju dva brata blizanca. Kada su imali po 20 godina jedan od njih, sklon avanturama, odlazi na kosmičko putovanje na Planetu X, udaljenu 20 svetlosnih godina od Zemlje.³³ Neka je kosmički brod, kojim putuje, sposoban da se kreće brzinom od $0,95c$ u odnosu na inercijalni sistem reference vezan za Zemlju. Nakon što je stigao na Planetu X, krenuo je odmah nazad ka Zemlji istom brzinom. Kada je došao na Zemlju, bio je šokiran činjenicom da je njegov brat ostareo 42 godine i da sada ima 62 godine. On sam je u međuvremenu ostareo svega 13 godina.



Slika 6.9: (a) Kada je jedan blizanac otputovao sa Zemlje bili su jednako stari, (b) Kada se vratio sa putovanja bio je mlađi od blizanca koji je ostao na Zemlji.

Sada se možemo malo poigrati pojmom relativnost i zapitati se koji se blizanac u stvari kretao i da li je uopšte logično da je neki od njih više ostareo. Razlog je taj što, gledano iz sistema reference blizanca koji je ostao na zemlji, on je mirovao a njegov brat je putovao i to prilično velikom brzinom. Iz perspektive pak onoga koji je bio u kosmičkom brodu, kosmički brod je bio u stanju mirovanja a Zemlja se, najpre udaljavala od broda $6,5$

³³Jedna svetlosna godina je rastojanje koje svetlost predje u vakuumu za vreme od jedne kalendarske godine.

godina a potom mu se približavala jednakom brzinom narednih 6,5 godina. Čini se da bi trebalo da dodjemo do zaključka da ne bi trebalo da bude razlike u njihovim godinama.

Da bi razrešili paradoks, podsetimo se da se specijalna teorija relativnosti odnosi na pojave i procese koji se odvijaju u **inercijalnim sistemima reference**, odnosno onima koji se kreću jedan u odnosu na drugi uniformno. Da li su sistemi vezani za Zemlju i brod sve vreme inercijalni i da li su stoga potuno ravnopravni? Dublja analiza pokazuje da to nije tako i da nema simetrije u opisivanju protoka vremena u ovim sistemima.

Osim toga, blizanac koji je oputovao brodom, da bi dostigao brzinu od $0,95c$ morao je da se ubrzava, na kraju prvog dela puta da uspori, okrene brod, ponovo ubrza a na kraju puta da uspori brod što znači da on nije sve vreme bio u inercijalnom sistemu reference pa je primena specijalne teorije relativnosti vezano za njegov sistem reference neosnovana. Naime, on ne može da kaže da je on u sistemu reference koji miruje dok se blizanac koji je ostao na Zemlji kreće uniformno pravolinijski u odnosu na njega (u fazama putovanja kada je njegov brod ubrzavao).

Dakle, zaključak da je blizanac u brodu u neinercijalnom sistemu reference je neizbežan. Takodje se može zaključiti da su njihovi sistemi reference zapravo u relativnom međusobnom ubrzavanju, međjutim ubrzanje koje dobija brod je rezultat realne sile koja deluje na njega. Blizanac koji je putovao brodom bi mogao da kaže kako je interval vremena u toku koga je njegov brod ubrzavao relativno mali u odnosu na ukupno vreme putovanja pa je tako većinu vremena ipak proveo u inercijalnom sistemu reference - i tu bi bio potpuno u pravu. Međjutim, kada dodje do planete X, on mora da zaustavi brod, okrene ga nazad i saopšti mu brzinu jednaku onoj koju je imao do tada ali suprotnog smera. Od tog momenta on se nalazi u **drugom sistemu reference!** To znači da jedino brat blizanac koji je ostao na Zemlji ima pravo da primenjuje formulu za dilataciju vremena (6.13) jer je jedino iz njegovog sistema reference je ona tačna. Na osnovu nje sledi, da ako su na Zemlji protekle 42 godine u svemirskom brodu je proteklo

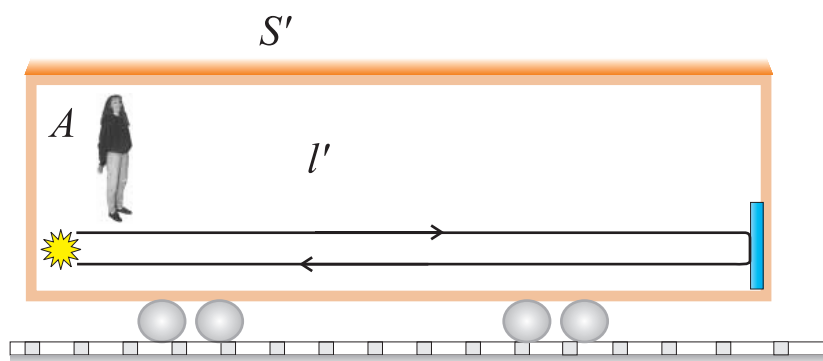
$$\Delta t' = 42g \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 13g,$$

odnosno kosmički brod je (mereno na satu koji se nalazi u njemu) potrošio 6,5 godina da ode do planete X i još toliko da se vrati.

6.4.3 Kontrakcija dužina

Iz dosadašnjeg razmatranja je jasno da jedna od veličina, oko čijeg iznosa posmatrači iz različitih referentnih sistema mogu da se slože, je relativna brzina njihovih inercijalnih sistema reference. I dok im satovi, kao što smo videli, pokazuju različite vremenske intervale između istih događaja, oni će biti saglasni da je relativna brzina njihovih sistema, koja je jednaka količniku rastojanja inercijalnih sistema reference i vremenskog intervala za koji su se udaljili jedan od drugog (pretpostavljajući da su im se u početku merenja vremena koordinatni počeci poklapali) jednaka. Kako je ona količnik rastojanja između sistema (pod navedenim uslovima) i vremenskog intervala (koji zavisi od toga iz kog sistema reference ga merimo), jasno je da i predjeno rastojanje mora da zavisi od relativnog kretanja posmatrača. Jer ukoliko dva posmatrača mere različita vremena, onda oni moraju da mere i različite dužine - da bi relativna brzina ostala ista za obojicu.

Razmotrimo sledeću situaciju. Osoba A se nalazi u vagonu dužine l' mereno iz njenog (sopstvenog) sistema reference (iz sistema reference vezanog za vagon), dok se osoba B nalazi van vagona, pored pruge. Izvor svetlosti se nalazi na zadnjoj strani vagona (slika 6.10), dok se ogledalo nalazi na prednjoj. Vagon se kreće brzinom u u odnosu na Zemlju. Izvor emituje svetlost koja se kreće ka ogledalu, odbija se od njega i odlazi natrag ka izvoru.



Slika 6.10:

U sistemu reference osobe A (slika 6.10), vreme potrebno svetlosti da predje opisani put je

$$\Delta t_A = \frac{2l'}{c}. \quad (6.15)$$

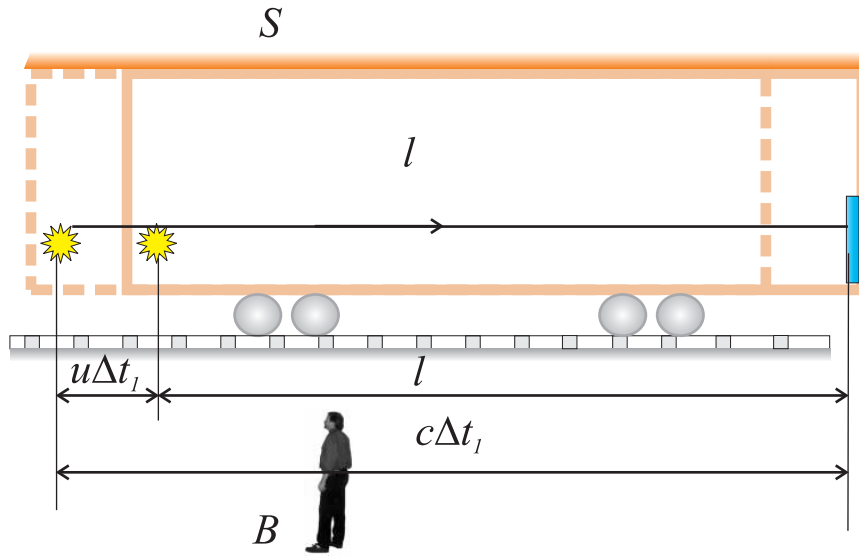
Gledano iz sistema reference osobe B , situacija je nešto komplikovanija. Neka je dužina vagona merena iz njega l . Posmatrano iz tog sistema, za

vreme t_1 , za koje je svetlosni zrak došao do ogledala, obzirom da se ceo vagon, krećući se brzinom u pomerio na rastojanje ut_1 , svetlosni zrak je prešao

$$c\Delta t_1 = l + u\Delta t_1, \quad (6.16)$$

odakle je vreme Δt_1

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - u}. \quad (6.17)$$



Slika 6.11: Predjeni put svetlosti, od izvora do ogledala, je uvećan za put koji je prešao vagon krećući se brzinom u .

Nakon odbijanja, obzirom da se vagon kreće suprotno od zraka svetlosti, on je za Δt_2 prešao put

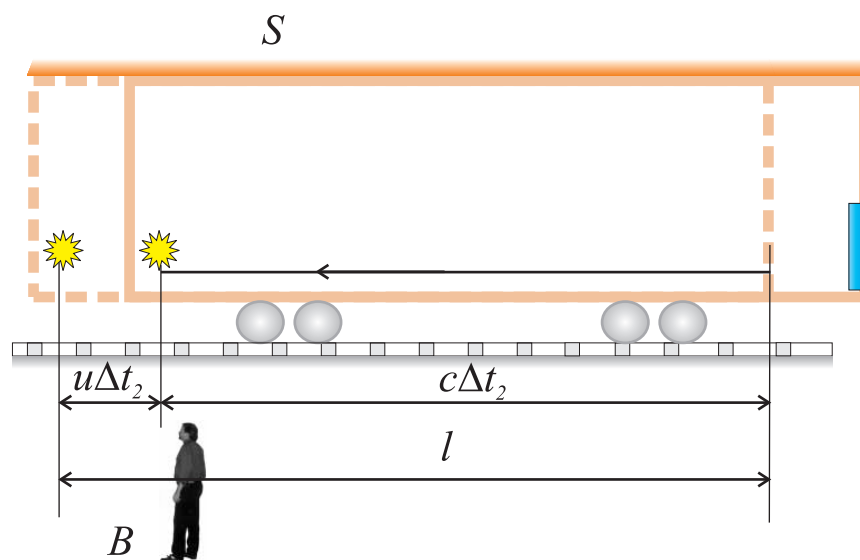
$$c\Delta t_2 = l - u\Delta t_2, \quad (6.18)$$

što znači da je ovo vreme

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + u}. \quad (6.19)$$

Ukupno vreme, mereno iz sistema osobe B , je zbir ova dva vremena

$$\Delta t_B = \Delta t_1 + \Delta t_2 = l \left[\frac{1}{c - u} + \frac{1}{c + u} \right] = \frac{2lc}{c^2 - u^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (6.20)$$



Slika 6.12: Predjeni put svetlosti, od ogledala do izvora, je umanjen za put koji je prešao vagon krećući se brzinom u .

Iskoristimo li relaciju za dilataciju vremena (6.13), koja primenjena na oznake korišćene ovde glasi

$$\Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

i zamenimo u jednačinu (6.20), imajući u vidu da važi i relacija (6.15), dobijamo

$$l = l' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{l'}{\gamma}. \quad (6.21)$$

Kako je faktor $\gamma > 1$, jasno je da će posmatrač B za dužinu voza izmeriti l , pri čemu je ta dužina veća od dužine voza (sopstvene dužine) merene u sistemu reference vezanog za sam voz. Drugim rečima uvek je $l < l'$, gde je sa l' označena sopstvena dužina tela. Efekat je poznat pod nazivom **kontrakcija dužine**.

6.4.4 Relativistički Doplerov efekat

Veoma važna posledica dilatacije vremena je pomeraj u frekvenciji svetlosti koju emituju atomi koji se nalaze u kretanju u odnosu na emitovanu od

strane istih atoma koji se nalaze u stanju mirovanja. Ovaj fenomen, poznat u fizici pod imenom Doplerov efekat, je ranije uveden za zvučne talase. Za slučaj takvih talasa, budući da su mehanički, efekti kretanja izvora zvuka u odnosu na sredinu kroz koju se prostire talas, se razlikuju od efekta kretanja posmatrača u odnosu na sredinu. Svetlosni talasi se međjutim razlikuju od zvučnih u tome što im za prostiranje nije neophodna sredina. U tom smislu u slučaju svetlosnih talasa nemamo način da napravimo razliku između kretanja izvora talasa i kretanja posmatrača. Već na osnovu ovoga se vidi da je neophodno izvršiti pažljiviju analizu uticaja kretanja izvora i prijemnika na razliku u frekvencijama emitovanog i primljenog signala, u relativističkom slučaju.

Pretpostavimo da svetlosni izvor, u njegovom sopstvenom sistemu reference S' , emituje svetlosne pulseve frekvencijom ν' , krećući se ka posmatraču, odnosno njegovom sistemu reference S , brzinom u . Kolika će biti frekvencija svetlosnih pulseva koji dolaze u oko posmatrača?

Postoje zapravo dva faktora koji doprinose Doplerovom efektu. Prvi je relativistički efekat dilatacije vremena: period između pulseva je veći u sistemu S pa je time i frekvencija manja u tom sistemu. Drugi uticaj je uobičajeni Doplerov efekat koji se javlja usled kretanja izvora pulseva-sukcesivni pulsevi treba da predju sve manje i manje rastojanje (ili sve veće i veće u slučaju da se izvor svetlosti udaljava-tada je brzina u negativna) da bi stigli do prijemnika. Usled toga se frekvencija pulseva koji stižu do posmatrača povećava (ili opada ako je u suprotno usmerena).



Slika 6.13: .

Neka je vreme između pulseva u sopstvenom sistemu reference izvora $\Delta t' = 1/\nu'$. Meren iz sistema reference S ovaj vremenski interval, usled dilatacije vremena, iznosi $\Delta t = \gamma \Delta t'$. To znači da, gledano iz sistema S , fotoni jednog pulsa predju rastojanja $c\Delta t = c\gamma \Delta t'$ do registracije narednog pulsa. U toku tog vremenskog intervala, između emitovanja dva sukcesivna pulsa, izvor pulseva prelazi rastojanje $u\Delta t = u\gamma \Delta t'$ ka sistemu reference S . Zaključujemo da su, u trenutku kada je emitovan naredni puls, njegovi

fotoni na rastojanju (gledano iz S) $c\Delta t - u\Delta t = c\gamma\Delta t' - u\gamma\Delta t'$ iza fotona prethodnog pulsa. Ovaj rezulta važi za sve susedne pulseve. Vreme između dolaska pulseva u oko posmatrača, ΔT , se dobija kada se to rastojanje podeli brzinom pulseva, c i iznosi

$$\Delta T = \frac{c-u}{c}\Delta t = \frac{c-u}{c}\gamma\Delta t' = \frac{1-\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Delta t'. \quad (6.22)$$

Na osnovu ovog izraza je frekvencija pulseva koje registruje posmatrač jednaka

$$\nu = \frac{1}{\Delta T} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}}\nu'. \quad (6.23)$$

Kako je ovaj izraz izveden za slučaj kada se izvor kreće ka posmatraču jasno je da je $\nu > \nu'$ i da nerelativistički doprinos ukupnom efektu (faktor $1/(1-u/c)$) dominira nad efektom dilatacije vremena. U tom slučaju se kaže da je svetlost doživela "plavi pomak", jer se u delu vidljivog spektra sa višim frekvencijama upravo nalazi plava svetlost. Nakon jednostavnih transformacija prethodna formula postaje

$$\nu = \sqrt{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}}\nu'. \quad (6.24)$$

Ukoliko se izvor svetlosti udaljava od nas, treba prosto promeniti znak brzine pa formule (6.23) i (6.24) imaju oblik

$$\nu = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}}\nu' = \sqrt{\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}}\nu'. \quad (6.25)$$

U ovom slučaju je frekvencija registrovane svetlosti manja od frekvencije emitovane a na to utiču oba efekta (i nerelativistički i relativistički). U tom slučaju svetlost doživljava "crveni pomak", obzirom da crvenoj boji u vidljivom spektru odgovaraju manje frekvencije.

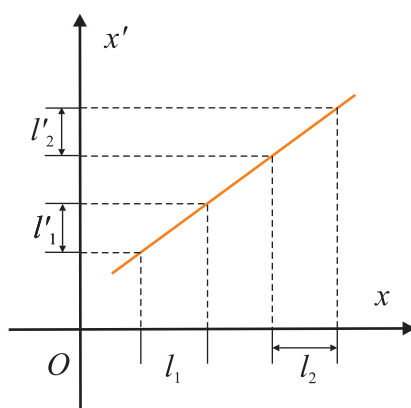
6.5 Lorencove transformacije

Na osnovu dosadašnjih analiza je postalo jasno da, Galilejev princip relativnosti, njegove transformacije, i klasičan zakon sabiranja brzina koji se

dobija na osnovu njih, su u suprotnosti sa eksperimentalnom činjenicom konstantnosti brzine svetlosti. To ukazuje na nužnost uvođenja novih transformacija koordinata za prelaz iz jednog inercijalnog sistema reference u drugi. One bi morale da važe za sve brzine³⁴ kretanja sistema, od $u = 0$ do $u = c$.

Posmatrajmo, kao i do sada, jedan koordinatni sistem S , sa osama xyz povezan sa Zemljom ("nepokretan" sistem reference), i drugi S' sa osama $x'y'z'$, povezan sa vagonom koji se kreće u pozitivnom smeru x ose ("pokretan" sistem reference) konstantnom brzinom u . U tom slučaju, kako duž osa y i z nema kretanja sistema, kao i u slučaju Galilejevih transformacija (2.40), njihova veza je trivijalna i glasi

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (6.26)$$



Slika 6.14:

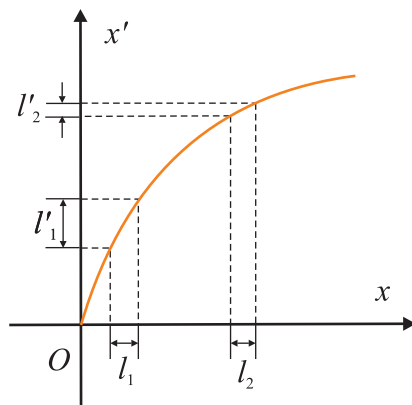
Oko određivanja funkcionalne veze preostalih koordinata (jedne prostorne i vremenske) od velike pomoći će nam biti činjenica da one mora da budu takve da ne promene osobine prostora i vremena pri prelasku iz jednog sistema u drugi. Osnovne osobine prostora su da je on homogen i izotropan a za vreme da je homogeno.³⁵ Iz ovoga sledi da transformacija koordinata (njihova funkcionalna veza) mora da bude linearna funkcija (slika 6.14). Kako se sa pomenute slike vidi, u tom slučaju dužina odsečka neće zavisiti od toga u kojoj oblasti prostora će se on nalaziti, iz $l_1 = l_2$ sledi $l'_1 = l'_2$.³⁶

³⁴Galilejeve transformacije važe samo za male brzine kretanja sistema.

³⁵Podsetimo se da ove činjenice imaju direktne veze sa zakonima održanja u mehanici.

³⁶Ovu činjenicu ne treba mešati sa efektom relativnosti dužine koji se odnosi na merenja jedne dužine jednog istog tela iz dva sistema reference koji su u međusobnom kretanju. U ovom slučaju je reč o merenju u sistemima reference u kojima tela miruju, dakle o određivanju sopstvenih dužina koje moraju biti iste u svim sistemima reference.

Ako bi transformacije bile nelinearne (slika 6.15), iz $l_1 = l_2$ bi sledilo da je $l'_1 \neq l'_2$, odnosno dužina odsečka bi zavisila od toga u kom delu prostora se on nalazi što bi narušilo homogenost prostora.



Slika 6.15:

Analogan zaključak važi i za vreme.

Prema tome, traženi zakon transformacije koordinata treba tražiti u obliku linearnih funkcija

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Mx + Nt, \quad (6.27)$$

gde su A, B, M i N konstante koje treba odrediti.

Ukoliko posmatramo kretanje neke materijalne tačke duž pravca x ose, gledano iz sistema reference S' , ona će u vremenskim trenucima t'_1 i t'_2 imati prostorne koordinate x'_1 i x'_2 , a njen pomeraj će biti

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = A(x_2 - x_1) + B(t_2 - t_1) = A\Delta x + B\Delta t. \quad (6.28)$$

Interval vremena za koji se on desio (takodje u sistemu S') je

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = M(x_2 - x_1) + N(t_2 - t_1) = M\Delta x + N\Delta t. \quad (6.29)$$

Na osnovu ovoga je sada (srednja) brzina posmatrane materijalne tačke koja se kreće duž x ose

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{A\Delta x + B\Delta t}{M\Delta x + N\Delta t}. \quad (6.30)$$

Kako je brzina te iste tačke u odnosu na Zemlju (gledano iz sistema S)

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (6.31)$$

veza brzine iste tačke, posmatrane iz dva sistema reference, je data izrazom

$$v' = \frac{Av + B}{Mv + N}. \quad (6.32)$$

Dobijen je opšti izraz koji mora da važi za sve brzine v i v' , pod pretpostavkom da između koordinata u dva sistema postoji veza oblika (6.27). Međutim, da bi izraz koji povezuje brzine bio od praktične važnosti, treba u njemu odrediti konstante A , B , M i N . U tu svrhu je zgodno razmotriti nekoliko posebnih slučajeva kretanja.

Neka materijalna tačka miruje u odnosu na vagon. U tom slučaju je $v' = 0$ dok je $v = u$, odnosno gledano sa Zemlje ona se kreće u odnosu na nju brzinom vagona. Imajući u vidu tu činjenicu, izraz (6.32) postaje

$$0 = \frac{Au + B}{Mu + N},$$

odakle je

$$B = -Au. \quad (6.33)$$

U slučaju kada tačka miruje u odnosu na Zemlju, $v = 0$, brzina njenog kretanja u odnosu na sistem S' je $v' = -u$. Ukoliko to zamenimo u jednačinu (6.32) i iskoristimo (6.33), dobijamo $-u = -Au/N$, odakle sledi da je

$$N = A. \quad (6.34)$$

Neka se sada umesto materijalne tačke kroz vagon kreće svetlosni talas. Na osnovu postulata konstantnosti brzine svetlosti, dobijamo

$$v' = v = c, \quad (6.35)$$

a ako to zamenimo u (6.33), iskoristimo (6.34) i (6.35), dobijamo $c = \frac{Ac - Au}{Mc + A}$, odakle je

$$M = \frac{Au}{c^2}. \quad (6.36)$$

Zamena dobijenih vrednosti za B , M i N u (6.32), dobija se izraz koji se naziva *relativistički zakon sabiranja brzina* (za kretanje duž x ose)

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \quad (6.37)$$

odakle se lako dobija da važi

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}. \quad (6.38)$$

Iz ovih dveju jednačina se vidi da se one razlikuju samo u predznaku brzine relativnog kretanja dva posmatrana sistema reference.

6.5.1 Lorencove transformacije

Relacije (6.27), u skladu sa analizama do sada izvršenim imaju oblik

$$x' = A(x - ut), \quad t' = A\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \quad (6.39)$$

odnosno, da bi nam relacije (6.27) postale potpuno pozante moramo da odredimo još i konstantu A .

Prema principu relativnosti, postoji potpuna ravnopravnost oba posmatrana sistema reference: možemo za nepokretan sistem reference uzeti sistem vezan za vagon, a za pokretan sistem vezan za Zemlju, u tom slučaju će se ovaj drugi sistem kretati, u odnosu na vagon, brzinom u . To znači da relacije koje opisuju veličine x i t , preko x' i t' imaju oblik

$$x = A(x' + ut'), \quad t = A\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right). \quad (6.40)$$

Kada, relacije (6.40) zamenimo u (6.39), dobija se

$$x' = A^2\left(x' + ut' - ut' - \frac{u^2}{c^2}x'\right), \quad (6.41)$$

odakle nakon skraćivanja x' dobijamo da je

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (6.42)$$

odnosno ona je jednaka ranije uvedenoj konstanti γ . Na osnovu ovoga, se dobijaju transformacije poznate pod nazivom Lorencove³⁷ u obliku

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (6.43)$$

odnosno

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (6.44)$$

One povezuju prostorno vremenske koordinate (x, y, z, t) i (x', y', z', t') jednog istog događaja posmatrano iz dva inercijalna sistema reference S i S' za slučaj kada se sistem S' kreće duž x ose konstantnom brzinom u .

³⁷Transformacije ovog oblika je 1890. godine dobio Hendrik A. Lorentz (1853-1928) u vezi elektromagnetskih pojava. Značaj Ajnštajna je u tome što je prvi uvideo njihovu važnost i dao im odgovarajuću interpretaciju u okviru specijalne teorije relativnosti.

6.5.2 Relativistički zakon sabiranja brzina

Neka je, kao i do sada S stacionarni sistem reference a S' sistem koji se u odnosu na njega kreće brzinom $\vec{u} = u\vec{e}_x$. Neka neko telo ima brzinu \vec{v} u odnosu na sistem S . Gledano iz sistema S' njegova brzina će biti \vec{v}' , a njena x' komponenta je

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}.$$

Prema jednačini (6.43), diferencijali dx' i dt' su

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \text{i} \quad dt' = \frac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

pa zamena u prethodnu jednačinu daje

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx - udt}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}{\frac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}}.$$

Kako je dx/dt u stvari v_x komponenta brzine tela u odnosu na sistem S , transformacioni izraz za v'_x komponentu brzine postaje

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}. \quad (6.45)$$

Na analogan način, polazeći od toga da je $v'_y = dy'/dt'$ i $v'_z = dz'/dt'$ se dobija da za preostale dve komponente brzine vav ze relacije

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}. \quad (6.46)$$

Različito izraza za transformaciju brzine po komponentama je izazvana činjenicom da se sistem S' kreće duž x ose u odnosu na sistem S . U slučaju da se kretanje odvija duž y ili z ose došlo bi do odgovarajuće izmene transformacionih relacija.

U slučaju da su i v_x i u manje brzine od brzine svetlosti c , imenioc u izrazu (6.45) postaje jednak jedinici, pa ovaj izraz postaje $v'_x = v_x - u$, što predstavlja Galilejev zakon za sabiranje brzina. U drugom graničnom slučaju kada je $v_x = u = c$, ova jednačina (6.45) daje

$$v'_x = \frac{c - u}{1 - \frac{cu}{c^2}} = \frac{c(1 - \frac{u}{c})}{1 - \frac{u}{c}} = c.$$

Iz ovog rezultata zaključujemo da ako se neko telo kreće brzinom c u odnosu na posmatrača koji se nalazi u sistemu S , onda obavezno ima istu brzinu i u odnosu na posmatrača koji se nalazi u sistemu S' , nezavisno od relativne brzine ova dva sistema.

Formule (6.45) i (6.46) omogućuju da, ako su poznate komponente brzine v_x , v_y i v_z tela u odnosu na sistem S , se dobiju njene komponente v'_x , v'_y i v'_z u odnosu na sistem S' . Obrunto, ukoliko su poznate komponente brzine u odnosu na sistem S' , komponente brzine u odnosu na sistem S glase³⁸

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}, \quad (6.47)$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv'_x}{c^2}}. \quad (6.48)$$

6.6 Osnovne kinematičke posledice Lorencovih transformacija

6.6.1 Dilatacija vremena

Neka se u koordinatnom početku ISR S' nalazi časovnik. On će pokazivati vreme t' a njegove koordinate u tom sistemu reference su $x' = y' = z' = 0$. Ako zamenimo te vrednosti za prostorno-vremenske koordinate u izraze za Lorencove transformacije (6.44) dobićemo koordinate časovnika gledano iz laboratorijskog sistema u odnosu na koji se sat, odnosno njegov sopstveni sistem reference S' kreće brzinom u : $x = ut, y = 0, z = 0$ (zato što se gledano iz S sat kreće duž x ose). Vremenska koordinata će biti

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \text{ili } t' = t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (6.49)$$

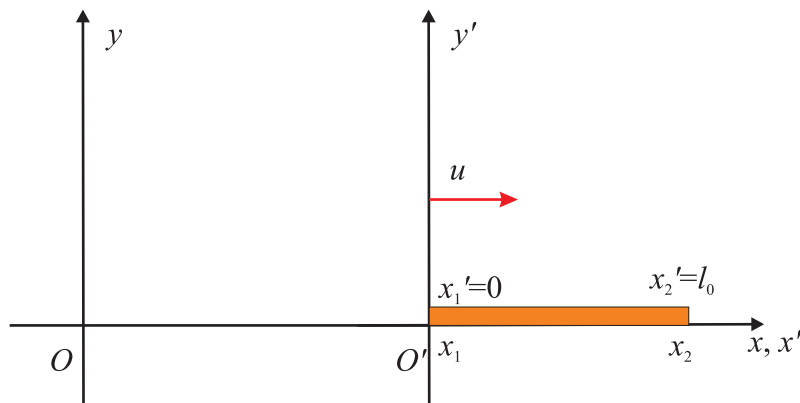
Reč je zapravo o relacijama koje predstavljaju vezu izmedju intervala vremena koje pokazuju sat u laboratorijskom i sat u pokretnom sistemu reference. Kao što smo i ranije zaključili, vreme koje pokazuje sat u sistemu S' u kome miruje, je manje od vremena koje je izmereno u sistemu S . *Vreme t' koje pokazuje sat u sistemu reference u kome miruje, se naziva **sopstveno vreme**.*³⁹

³⁸Ove formule se dobijaju kada se zamene mesta primovanim i neprimovanim komponentama u relacijama 6.45) i (6.46) uz zamenu brzine u sa $-u$.

³⁹Konkretna konstrukcija satova je nebitna i ne utiče na ovaj efekat, jer je reč o tome da vremenski intervali više nisu invarijantni za različite sisteme reference.

6.6.2 Kontrakcija dužine

Neka je za štap, koji se u pravcu svoje ose simetrije kreće brzinom u u odnosu na sistem S , vezan sistem S' (slika 6.16). Interesantno je uporediti



Slika 6.16:

dužine štapa, merene iz različitih inercijalnih sistema reference. Veoma je bitno da uočimo kako se ona dobija. Naime, odrede se koordinate krajeva štapa u **jednom istom trenutku** pa se napravi njihova razlika. Dužina štapa merena u njegovom sopstvenom sistemu reference S' , se naziva **sopstvena dužina** i obično označava sa l_0 . Neka se jedan kraj štapa nalazi u koordinatnom početku ($x'_1 = 0$), a drugi na mestu sa koordinatom $x'_2 = l_0$. Iz Lorencovih transformacija (6.43) se, za krajeve štapa, gledano iz sistema S , dobija: $x_1 = ut$ i $x_2 = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} + ut$. Razlika ovih dveju koordinata predstavlja dužinu štapa u sistemu S

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (6.50)$$

Pokretni štap je prema ovoj relaciji kraći od štapa koji se nalazi u stanju mirovanja. Kao što će biti pokazano, ovaj zaključak je u skladu sa činjenicom da, u relativističkoj mehanici (odnosno za tela koja se kreću velikim brzinama), invarijanta veličina nije prostorno rastojanje već interval u prostor-vremenu.

6.7 Interval

Vratimo se za trenutak u nereleativističku mehaniku i podsetimo se kako se određuje kvadrat rastojanja Δl dve tačke sa koordinatama (x_1, y_1, z_1)

i (x_2, y_2, z_2) . Obzirom da je prostor klasične mehanike ravan, primenom pitagorine teoreme se dobija

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (6.51)$$

gde je $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ i $\Delta z = z_2 - z_1$.⁴⁰ Koordinate ove dve tačke u principu mogu da budu koordinate dva događaja, jednog koji se desio u t_1 i drugog koji se desio u t_2 , pri čemu je vremenski interval između njih $\Delta t = t_2 - t_1$. Uvek kada pominjemo koordinate nekog događaja moramo da naglasimo u odnosu na koji sistem ih merimo. Neka to bude neki sistem S koji ćemo smatrati laboratorijskim odnosno "nepokretnim". Gledano iz nekog drugog inercijalnog sistema reference S' , koji se u odnosu na laboratorijski kreće uniformno brzinom u , prostorne i vremenske koordinate ova dva događaja će biti (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) i (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) , a kvadrat prostornog rastojanja

$$\Delta l'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \quad (6.52)$$

dok je vremenski interval $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Kao što je diskutovano kada je bilo reči o inercijalnim sistemima u nerelativističkoj mehanici, veza ova dva inercijalna sistema se ostvaruje Galilejevim transformacijama (2.39) koje ih ostavljaju invarijantnim. Relativno lako se proverava da zaista važi da je $\Delta l' = \Delta l$, za dva sistema reference koja su povezana Galilejevim transformacijama, dok je za vremenski interval stvar trivijalna obzirom da je vreme u mehanici malih brzina apsolutno, pa važi $\Delta t' = \Delta t$. Kraće rečeno vremenski intervali i prostorna rastojanja u nerelativističkoj mehanici ne zavise od toga iz kog inercijalnog sistema reference se mere.

Kada je reč o telima koja se kreću velikim brzinama, videli smo da ni prostorna rastojanja (dužine) a ni vremenski intervali nisu invarijantni (usled relativističkih efekata kontrakcije dužine i dilatacije vremena) i da je veza dva inercijalna sistema reference data Lorencovim transformacijama. Postavlja se logično pitanje da li možda i u ovom slučaju postoji neka veličina koja je invarijantna, odnosno koja neće zavistiti od toga iz kog inercijalnog sistema reference se određuje.

Obzirom da je do sada postalo jasno da je vremenska koordinata ravnopravna i neodvojiva od prostornih, kao i to da su koordinate dva događaja (x_1, y_1, z_1, ct_1) i (x_2, y_2, z_2, ct_2) (od sada pa na dalje će umesto vremena biti korišćen proizvod njega i brzine svetlosti u vakuumu obzirom da ima dimenzije dužine), logično je pokušati zadavanje traženog izraza u obliku

$$\Delta s^2 = \Delta l^2 + c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + c^2 \Delta t^2,$$

⁴⁰Samo rastojanje je odgovarajući kvadratni koren $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

ali kao što je relativno lako proveriti, ovaj izraz nije invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije, odnosno nema istu vrednost za sve inercijalne posmatrače. Pokazuje se, međutim da izraz

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (6.53)$$

ostaje invarijantan pri prelazu iz jednog inercijalnog sistema u drugi. Ovaj izraz predstavlja *kvadrat invarijantnog intervala*.⁴¹

Napomenio na kraju još jednu veoma važnu stvar a to je da dok je izraz (6.51) uvek pozitivan, izraz za kvadrat intervala u specijalnoj teoriji relativnosti (6.53), obzirom na oblik, može da bude pozitivan, negativna i nula!

6.7.1 Tipovi intervala

Kalo interval (6.53) može da ima tri oblasti vrednosti, potrebno je posebno ih proanalizirati

Slučaj 1: $\Delta s^2 > 0$

Ovo je takozvani **vremenski** tip intervala, obzirom da u njegovom izrazu dominira prvi sabirak koji je u vezi sa vremenskim intervalom između dva događaja. Kako je interval invarijantan, ako je interval vremenskog tipa u jednom inercijalnom sistemu reference onda će on biti takav i u svim ostalim. Naravno, merenja iz ostalih inercijalnih sistema daju različite vrednosti za $\Delta t'$ i $\Delta l'$ ali je njihov međusobni odnos uvek takav da je $c^2 \Delta t'^2 > \Delta l'^2$. U takve sisteme spada i sistem u kome se događaji dešavaju na istom mestu u prostoru, odnosno za koji je $\Delta l' = 0$. Tada je

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2,$$

a vreme t' izmereno u njemu se naziva *sopstveno vreme*. Ono je sa vremenom iz sistema S , obzirom na invarijantnost Δs , povezano na sledeći način

$$c^2 \Delta t'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2. \quad (6.54)$$

⁴¹Naglasimo da izbor invarijantnog intervala nije potpuno jednoznačan jer ako je on invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije, invarijantan je i izraz $-c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$.

Slučaj 2: $\Delta s^2 < 0$

Ovakvi intervali, obzirom na dominaciju prostornog dela, $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, u njima u odnosu na vremenski deo $c^2 \Delta t^2$, se nazivaju **prostornim**. Kao i u prethodnom slučaju, obzirom da je reč o invarijantnoj veličini, ona je ista u svim inercijalnim sistemima reference. Kako i Δt i Δl mogu da imaju bilo koje vrednosti uz jedini uslov da je $\Delta s^2 < 0$, postoji sistem reference u kome su događaji istovremeni, to jesto za koji važi $\Delta t' = 0$. U tom slučaju važi, obzirom na invarijantnost Δs^2

$$\Delta s'^2 = -\Delta l^2$$

a rastojanje ova dva događaja u tom sistemu S' u kome su istovremeni, naziva se *sopstveno rastojanje*.

Slučaj 3: $\Delta s^2 = 0$

Ovakvi intervali se nazivaju **homogeni** ili **svetlosni**. Za njih je $c \Delta t = \Delta l$ i to važi u svim inercijalnim sistemima reference. Odnosno, ukoliko su dva događaja razdvojena svetlosnim tipom intervala, ne postoji inercijalni sistem reference u kojem se oni dešavaju na istom mestu ili istovremeno.

6.7.2 Primeri primene invarijantnog intervala**Dilatacija vremena**

Neka se sistem S' kreće brzinom $\vec{u} = u\vec{e}_x$ u odnosu na S . Posmatrajmo dva događaja koja se dešavaju na istom mestu u S' , npr. u koordinatnom početku, razdvojena vremenskim intervalom $\Delta t'$. Koordinate događaja u ova dva sistema reference su (izostavićemo y i z koordinate jer su one iste za oba događaja obzirom da se kretanje odvija duž x ose):

$$\text{u } S': \quad (x', t') = (0, \Delta t')$$

$$\text{u } S: \quad (x, t) = (u\Delta t, \Delta t).$$

Zbog invarijantnosti intervala sledi relacija

$$c^2 \Delta t'^2 - 0 = c^2 \Delta t^2 - u^2 \Delta t^2$$

odakle se dobija

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

6.8 Prostor Minkovskog

Prostor nerelativističke fizike (fizički prostor u kome se odigrava kretanje tela) je primer euklidskog prostora. Taj prostor je ravan⁴². U jednom takvom prostoru, kvadrat rastojanja dve beskonačno bliske tačke je zadat izrazom analognom izrazu (6.51)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (6.55)$$

Iz ove relacije se mogu izvući sve neophodne informacije o prostoru u kome se odvija kretanje. Kako su najvažnije vezane za merenje distanci u njemu ona se naziva *metrikom*⁴³ datog prostora. Uočimo takodje da je metrika prostora jednaka skalarnom proizvodu diferencijala vektora položaja⁴⁴ $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ sa samim sobom. Iz oblika metrike se takodje može zaključiti da li ona odgovara prostoru koji je ravan ili zakrivljen. Naime, ukoliko je metrika oblika (6.55), odnosno uz diferencijale dx , dy i dz stoje konstante to znači da je posmatrani prostor ravan. U slučaju da se u metrici uz pomenute diferencijale nalaze funkcije promenljivih x, y, z , prostor je zakrivljen. Situacija da je dl^2 jednako zbiru dx^2 , dy^2 i dz^2 odgovara činjenici da je prostor euklidski.

Postupajući na isti način i u slučaju prostor-vremena specijalne teorije relativnosti, polazeći od izraza (6.53), za njegovu metriku se dobija

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (6.56)$$

Kako uz diferencijale nezavisno promenljivih stoje konstante, prostor specijalne teorije relativnosti je ravan. Obzirom da u metrici imamo i negativne kvadrate diferencijala promenljivih metrika nije euklidska već se naziva *pseudoeuklidskom*.

Prostor sa ovakvim osobinama je u matematici bio poznat i pre formulisanja specijalne teorije relativnosti pod nazivom *prostor Minkovskog*.⁴⁵

6.8.1 Grafici u prostor-vremenu

Kao što smo videli prostor-vreme specijalne teorije relativnosti je ustvari prostor Minkovskog. Kao i u drugim prostorima (euklidskom na primer) i u

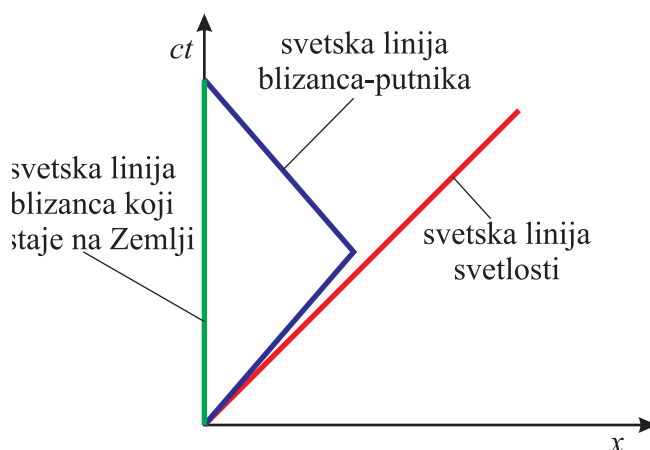
⁴²Kriterijum za određivanje toga da li je prostor ravan ili zakrivljen je provera da li za svaki trougao važi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (α, β i γ su uglovi trougla), odnosno za svaku kružnicu $O/r = 2\pi$, gde je O obim a r poluprečnik kružnice.

⁴³Precizniji naziv je *metrička forma* prostora.

⁴⁴Ovaj vektor prikazuje infinitezimalno pomeranje posmatrane materijalne tačke.

⁴⁵Naziv je dobio po imenu matematičara Hermana Minkovskog (18.-19..).

njemu je od velike važnosti prikazivanje funkcionalnih zavisnosti graficima. Pre svega je od interesa prikazati zavisnost pozicije tela prikazane koordinatama x, y, z od vremena. Kako je reč o četvorodimenzionalnom prostoru taj zadatak je na prvi pogled nemoguć jer sve četiri koordinatne ose bi trebalo da budu međusobno pod pravim uglom. Medjutim ako za početak posmatramo samo kretanje koje se odvija duž x ose onda y i z osu i ne moramo da prikazujemo, tako da će nam za predstavljanje događaja biti dovoljen dve ose.

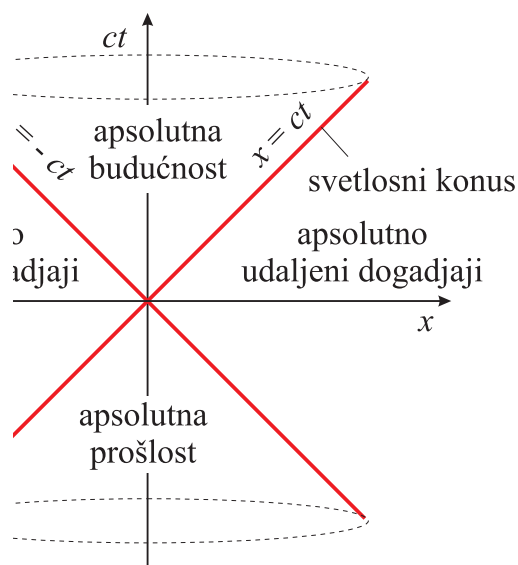


Slika 6.17: Paradoks blizanaca prikazan na grafiku u prostor-vremenu. Blizanac koji ostaje ima svetsku liniju duž vremenske ose. Putanija blizanca koji je putovao je svetska linija koja menja smer.

Za konstrukciju prostorno-vremenskih grafika je ordinatna osa obično vremenska (u stvari ct) osa, dok je apscisna osa prostorna koordinata x . Svaka linija koja se nacrtava na takvom grafiku se naziva **svetska linija**.

Paradoks blizanaca je prikazan na takvom grafikonu na slici 6.17. U početnom trenutku vremena svetske linije oba brata se poklapaju jer se nalaze na istom mestu u prostor-vremenu. Kada jedan od njih ode na put, njegova svetska linija se udaljava od linije brata blizanca koja se, obzirom da on ostaje na istom mestu (ne menja mu se x koordinata), poklapa sa ct osom. U momentu kada se oni opet sastanu, obzirom da se tada opet nalaze na istom mestu, svetske linije će im se preseći. Da bi se to desilo, svetska linija blizanca koji putuje mora da bude izlomljena, odnosno kada krene nazad ka Zemlji, ona menja nagib prema x osi.

Svetska linija svetlosnog pulsa je dijagonala u prostor-vremenu, odnosno linija sa nagibom od 45° stepeni koja ide kroz prvi ili drugi kvadrant u



Slika 6.18:

zavisnosti od toga da li svetlost ide u pozitivnom ili negativnom smeru x ose (prave čije su jednačine $x = \pm ct$). Sve svetske linije mogućih događaja sa blizancima, obzirom da njihova brzina mora da bude manja od brzine svetlosti, se nalaze između ove dve svetske linije svetlosti. Ako ih zarotiramo oko ct ose dobijamo takozvani "svetlosni konus" (slika 6.18).

U vezi sa tom činjenicom, sve tačke koje se nalaze u svetlosnom konusu u pozitivnom delu vremenske ose pripadaju takozvanoj apsolutnoj budućnosti, a one koje su u njenom negativnom delu apsolutnoj prošlosti. Tačke koje su van svetlosnog konusa su apsolutno udaljene jer u toj oblasti nije moguće kretanje, obzirom da bi se odvijalo brzinom većom od brzine svetlosti u vakuumu.

6.8.2 Vektori u prostoru Minkovskog

Kao što je već naglašeno, izraz (6.55) može da se predstavi kao skalarni proizvod vektora $d\vec{r}$ samim sobom, odnosno

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (6.57)$$

što je izraz koji sledi na osnovu osobine da je skalarni proizvod dva vektora \vec{A} i \vec{B} definisanih preko dekartovih koordinata $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z = (A_x, A_y, A_z)$ i $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z = (B_x, B_y, B_z)$ jednak

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. Obratimo pažnju da je skalarni proizvod jednak zbiru proizvoda odgovarajućih komponenti vektora u datom euklidskom prostoru, odnosno da se predznaci faktora $A_x B_x$, $A_y B_y$ i $A_z B_z$ poklapaju sa predznacima sabiraka dx^2 , dy^2 i dz^2 u metrici (6.55).

Na osnovu ovoga se nameće zaključak da bi skalarani proizvod dva 4-vektora sa koordinatama $A = (A_0, A_x, A_y, A_z)$ i $B = (B_0, B_x, B_y, B_z)$ (gde su indeksom 0 označene vremenske komponente vektora), u prostoru Minkovskog trebalo definisati na sličan način, odnosno poštujući predznake koji se pojavljuju u metrici (6.56)

$$AB = A_0 B_0 - A_x B_x - A_y B_y - A_z B_z. \quad (6.58)$$

Na osnovu ovog izraza, ukoliko definišemo 4-vektor položaja kao $R = (ct, x, y, z)$, kvadrat njegovog intenziteta bi bio

$$R^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

i očigledno je invarijantna u odnosu na Lorencove transformacije. Kvadrat intenziteta diferencijala vektora položaj će prema tome biti

$$dR^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

odnosno, kao što se i očekuje, svodi se na metriku (6.56)

6.8.3 4-vektor i brzine

Kako je brzina u njutnovo mehanici, odnosno u euklidskom prostoru definisana izrazom (1.12) odnosno (1.13)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$$V = \frac{dR}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{dx}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{dz}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{dy}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$V^2 = c^2$$

6.9 Relativistička raketa

Kretanje rakete, kao tela promenljive mase je već ranije obradjeno ali za slučaj kada su njene brzine kretanja male. Ukoliko je reč o relativističkim brzinama prirodno je očekivati da će i odogvarajuće jednačine biti različite. Pozabavimo se kretanjem rakete u odsustvu neke spoljnje sile. Kao što je pokazano, u tom slučaju važi jednačina kretanja

$$m d\vec{v} + (\vec{v} - \vec{v}_g) dm = 0, \quad (6.59)$$

odnosno,

$$m dv + (v - v_g) dm = 0, \quad (6.60)$$

koja kada se projektuje na x osu, uz uvođenje brzine relativnog kretanja gasa u odnosu na raketu ($v_r = v_g - v$), može da se napiše u obliku

$$\frac{dm}{v} = -\frac{1}{v_r} dv,$$

pogodnom za integraljenje. Integracija u granicama m_0 do m i 0 do v , daje

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{v}{v_r},$$

odakle se dobija (nerelativistička) jednačina Ciolkovskog

$$m = m_0 e^{-\frac{v}{v_r}}. \quad (6.61)$$

Ukoliko su brzine kretanja rakete međjutim uporedive sa brzinom svetlosti, susrećemo se sa dva problema. Prvi je što u izrazu (6.60) moramo da zamenimo m sa $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$, a drugi što moramo da vodimo računa o relativističkom slaganju brzina, usled koga $v_r \neq v_g - v$.

Prva izmena dovodi do sledeće modifikacije posmatrane jednačine

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dv + (v - v_g) d \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0. \quad (6.62)$$

Druga se odnosi na činjenicu da je brzina gasova rakete, posmatrano iz sistema reference Zemlje (pretpostavka je da je za nju vezan ISR S , a za raketu S') data izrazom $v_x = (v'_x + v)/(1 + vv'_x/c^2)$, gde je $v'_x = -v_r$, ukoliko pretpostavimo da se raketa kreće u pozitivnom smeru x ose, što znači da će smer gasova biti suprotan. Gledano iz S dakle važi

$$v_g = \frac{v - v_r}{1 - \frac{vv_r}{c^2}},$$

pa će tražena razlika $v - v_g$ biti

$$v - v_g = v - \frac{v - v_r}{1 - \frac{vv_r}{c^2}} = \frac{v_r(1 - \frac{v^2}{c^2})}{1 - \frac{vv_r}{c^2}}$$

Takodje je potrebno izračunati sledeći diferencijal

$$d \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{dm(1 - \frac{v^2}{c^2}) + m \frac{v dv}{c^2}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}.$$

Zamena poslednja dva izraza u jednačinu (6.62) daje

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dv + \frac{v_r(1 - \frac{v^2}{c^2})}{1 - \frac{vv_r}{c^2}} \frac{dm(1 - \frac{v^2}{c^2}) + m \frac{v dv}{c^2}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = 0, \quad (6.63)$$

što nakon deljenja sa m i množenja sa $1 - vv_r/c^2$ dovodi do

$$dv(1 - \frac{vv_r}{c^2}) + v_r \frac{dm}{m} (1 - \frac{v^2}{c^2}) + \frac{vv_r}{c^2} dv = 0, \quad (6.64)$$

što nakon elementarnih transformacija konačno daje traženu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dv}{v^2 - c^2} = \frac{v_r^2}{c^2} \frac{dm}{m}. \quad (6.65)$$

Da bi bilo lakše integraliti prethodni izraza pogodno ga je transformisati u

$$\frac{1}{2c} \frac{dv}{v - c} - \frac{1}{2c} \frac{dv}{v + c} = \frac{v_r^2}{c^2} \frac{dm}{m}. \quad (6.66)$$

Nakon integracije u istim granicama kao i u nerelativističkom slučaju, dobija se

$$\frac{1}{2c} \ln \frac{v - c}{v + c} = \frac{v_r}{c^2} \ln \frac{m}{m_0},$$

odakle sledi jednačina Ciolkovskog za relativističku raketu

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \right)^{c/(2v_r)}. \quad (6.67)$$

Ukoliko je raketa ultrarelativistička ($v_r = c$), ova jednačina prelazi u

$$\frac{m_0}{m} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}. \quad (6.68)$$

6.10 Primeri i zadaci

1. Foton se kreće u sistemu S' (koji se kreće u odnosu na sistem S konstantnom brzinom u duž x ose) brzinom $v'_x = c$. Kolika je njegova brzina merena iz sistema S .

◇ Na osnovu formule *,*

$$v_x = \frac{c + u}{1 + uc/c^2} = c$$

2. Foton se, gledano iz sistema reference S kreće duž y ose brzinom c . Kolika su komponente a koliki intenzitet njegove brzine merene u sistemu S' ?

◇ U sistemu S , komponente brzine fotona su $v_x = 0$, $v_y = c$ i $v_z = 0$, dok se intenzitet brzine može dobiti iz

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 0 + c^2 + 0 = c^2$$

i iznosi $v = c$. Komponente brzine fotona merene iz sistema S' su

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = -u, \quad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} = c\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad v'_z = 0$$

Kvadrat intenziteta brzine fotona, u sistemu S' je, prema tome

$$v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 = (-u)^2 + c^2 + 0 = u^2 + (c\sqrt{1 - u^2/c^2})^2 + 0 = c^2,$$

što znači da je njen intenzitet takodje jednak c .

3. Svemirski brod α se kreće brzinom $0,9c$ u odnosu na Zemlju. Svemirski brod β prolazi relativnom brzinom $0,5c$ kraj njega. Kolika je brzina svemirskog broda β u odnosu na Zemlju?

◇ Ukoliko sistem S vežemo za Zemlju a S' za svemirski brod α (x ose ova dva sistema su orijentisane duž pravca kretanja brodova), onda će njegova brzina u odnosu na Zemlju biti $u = 0,9c$. Sa druge strane, brzina broda β je data u odnosu na brod α pa se može zapisati kao $v'_x = 0,5c$. Brzina broda β u odnosu na Zemlju je, prema tome,

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{0,5c + 0,9c}{1 + 0,5c \cdot 0,9c/c^2} = 0,9655c.$$

4. Dve čestice se kreću u susret jedna drugoj brzinom $\pm 0,9c$ mereno iz nekog sistema reference. Kolika je brzina jedne čestice u odnosu na drugu?

◇ Navedeni podaci o brzinama su dati u odnosu na neki inercijalni sistem reference S' čiju x' osu možemo da postavimo u pravcu kretanja čestica tako da će njihove brzine biti $v'_{1x} = 0,9c$ i $v'_{2x} = -0,9c$. Kako je potrebno odrediti brzinu jedne čestice u odnosu na drugu, potrebno je da definišemo novi referentni sistem koji će biti vezan za jednu od njih i kretati se zajedno sa njom. Ukoliko taj novi sistem S vežemo za česticu koja se, u odnosu na S' kreće brzinom $-0,9c$, to znači da će istovremeno njegova brzina u odnosu na sistem S biti upravo tolika ($-0,9c$). Gledano pak iz njega, brzina sistema S' će biti ista po intenzitetu ali sa suprotnim znakom, odnosno $u = 0,9c$, gde je sa u , kao i do sada, označena brzina kretanja sistema S' u odnosu na S . Na osnovu ovoga je tražena brzina

$$v_{1x} = \frac{v'_{1x}}{1 + uv'_{1x}/c^2} = \frac{0,9c + 0,9c}{1 + 0,9c \cdot 0,9c/c^2} = \frac{1,8c}{1,81} = 0,994c.$$

5. Dva tela se kreću brzinama $v_1 = 3/4c$ i $v_2 = 8/9c$. Odrediti brzinu drugog tela u odnosu na prvo ako se tela kreću u istom smeru. Kolika je njegova brzina ukoliko se tela kreću u suprotnim smerovima.

◇ Sistem reference S' ćemo vezati za prvo telo pa će njegova brzina biti $u = v_1$, dok će tražena brzina drugog tela u odnosu na prvo, v' , biti

$$v' = \frac{v_2 - u}{1 - uv_2/c^2} = \frac{5}{12}c.$$

Ukoliko pretpostavimo da se prvo telo kreće u pozitivnom smeru x ose, a drugo u suprotnom, tražena brzina je

$$v' = \frac{-v_2 - u}{1 - u(-v_2)/c^2} = -\frac{59}{60}c.$$

6. Putnik je krenuo sa Zemlje kosmičkim brodom brzinom $0,8c$. On šalje poruku na Zemlju u obliku dva svetlosna impulsa koji slede jedan za drugim u intervalu $10s$, po časovniku sa broda. Koliki je vremenski interval između dolazaka impulsa na Zemlju meren po časovniku na Zemlji?

◇

7. Relativistička čestica kreće se brzinom v' u odnosu
8. Dužina svemirskog broda, merana u sopstvenom sistemu reference iznosi 120 m, dok mu je prečnik 20 m. Kolika mu je dužina i prečnik, mereno sa stanovišta posmatrača u odnosu na koga se brod kreće brzinom $0,99c$? Koliku će dužinu istog broda izmeriti drugi posmatrač u odnosu na koga se brod kreće brzinom $0,100c$.

◊ Prema jednačini (6.21), dužina koju će izmeriti posmatrač je

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 120m \sqrt{1 - \frac{(0,99c)^2}{c^2}} = 17m.$$

Prečnik svemirskog broda ostaje isti obzirom da se kretanje odvija pod pravim uglom u odnosu na njega.

Primenom iste formule se sa dužinu broda u odnosu na drugog posmatrača dobija 119,4 m.

9. Automobil je dugačak 4,3 m kada je parkiran. Koliko će biti dugačak za autostopera pored koga prolazi brzinom od 30 m/s?

◊ Autostoper registruje da se dužina kola kontrahuje na dužinu

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx l_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

gde je, obzirom na malu vrednost odnosa v^2/c^2 , izvršen razvoj binoma $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ uz ograničenje na prva dva sabirka. Automobil je za autostopera kraći za razliku $l_0 - l$,

$$l_0 - l \approx \frac{l_0}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{4,3m}{2} \frac{(3 \cdot 10^1 m/s)^2}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} = 2,2 \cdot 10^{-14} m.$$

koja ima vrednost mnogo manju od veličine atoma.

10. Elementare čestice koje se nazivaju mioni (nose istu količinu naelektrisanje kao elektron, ali su oko 200 puta masivnije) nastaju u višim slojevima atmosfere kada kosmičko zračenje pogodi molekule vazduha. Mioni imaju srednje vreme života, u sopstvenom sistemu reference, $\tau' = 2,2\mu s$ (nakon toga se raspadaju na elektron i odgovarajuće neutrine).

Pretpostavimo da je mion nastao na visini od 50 km iznad površine Zemlje i da se kreće ka njoj brzinom $0,9998c$, da se (gledano iz njegovog

sistema reference) raspada tačno nakon $2,2\mu$ s kao i da se ne sudara ni sa čim na svom putu ka Zemlji. Da li će uspeti da stigne do Zemlje a da se ne raspadne?

◇

11. Dva voza, A i B , svaki sopstvene dužine l , kreću se u istom pravcu i smeru. Brzina voza A je $4c/5$, a voza B $3c/5$. Voz A polazi nakon polaska voza B . Koliko dugo će, gledano iz sistema reference vezanog za Zemlju, trebati vozu A da pretekne voz B od momenta kada ga je sustigao?

◇ Primitimo prvo da dužine vozova, gledano sa Zemlje, nisu jednake već da iznose $l_A = l/\gamma_A$ i $l_B = l/\gamma_B$ gde su sa γ_A i γ_B označeni γ faktori, pridruženi vozovima A i B u odnosu na sistem reference C , vezan za Zemlju. Direktna račun pokazuje da su ova dva faktora jednaka $5/3$ i $5/4$, respektivno. Usled toga su, dužine vozova, u sistemu reference vezanom za Zemlju $l_A = 3l/5$ i $l_B = 4l/5$. Ukoliko sa Δt označimo vreme koje će biti potrebno vozu A (brži je od voza B) da nakon sustizanja voza B izvrši njegovo preticanje, putevi koje će pri tome preći ova dva voza iznose

$$s_B = v_B \Delta t, \quad s_A = v_A \Delta t,$$

pri čemu će put koji je prešao voz A biti veći od puta koji je prešao voz B za njihovu ukupnu dužinu, gledano iz sistema reference vezanom za Zemlju. Drugim rečima važiće relacija $s_A = s_B + l_A + l_B$. Na osnovu ovih relacija se dobija

$$v_A \Delta t = v_B \Delta t + l_A + l_B,$$

odakle se za traženo vreme dobija

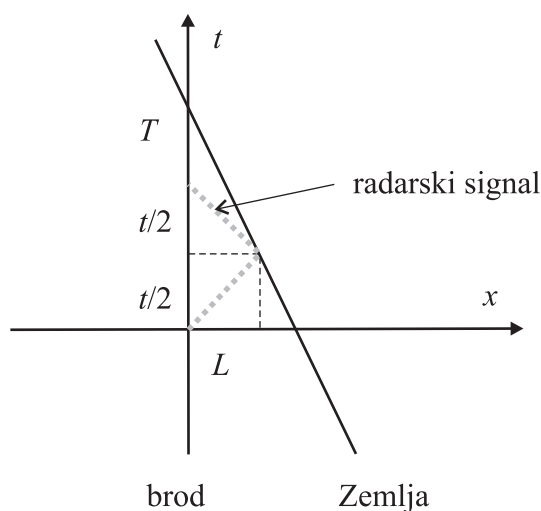
$$\Delta t = \frac{l_A + l_B}{v_A - v_B} = \frac{\frac{3l}{5} + \frac{4l}{5}}{\frac{4c}{5} - \frac{3c}{5}} = \frac{7l/5}{c/5} = \frac{7l}{c}.$$

12. Voz, sopstvene dužine L , se kreće brzinom $5c/13$ u odnosu na prugu. Lopta je bačena sa zadnje strane voza ka prednjoj brzinom od $c/3$ u odnosu na voz. Koliki put će preći pri tome i koliko joj je vremena potrebno za njega, mereno iz sistema reference vezanog za Zemlju?

◇

13. Svemirski brod se približava Zemlji brzinom $v = 4c/5$. Radarski signal emitovan sa broda, pogadja Zemlju i vraća se nazad na brod posle 12 dana. Koliko će još vremena proteći, mereno u svemirskom brodu, izmedju prijema radarskog signala i dolaska na Zemlju, pretpostavljajući da će se brod i dalje kretati istom brzinom? Radarski signal, koji je emitovao radar sa broda, registrovan je i na Zemlji. Koliki će vremenski interval proteći izmedju registrovanja tog signala i dolaska svemirskog broda na nju?

◇ Zadatak je zgodno rešavati u spostvenom sistemu reference broda. Odgovarajući prostorno-vremenski grafik je prikazan na slici 6.19



Slika 6.19:

Ako sa t označimo vreme koje je potrebno radarskom signalu da dodje do Zemlje, odbije se i vrati nazad na brod a sa L rastojanje Zemlje od broda u momentu kada je radarski signal došao na nju, važi

$$2L = ct,$$

jer se signal kreće brzinom svetlosti. Kako se Zemlja kreće brzinom $v = 4c/5$, u sistemu reference vezanom za svemirski brod, ona je morala da predje rastojanje izmedju nje i broda (L) za preostalo vreme do njihovog susreta $T + t/2$, gde je sa T označeno vreme izmedju dolaska radarskog signala na brod i njegovog prispeća na Zemlju,

$$v \left(T + \frac{t}{2} \right) = L.$$

Iz ove dve jednačine se za traženo vreme T (mereno u brodu) dobija

$$T = \frac{t}{2} \left(\frac{c}{v} - 1 \right) = \frac{t}{8},$$

odakle ono iznosi 1,5 dan. U sopstvenom sistemu reference broda je vreme od momenta pristizanja signala na Zemlju do dolaska broda na Zemlju $\Delta\tau = T + t/2 = 5t/8$ a u "pokretnom" sistemu reference vezanom za Zemlju, usled dilatacije vremena

$$\Delta\tau' = \Delta\tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left(T + \frac{t}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{5t}{8} \frac{3}{5} = \frac{3}{8}t,$$

i iznosi 4,5 dana.

14. Astronaut kreće na putovanje svemirskim brodom ubrzavajući ga konstantnim ubrzanjem α koje, da bi putovanje bilo prijatnije, iznosi $9,8 \text{ m/s}^2$. Udaljenost svemirskog broda sa vremenom, merena sa Zemlje, je data izrazom

$$x = \sqrt{c^2 t^2 + \frac{c^4}{\alpha^2}} - \frac{c^2}{\alpha}.$$

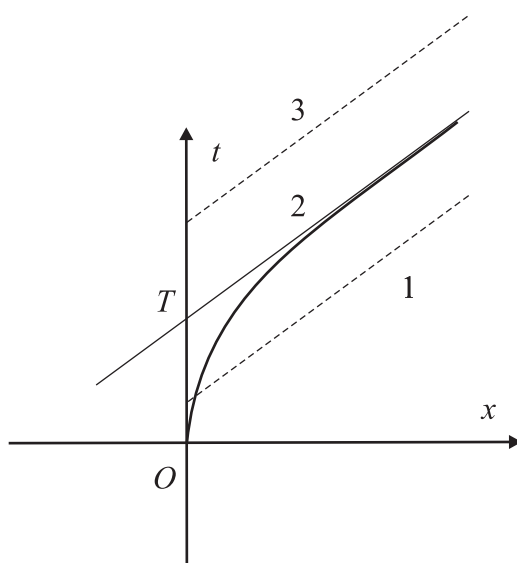
U intervalima od po 24 sata, sa Zemlje se u pravcu leta broda šalju radio signali. Koliko njih će biti registrovano na brodu?

◇ Obzirom na karakter kretanja broda, kada $t \rightarrow \infty$, njegova svetska linija se asimptotski približava svetskoj liniji svetlosti (linija broj 2 na prostorno-vremenskom dijagramu 6.20)

$$x = ct - \frac{c^2}{\alpha}.$$

Ta svetska linija preseca Zemljinu svetsku liniju (koja je u njenom sistemu reference određena sa $x = 0$) u vremenskom trenutku $T = c/\alpha$ merenom od momenta polaska broda na put. Ma koji radio signal emitovan pre ovog vremenskog trenutka (za koji važi $t < T$), biće registrovan na brodu (jer će uspeli da ga sustigne - primer je signal predstavljen linijom 1 na dijagramu koja seče svetsku liniju broda). Svi radio signali, emitovani nakon vremena $T = t$, nikada neće sustići brod jer se njihove svetske linije ne seku (linija 3 na primer). Iz tog razloga će broj signala koje je astronaut registrovao biti

$$N = \frac{T}{t_0} = \frac{c}{\alpha t_0},$$



Slika 6.20:

gde je $t_0 = 24$ h interval između dva signala. Zamena brojevanih vrednosti daje

$$N = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 354.$$

15. Inercijalan sistem reference S' se kreće u odnosu na inercijalan sistem reference S brzinom $\vec{u}_1 = u_1 \vec{e}_x$. Inercijalan sistem reference S'' se kreće u odnosu na inercijalan sistem reference S' brzinom $\vec{u}_2 = u_2 \vec{e}_x$. Izvesti Lorencove transformacije koje povezuju događaje u sistemima S'' i S .

◇ Kako se svi sistemi kreću duž iste ose do rezultata se može doći primenom relativističkog izraza za slaganje brzina na osnovu toga da je brzina kretanja sistema S'' u odnosu na S , koja bi se pojavljivala u izrazima koji povezuju koordinate u jednom sa onima u drugom sistemu reference,

$$u = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}}.$$

Do odgovarajućih Lorencovih transformacija se može doći i na postupan način koji se sastoji u ispisivanju transformacija koje povezuju S sa S' i S' sa S'' i eliminacijom koordinata sistema S' . Zadatak će

300 GLAVA 6. KINEMATIKA SPECIJALNE TEORIJE RELATIVNOSTI

16. Svetlost se prostire kroz tečnost indeksa prelamanja n koja u odnosu na nekog posmatrača struji brzinom $u = 2,5 \cdot 10^{-8}c$. U nerelativističkom prilazu bi brzine svetlosti merene od strane posmatrača kada se ona kreće "nizvodno" odnosno uzvodno bile

$$V^+ = v' + u = \frac{c}{n} + u, \quad V^- = v' - u = \frac{c}{n} - u.$$

Fizoovi eksperimenti, izvršenim uglavnom 1851. godine su međjutim pokazali da ove brzine odstupaju od nerelativističkih izraza i da iznose

$$v^+ = \frac{c}{n} + \alpha u, \quad v^- = \frac{c}{n} - \alpha u,$$

gde je α koeficijent koji je u to vreme nazvan koeficijentom povlačenja etra sa vrednošću između 0 i 1. Primenom relativističkih izraza za transformisanje brzina odrediti izraz koji opisuje veličinu α .

◇ Kako je indeks prelamanja sredine n , brzina prostiranja svetlosti kroz nju je $v'_x = \frac{c}{n}$, pa je "nizvodna" brzina svetlosti

$$v^+ = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{c}{n}} = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{cn}}.$$

Kako je $u \ll c$ ovaj izraz se može razviti na sledeći način

$$\begin{aligned} v^+ &= \frac{c}{n} \left(1 + \frac{un}{c}\right) \left(1 + \frac{u}{nc}\right)^{-1} = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{un}{c}\right) \left(1 - \frac{u}{nc} + \dots\right) \\ &= \frac{c}{n} \left(1 + \frac{un}{c} - \frac{u}{nc}\right). \end{aligned}$$

Odavde se za traženu brzinu dobija

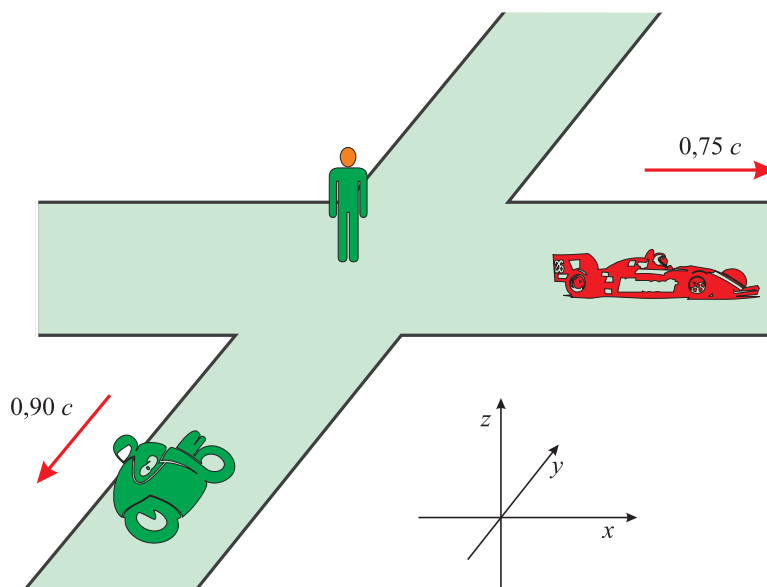
$$v^+ = \frac{c}{n} + u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

dok je "uzvodna" brzina

$$v^- = \frac{c}{n} - u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

odakle je jasno da je tražena veličina

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}.$$



Slika 6.21: .

17. Formula jedan i motocikl se kreću pod pravim uglom, jedan u odnosu na drugoga, kao što je prikazano na slici 6.21 (brzine su date u odnosu na nepokretnog posmatrača na raskrsnici). Kolika je tražena brzina u nerelativističkoj fizici?

Kojom brzinom se motocikl udaljava od formule jedan, gledano preko desnog ramena vozača formule?

◇ U odnosu na nepokretn sistem reference S (vezan za put), relevantne brzine su

$$\text{Formula jedan: } v_x = 0,75c, \quad v_y = 0$$

$$\text{Motocikl: } v_x = 0, \quad v_y = -0,90c.$$

Da bi odredili kojom brzinom se motocikl udaljava od formule, pretpostavićemo da se sistem reference S' kreće sa formulom jedan, i odredićemo komponente u'_x i u'_y brzine motocikla u odnosu na njega. Dobija se

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = \frac{0 - 0,75c}{1 - \frac{(0)(0,75c)}{c^2}} = -0,75c$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = \frac{-0,90c \sqrt{1 - (0,75c)^2/c^2}}{1 - \frac{(0)(0,75c)}{c^2}} = -0,60c$$

Na taj način će brzina motickla, gledano iz sistema reference formule jedan, biti

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{(-0,75c)^2 + (-0,60c)^2} = 0,96c.$$

Ukoliko se za određivanje ove brzine iskoristi Galilejev zakon slaganja brzina, dobija se $v' = 1,2c$.

18. Dva svemirska broda se kreću jedan prema drugom. Posmatrač sa Zemlje je izmerio da su im brzine $0,750c$ i $-0,850$. Odrediti brzinu broda koji se približava Zemlji u sistemu reference broda koji se udaljava od nje.
19. Odrediti rezultat sabiranja n kolinearnih brzina v_1, v_2, \dots, v_n . Koliki je rezultat ako su one jednake?
20. Cilindar rotira oko svoje ose ugaonom brzinom ω' . Pokazati da je, za posmatrača koji se kreće duž ose cilindra brzinom u , cilindar uvrnut i odrediti veličinu tog uvrtnja po jedinici dužine.
21. **Aberacija svetlosti.** Precizna astronomska merenja su pokazala da svaka zvezda na nebeskom svodu u toku godine opiše jednu malu elipsu. Uzrok ovoj pojavi leži u konačnoj brzini prostiranja svetlosti i u relativnom kretanju Zemlje u odnosu na zvezde i time izazvanom menjanju pravca prostiranja svetlosnih signala u toku godine za posmatrača za Zemlje.⁴⁶ Ovu pojavu je prvi zapazio 1725. godine britanski astronom Bradley i zaključio da ona ne zavisi od položaja Zemlje, već od smera njene brzine na putanji oko Sunca.
Neka je S sopstveni sistem zvezde, i neka je S' trenutni sistem reference Zemlje koji se, u datom trenutku kreće brzinom \vec{u} u odnosu na S .⁴⁷
22. Štap sopstvene dužine l_0 , nalazi se u stanju mirovanja u odnosu na sistem reference S u xy ravni pod uglom $\theta = \arctan(3/4)$ u odnosu na x osu. Sistem reference S' se kreće brzinom $\vec{v} = v\vec{e}_x$ u odnosu na sistem S i posmatrano iz njega štap je nagnut pod uglom 45° u odnosu

⁴⁶Sa pojavom aberacije se svi srećemo u vezi sa padanjem kišnih kapi. Naime, ako kišne kapi padaju vertikalno brzinom \vec{w} , za posmatrača koji se kreće horizontalno brzinom \vec{u} , one dolaze pod uglom $\arctan(u/w)$ u odnosu na vertikalnu. To je ugao pod kojim nagnjemo kišobran da bi se zaštitili od kišnih kapi.

⁴⁷Jasno je da je sistem reference Zemlje neinercijalna, ali, u dovoljno kratkom vremenskom intervalu se on može smatrati inercijalnim sistemom koji se kreće brzinom

na x' osu. Koliki je intenzitet brzine sistema S' i kolika je dužina štapa l' merena iz istog sistema reference?

◇

$$\tan \theta' = \frac{y'}{x'}$$

$$y' = y, \quad x' = \frac{x}{\gamma}$$

$$\tan \theta' = \gamma \frac{y}{x} \gamma \tan \theta$$

$$\gamma = \frac{\tan \theta'}{\tan \theta} = \frac{4}{3}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$l'^2 = y'^2 + x'^2 = y^2 + \frac{x^2}{\gamma^2} = y^2 + x^2(1 - \beta^2) = l_0^2 - x^2\beta^2 = l_0^2(1 - \cos^2 \theta \beta^2)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{4}{5}$$

$$l' = l_0 \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

23. Koordinatni počeci dva inercijalna sistema reference S i S' su se, u momentu vremena $t = t' = 0$ poklapali. Koordinati početak sistema S' se kreće brzinom $u = 1,8 \cdot 10^8 m/s$ duž pozitivnog smera z ose sistema S . Koordinate nekog događaja u S' su $x' = 1m$, $y' = 3m$, $z' = 2m$ i $t' = 8s$. Odrediti koordinate istog događaja u S .
24. Vasijski putnik odlazi da istraži zvezdu koja se nalazi 96 svetlosnih godina daleko od Zemlje. On za kratko vreme ubrza brod do $v = 0,96c$, i putuje po pravoj liniji. Nakon 100 godina (mereno u sistemu reference vezanom za Zemlju), on naglo uspori brod do $v = 0$ i narednih 20 godina se bavi istraživanjima zvezdanog sistema u koji je došao. Nakon završetka istraživanja ponovo naglo ubrzava brod (u smeru ka Zemlji) do brzine $v = 0,96c$, putuje narednih 100 godina i uspori brod kada bude blizu Zemlje. Nacrtati prostorno-vremenski dijagram svetske linije astronauta, gledano sa Zemlje. Vreme prikazati u godinama a rastojanja u svetlosnim godinama.

25. Neka se svemirski brod kreće pravo ka Zemlji polovinom brzine svetlosti i pri tom emituje laserski snop, u smeru svog kretanja, koji se u odnosu na njega kreće brzinom c . Izračunati brzinu laserskog snopa u odnosu na Zemlju.

◊ Uz standardnu orijentaciju osa, ukoliko je sistem S vezan za Zemlju a S' za svemirski brod, brzine navedene u zadatku su $u = -\frac{1}{2}c$, $v'_x = -c$, tako da je brzina laserskog snopa u odnosu na Zemlju

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} = \frac{-c - \frac{1}{2}c}{1 + \frac{(-\frac{1}{2}c)(-c)}{c^2}} = -\frac{\frac{3}{2}c}{1 + \frac{1}{2}} = -c.$$

Vredno je napomenuti da bi nerelativistička vrednost za traženu brzinu svetlosnog signala bila

$$v_x = v'_x + u = -c - \frac{1}{2}c = -\frac{3}{2}c.$$

26. Brod koji se približava Zemlji brzinom $\frac{1}{2}c$ izbacuje predmet brzinom $\frac{3}{4}c$. Kolikom brzinom se taj predmet kreće u odnosu na Zemlju ukoliko je izbačen u smeru nje a kolika mu je brzina ako je izbačen u smeru suprotnom od nje?

◊ Ukoliko je telo izbačeno u smeru Zemlje, brzine relevantne za rešavanje zadatka su $u = -\frac{1}{2}c$ i $v'_x = -\frac{3}{4}c$. U tom slučaju je brzina tela u odnosu na Zemlju

$$v_x = -\frac{10}{11}c = -0,909c$$

. Ukoliko je smer izbacivanja tela suprotan, važi da je $v'_x = \frac{3}{4}c$ pa je tražena brzina

$$v_x = \frac{2}{5}c = 0,4c.$$

27. Posmatrano iz laboratorijskog sistema reference, telo koje se kreće brzinom v_1 naleće pod pravim uglom na zid koji se kreće ka njemu brzinom V . Odrediti brzinu tela v_2 nakon odbijanja od zida. Sudar je apsolutno elastičan a masa zida mnogo veća od mase tela. Proanalizirati granične slučajeve. Odrediti brzinu v_2 , ako je $v_1 = V = c/3$.

◊ Usmerimo x ose laboratorijskog sistema S kao i sistema S' vezanog za zid u smeru brzine v_1 . Relacija koja daje x komponentu brzine tela, posmatrano iz sistema S' je

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u / c^2}$$

gde je u brzina sistema S' u odnosu na sistem S . Obzirom na orijentaciju osa, biće $v_x = v_1$, $u = -V$, pa će u sistemu reference vezanom za zid, brzina tela v'_1 biti

$$v'_1 = \frac{v_1 + V}{1 + v_1 V/c^2}.$$

Kako zid možemo smatrati beskonačno masivnim, nakon elastičnog sudara, prema zakonu održanja energije, telo će se odbiti u suprotnom smeru sa istom vrednošću brzine u odnosu na zid

$$v'_2 = -v'_1 = -\frac{v_1 + V}{1 + v_1 V/c^2}.$$

Vratimo se sada u laboratorijski sistem reference S . U njemu je

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + v'_x u/c^2}$$

pri čemu je $u = -V$, jer se sistem S' kreće ka sistemu S . Na osnovu ovoga je tražena brzina

$$v_2 = \frac{v'_1 - V}{1 - v'_1 V/c^2} = -\frac{v_1(1 + V^2/c^2) + 2V}{1 + 2v_1 V/c^2 + V^2/c^2}.$$

Analiza graničnih slučajeva:

1. Brzine tela i zida su male ($v_1 \ll c$ i $V \ll c$). U tom slučaju možemo da zanemarimo sve sabirke u kojima se ove brzine dele brzinom svetlosti, i tada se iz gornje jednačine dobija nerelativistički rezultat $v_2 = -(v_1 + 2V)$. Drugim rečima, brzina tela nakon odbijanja se povećava za dvostruku vrednost brzine zida i usmerena je suprotno od početne brzine.

2. Neka na zid naleće telo koje se kreće brzinom svetlosti (na primer laserska svetlost koja se odbija od pokretnog ogledala). Rezultat se dobija kada se u poslednji izraz zameni $v_1 = c$

$$v_2 = -\frac{c(1 + V^2/c^2) + 2V}{1 + 2cV/c^2 + V^2/c^2} = -c \frac{(1 + V/c)^2}{(1 + V/c)^2} = -c.$$

Drugim rečima, brzina laserske svetlosti je promenila smer ali ne i intenzitet.

3. Neka se zid kreće brzinom svetlosti brzinom. U tom slučaju je

$$v_2 \rightarrow -\frac{2v_1 + 2c}{2 + 2Vc/c^2} = -c,$$

odnosno, nakon odbijanja, telo će se kretati brzinom bliskoj brzini svetlosti.

4. Tražena brzina tela, za $v_1 = V = c/3$ je

$$v_2 = -\frac{\frac{1}{3}(1 + \frac{1}{9}) + \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9}} = -\frac{7}{9}c = -0,78c.$$

28. Solarna konstanta (energija zračenja koje sa Sunca pada na jedinicu površine Zemlje u jedinici vremena) iznosi $C = 1,4kW/m^2$. Odrediti masu Δm , koju usled zračenja Sunce izgubi za jednu godinu.

◊ Zemlja se od Sunca nalazi na rastojanju $L_Z = 1,48 \cdot 10^{11}$ m. Za vreme Δt na jedinicu površine Zemlje padne energija $C\Delta t$. Množeći ovaj izraz površinom sfere poluprečnika L_Z , dobijamo energiju koju Sunce izrači za vreme Δt

$$\Delta E = 4\pi L_Z^2 C \Delta t.$$

Ova energija nastaje usled termonuklearnih reakcija u Suncu na račun umanjenja njegove mase mirovanja. Na taj način, njegova masa će se za jednu godinu smanjiti za

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4\pi L_Z^2 C \Delta t}{c^2} = \frac{4\pi(1,48 \cdot 10^{11})^2 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \cdot 3,16 \cdot 10^7}{(3 \cdot 10^8)^2}$$

$$\Delta m = 1,35 \cdot 10^{17} kg.$$

Kako Sunce postoji oko 5 milijardi godina, ono je za to vreme izgubilo $5 \cdot 10^9 \cdot 1,35 \cdot 10^{17} kg \approx 6,75 \cdot 10^{26} kg$. Imajući u vidu da je masa Sunca $M_S = 1,99 \cdot 10^{30} kg$, ono je do sada zračenjem izgubilo oko 0,03 % nje.

29. Čestica mase mirovanja m i kinetičke energije T_0 se elastično rasejava na stacionarnu v česticu iste mase. Kolika je njena kinetička energija nakon sudara, ako je ugao rasejanja θ ?

◊ Neka indeksi 0 i 1 označavaju česticu projektil i česticu metu. 4-impulsi do i posle sudara su prema zakonu održanja 4-vektora impulsa

$$P_0 + P_1 = P'_0 + P'_1.$$

Kako nas zanima veličina u vezi sa česticom 0 nakon sudara, prebacićemo njen impuls na levu stranu i kvadrirati

$$(P_0 + P_1 - P'_0)^2 = P_1,$$

$$P_0^2 + P_1^2 + P_0'^2 + 2P_0P_1 - 2P_0P'_0 - 2P_1P'_0 = P_1^2.$$

Kako je kvadrat 4-impulsa jednak m^2c^2 , ova jednačina postaje

$$3m^2c^2 + 2P_0P_1 - 2P_0P'_0 - 2P_1P'_0 = m^2c^2.$$

Izraze 4-vektora impulsa

$$P_0 = (E/c, \vec{p}), \quad E = mc^2 + T_0$$

$$P_1 = (mc, \vec{0}),$$

$$P'_0 = (E'/c, \vec{p}'), \quad E' = mc^2 + T', \quad \vec{p} \cdot \vec{p}' = pp' \cos \theta.$$

zamenjujemo u jednačinu i dobijamo

$$m^2c^2 + \frac{E}{c}mc - \frac{E}{c} \frac{E'}{c} + \vec{p} \cdot \vec{p}' - \frac{E'}{c}mc = 0,$$

odnosno

$$pp' \cos \theta = \left(\frac{E'}{c} - mc \right) \left(\frac{E}{c} + mc \right).$$

Kako se veza impulsa i energije može zapisati u obliku $p = \sqrt{E^2/c^2 - m^2c^2}$, dobijamo

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 \right)^{1/2} \left(\frac{E'^2}{c^2} - m^2c^2 \right)^{1/2} \cos \theta = \left(\frac{E'}{c} - mc \right) \left(\frac{E}{c} + mc \right).$$

Kvadriranje jednačine i razlaganje razlike kvadrata dovodi do relacije

$$\left(\frac{E}{c} - mc \right) \left(\frac{E'}{c} + mc \right) \cos^2 \theta = \left(\frac{E'}{c} - mc \right) \left(\frac{E}{c} + mc \right),$$

koja, obzirom na vezu ukupne i kinetičke energije daje

$$T_0(T' + 2mc^2) \cos^2 \theta = T'(T_0 + 2mc^2),$$

odakle je kinetička energija čestice nakon rasejanja

$$T' = \frac{2mc^2 T_0 \cos^2 \theta}{2mc^2 + T_0 \sin^2 \theta}.$$

30. Foton talasne dužine λ naleće na stacionaran elektron (mase m_e) i nakon rasejanja pod uglom θ ima talasnu dužinu λ' . Odrediti promenu talasne dužine fotona.

◊ Na osnovu zakona održanja 4-impulsa

$$P_e + P_f = P'_e + P'_f$$

gde su apostrofom označene vrednosti veličina nakon rasejanja. Kako nas ne zanima 4-impuls elektrona nakon rasejanja, jednačinu ćemo tako zapisati da on ostane na desnoj strani jednačine a nju ćemo još i kvadrirati

$$(P_e + P_f - P'_f)^2 = P_e'^2.$$

Kako je uvek $P_f^2 = 0$ a $P_e^2 = m_e^2 c^2$, sledi

$$m_e^2 c^2 + 2P_e P_f - 2P_e P'_f - 2P_f P'_f = m_e^2 c^2.$$

4-vektori koji se pojavljuju u ovom izrazu, u laboratorijskom sistemu reference (u kome miruje elektron-meta) su

$$P_e = (m_e c, \vec{0}), \quad P_f = \left(\frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda} \vec{e}_f \right), \quad P'_f = \left(\frac{h}{\lambda'}, \frac{h}{\lambda'} \vec{e}'_f \right),$$

(\vec{e}_f i \vec{e}'_f su jedinični vektori pravca upadnog i rasejanog fotona, respektivno), pa se nakon množenja dobija relacija

$$m_e c \frac{h}{\lambda} - m_e c \frac{h}{\lambda'} - \frac{h^2}{\lambda \lambda'} + \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta = 0.$$

Nakon množenja ove jednačine sa $\lambda \lambda'$, promena talasne dužine može da se zapiše u uobičajenom obliku

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

31. Ako je veza koordinata x' i t' sa x i t predstavljena izrazom (6.27), odrediti izraze koji definišu koordinate x i t preko x' i t' .

◊ Zadatak se svodi na rešavanje sistema dve linearne jednačine (6.27) po x i t . Množenje prve sa $-M/A$ i dodavanje drugoj dovodi do

$$-\frac{M}{A} x' + t' = -B \frac{M}{A} t + N t$$

odakle se dobija

$$t = \frac{Mx' - At'}{BM - AN}.$$

Analogno, množenje prve jednacine sa $-N/B$ i dodavanje drugoj, nakon sredjivanja za x daje

$$x = \frac{-Nx' + Bt'}{BM - AN}$$

što predstavlja tražene veze promenljivih ova dva sistema, odnosno inverznu transformaciju, transformaciji koordinata (6.27).

32. **Paradoks blizanaca** Pretpostavimo da kosmički brod kreće sa Zemlje u tački A , ubrzava i odlazi od nje duž x ose brzinom u . Kada dodje u neku tačku B , okreće, kreće se ka Zemlji istom brzinom, koči i zaustavlja se u istoj tački iz koje je pošao. Recimo da smo za Zemlju vezali koordinatni sistem S sa osama xyz , sa brodom kada se udaljava S' sa osama $x'y'z'$, a sa brodom kada se približava S'' sa osama x'', y'', z'' . Uporedimo interval vremena Δt_Z izmedju odlaska i dolaska broda koji bi izmerio sat koji je na Zemlji sa satom koji se nalazi na brodu Δt_b .⁴⁸

Interval vremena izmedju pomenuta dva dogadjaja, izmeren na Zemlji je

$$\Delta t_Z = t_{2A} - t_{1A}, \quad (6.69)$$

gde je sa t_{1A} označen trenutak odlaska broda sa Zemlje, meren po zemaljaskom satu, a sa t_{2A} trenutak povratka u istu tačku na Zemlji. Pogodno je podeliti kretanje broda na dve etape, jedna se odnosi na kretanje sa Zemlje i dolazak u tačku B koji se dešava u trenutku t_B a druga je polazak iz tačke B i povratak na Zemlju. Potreban interval vremena za prvu etapu puta je $\Delta t_{AB} = t_B - t_{1A}$, a za drugu $\Delta t_{BA} = t_{2A} - t_B$, pa je vreme (6.69)

$$\Delta t_Z = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BA} = (t_B - t_{1A}) + (t_{2A} - t_B). \quad (6.70)$$

Vremena merena u S' i u S'' su sa vremenom merenim u S su povezana na sledeći način⁴⁹

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad t'' = \frac{t + \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (6.71)$$

⁴⁸Pretpostavka je da će satovi dobro raditi u svim sistemima reference.

⁴⁹Predznak brzine u drugom izrazu je negativan jer se u tom slučaju kretanje odvija ka Zemlji.

Sada treba izračunati interval vremena koji je svojim satom izmerio kosmonaut koji se nalazio u brodu. Obzirom na karakter njegovog kretanja logično ga je podeliti takodje na dve etape pa će ukupno vreme koje je on izmerio biti

$$\Delta t_b = \Delta t' + \Delta t'', \quad (6.72)$$

gde je $\Delta t' = t'_B - t'_{1A}$ vreme koje mu je po njegovom satu trebalo da dodje od tačke A' do tačke B' , a $\Delta t'' = t''_{2A} - t''_B$, vreme koje mu je bilo potrebno (po njegovom satu) da dodje od tačke B'' do tačke A'' .

Obzirom na relacije (6.71) pomenuti intervali vremena su

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t'_B - t'_{1A} = \frac{t_B - \frac{u}{c^2}x_B}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t_{1A} - \frac{u}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_B - t_{1A} + \frac{u}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ \Delta t'' &= t''_{2A} - t''_B = \frac{t_{2A} + \frac{u}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t_B + \frac{u}{c^2}x_B}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_{2A} - t_B + \frac{u}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Imajući u vidu da je

$$\frac{x_B - x_A}{t_B - t_{1A}} = u, \quad \frac{x_A - x_B}{t_{2A} - t_B} = -u,$$

zamenom u (6.73), za traženo vreme se dobija

$$\Delta t_b = (t_B - t_{1A}) \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + (t_{2A} - t_B) \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (6.74)$$

odnosno

$$\Delta t_b = [(t_B - t_{1A}) + (t_{2A} - t_B)] \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \Delta t_Z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (6.75)$$

Ovaj zadatak se može rešiti i sa pozicije kosmonauta koji se nalazi u brodu. Sat koji miruje u odnosu na brod, pokazuje njegovo spostveno vreme pa je

$$\Delta t_b = \Delta t'_0 + \Delta t''_0. \quad (6.76)$$

Vreme mereno prema zemaljskom satu je

$$\Delta t' + \Delta t'' = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{\Delta t''_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_b}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (6.77)$$

što se poklapa sa formulom (6.75).

Na ovaj način se vidi da, bez obzira na način izračunavanja, vreme u kosmičkom brodu teče sporije nego na Zemlji. Kad bi brzina broda bila $u = 0,9998c$, vreme će teći oko 50 puta sporije ($\Delta t_b = 1/50\Delta t_Z$). Kao posledica te činjenice, ukoliko bi jedan blizanac otišao ovom brzinom na putovanje kosmosom, i pri tom (po svom kalendaru) ostareo 1 godinu, njegov brat koji je ostao na Zemlji bi ostareo 50 godina.⁵⁰

Dobijeni rezultat se naziva paradoksom blizanaca⁵¹ zato što na prvi pogled ne bi trebalo da postoji nikakvo usporavanje protoka vremena obzirom na princip relativnosti.⁵² Medjutim treba imati u vidu da se za kretanje kosmičkog broda vezuju dva različita sistema reference (a ne jedan) koji se kreću istim ali suprotno usmerenim brzinama tako da je princip relativnosti neprimenljiv. Moguće je kritikovati takodje nužnu pojavu ubrzavanja i usporavanja broda na polasku, prilikom okretanja i na dolasku na Zemlju, što znači da se tada on nalazio u neinercijalnom sistemu reference. Medjutim, kada je kretanje broda neravnomerno vreme se takodje usporava što je jedan od rezultata opšte teorije relativnosti.

33. Ogledalo se kreće normalno na svoju ravan brzinom u . Na njega pada svetlosni zrak pod uglom θ u odnosu na normalu na ogledalo (gledano iz inercijalnog sistema reference u odnosu na koji se ogledalo kreće navedenom brzinom). Koliki će biti ugao pod kojim se zrak reflektuje od ogledala? Da li će se pri ovakvoj refleksiji promeniti frekvencija svetlosti?

◇

34. ISR S' se kreće u odnosu na ISR S brzinom $\vec{u}_1 = u_1\vec{e}_x$. ISR S'' se kreće u odnosu na ISR S' brzinom $\vec{u}_2 = u_2\vec{e}_x$. Izvesti Lorencove transformacije koje povezuju događaje u u sistemima S i S'' .

◇

⁵⁰Usporavanje protoka vremena u kosmičkom brodu koji se kreće veoma brzo, daje principijelnu mogućnost putovanja ka dalekim zvezdanim sistemima (naravno, o ovim putovanjima ljudi koji bi ostali na Zemlji ne bi mogli ništa da saznaju). Primetimo da danas nisu poznati tehnički uslovi (npr. koji bi izvori energije obezbedili ovakvo putovanje) koji bi mogli da obezbede da se kosmički brod ubrza do ultrarelativističkih brzina. Ovo tim rejer je i ubrzavanja elementarnih čestica do tih brzina kompleksan i teško rešiv problem.

⁵¹Ovaj paradoks se pripisuje Lanževenu a ne Ajnštajnu.

⁵²Nije bilo merljivo tada ali u GPS satelitima moraju da se koriguje rad časovnika.

35. Vagon sopstvene dužine L kreće se brzinom $5c/13$ u odnosu na Zemlju. Lopta je bačena sa zadnje strana vagona ka prednjoj brzinom $c/3$ u odnosu na njega. Koliko vremena joj je potrebno, gledano sa Zemlje, da udari u prednji kraj vagona i koliki put je pri tome prešla?

◊ Neka je sistem S vezan za Zemlju a S' za vagon tako da mu je koordinanti početak na zadnjem kraju vagona a x' osa usmerena duž kretanja vagona. Sistem S' se kreće brzinom $u = 5c/13$ u odnosu na S pa je odgovarajući γ faktor $\gamma = 13/12$. U sistemu S' lopta treba da predje put L krećući se brzinom $v' = c/3$ u odnosu na njega duž x' ose. U $t'_1 = 0$ lopta se nalazila u $x'_1 = 0$ dok je u trenutku t'_2 imala koordinatu $x'_2 = L$. Kako je predjeni put $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = L$, a vreme kretanja $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, važi

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \quad \Delta t' = 3 \frac{L}{c}.$$

Koordinate istih događaja u S se dobijaju na osnovu Lorencovih transformacija

$$x = (x' + ut')\gamma, \quad t = (t' + \frac{u}{c^2}x')\gamma,$$

odakle sledi da je

$$\Delta x = (\Delta x' + u\Delta t')\gamma = \left(L + \frac{5c}{13} \frac{3L}{c}\right) \frac{13}{12} = \frac{7L}{3}$$

$$\Delta t = (\Delta t' + \frac{u}{c^2}x')\gamma = \left(\frac{3L}{c} + \frac{5c}{13} \frac{1}{c^2}L\right) \frac{13}{12} = \frac{11L}{3c}.$$

Drugi način, u ovom slučaju komplikovaniji, bi bio da se traženi intervali dobiju recimo preko efekta vremenske dilatacije. Da bi odgovarajuća formula mogla da se primeni potrebno je da jedna od posmatranih ISR bude sopstveni sistem, tj. sistem u kome se posmatrani događaji odvijaju na istom mestu. U tu svrhu je potrebno preći u ISR S'' koji je vezan za loptu. Veza vremenskog intervala $\Delta t'$ u S' i $\Delta t''$ je pri tome $\Delta t' = \Delta t''/\sqrt{1 - v'^2/c^2}$, odakle je $\Delta t'' = \Delta t' \sqrt{1 - v'^2/c^2} = \frac{3L}{c} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}L}{c}$. Pošto se u zadatku traži vremenski interval meren iz sistema S , potrebno je odrediti brzinu lopte, odnosno njenog sopstvenog ISR S'' u odnosu na njega. Iz formule za transformaciju brzine se dobija

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}} = \frac{\frac{c}{3} + \frac{5c}{13}}{1 + \frac{5c}{13} \frac{c}{3} \frac{1}{c^2}} = \frac{7}{11}c$$

Na osnovu dilatacije vremena se sada dobija

$$\Delta t = \frac{\Delta t''}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2\sqrt{2}L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{7^2}{11^2}}} = \frac{11L}{3c}.$$

Pošto imamo određenu njenu brzinu u odnosu na Zemlju i vreme kretanja, put koji je prešla, gledano iz ovog ISR, iznosi

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{7}{11}c \frac{11L}{3c} = \frac{7L}{3}$$

Glava 7

Dinamika specijalne teorije relativnosti

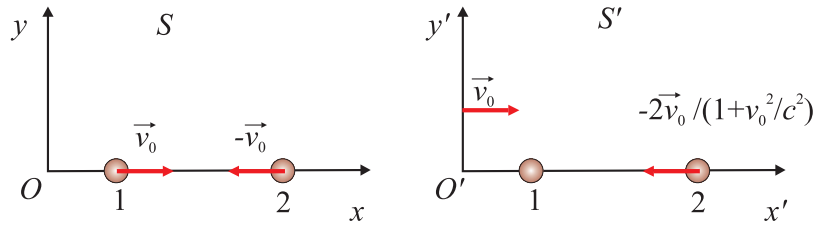
7.1 Relativistički izraz za impuls i II Njutnov zakon

Do sada je pokazano da korektno opisivanje kretanja čestice koja se kreće velikom brzinom dovodi do potrebe da se Galilejeve transformacije zamene Lorencovim. Kako osnovni zakoni fizike moraju da ostanu neizmenjeni prilikom promene sistema reference, potrebno je generalisati Njutnove zakone, definiciju impulsa i energije tako da imaju formu koja se održava prilikom primene Lorencovih transformacija. Te "nove" definicije moraju da budu takve da se, u situaciji kada je brzina tela mala u poredjenu sa brzinom svetlosti, svode na dobro poznate, nerelativističke formule.

Prema zakonu održanja impulsa, ukupan impuls sistema, ostaje konstantan tokom vremena. Tipičan primer primene ovog zakona je posmatranje sudara dva tela (elastičan i neelastičan). Ipostavlja se da, ukoliko podjemo od nerelativističke definicije impulsa $\vec{p} = m\vec{v}$, zakon održanja impulsa ne važi. Da bi se uverili u to razmotrimo neelastičan sudar dve jednake lopte mase m , slika 7.1.

Neka se u sistemu S lopte kreću jedna drugoj u susret duž x ose brzinama jednakog intenziteta a suprotnog smera, čije su projekcije prema tome $v_{x1} = v_0$ i $v_{x2} = -v_0$. Impuls sistema je prema tome, u sistemu S pre sudara jednak $mv_0 + m(-v_0) = 0$. Nakon neelastičnog sudara, lopte se slepljuju i zaustavljaju,¹ pa su im komponente brzina $v_{x1} = v_{x2} = 0$. Kao što vidimo

¹Kinetička energija koje su lopte imale pre sudara u potpunosti se troše na energiju



Slika 7.1: Neelastični sudar istih tela.

ukupni impuls sistema je nakon sudara jednak nuli što znači da je u ovom inercijalnom sistemu reference impuls sistema očuvan. Da li je tako i u ostalim inercijalnim sistemima reference?² Razmotrimo ovaj isti sudar iz sistema S' prikazanog na istoj slici, koji se kreće uniformno brzinom \vec{v}_0 u odnosu na sistem S duž x -ose.

Situacija pre sudara je sledeća. Primenjujući formulu (*.*) za x komponentu brzine tela, gledano iz sistema S' , za brzine dveju lopti pre sudara se dobija

$$v'_{x1} = 0, \quad v'_{x2} = -\frac{2v_0}{1 + \frac{v_0^2}{c^2}},$$

dok se za njihove brzine nakon sudara dobija $v'_{x1} = v'_{x2} = -v_0$. Na osnovu toga možemo da zaključimo da je ukupni impuls ovog sistema, posmatrano iz sistema S' , pre sudara bio jednak $-2mv_0/(1 + v_0^2/c^2)$, a da je posle sudara $-2mv_0$, što znači da, u opštem slučaju nisu jednaki!³ Zakon održanja impulsa, kao jeda od osnovnih zakona fizike međjutim mora da važi u svim inercijalnim sistemima reference.⁴ To nas dovodi do zaključka da treba modifikovati definiciju impulsa. Pri tome je neophodno da poštujemo sledeće zahteve:

- Zakon održanja impulsa mora da ostane u važnosti.
- Relativistički izraz za impuls \vec{p} treba da za male brzine poprimi oblik $m\vec{v}$.

deformacije lopti i njihovo zagrevanje na mestu dodira, odnosno sudara.

²Da bi dokazali suprotno dovoljno je da pronadjemo makar jedan u kome impuls nije očuvan.

³Lako je pokazati da su ova dva izraza jednaka samo kada je $v_0 \ll c$, odnosno za male brzine kretanja tela.

⁴Primetimo da smo prilikom povezivanja vrednosti impulsa u različitim inercijalnim sistemima reference takodje koristili relativistički zakon transformacija brzina. Ove relacije, budući da su povezane sa Ajnštajnovim postulatima koji su pak bazirani na empiriji, takodje moramo uzeti kao tačan.

Odgovarajuća relativistička verzija impulsa, koja zadovoljava navedene uslove je

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{v} \quad (7.1)$$

gde je m masa čestice a \vec{v} njena brzina. Kada je brzina kretanja tela mala u poredjenju sa brzinom svetlosti $v \ll c$, faktor γ u prethodnom izrazu teži jedinici pa izraz za impuls postaje jednak nerelativističkom.⁵ Do relativističkog izraza za impuls (7.1) se može doći i sledećim razmišljanjem. Za male brzine kretanja tela traženi izraza za impuls mora bude jednak nerelativističkom impulsu $\vec{p} = m d\vec{r}/dt$. Kako je interval dt povezan sa sopstvenim vremenom čestice relacijom $dt = d\tau/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, logično je impuls čestice definisati kao $\vec{p} = m d\vec{r}/d\tau$, odakle se odmah dobija relacija (7.1).⁶

Masa m koja ulazi u relaciju (7.1) je invarijanta, i prema tome ne zavisi od brzine čestice. Ovaj izraz se, međjutim, može i malo drugačije interpretirati. Naime, impuls se, po analogiji sa Njutnovom mehanikom, može predstaviti kao proizvod mase tela i njegove brzine

$$\vec{p} = m_r \vec{v}, \quad (7.2)$$

ali masa m_r koja se pojavljuje u ovom izrazu, očigledno nije invarijantna veličina, već zavisi od brzine na sledeći način

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m. \quad (7.3)$$

U takvoj interpretaciji izraza za impuls, invarijantna masa m se naziva masom mirovanja (i često označava sa m_0). Neinvarijantna masa m_r , u tom slučaju, nosi naziv relativistička masa ili masa kretanja.

Imajući u vidu ovakvu definiciju relativističkog impulsa, drugi Njutnov zakon se može pisati u uobičajenoj formi

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (7.4)$$

Ovakva zapis je logičan jer za male brzine kretanja prelazi u uobičajen izraz drugog Njutnovog zakona, a osim toga, u slučaju da je sistem izolovan ($\vec{F} = 0$), dovodi do zakona održanja impulsa i u relativističkom i u nerelativističkom slučaju.

⁵Može se pokazati i da iz ovakve definicije impulsa sledi da važi i zakon njegovog održanja pa je u tom smislu on dakle invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije.

⁶Napomenimo da je u ovoj definiciji $d\vec{r}$ pomeraj čestice u onom sistemu reference u kome određujemo impuls \vec{p} , dok je interval vremena $d\tau$ interval izmeren na časovniku koji se kreće zajedno sa česticom.

Može da se pokaže da u relativističkom slučaju, ubrzanje čestice pod dejstvom konstante sile opada sa porastom brzine kao

$$a \propto \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}.$$

Ova formula je u skladu sa postulatom o brzini svetlosti jer pokazuje da kada brzina čestice teži brzini c , ubrzanje izazvano dejstvom konstantne sile teži nuli. To ukazuje na činjenicu da je nemoguće ubrzavanje čestice iz stanja mirovanja do brzine $v \geq c$.

Primer 1. Elektron mase $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg kreće se brzinom $0,75c$. Odrediti i uporediti njegov relativistički i nerelativistički impuls.

Rešenje. Prema jednačini (7.1) za $v = 0,75c$, se dobija

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3,10 \times 10^{-22} \text{ kgm/s}.$$

Nerelativistička vrednost impulsa je

$$p_{nerel} = m_e v = 2,05 \times 10^{-22} \text{ kgm/s},$$

odakle se vidi da je tačna (relativistička) vrednost impulsa za 50% veća od klasičnog, odnosno nerelativističkog rezultata.

7.2 Relativistička energija

Zakon održanja energije je jedan od najvažnijih zakona u fizici. Kao što je i ranije napominjano, prema njemu ukupna energija sistema ostaje konstantna tokom vremena a razne forme energije koje je čine, pri tome samo prelaze jedan u drugu. U slučaju tela koja se kreću relativističkim brzinama, zakon održanja energije, kao jedan od osnovnih zakona u fizici, mora da ostane u važnosti. Da bi ovo bilo obezbeđeno neophodno je uvesti novu definiciju ukupne energije koja mora da bude takva da sadrži u sebi nerelativistički izraz za energiju (za male brzine). Ajnštajn je pokazao da je zakon održanja energije ostaje u važnosti i za relativističke brzine ukoliko se ukupna energija predstavi u obliku

$$E = \gamma mc^2. \quad (7.5)$$

Kao što ćemo kasnije pokazati, ovakva definicija ukupne energije će imati i neke potpuno nove i neočekivane posledice.

Do Ajštajnovog izraza za ukupnu energiju se može doći na više načina. Ovde će biti prezentovana dva, najpre jedan intuitivniji i prostiji.

Ukoliko je brzina kretanja tela mala u poredjenju sa brzinom svetlosti, u izrazu (7.5), se može izvršiti razvoj po stepenima odnosa v/c koji daje

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O(v^4/c^4) \right)$$

gde je sa $O(v^4/c^4)$ označen ostatak razvoja koji je reda veličina v^4/c^4 te se na dalje može, kao veoma mali sabirak, zanemariti. Nakon toga, prethodni izraz postaje

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const.} + E_k, \quad (7.6)$$

gde sabirak $mv^2/2$ prepoznavamo kao nerelativističku kinetičku energiju E_k . Kao što može da se primeti, u izrazu (7.6), koji važi za male brzine, uz izraz za nerelativističku kinetičku energiju se pojavio još jedan sabirak koji, obzirom da je oblika mc^2 i da ima dimenzije energije, možemo nazvati energija mirovanja. Sabirak γmc^2 , koji se nalazi sa leve strane ove jednačine, se u tom smislu naziva relativistička energija. Iako je posmatrani izraz samo nerelativistička aproksimacija, na osnovu njega možemo da zaključimo da je izraz za ukupnu energiju baš oblika (7.5).

Kako bi izgledao zakon održanja energije u ovom slučaju? On bi morao da bude definisan polazeći upravo od izraza za energiju (7.5) a za male brzine kretanja bi rezultat njegove primene morao da se svodi na rezultat do koga se dolazi u nerelativističkom slučaju. Proverimo ove pretposavke na primeru elastičnog sudara dva tela masa m i M koja se kreću duž x ose brzinama v i V pre sudara a v' i V' nakon sudara. Zakon održanja (relativističke) energije glasi

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{M}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} + \frac{M}{\sqrt{1 - V'^2/c^2}}$$

koji za male brzine postaje

$$mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + Mc^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv'^2 + Mc^2 + \frac{1}{2}MV'^2,$$

koji se, nakon potiranja sabiraka koji sadrže prozivode istih masa sa c^2 , svodi na zakon održanja energije u nerelativističkom tretmanu elastičnog sudara.

Drugi pristup se svodi na određivanje rada potrebnog da se čestica pomeri sa jednog mesta na drugo. Naime, rad koji izvrši sila F , usmerena duž x ose, pri pomeranju čestice od tačke x_1 do tačke x_2 je

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx. \quad (7.7)$$

Da bi rešili ovaj integral, prvo treba da odredimo izvod relativističkog impulsa po vremenu

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m(dv/dt)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

Zamenjujući ovaj izraz u prethodni integral, uz $dx = vdt$, on postaje integral po vremenu, a nakon srdjivanja integral po brzini

$$A = \int_0^t \frac{m(dv/dt)vdt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m \int_0^v \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv,$$

gde je uzeto da je čestica, pod dejstvom sile F ubrzana iz stanja mirovanja do neke brzine v . Rešavanjem ovog integrala se za rad dobija

$$A = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2. \quad (7.8)$$

Rad koji je izvršila posmatrana sila je jednak (relativističkoj) kinetičkoj energiji E_{krel}

$$E_{krel} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2. \quad (7.9)$$

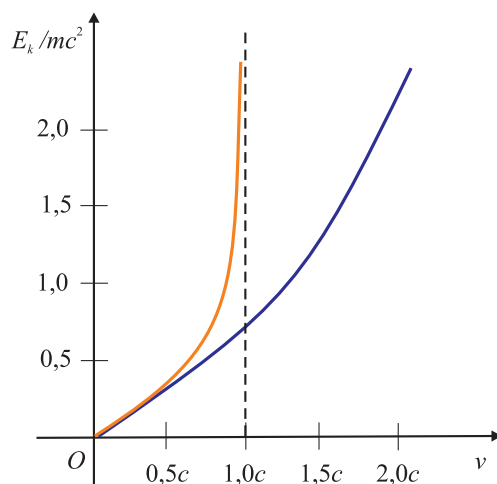
Na slici (7.2) su uporedjene relativistički i nereletavistički izraz za kinetičku energiju. U relativističkom slučaju, čestica nikad ne može da prevaziđe brzinu svetlosti. Krive se poklapaju za brzine za koje važi $v \ll c$.

Konstantan sabirak u jednačini (7.9) (nezavisan od brzine čestice) se naziva **energija mirovanja** čestice i obično označava sa E_0 . Sabirak, oblika γmc^2 , koji zavisi od brzine čestice, je u skladu sa tim, zbir kinetičke energije i energije mirovanja pa se usled toga zove **ukupna energija** E

$$E = E_{krel} + E_0 = \gamma mc^2, \quad (7.10)$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.11)$$

To je čuvena Ajnštajnova jednačina koja dovodi u vezu masu i energiju. Ona pokazuje da je masa oblik energije i ukazuje na to da maloj masi odgovara velika količina energije, činjenica veoma bitna za nuklearnu fiziku i fiziku elementarnih čestica.



Slika 7.2: Grafičko poredjenje relativističke i nerelativističke kinetičke energije u funkciji brzine čestice.

U procesima koji se dešavaju sa elementarnim česticama, obično nas ne interesuju njihova brzina već impuls i energija, pa je zgodno izvesti relaciju koja ih povezuje. Do nje se može doći ako se podje od relacija $E = \gamma mc^2$ i $p = \gamma mv$. Kvadriranje ovih jednačina i eliminacija brzine dovodi do relacije

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (7.12)$$

Kada je čestica u stanju mirovanja, važi da je $p = 0$, pa je $E = E_0 = mc^2$. Za čestice pak, čija je masa (mirovanja) jednaka nuli, jednačina (7.12) daje

$$E = pc. \quad (7.13)$$

Ova jednačina predstavlja izraz koji povezuje impuls i ukupnu energiju fotona (koji se u vakuumu kreće brzinom c).

Primetimo takodje da je masa čestice m , koja se pojavljuje u prethodnim izrazima, nezavisna od njenog kretanja i mora da ima istu vrednost u svim inercijalnim sistemima reference. Iz tog razloga se, masa m naziva **invarijantna masa**. Sa druge strane, kako ukupna energija i impuls zavise od brzine, zavisice znači od toga iz kog sistema reference se mere. Kako je medjutim m invarijantna veličina može se zaključiti da će i izraz $E^2 - p^2 c^2$ biti invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije.

Ukoliko imamo posla sa subatomskim česticama pogodno je njihovu energiju izražavati u elektron voltima eV. Naime, ukoliko želimo da izračunamo

energiju mirovanja elektrona $m_e c^2$ dobićemo

$$m_e c^2 = (9,109 \times 10^{-31} \text{ kg})(2,9979 \times 10^8 \text{ m/s}) = 8,187 \times 10^{-14} \text{ J}$$

što predstavlja malu vrednost. Iskoristimo li činjenicu da jedan elektron volt (eV) predstavlja energiju koju dobije čestica sa naelektrisanjem jednakim naelektrisanju elektrona $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$, pod dejstvom razlike potencijala (napona) od 1V, konverzioni faktor je

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J},$$

pa se za energiju mirovanja elektrona dobija

$$m_e c^2 = \frac{8,187 \times 10^{-14}}{1,602 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 0,511 \text{ eV}.$$

P r i m e r X. Elektroni se u katodnoj cevi televizijskog aparata kreću brzinama od oko $v = 0,25c$. Odrediti njihovu ukupnu i kinetičku energiju u eV.

R e š e n j e X.

$$E = m c^2$$

Malo mase može da proizvede veliku energiju. U fisionim nuklearnim centralama uranijum U se cepa na dva lakša jezgra koja u zbiru imaju masu manju od polazne, taj deo prelazi u energiju.

Na Suncu se dešava proces fuzije u kome se jezgra vodonika spajaju u jezgra helijuma pri čemu je masa produkata manja od mase polaznih jezgara. Razlika u masama se oslobadja kao energija koja nakon toga do Zemlje dolazi u vidu elektromagnetnih talasa.

7.3 4-vektor impulsa

Izraz koji povezuje relativističku energiju i impuls može da se napiše u obliku

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

koji je očigledno invarijantan. Uporedi li se ovaj izraz sa izrazom koji predstavlja kvadrat intervala u prostoru Minkovskog i ako se ima u vidu pravilo za skalarno množenje 4-vektora u ovom prostoru, on zapravo predstavlja kvadrat intenziteta sledećeg 4-vektora

$$P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right). \quad (7.14)$$

Ovaj vektor predstavlja 4-vektor impulsa. Primetimo da i za relativističku energiju koja se, podeljena sa c , pojavljuje kao vremenska komponenta ovog vektora, i za relativistički impuls \vec{p} koji predstavlja prostorne komponente 4-vektora impulsa, važe zakoni održanja. U tom smislu se može reći da postoji zakon održanja četvoroimpulsa, odnosno da se u procesima u izolovanim sistemima održava ukupni 4-vektor impulsa sistema.

7.4 Transformacija impulsa i energije

U teoriji relativnosti prostor i vreme nisu nezavisne veličine. Iz Lorencovih transformacija u kojima su povezani, i invarijantnosti intervala, sledi njihova ravnopravnost, odnosno činjenica da obrazuju jedinstveno prostor-vreme. Kao što je ranije pokazano, zakon održanja impulsa je posledica homogenosti prostora dok je zakon održanja energija posledica homogenosti vremena. U tom smislu, pri prelasku sa jednog inercijalnog sistema reference na drugi, izrazi za impuls i energiju treba da se transformišu Lorencovim transformacijama analogno prostornim koordinatama i vremenu. Odgovarajuće formule za transformaciju, u skladu sa relacijom (6.43), glase

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{u}{c^2}E}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (7.15)$$

7.5 Ekvivalencija mase i energije

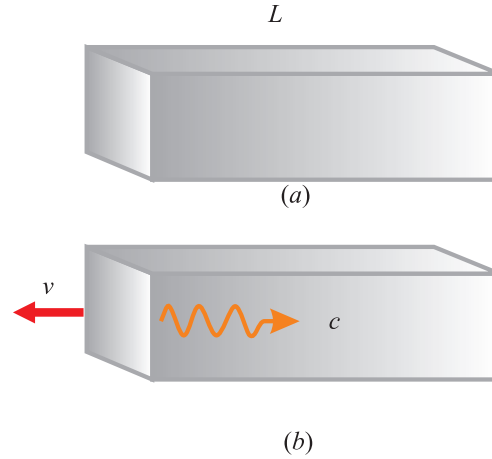
Da bi se razumela ekvivalencija mase i energije, udubimo se u Ajnštajnov misaoni eksperiment kojim je on u stvari opravdao relaciju $E = mc^2$. Zamislimo izolovanu kutiju mase M i dužine L u stanju mirovanja. Pretpostavimo da je sa leve strane kutije emitovan svetlosni puls. Ovaj puls, energije E ima impuls $p = E/c$. Kako važi zakon održanja impulsa, kutija će se pokrenuti na levo brzinom v . Ako pretpostavimo da je kutija veoma masivna, ova brzina će biti mnogo manja od brzine svetlosti, a zakon održanja impulsa daje $Mv = E/c$, odakle je

$$v = \frac{E}{Mc}.$$

Vreme koje je potrebno pulsu da stigne do drugog zida kutije je približno $\Delta t = L/c$. Za to vreme kutija će, krećući se brzinom v , preći malo rastojanje Δx , tako da važi

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{EL}{Mc^2}.$$

Nakon vremena Δt svetlost će pogoditi desni zid kutije i predaće mu odred-



Slika 7.3: (a) Kutija dužine L u stanju mirovanja. (b) Kada se sa leve strane zida emituje svetlosni puls na desno, kutija uzmakne na levu stranu dok puls ne pogodi desni zid.

jeni impuls koji će zaustaviti kutiju. Kako je međjutim reč o izolovanom sistemu, njegov centar masa ne sme da promeni svoj položaj. Ajnštajn je ovu zbunjujuću situaciju razrešio tako što je pretpostavio da svetlost, sem energije i impulsa, ima i masu. Ukoliko sa M_f označimo masu svetlosnog pulsa, iz uslova da centar mase sistema (kutija i svetlosni puls) ne sme da se pomeri, mora da važi

$$M_f L = M \Delta x.$$

Oдавde je masa svetlosti

$$M_f = \frac{M \Delta x}{L} = \frac{M}{L} \frac{EL}{Mc^2} = \frac{E}{c^2}$$

odnosno za svetlost važi relacija

$$E = M_f c^2.$$

Ajnštajn interpretacija ovog rezultata predstavlja jednu suštinsku novost za fiziku a to je da, ukoliko telo daje energiju E u vidu zračenja, njegova masa se umanjuje za iznos E/c^2 !

Iako je relacija $E = mc^2$ izvedena za svetlosnu energiju, ekvivalentnost na koju ona ukazuje je univerzalna. Jednačina (7.10), koja predstavlja

ukupnu energiju čestice, upućuje na to da čak i kada čestica miruje ($\gamma = 1$) ona još uvek poseduje ogromnu energiju, jer poseduje masu. Verovatno najočigledniji eksperimentalni dokaz ove činjenice o ekvivalentnosti mase i energije se događa u nuklearnim i interakcijama elementarnih čestica gde se oslobadja velika količina energije usled činjenice da su neke od ovakvih reakcija praćene smanjenjem mase. Oslobađanje ogromnih količina energije prilikom interagovanja elementarnih čestica praćeno smanjenjem njihove mase je osnova svih nuklearnih reakcija. U konvencionalnim nuklearnim reaktorima, jezgra uranijuma se podvrgavaju *fisiji*, odnosno reakciji u kojoj se stvara nekoliko lakših fragmenata koji imaju nezanemarljivu kinetičku energiju. Zbir masa produkata raspada uranijuma je manji od mase početnog jezgra za iznos Δm . Energija $E = \Delta mc^2$, koja prema Ajnštajnovoj relaciji odgovara ovoj razlici masa, je tačno jednaka ukupnoj kinetičkoj energiji fragmenata reakcije. Ta kinetička energija se koristi za zagrevanje vode u nuklearnim reaktorima i njeno prevodjenje u paru koja se koristi za generisanje električne energije.

U nuklearnim reakcijama koje nose naziv *fuzija*, dva atomska jezgra se spajaju u jedno, masivnije, jezgro. Fuziona reakcija u kojoj dva deuterijuma formiraju jezgro helijuma su od najveće važnosti u današnjim istraživanjima i pokušajima da se razviju reaktori u kojima će se odvijati kontrolisana fuzija. I ovom prilikom postoji razlika u masama produkta reakcije i početnih jezgara. Razlika u masi je $\Delta m = 4,25 \times 10^{-29}$ kg. Energija koja se oslobodi u jednoj fuzionoju reakciji je, prema tome, $E = \Delta mc^2 = 3,83 \times 10^{-12}$ J = 23,9 MeV. Da bi bolje shvatili o koliko velikoj energiji je reč, napomenimo da, ukoliko bi se samo 1 gram deuterijuma fuzionisao u helijum, energija koja bi se oslobodila iznosi oko 10^{12} J.

Ekvivalentnost mase i energije takodje ukazuje i na to da su zakoni održanja energije i mase zapravo jedan isti zakon.

7.6 Energija veze

Energija veze kao pojam postoji na raznim nivoima strukture materije. Tako na primer, energija veze atoma u molekulu predstavlja minimalnu energiju koju treba uložiti da bi se dati molekul razbio na sastavne atome. Ta energija je zapravo jednaka energiji koja se oslobadja prilikom formiranja molekula od atoma. Jezgra atoma takodje imaju odgovarajuće energije veze. Ovaj pojam ćemo objasniti na primeru najjednostavnijeg jezgra koje se sastoji od više od jednog nukleona. To je deutron, jezgro deuterijuma, izotopa vodonika, koji je sastavljen od jednog protona i jednog neutrona. Ovo jezgro ima masu

od $2,013553u$ a relativno lako je videti da njegova masa nije jednaka zbiru masa protona i neutrona. Naime, kako je masa protona $m_p = 1,007276u$, a masa neutrona $m_n = 1,008665u$, njihov zbir je

$$m_p + m_n = 2,015941u,$$

što je veća vrednost od mase deuterona. Razlika u masi je

$$\Delta m = 0,002388u = 3,96 \times 10^{-30} \text{ kg}.$$

Na osnovu relacije $E = \Delta mc^2$, za energiju veze se dobija

$$E = \Delta mc^2 = (3,96 \times 10^{-30} \text{ kg})(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 3,56 \times 10^{-18} \text{ J} = 2,23 \text{ MeV}.$$

Ovaj rezultat znači da je minimalna energija koja je potrebna da se uloži za razbijanje deuterona jednaka $2,23 \text{ MeV}$.

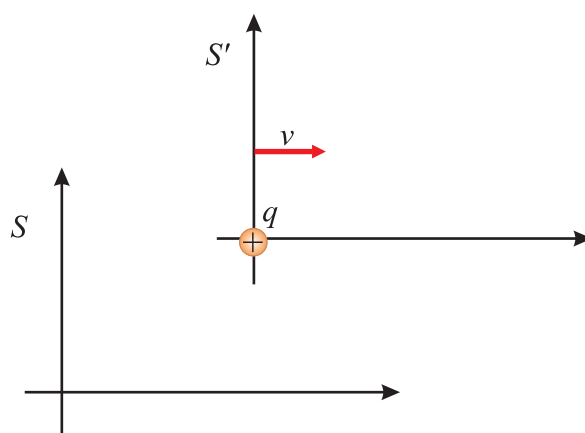
7.7 Relativnost i elektromagnetizam

Posmatrajmo dva inercijalna sistema reference S i S' u relativnom kretanju (sistem S' se kreće u odnosu na S brzinom v u pozitivnom smeru x ose) i pretpostavimo da je pozitivno naelektrisanje q u stanju mirovanja u odnosu na sistem S' (slika 7.4). U odnosu na posmatrača iz tog sistema reference ovo naelektrisanje stvara oko sebe električno polje. Međutim, za posmatrača iz sistema S , naelektrisanje se nalazi u stanju kretanja pa će oko sebe, osim električnog da stvara i magnetno polje.⁷ Ovaj primer nam ukazuje na činjenicu da električno i magnetno polje izgledaju različito u zavisnosti od toga iz kog sistema reference ih posmatramo odnosno merimo.

Posmatrano iz referentnog sistema S pozitivno probno naelektrisanje q se kreće paralelno sa provodnom žicom, brzinom \vec{v} , u odnosu na provodnik. Žica je elektroneutralna, a slobodni elektroni u njoj neka se kreću takodje brzinom v u istom pravcu i smeru. Struja teče sa desna na levo i stvara oko provodnika magnetno polje indukcije \vec{B} koje je tangenta na kružnice oko provodnika. Vektor magnetne indukcije, u delu iznad provodnika u kome se nalazi probno naelektrisanje, je vektor koji usmeren ka ravni crteža. Iz tog razloga, Lorencova sila $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ je usmerena tako da udaljava naelektrisanje od provodnika. Posmatrano iz ovog sistema reference, obzirom da je provodnik električno neutralan, na ovo telo ne deluje električna sila.

Da vidimo kako izgleda ista situacija posmatrana iz sistema S' u kome probno naelektrisanje q miruje (slika 7.5). Gledano iz njega, elektroni su u

⁷Drugi rečima, posmatrač koji se nalazi u sistemu S , može da izmeri oba polja.

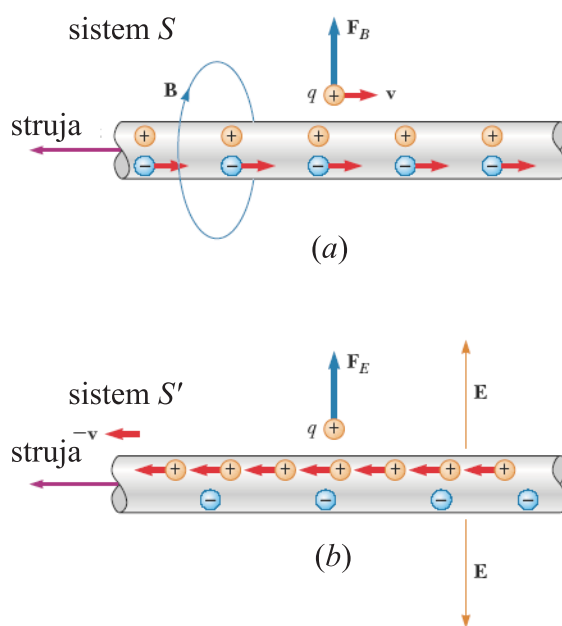


Slika 7.4: U sistemu S , pozitivno naelektrisanje q se kreće na desno brzinom v , i stvara oko sebe i magneto polje. U njegovom sopstvenom sistemu reference S ono oko sebe stvara samo električno polje.

stanju mirovanja, pozitivna naelektrisanja koja se nalaze u provodniku se kreću sa desna na levo i kroz njega protiče struja. Pošto se u ovom sistemu reference probno naelektrisanje ne kreće, gledano iz njega Lorencova sila je jednaka nuli. Međutim, pošto sila koja deluje na probno naelektrisanje postoji u sistemu S ona mora da postoji i u sopstvenom sistemu reference probnog naelektrisanja q . Kakva je priroda ove sile?

Odgovor na ovo pitanje daje specijalna teorija relativnosti. Kada se gleda iz sistema S , pozitivna naelektrisanja provodne žice su u stanju mirovanja a elektroni se kreću na desno brzinom v . Usled efekta kontrakcije dužine, elektroni se nalaze na manjoj međusobnoj udaljenosti od one na kojoj bi bili kada se ne bi kretali (odnosno od njihove sopstvene udaljenosti-udaljenosti merene u sopstvenom sistemu reference elektrona). Situacija izgleda potpuno drugačije kada se posmatra iz sistema S' . U ovom sistemu, usled istog efekta, pozitivna naelektrisanja su bliža jedna drugima, a elektroni koji se nalaze u stanju mirovanja, se nalaze na rastojanjima koja su veća od onih izmerenih iz sistema S . Usled toga, posmatrano iz sistema reference S , u žici se javlja višak pozitivnih naelektrisanja po jedinici dužine. Višak pozitivnih naelektrisanja stvara električno polje, koje je usmereno tako da odbija probno naelektrisanje od žice.

Na osnovu ove analize možemo da zaključimo da gledano iz sistema S provodnik sa strujom oko sebe stvara magnetno polje koje Lorencovom silom deluje tako da odbija probno naelektrisanje od provodnika. Posmatrano iz



Slika 7.5: (a) U sistemu S , pozitivno naelektrisanje q se kreće na desno brzinom v , a provodnik kroz koji protiče struja je stacionaran. Magnetno polje provodnika deluje na naelektrisanje q Lorencovom silom usmerenom "naviše". (b) Posmatrano iz sistema S' , provodnik se kreće nalevo brzinom $-v$ dok je naelektrisanje q stacionarno. Provodnik stvara oko sebe električno polje \vec{E} , koje deluje na naelektrisanje q silom koja ima smer od provodnika.

sopstvenog sistema reference probnog neelektrisanja ovo delovanje je izazvano postojanjem električnog polja za koje smo pokazali da je posledica efekta kontrakcije dužine.

7.8 Granica izmedju Njutnove i relativističke dinamike

Iz napred izloženog je jasno da Ajnštajnova teorija relativnosti nije teorija koja treba da zameni Njutnovu, već je teorija koja je sadrži kao granični slučaj za tela koja se kreću relativno sporo. Interesatno je zapitati se da li je moguće formulisati kriterijum koji bi nam ukazivao na to kada možemo da primenjujemo Njutnovu a kada moramo Ajnštajnovu mehaniku.

Pretpostavimo da instrument kojim vršimo merenja ima tačnost od n sigurnih cifara. U tom slučaju, ako je relativna greška prilikom merenja manja od 10^{-n} , obzirom na tačnost instrumenta kojim merimo, ne možemo je registrovati. Pokušajmo da procenimo pri kolikoj brzini kretanja neće moći da se registruje razlika izmedju na primer relativističkog p i klasičnog impulsa p_{cl} .

Relativna greška pri merenju impulsa je

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{p - p_{cl}}{p} = 1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (7.16)$$

Da bi bili u oblasti brzina u kojima možemo da primenjujemo nerelativističku fiziku, ova greška (u pravljenju razlike izmedju relativističkog i nerelativističkog impulsa) mora biti manja od tačnosti instrumenta, odnosno od 10^{-n} , to jest mora da važi

$$1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} < 10^{-n}, \quad (7.17)$$

odnosno

$$1 - 10^{-n} < \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (7.18)$$

Kvadriramo li ovu nejednakost (što je moguće jer je jedinica veća od 10^{-n} , dobijamo

$$1 - 2 \cdot 10^{-n} + 10^{-2n} < 1 - \frac{u^2}{c^2}, \quad (7.19)$$

ili

$$u < c\sqrt{2 \cdot 10^{-n} - 10^{-2n}}. \quad (7.20)$$

Uzmemo li u obzir da je $10^{-2n} \ll 10^{-n}$, konačno se dobija

$$u < c\sqrt{2 \cdot 10^{-n}}. \quad (7.21)$$

Neka se na primer merenje vrši sa tačnošću do šest značajnih cifara ($n = 6$). Tada je $u < c\sqrt{2 \cdot 10^{-6}} = 423 \text{ km/s}$.⁸ Na taj način, pri brzinama kretanja koje ne prelaze četiri stotine kilometara u sekundi, nerelativistički impuls se razlikuje od relativističkog za manje od 10^{-6} , to jest za manje od jednog desetihiljaditog dela procenta.

U realnim uslovima kretanja velikih tela, njihova brzina je znatno manja od navedene granične, čak i kosmičke rakete se, kao što je već napomenuto, kreću brzinom od oko 10 km/s, odnosno imaju oko 40 puta manju brzinu. Sa druge strane, i merenja u tehnici se obično ne izvode sa navedenom tačnošću. Iz svega navedenog je jasno da će u ovim uslovima opisivanje kretanja primenom Njutnovih zakona dati idealno tačne rezultate.

U svetu mikročestica se međjutim često sreću velike brzine koje su bliske brzini svetlosti u vakuumu. U tim slučajevima se dobri rezultati dobijaju jedino primenom teorije relativnosti. Štaviše, upravo je u analizi kretanja brzih mikročestica eksperimentalno dokazano važenje relativističkog izraza za impuls.

Klasifikacija tipova kretanja čestica obzirom na njihove brzine izgleda ovako:

- *Njutnovska oblast.* Brzina kretanja tela je toliko mala da instrumenti kojima vršimo merenja ne mogu da registruju relativističke efekte usporavanja vremena, skraćivanja dužina, ... U ovoj oblasti je dozvoljena primena zakona njutnovske mehanike, odnosno ona daje jednake rezultate kao i relativistička ali uz daleko jednostavniji račun nego što bi bio onaj koji bi trebalo sprovesti u okviru Ajnštajnovne mehanike.
- *Relativistička oblast.* Brzina kretanja tela je dovoljno velika tako da su relativistički efekti merljivi. U ovoj oblasti dobre rezultate daje jedino primena relativističke mehanike.
- *Ultrarelativistička oblast.* Brzina tela je skoro jednaka brzini svetlosti u vakuumu. Preciznije rečeno, brzina tela je toliko bliska brzini svetlosti da je to nemoguće izmeriti instrumentima, odnosno njihova osetljivost je manja od te razlike. I u ovoj oblasti je naravno neophodno primenjivati relativističku mehaniku.

⁸Navedena brzina čini oko 1% od brzine svetlosti.

7.8. GRANICA IZMEDJU NJUTNOVE I RELATIVISTIČKE DINAMIKE 331

Ukoliko za pretpostavljenu tačnost instrumenata kojima vršimo merenja uzmemo onu koja je već pretpostavljena, tj. 10^{-6} , klasična oblast brzina bi bila oblast brzina manjih od 400km/s, ultrarelativistička oblast je oblast brzina koje se razlikuju od brzine svetlosti manje od 300 km, a preostali dijapazon brzina je relativistička oblast.

7.8.1 Kretanje čestice u polju konstantne sile

Kao ilustraciju navedene analize razmotrimo kretanje (ubrzavanje) čestice konstantom silom. Osnovni zakon dinamike ne menja formu

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (7.22)$$

Razdvajanjem promenljivih i integracijom od t_1 do t_2 , imajući u vidu da je sila konstantna dobija se

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \vec{F}(t_2 - t_1).$$

Ukoliko se za početni trenutak uzme da je nulti i da je čestica krenula iz stanja mirovanja, uz $t_2 = t$, prethodni izraz u skalranoj formi postaje

$$p = Ft, \quad (7.23)$$

iz koga se vidi da, kao i u nerelativističkom slučaju, kada na telo deluje konstantna sila, impuls tela raste sa vremenom. Postavlja se logično pitanje, a to je da li je identična situacija i sa brzinom? Da bi videli kako se ona ponaša sa vremenom, ubacimo u prethodni izraz relativistički izraz za impuls i rešimo ga po brzini

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Ft,$$
$$v(t) = \frac{a_{cl}t}{\sqrt{1 + \frac{a_{cl}^2 t^2}{c^2}}}, \quad a_{cl} = \frac{F}{m}$$

(sa a_{cl} je označeno klasično ubrzanje). Za dalju analizu je pogodno da se ovaj izraz napiše kao

$$v(t) = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a_{cl}^2 t^2}}}. \quad (7.24)$$

Iz ovog izraza se vidi da je uvek $v(t) < c$, a pri $t \rightarrow \infty$ brzina tela postaje sve bliža brzini svetlosti. Za slučaj ne mnogo velikih vremena $t \ll c/a_{cl}$, se iz ovog izraza dobija

$$v(t) \approx a_{cl}t,$$

odnosno izraz koji u nerelativističkoj mehanici opisuje promenu brzine kada pri konstatnom ubrzanju.

Navedimo neke kvantitativne procene. Posmatrajmo raketu koja se kreće sa ubrzanjem (klasičnim) $a_{cl} = g = 9,8m/s^2$ (pri kretanju takvim ubrzanjem kosmonauti osećaju gravitaciju na koju su navikli na Zemlji). Prema klasičnom zakonu kretanja raketa bi dostila brzinu svetlosti za vreme

$$t_{cl} = \frac{c}{a_{cl}} = \frac{3 \cdot 10^8}{9,8} = 3,06 \cdot 10^7 s,$$

odnosno, otprilike za jednu godinu ($365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s = 3,1536 \cdot 10^7s$). Medjutim, nakon jedne godine kretanja ovim ubrzanjem, brzina rakete će biti

$$v(t_{cl}) = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a_{cl}^2 t_{cl}^2}}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = 0,707c.$$

Nakon još jedne godine brzina bi bila $v(2t_{cl}) = \frac{c}{\sqrt{1+0,25}} = 0,894c$, kroz 5 godina $v(5t_{cl}) = \frac{c}{\sqrt{1+0,04}} = 0,980c$, dok je kroz 10 godina $v(10t_{cl}) = \frac{c}{\sqrt{1+0,01}} = 0,995c$. Koliko god dugo da se kreće jednakim ubrzanjem, raketa nikad neće dostići brzinu svetlosti.

Glava 8

Opšta teorija relativnosti

Specijalna teorija relativnosti (STR), čije osnovne postavke su izložene u prethodnom poglavlju, predstavlja veoma elegantnu teoriju koja je osim toga u velikoj meri izmenila osnovne postavke fizike kao nauke. Ona međutim ima dva velika nedostatka koja je upravo Ajnštajn uočio i 1916. godine otklonio formulisavši **opštu teoriju relativnosti** (OTR). Kao prvo STR razmatra fizičke zakone i njihove relacije samo u inercijalnim sistemima reference. Drugo, u njoj se ne razmatra gravitacija, odnosno medjudelovanje tela gravitacionom interakcijom.¹

Jedan od problema sa gravitacijom u Njutnovoj teoriji je u tome što ona zavisi samo od međusobnog položaja tela, što implicira da se ona prenosi trenutno, tj. beskonačno velikom brzinom. Ovo je u suprotnosti sa postulatom STR da je najveća poznata brzina brzina svetlosti u vakuumu c . To je upućivalo da treba preformulisati teoriju gravitacije na takav način da se uvaži činjenica. Ajnštajn je to uradio po uzoru na teoriju elektromagnetne interakcije, uvodeći pretpostavku da se i gravitaciona interakcija prenosi (posredstvom gravitacionog polja) brzinom svetlosti.² Slično kao što je to bilo u STR, i ovde se nerelativistički (Njutnov) zakon gravitacije pojavljivao u slučaju slabih gravitacionih polja.

Opšta teorija relativnosti zapravo, kao što će biti pokazano, dovodi u blisku vezu sisteme reference koji nisu inercijalni i gravitacionu interakciju. Da bi lakše razumeli dubinu ove veze pozabavimo se za početak takvim sistemima reference.

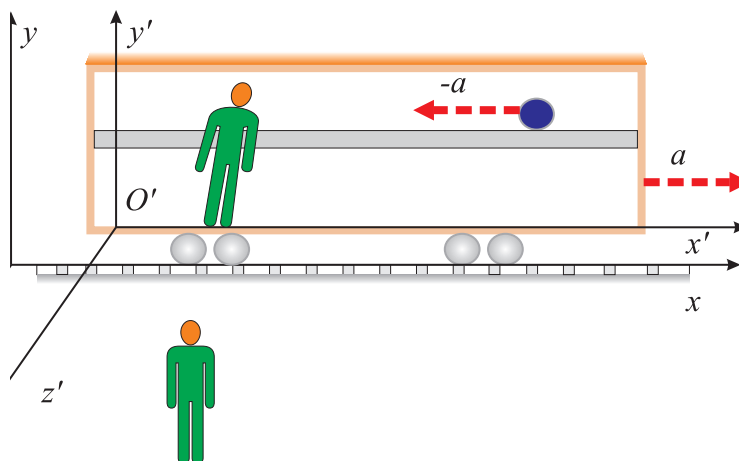
¹Kao što će se kasnije pokazati, ispostavilo se da u ovim nedostacima zapravo postoji veoma tesna povezanost.

²U Ajnštajnovoj teoriji gravitacionog polja se pojavljuju i vremenski zavisna polja (odgovaraju pulsarima) i gravitacioni talasi.

8.1 Pojave u ubrzanim sistemima reference

U prethodnim glavama su opisivane pojave koje su se odigravale u inercijalnim sistemima reference. Interesantno je, međutim, zapitati se kako te iste pojave izgledaju u sistemima reference koji se kreću ubrzano u odnosu na inercijalne sisteme. Najjednostavniji slučaj takvog sistema je sistem koji se kreće u odnosu na inercijalan *pravolinijski i sa konstantnim ubrzanjem* $a = \text{const.}$. Pretpostavimo još i da se taj sistem kreće kratak vremenski interval, tako da je njegova brzina mnogo manja od brzine svetlosti, tj. $v = at \ll c$.

Bez obzira na ovakva ograničenja, dobićemo sve principijelne zakonitosti koje su važne za analizu kretanja u ubrzanim sistemima reference.



Slika 8.1: .

Pretpostavimo da posmatramo dovoljno dugačak vagon, duž koga se nalazi horizontalan sto. Po njemu može da se bez trenja kreće masivna lopta (slika 8.1). Proanalizirajmo kako se pojave, koje se odigravaju u vagonu, opisuju u sistemu reference S' vezanom za njega. Ogledi pokazuju da, kada se vagon kreće ubrzanjem a u odnosu na Zemlju, za koju je vezan sistem S , se lopta kreće duž stola ubrzanjem $-a$ u odnosu na vagon. Opišimo tu pojavu sa stavnošita oba sistema reference.

Gledano iz s i s t e m a S : Na loptu ne deluje nikakva sila i po zakonu inercije njena brzina se ne menja, odnosno, u odnosu na Zemlju, njeno ubrzanje je nula. Kako se vagon kreće u odnosu na Zemlju ubrzanjem a , ubrzanje lopte u odnosu na vagon je

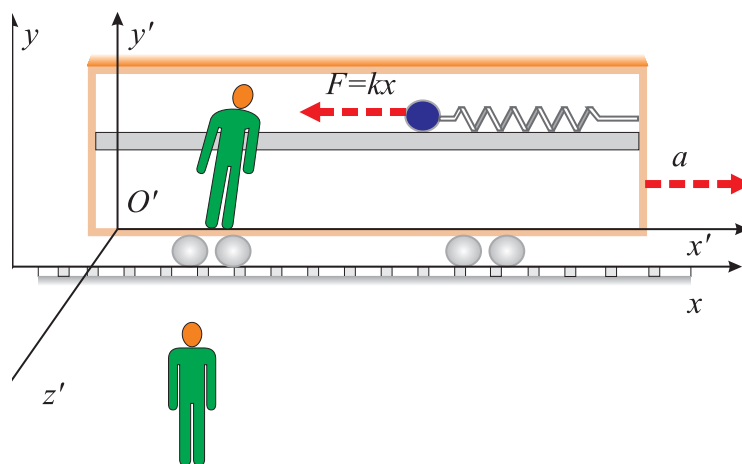
$$a' = -a$$

Gledano iz s i s t e m a S' : Na loptu ne deluje nikakva sila, ali ona ipak ima ubrzanje $-a$ u odnosu na njega. Odatle sledi da u sistemu reference vezanom za vagon, obzirom da lopta poseduje ubrzanje, ne važi zakon inercije. jer je lopta dobila ubrzanje koje nije izazvano delovanjem realne sile. Krivac za ovo je kretanje vagona u odnosu na inercijalni sistem reference ubrzanjem

$$a = -a'$$

Dakle, u ubrzanim sistemima reference ne važi zakon inercije. Taj sistem je prema tome *neinercijalan*.

I dalje ćemo posmatrati situaciju u vagonu ali pretpostavimo da je lopta povezana oprugom sa prednjim krajem vagona (slika 8.2). Dok vagon miruje u odnosu na Zemlju ili se kreće u odnosu na nju ravnomerno pravolinijski, opruga ostaje nedeformisana. Ako vagon počne da se kreće sa ubrzanje, opruga se rasteže i ostaje u deformisanom stanju dok god se vagon kreće ubrzano. Lopta će u tom slučaju mirovati u odnosu na vagon. Razmotrimo kako izgleda i ova situacija iz oba sistema reference.



Slika 8.2: .

S i s t e m S : Lopta miruje u odnosu na vagon, ona se zajedno sa njim kreće u odnosu na Zemlju ubrzanjem a . Po drugom Njutnovom zakonu, ubrzanje je izazvano silom $F = ma$. Ta sila na loptu deluje od strane deformisane opruge

$$F = kx = ma.$$

S i s t e m S' : Lopta miruje u odnosu na vagon, iako deformisana opruga deluje na nju silom $F = kx$. Odatle sledi, da u sistemu reference vezanom za vagon, ne važi drugi Njutnov zakon. Razlog je što se vagon kreće u odnosu na inercijalni sistem reference ubrzanjem

$$a = \frac{F}{m} = \frac{kx}{m}.$$

8.2 Inercijalne sile

Možemo da zaključimo da u neinercijalnim sistemima reference ne važe Njutnovi zakoni. Ili bar može da se kaže da ne važe u izvornoj formi. Da bi došli do forme drugog Njutnovog zakona vratimo se ponovo na analizu opisanih eksperimenata sa ubrzanim vagonima. U prvom slučaju, kada lopta ne interaguje sa drugim telima, ona se kreće u odnosu na vagon ubrzanjem $a_l = -a$, pa se na taj način, u sistemu reference vagona lopta ponaša kao da na nju deluje sila

$$\vec{F} = m\vec{a}' = -m\vec{a},$$

koja joj zapravo saopštava ovo ubrzanje.

U drugom ogledu na loptu deluje sila deformisane opruge, silom $\vec{F} = -k\vec{\Delta}x e_x$. Ta sila međjutim ne saopštava ubrzanje lopti u odnosu na vagon, jer lopta miruje u odnosu na njega. To znači da na loptu u sistemu reference vagona, deluje još jedna sila koja tačno uravnotežava silu \vec{F} . Obzirom na veličinu ubrzanja koje ta sila saopštava lopti ona je zadata relacijom $\vec{F} = -m\vec{a}$. Ova sila se naziva *inercijalna* i obično se označava sa \vec{F}_i .

Osnovna jednačina dinamike, u neinercijalnom sistemu reference, prema tome glasi

$$\vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}', \quad (8.1)$$

gde je \vec{F} suma svih sila interakcije a F_i inercijalna sila, dok je \vec{a}' ubrzanje tela u odnosu na neinercijalni sistem reference.

8.3 Osobine inercijalnih sila

Inercijalne sile imaju niz osobina koji ih razlikuju od sila interakcije³ a najvažnije su:

³Pod silama interakcije mislimo na do sada pominjane elastične, gravitacione, električne i sile trenja.

- Inercijalna sila nije izazvana interagovanjem tela, već ubrzanim kretanjem samog sistema reference, i iz tog razloga na inercijalne sile je neprimenljiv treći Njutnov zakon;⁴
- Inercijalna sila deluje na telo samo u neinercijalnom sistemu reference, u inercijalnim sistemima takvih sila nema;
- Za bilo koji sistem tela koja se nalaze u neinercijalnom sistemu reference, inercijalne sile su spoljašnje sile. Ovo znači da u ubrzanim sistemima reference ne postoje zatvoreni sistemi pa prema tome ne važe ni zakoni održanja;
- Inercijalna sila, slično gravitacionoj, je proporcionalna masi tela, pa se u polju inercijalne sile, kao i u gravitacionom polju, sva tela kreću istim ubrzanjem, nezavisno od njihove mase;

U inercijalnim sistemima reference nema inercijalnih sila, u njima se termin *sila* primenjuje samo kao mera interakcije tela. U neinercijalnim sistemima pak, inercijalne sile deluju kao i sile interakcije. Kada nas na primer, pri naglom kočenju vagona, inercijalna sila pogura napred, tu silu osećamo realno baš kao i silu gravitacije. Na isti način, kosmonaut oseća inercijalnu silu koja ga lepi za njegovo sedište prilikom ubrzavanja rakete u kojoj se nalazi.

8.4 Prostor i vreme u neinercijalnim sistemima reference

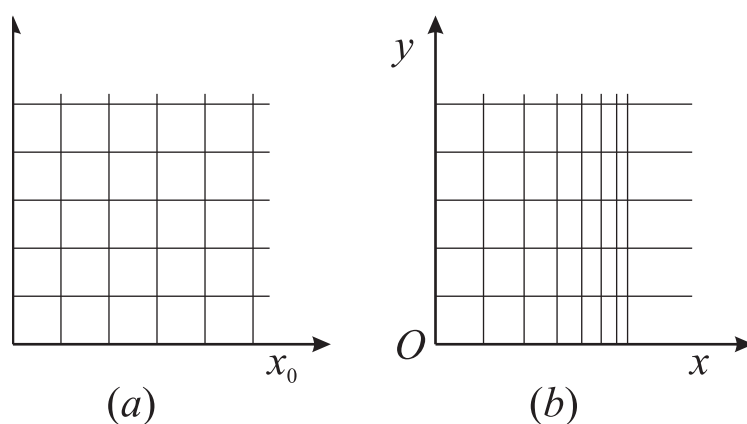
Kao što je to nekoliko puta već napomenuto, u inercijalnim sistemima reference je vreme homogeno, a prostor je homogen i izotropan. Geometrijska svojstva homogenog i izotropnog prostora se opisuju pomoću euklidske geometrije.

Osnove euklidske geometrije čini niz postulata a za nas je u ovom trenutku bitan peti postulat, koji se može formulisati na sledeći način: kroz tačku, koja ne leži na posmatranoj, moguće je povući **samo jednu** pravu liniju koja je paralelna posmatranoj pravoj. Iz ovog postulata sledi da je zbir unutrašnjih uglova trougla jednaka π radijana (180°). Primetimo takodje da je u euklidskoj geometriji najkraće rastojanje između dve tačke odsečak prave linije koja prolazi kroz njih.

⁴Ova činjenica zapravo znači da u neinercijalnim sistemima reference ne važi ni treći Njutnov zakon.

Radi uprošćavanja daljih razmatranja ograničimo se na analizu geometrijskih odonosa u ravni, na primer xOy .

Neka se posmatrač nalazi u inercijalnom sistemu reference koji je na primer vezan za Zemlju. U ovom sistemu su, kao što smo napomenuli, prostor i vreme homogeni, a prostor izotropan. U homogenom i izotropnom prostoru dužina odsečka ne zavisi od toga u kom delu prostora se on nalazi. Pretpostavimo da smo koordinatne ose izdelili na odsečke jednake dužine $\Delta x_0 = \Delta y_0 = l_0$ i da smo kroz te tačke povukli prave koje su paralelne osama. Na taj način smo ravan x_0Oy_0 razbili na elementarne ćelije koje imaju oblik jednakih kvadrata (slika 8.3 (a)).



Slika 8.3: (a) i (b).

Na osnovu homogenosti vremena, u inercijalnim sistemima reference, interval vremena između dva događaja Δt_0 ne zavisi od toga u kojoj tački prostora se odigravaju posmatrani događaji.

Posmatrač koji se nalazi u neinercijalnom sistemu reference (u na primer vagonu koji se kreće ubrzano), će pak da primeti da je prostor nehomogen (slika 8.3 (b)). U stvari, dužina odsečka u pokretnom sistemu reference, koji u datom trenutku vremena ima brzinu v , je manja od one koju on ima u sistemu reference u kome miruje u skladu sa relacijom

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (8.2)$$

Ukoliko je posmatrač u početku mirovao a zatim se kretao ravnomerno ubrzano i prešao neki put x_0 u odnosu na Zemlju, njegova brzina će nakon toga biti

$$u^2 = 2ax_0,$$

gde je a ubrzanje vagona. Zamena vrednosti za brzinu u izraz (8.4) daje

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{2ax_0}{c^2}}. \quad (8.3)$$

Nakon što je prešao još toliki put, odnosno ukupni put $2x_0$, njegova brzina je još veća i iznosi

$$uv^2 = 2a2x_0,$$

pa će, gledano iz njega, dužina odsečka biti, u skladu sa relacijom (8.4) biti

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{2a2x_0}{c^2}}. \quad (8.4)$$

Na osnovu ovoga sledi da će dužina odsečaka zavisiti u kojoj oblasti prostora se nalazi. Drugim rečima, u tačkama sa različitim apscisama, dužina jednog istog odsečka će biti različita (slika 8.3 (b)).

Odsecci duž ordinate ne menjaju svoju dužinu jer duž nje nema kretanja, $\Delta y = \Delta y_0$.

U neinercijalnom sistemu reference prostor nije samo nehomogen već i neizotropan (njegove osobine zavise od izbora pravca). Naime, ako obratimo pažnju na sliku (8.3 (b)), u pozitivnom smeru apscisne ose veličina elementa dužine opada a duž negativnog raste. Duž ordinatne ose pak, kao što smo zaključili, nema promene dužine odsečaka. Ovo znači da postoji mogućnost da se uz pomoć fizičkog eksperimenta napraviti razlika između raznih pravaca u ovakvom prostoru, što dokazuje njegovu neizotropnost.

Na ovom mestu je važno primetiti da usled nehomogenosti i neizotropnosti prostora, **u neinercijalnim sistemima reference ne važe zakoni održanja impulsa i momenta impulsa.**

Relativno lako se pokazuje da je vreme u neinercijalnim sistemima reference, kao i prostor, nehomogeno. U pokretnom sistemu reference, koji se u datom momentu vremena kreće brzinom u , intervali između dva događaja su povezani relacijom

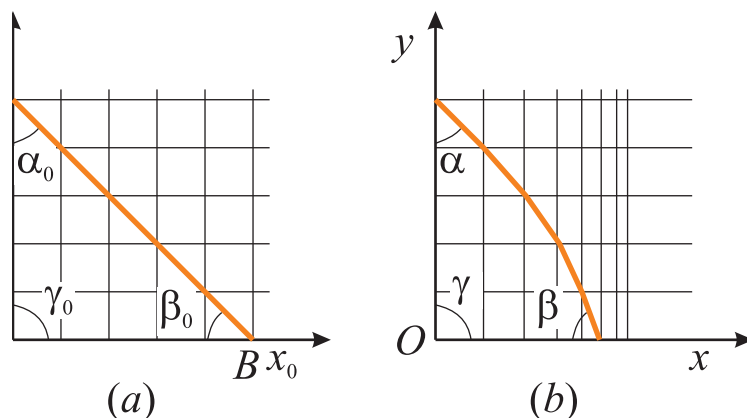
$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Na osnovu prethodne analize, ova relacija može da se zapiše kao

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{2ax_0}{c^2}}}, \quad (8.5)$$

odakle sledi navedeni zaključak o nehomogenosti vremena. Dakle, u neinercijalnim sistemima reference, kao posledica nehomogenosti vremena, **ne važi ni zakon održanja energije.**

Posledica nehomogenosti i neizotropnosti prostora i vremena u neinercijalnim sistemima reference, je činjenica da je geometrija u njima neeuklidska. U cilju dokazivanja ovog tvrdjenja razmotrimo kako u datom prostoru izgleda odsečak prave koja nije paralelna koordinatnim osama. Nacrtajmo u inercijalnom sistemu reference odsečak AB koji je nagnut pod uglom od $\pi/4$ u odnosu na koordinatne ose (slika 8.4 (a)).



Slika 8.4: (a) i (b).

U neinercijalnom sistemu reference odsečak AB prelazi u izlomljenu liniju (slika 8.4 (b)) (ukoliko bi elemente dužine Δx učinili beskonačno malim, ova izlomljena linija bi prešla u krivu). Obzirom na tu činjenicu, suma uglova dobijenog krivolinijskog trougla će biti veća od 180° ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$) pa geometrija više neće biti euklidska. Osim ovoga, najkraće rastojanje između tačaka A i B nije odsečak prave linije već luk neke krive, što je također nešto što geometriju ovakvog prostora razlikuje od euklidove.⁵

Prostor, čija svojstva se opisuju geometrijom koja nije euklidska, se često naziva "iskrivljenim" prostorom. Smisao ovog termina se sastoji u tome što u neeuclidovom prostoru linije najkraćeg rastojanja između dve tačke nisu

⁵Prva ideja o mogućem postojanju prostora čija geometrija nije euklidska potiče od N. I. Lobačevskog (1826.). On je pokazao da je moguće formulirati neprotivurečnu geometriju u kojoj ne važi peti postulat Euklidske geometrije. Istovremeno je izneo i ideju o mogućnosti da geometrija realnog sveta nije euklidska.

Savremenici Lobačevskog nisu uzeli kao ozbiljne njegove ideje o takvoj geometriji smatrajući je potpuno nerealnom obzirom da je rušila postavke geometrije koja je primenjivana više od dve hiljade godina. Smatrali su da je geometrija Lobačevskog suprotna zdravom razumu. Na sličan način su, više decenija kasnije mnogi naučnici reagovali i na ideje teorije relativnosti. Predviđanja Lobačevskog o neeuclidovoj prirodi sveta koji nas okružuje su u potpunosti potvrđene upravo u opštoj teoriji relativnosti.

prave linije već neke krive koje se nazivaju "geodezijske linije". Primeri za ovo su lukovi velikih krugova na površini lopte ili zavojnice na površini cilindra.

8.5 Princip ekvivalencije

Inercijalne sile, kao i gravitaciona sila su proporcionalne masama tela, na koja deluju. Iz tog razloga se tela, u polju inercijalne sile, kao i u polju gravitacione sile, nezavisno od njihove mase, kreću istim ubrzanjem. Na taj način se inercijalne sile po svojim manifestacijama ne mogu razlikovati od gravitacione. Da bi ovo ilustrovali razmotrimo još jednom pojavu u vagonu koji se ubrzano kreće i koji je prikazan na slici 8.2. Na loptu deluje elastično deformisana opruga silom $F = -kx$, ali ta sila ne saopštava telu ubrzanje u odnosu na vagon. To je moguće ukoliko na loptu, osim sile elastičnosti deluje još jedna sila, jednaka po intenzitetu, istog pravca ali suprotnog smera. Medjutim, sva druga tela koja se nalaze u vagonu, osim opruge ne interaguju sa loptom. Do kakvih zaključaka se može doći?

P r v i m o g u ć i z a k l j u č a k. *Vagon je neinercijalan sistem reference i elastičnu silu uravnotežava inercijalna sila $\vec{F} = -\vec{F}_i$.* Da bi bili sigurni da je reč o inercijalnoj sili potrebno je na oprugu kačiti tela različitih masa. Kako je inercijalna sila proporcionalna masi tela, istezanje opruge će takodje biti proporcionalno masi:

$$x = -\frac{F}{k} = \frac{F_i}{k} = \frac{ma}{k} = \xi m,$$

gde je

$$\xi = \frac{a}{k}.$$

D r u g i m o g u ć i z a k l j u č a k. *Vagon je inercijalni sistem reference ali se nalazi u gravitacionom polju i silu elastičnosti uravnotežava gravitaciona sila: $\vec{F} = -\vec{F}_g$.* Da bi proverili da li je to gravitaciona sila potrebno je da na oprugu zakačimo tela različitih masa. Kako je gravitaciona sila proporcionalna masi tela, i istezanje opruge će takodje biti proporcionalno masi:

$$x = -\frac{F}{k} = \frac{F_g}{k} = \frac{mg}{k} = \xi m,$$

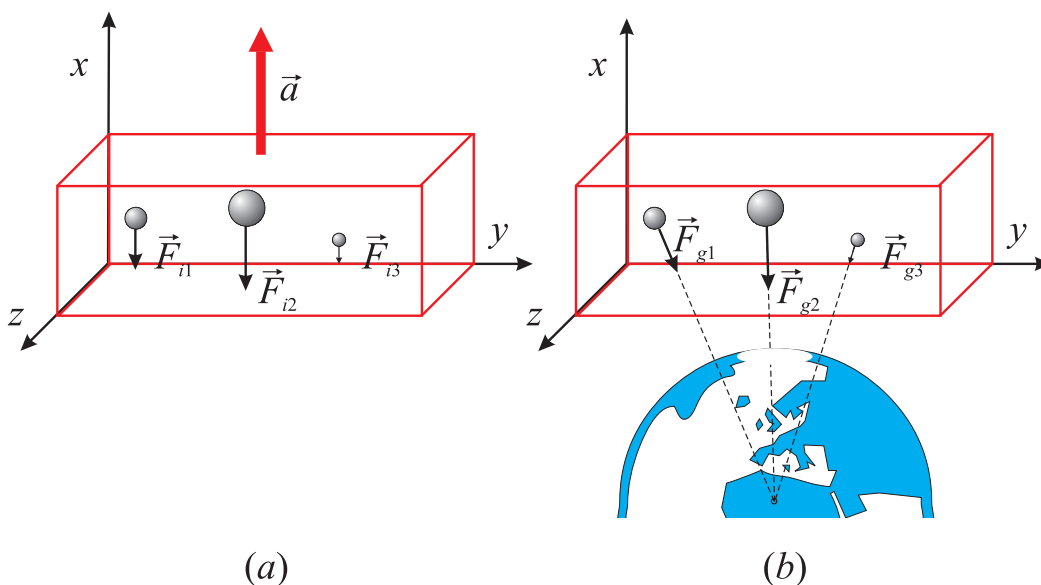
gde je

$$\xi = \frac{g}{k}.$$

Na taj način, pojave u *inercijalnom sistemu*, koji se nalazi u *homogenom gravitacionom polju*, i pojave u *neinercijalnom sistemu koji se kreće konstantnim ubrzanjem se odvijaju na potpuno isti načina*. Ovo tvrdjenje koje je prvi formulisao Ajnštajn i nalazi se u osnovi relativističke teorije gravitacije se naziva *princip ekvivalencije*.

Pri ovome je potrebno obratiti pažnju na tačan iskaz principa ekvivalencije. On naime važi samo u malim delovima prostora, toliko malim da se u njima gravitaciono polje može smatrati homogenim. U velikim oblastima prostora, gde se ispoljava nehomogenost gravitacionog polja, ne postoji mogućnost da se izabere takav neinercijalni sistem reference, u kome bi inercijalne sile imale isti pravac i smer kao gravitaciona sila.

Razlog je u tome što je gravitaciono polje *centralno-gravitaciona sila* je usmerena ka centru mase koja je izaziva, na primer ka centru Zemlje, i menja se obrnuto proporcionalno kvadratu rastojanja. Ne postoji ubrzanje sistema reference kojim bi mogla da se dobije takva inercijalna sila jer prilikom ubrzavanja sistema reference inercijalne sile su paralelne jedna drugoj (slika 8.5).



Slika 8.5: (a) i (b).

Iz ove analize sledi da nije reč o tome da iz principa ekvivalencije sledi da je gravitaciono polje "prividno" i da je uvek moguće izabrati takav sistem reference u kome njega neće biti. I sam Ajnštajn je stalno upozoravao

na ovakvu moguću pogrešnu interpretaciju principa ekvivalencije. U stvari radi se samo o tome da su osobine prostora i vremena u gravitacionom polju i neineracionalnim sistemima reference analogne. To zapravo predstavlja i suštinu Ajnštajnovne teorije gravitacije čije će osnovne ideje biti predstavljene u daljem tekstu.

8.6 Elementi opšte teorije relativnosti

8.6.1 Prostor i vreme u gravitacionom polju

U blizini masivnih tela postoji gravitaciono polje. Ono se, slično električno polju, karakteriše vektorom jačine polja \vec{G} , koji je istovetan vektoru ubrzanja tela u datoj tački, i skalarnom veličinom φ -potencijalom gravitacionog polja. U homogenom polju, usmerenom duž apscisne ose, potencijal je jednak $\varphi = gx$, gde je g ubrzanje slobodnog pada a x rastojanja tačke polja od nivoa nultog potencijala. Obično se ordinatna osa postavlja tako da leži na nivou koji se uzima za nulti potencijal. Iz principa ekvivalencije sledi da će osobine prostora i vremena u ovakvom gravitacionom polju biti iste kao i u odgovarajućem neineracionalnom sistemu reference.

Neka je u tački, gde je potencijal gravitacionog polja jednak nuli, element dužine duž apscisne ose jednak Δx_0 ; interval vremena u toj tački polja neka je Δt_0 . U bilo kojoj drugoj tački polja, gde je njegov potencijal $\varphi \neq 0$, element dužine $\Delta x \neq \Delta x_0$, a interval vremena $\Delta t \neq \Delta t_0$. Za njihovo izračunavanje možemo iskoristiti formule () i (). Kako je na osnovu principa ekvivalencije $g = a$, važiće da je proizvod $ax = gx = \varphi$, pa za odgovarajuće elemente dobijamo

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}, \quad (8.6)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}}. \quad (8.7)$$

Prema tome, u gravitacionom polju su, kao i u neineracionalnim sistemima reference, vreme nehomogeno a prostor je neeuklidski, odnosno nehomogen je i neizotropan. Na taj način je potvrđeno genijalno predviđanje Lobačevskog da je geometrija realnog prostora neeuklidska.

8.6.2 Opisivanje kretanja u gravitacionom polju

Razmotrimo kako se sa ovakve tačke gledišta opisuje kretanje tela u gravitacionom polju. U njutnovskoj mehanici, pri odsustvu gravitacije, tela se

kreću po inerciji, odnosno ravnomerno i pravolinijski. Kada se telo nadje u gravitacionom polju, pod dejstvom sile se narušava inercijalno kretanje. Telo dobija ubrzanje i kreće se neravnomerno i nepravolinijski.

U skladu sa opštom teorijom relativnosti (Ajnštajnovom teorijom gravitacije) *tela se uvek kreću po inerciji* nezavisno od postojanja ili ne gravitacionog polja. Kretanje po inerciji je kretanje po *geodezijskoj liniji* (to jest po linijama najkraćeg rastojanja između datih tačaka) a na kretanje se troši *minimalo sopstveno vreme* (odnosno vreme mereno po satu povezanom sa telom koje se kreće).

Ukoliko se telo kreće van gravitacionog polja, prostor je homogen i izotropan a vreme homogeno. Odatle sledi da će se telo kretati po pravolinijskoj trajektoriji, a da će brzina kretanja da bude konstanta veličina jer iz $\Delta x = const$ i $\Delta t = const$, sledi da je i $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = const$.

Ukoliko se telo kreće u gravitacionom polju, gde je vreme nehomogeno a prostor i nehomogen i neizotropan, geodezijska linija više neće biti prava linija, već nekakva kriva čiji će oblik zavistiti od strukture gravitacionog polja, odnosno od raspodele masa koje ga izazivaju. To znači da će brzina tela da bude promenljiva veličina, jer element dužine i interval vremena su funkcije gravitacionog potencijala (8.6) i (8.7).

Polazeći od ovakvih razmatranja Ajnštajn je uspeo da formuliše relativističku teoriju gravitacije u kojoj se kao granični slučaj slabih polja i malih brzina kretanja tela u nima, javlja njutnova teorija gravitacije.

8.6.3 Tri potvrde OTR

Novi pogled na svojstva prostora i vremena je Ajnštajnu, osim dobijanja nove teorije gravitacije, omogućio da predvidi i tri nova efekta koja nije predviđala njutnova teorija gravitacije.

Precesija perihela Merkura

Ajnštajn je, pre svega, dokazao da se planete kreću oko Sunca ne po elipsama već po nezatvorenim krivim linijama. Svaka od tih krivih linija može da se, približno, predstaviti kao elipsa čija osa lagano rotira u ravni orbite.

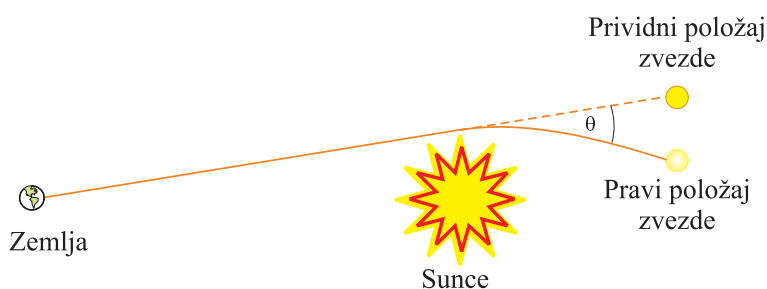
Za planete koje su daleko od Sunca, registrovanje ovog efekta je jako teško jer je on relativno mali. Kod Merkura, koji je od svih planeta najbliži Suncu, obzirom da je na tom mestu gravitaciono polje Sunca najveće i da se on kreće najbrže od svih planeta, navedeni efekat je najveći. Ispostavilo se da je pomeraj ose orbite Merkura oko 43" za stoleće. Ova anomalija u kretanju Merkura je već bila primećena od strane astronoma sredinom XIX

veka ali nije mogla biti objašnjena. Najpreciznija astronomska merenja su za ovaj efekat dala $(42,6 \pm 0,9)''$ za sto godina, što se odlično uklapalo u predviđanja Ajnštajnovе teorije gravitacije.

Skretanje svetlosti u blizini masivnih tela

Drugi efekat koji je proisticao iz ove teorije je krivljenje putanje svetlosnih zraka u gravitacionom polju. Svetlost se uvek kreće po geodezijskim linijama, a u gravitacionom polju to su krive linije čiji tačan oblik zavisi od samog gravitacionog polja odnosno od masa koje ga stvaraju.

U Sunčevom sistemu oblast sa najjačom gravitacijom je u blizini površine Sunca. Iz tog razloga skretanje svetlosti u gravitacionom polju u principu može da se registruje na sledeći način. Potrebno je fotografisati deo nebeske sfere u blizini Sunca, zatim taj isti deo, kada se Sunce više ne nalazi tamo. Pri tome se primećuje da je došlo do prividnog pomeranja položaja zvezda za neki ugao θ (8.6).



Slika 8.6:

Fotografisanje neba je naravno neophodno uraditi tokom potpunog pomračenja Sunca jer u suprotnom slaba svetlost zvezda ne bi bila vidljiva od jake svetlosti koju emituje Sunce.

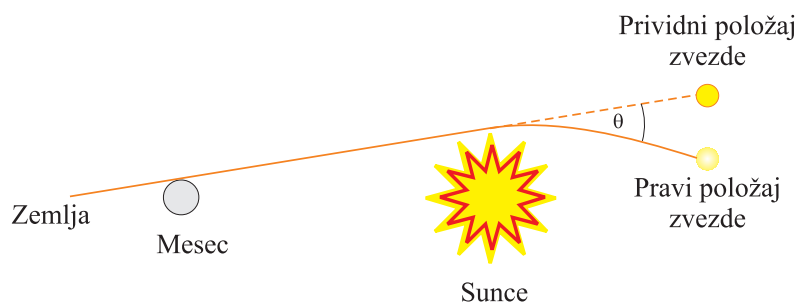
Ajnštajn je pokazao da je

$$\theta = \frac{4\varphi}{c^2} = \frac{4\gamma M}{c^2 R}, \quad (8.8)$$

gde su M i R masa i poluprečnik Sunca. Zamena vrednosti, $\gamma = 6,672 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, $M = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, $R = 7 \times 10^8 \text{ m}$ i $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, daje

$$\theta = 0,85 \times 10^{-5} \text{ rad} = 1,75''.$$

Merenja koja su izvršena od stran više astronoma su dala od $(1,72 \pm 0,11)''$



Slika 8.7:

do $(1,82 \pm 0,15'')$, što znači da su odstupanja od teorijske vrednosti u granicama grešaka merenja.⁶

Usporavanje toka vremena u gravitacionom polju

I na kraju, usled nehomogenosti vremena, svi periodični procesi u polju gravitacije se odvijaju sporije nego van polja. Odatle sledi da će rad časovnika biti usporen u gravitacionom polju.

Neka atom zrači elektromagnetne talase kada se nalazi van gravitacionog polja neke frekvencije ν_0 . Taj isti atom, kada se nalazi u gravitacionom polju potencijala φ zrači talase manje frekvencije ν . Naime, kako je $\nu = \Delta N / \Delta t_0$, gde je ΔN broj oscilacija koje se izvrše za vreme Δt_0 . U gravitacionom polju je pak $\nu = \Delta N / \Delta t$, odakle je $\Delta \nu / \Delta \nu_0 = \Delta t_0 / \Delta t$. Na osnovu izraza (8.7) se dobija

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}. \quad (8.9)$$

U eksperimentima je moguće registrovati promenu frekvencije

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} - 1 = \frac{-2\varphi}{c^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}\right)}.$$

Kako je obično $\frac{2\varphi}{c^2} \ll 1$, razvijanjem veličine u imeniocu dobija se

$$1 + \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \approx 2.$$

⁶Ova merenja su inače izvršena neposredno nakon I svetskog rata, u toku potpunog pomračenja Sunca, od strane ekspedicije koju je organizovao sir Artur Edington. Kada je ovaj rezultat objavljen Ajnštajn je stekao svetsku slavu.

Na osnovu ovoga je

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_0} = \frac{\varphi}{c^2}. \quad (8.10)$$

U gravitacionom polju Zemlje efekat promene frekvencije je prilično mali. Na visini l iznad površine Zemlje je njegova vrednost

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \right| = \frac{\varphi}{c^2} = \frac{gl}{c^2} = \frac{9,81h}{9 \times 10^{16}} = 1,09 \times 10^{-16}h.$$

Ipak, 1960. godine su Paund i Rebka uspeli da u eksperimentu potvrde promenu frekvencije⁷ gama zračenja u gravitacionom polju Zemlje. Upoređivali su zračenje dva jednaka izvora, jedan se nalazi na površini Zemlje a drugi na visini od 22,5 m. Prema teoriji, promena frekvencije je $\Delta\nu/\nu_0 = 2,46 \times 10^{-15}$, dok se u eksperimentu dobilo $\Delta\nu/\nu_0 = (2,56 \pm 0,25) \times 10^{-15}$. Njihov odnos

$$\frac{\Delta\nu_{\text{eksp}}}{\Delta\nu_{\text{teor}}} = 1,04 \pm 0,10,$$

što je u granicama eksperimentalne grešak izvanredna potvrda Ajnštajnovе teorije gravitacije.⁸

8.7 Crne rupe

Ukoliko je masa zvezde izuzetno velika, kada ona potroši svoje nuklearno gorivo, dolazi do kolapsa zvezde na veoma malu zapreminu. U tom slučaju je krivina prostor vremena toliko velika da su, unutar određenog rastojanja od zvezde, i svetlost i materija zarobljene. Formira se **crna rupa**.

⁷Do ove formule se može doći i na jednostavniji način. Naime, foton se u gravitacionom polju ponaša kao čestica gravitacione mase $m_g = h\nu_0/c^2$. Kada se blizu površine Zemlje kreće na više po vertikali, on mora da izgubi deo svoje energiju na vršenje rada protiv sile teže: $A = m_g gl = h\nu_0 gl/c^2$, gde je l put koji je prešao foton. Iz tog razloga, prvobitna energija fotona $E = h\nu_0$ će biti umanjena za

$$\Delta E = \Delta(h\nu_0) = \frac{h\nu_0 gl}{c^2},$$

odakle je $\Delta\nu = \nu_0 gl/c^2$ pa će relativna promena frekvencije fotona biti $\Delta\nu/\nu_0 = gl/c^2$.

⁸Napomenimo da se efekat promene frekvencije svetlosti pri njenom udaljavanju od velikih gravitirajućih masa naziva *crveni gravitacioni pomak*.

8.8 Gravitacioni talasi

8.9 Gravitaciona interakcija i neinercijalni sistemi reference

Specijalna teorija relativnosti (STR), čije osnovne postavke su izložene u prethodnom poglavlju, predstavlja veoma elegantnu teoriju koja je osim toga u velikoj meri izmenila osnovne postavke fizike kao nauke. Ona međutim ima dva velika nedostatka koja je upravo Ajnštajn uočio i 1916. godine otklonio formulisavši **opštu teoriju relativnosti** (OTR). Kao prvo STR razmatra fizičke zakone i njihove relacije samo u inercijalnim sistemima reference. Drugo, u njoj se ne razmatra gravitacija, odnosno međudelovanje tela gravitacionom interakcijom.⁹

Jedan od problema sa gravitacijom u Njutnovoj teoriji je u tome što ona zavisi samo od međusobnog položaja tela, što implicira da se ona prenosi trenutno, tj. beskonačno velikom brzinom. Ovo je u suprotnosti sa postulatom STR da je najveća poznata brzina brzina svetlosti u vakuumu c . To je upućivalo da treba preformulisati teoriju gravitacije na takav način da se uvaži činjenica. Ajnštajn je to uradio po uzoru na teoriju elektromagnetne interakcije, uvodeći pretpostavku da se i gravitaciona interakcija prenosi (posredstvom gravitacionog polja) brzinom svetlosti.¹⁰ Slično kao što je to bilo u STR, i ovde se nerelativistički (Njutnov) zakon gravitacije pojavljivao u slučaju slabih gravitacionih polja.

Kao što je poznato, neinercijalni sistemi reference su sistemi koji se kreću ubrzano u odnosu na neki sistem S . Neka je ubrzanje tog sistema \vec{a}_i . Neka se neko telo, u odnosu na sistem S kreće ubrzanjem \vec{a} , dok mu je ubrzanje u odnosu na sistem S' jednako \vec{a}' . Tada je $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_i$, pa drugi Njutnov zakon u neinercijalnom sistemu S' ima oblik

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_i = \vec{F} + \vec{F}_i,$$

gde je $m\vec{a} = \vec{F}$ prema drugom Njutnovom zakonu u inercijalnom sistemu SE , a \vec{F} je sila koja deluje na telo. Sa $\vec{F}_i = -m\vec{a}_i$ je označena inercijalna sila koja se pojavljuje usled toga što je sistem S' ubrzan.

Dakle, **inercijalna sila je proporcionalna masi tela i svim telima daje isto ubrzanje, nezavisno od njihove mase.** Od svih poznatih tela

⁹Kao što će se kasnije pokazati, ispostavilo se da u ovim nedostacima zapravo postoji veoma tesna povezanost.

¹⁰U Ajnštajnovoj teoriji gravitacionog polja se pojavljuju i vremenski zavisna polja (odgovaraju pulsarima) i gravitacioni talasi.

u prirodi, samo gravitaciona sila ima tu osobinu, tj. ona svim telima koja se slobodno kreću u gravitacionom polju daje isto ubrzanje \vec{g} .

8.10 Princip ekvivalentnosti

Interakcija tela mase m koje se nalazi u gravitacionom polju drugog tela mase M , pri čemu su njihovi centri masa na rastojanju r se, može opisati Njutnovim zakonom gravitacije

$$F = \gamma \frac{m_g M}{r^2} = m_g g, \quad (8.11)$$

gde je indeksom "g" uz masu istaknuto da je reč o gravitacionom interogovanju, pa se i masa koja se pojavljuje u ovom izrazu zove gravitacionom.¹¹ Prema drugom Njutnovom zakonu, telo na koje deluje sila F se kreće sa ubrzanjem a , prema formuli

$$F = m_i a, \quad (8.12)$$

gde je indeksom "i" istaknuta činjenica da je masa shvaćena kao mera inercijalnosti.¹²

U okviru Njutnove mehanike, nema a priori razloga da ove dve mase budu ne budu jednake (ili proporcionalne). Na osnovu prethodna dva izraza, telo koje slobodno pada na Zemlji se kreće sa ubrzanjem

$$a = \frac{m_g}{m_i} g. \quad (8.13)$$

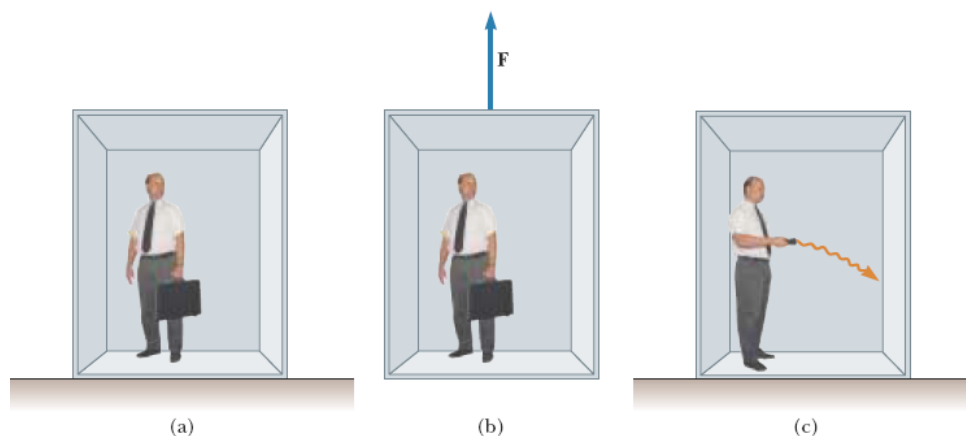
Eksperimenti su, sa veoma visokom preciznošću¹³ pokazali jednakost ovih dveju masa što nas navodi da se zapitamo da li je to slučajnost ili pak odraz neke duboke suštinske povezanosti. U okviru Njutnove mehanike bi odgovor mogao da bude da je to slučajnost, jer nema vidljivog razloga da zaista bude tako. Jednakost ovih dveju masa zapravo dovodi u vezu dva potpuno različita koncepta: silu međusobnog gravitacionog privlačenja dva masivna tela, i suprotstavljanje jednog tela sili koja ima težnju da ga ubrza. Ajnštajn je, formulišući opštu teoriju relativnosti 1916. godine, pošao od ideje da postoji veoma duboka suštinska povezanost ovakvog ispoljavanja mase na dva načina.

¹¹Gravitaciona masa je masa koja menja prostor oko sebe stvarajući gravitaciono polje koje može da interaguje sa gravitacionim poljem nekog drugog masivnog tela.

¹²Inercijalna masa je mera inercijalnosti tela, određena upoređivanjem ubrzanja koja različita tela steknu pod dejstvom iste sile.

¹³Greška u određivanju razlike ovih dveju masa je reda veličine 10^{-12} .

Sa stanovišta Ajnštajnovе teorije dakle, do tada neobjašnjiva jednakost m_g i m_i , predstavlja samo manifestaciju veze koja postoji u prirodi između gravitacije i inercije. On je zaključio da *ne postoji mehanički eksperiment (na primer puštanje masivnog tela da pada) u kome može da se ustanovi razlika između ispoljavanja mase kao mere inernosti i gravitacionog delovanja sa drugi masivnim telom, odnosno između situacija prikazanih na slici 8.8 (a) i (b)*. Naime, u oba slučaja, ukoliko bi posmatrač ispustio kofer, on bi se kretao sa ubrzanjem g ka podu lifta.



Slika 8.8: (a) Posmatrač koji miruje u homogenom gravitacionom polju. (b) Posmatrač se nalazi u oblasti gde ne postoji gravitaciono polje, ali je u neinercijalnom sistemu reference koji se ubrzava spoljašnjom silom \vec{F} , takvom da izaziva ubrzanje g . (c) Ukoliko su situacije (a) i (b) ekvivalentne, putanja svetlosti se savija u gravitacionom polju.

Došavši do ovih zaključaka Ajnštajn ih je generalisao iskazom da *nema eksperimenta, mehaničkog ili nekog drugog, kojim bi mogla da se napravi razlika između ova dva događaja*.

Ovakvo proširenje koje uključuje sve fenomene (ne samo mehaničke) ima interesantne posledice. Pretpostavimo da posmatrač šalje svetlosni puls u horizontalnom pravcu (slika 8.8). Kao prvo, primetimo da je masa koja se pojavljivala u relaciji $E = mc^2$ inercijalna. Kako je ona, prema principu ekvivalencije, jednaka gravitacionoj masi, može se reći da postoji zapravo ekvivalencija energije i gravitacione mase. To znači da elektromagnetnom zračenju energije E odgovara ekvivalentna gravitaciona masa $m = E/c^2$ (koja je jednaka inercijalnoj masi). Posledica principa ekvivalencije je prema tome da, ako se elektromagnetnom zračenju pripíše gravitaciona masa, ono

može da gravitaciono interaguje sa drugim telima.¹⁴

Ukoliko se lift kreće ubrzano na više, mesto gde svetlost pogadja zid će se pomeriti na niže od mesta koje inače pogadja kada se lift ne kreće ubrzano. U sistemu reference lifta, putanja svetlosti se savija na dole, u slučaju da se lift ubrzava na gore (deo (b) slike). Obzirom na to da se situacija u liftu koji se kreće ubrzano i lifta koji se nalazi u homogenom gravitacionom polju, ne može razlikovati, Ajnštajn je došao do zaključka da putanja svetlosti u gravitacionom polju neće biti prava već zakrivljena linija (8.8 (c)).¹⁵

Dva postulata Ajnštajnovе opšte teorije relativnosti su:

- Svi zakoni prirode imaju isti oblik za sve posmatrače u bilo kom sistemu reference, bez obzira na to da li je on ubrzan ili ne (opšti princip relativnosti). Drugim rečima svi sistemi reference su međusobno ekvivalentni.
- U okolini bilo koje tačke, gravitaciono polje je ekvivalentno ubrzanom sistemu reference koji se nalazi van gravitacionog polja (princip ekvivalencije).

Prvi postulat ukazuje na to da su fizički zakoni invarijantni u odnosu na **proizvoljne transformacije koordinata**. Podsetimo se da je tvrdjenje STR bilo da su fizički zakoni invarijantni samo u odnosu na linearne (Lorencove) transformacije.

Tvrdjenje drugog postulata se zapravo svodi na potpunu jednakost gravitacione i inertne mase.

Jedna od veoma interesantnih posledica OTR je da se vremenska skala menja pod uticajem gravitacije. Satovi u prisustvu gravitacije rade sporije od onih koji se nalaze na mestu gde se gravitaciono polje može zanemariti. Posledica toga je da frekvencija zračenja koje emituju atomi, u prisustvu jakog gravitacionog polja, ima crveni pomak ka nižim frekvencijama u poredjenju sa istim zračenjem u slabom gravitacionom polju.¹⁶

Drugi postulat ukazuje na činjenicu da gravitaciono polje u bilo kojoj tački prostora može da se poništi ukoliko izaberemo odgovarajući sistem

¹⁴S obzirom na to da je brzina svetlosti veoma velika, odnosno da je masa zračenja $m = E/c^2$ mala, efekat njegovog gravitacionog interagovanja je, u zemaljskim uslovima veoma mala i teško se može registrovati.

¹⁵Ovo skretanje svetlosti sa pravolinijske putanje je, iako malo po vrednosti, dokazano eksperimentalno. Merenja su pokazala da laserska svetlost promeni pravac za manje od 1 cm nakon predjenih 6 000 km.

¹⁶Ovaj gravitacioni crveni pomak je registrovan u spektralnim linijama koje emituju atomi masivnih zvezda. Ovaj efekat je takodje potvrđen u eksperimentima koji su izvršeni na Zemlji u kojima je uporedjivana frekvencija gama zračenja emitovanog od strane jezgara koja se nalaze na međusobnom rastojanju od 20 metara.

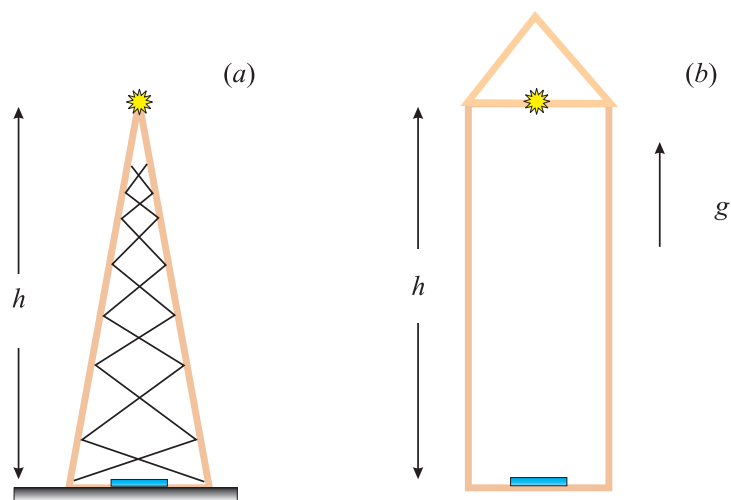
reference. Taj "odgovarajući" sistem reference je sistem koji je ubrzan na odgovarajući način. Iz njegovog smisla je jasno da on mora da bude takozvani slobodno padajući sistem.

8.11 Dilatacija vremena

Jedna od posledica principa ekvivalencija je, kao što je već pomenuto, usporavanje časovnika u gravitacionom polju. Drugim rečima, časovnici koji se nalaze "na većoj visini" u odnosu na izvor gravitacije, će raditi brže od onih koji se nalaze na manjoj visini. Ukoliko postavimo jedan sat na vrh neke kule, a drugi u njenom podnožju, sat koji se nalazi na njenom vrhu bi otkucavao brže. Ukoliko nakon nekog vremena, sat sa vrha kule donesemo u podnožje i uporedimo sa onim koji je sve vreme bio tamo, videli bi da je pokazao da je prošlo više vremena. Hajde da razmotrimo dva primera koji dozvoljavaju da se sprovede relativno prost račun.

(a) Svetlosni izvor se nalazi na kuli visine h i emituje svetlosne pulseve u intervalima t_s . Prijemnik na zemlji prima pulseve u vremenskim intervalima t_p . U kakvoj vezi su ova dva vremenska intervala?

(b) Raketa dužine h se ubrzava ubrzanjem g . Svetlosni izvor koji se nalazi na njenom vrhu emituje pulseve u intervalima t_s . Prijemnik koji se nalazi na njenom kraju ih registruje u intervalima t_p . U kakvoj vezi su ova dva intervala?



Slika 8.9:

Princip ekvivalencije kazuje da se u ova dva slučaja dešava ista stvar. Drugim rečima, veza intervala t_s i t_p mora biti identična. Razmotrimo drugi primer.

Neka je sistem S koji je u $t = 0$ bio vezan za raketu. U tom sistemu reference je raketa u $t = 0$ u stanju mirovanja a nakon toga odlazi iz njega sa ubrzanjem g . Sledeća diskusija će biti izvršena u odnosu na sistem reference S .

Razmotrimo seriju brzih svetlosnih pulseva koje emituje izvor, započinjući to da radi u $t = 0$. Rastojanje koje je raketa prešla za vreme t , gledano iz sistema S iznosi $gt^2/2$. Ukoliko pretpostavimo da je vremenski interval t_s mali, to znači da će, pre nego što se raketa predje značajno rastojanje, biti emitovano mnogo pulseva. Takodje se i brzina rakete, gt , može smatrati veoma malom.

Svetlosti je potrebno određeno vreme da stigne do prijemnika koji se osim toga kreće zajedno sa raketom. Vreme koje je potrebno svetlosti da dodje do prijemnika je h/c , a brzina koju u tom momentu on ima je $v = gh/c$. U skladu sa klasičnim Doplerovim efektom, broj pulseva koji pristižu u jedinici vremena u prijemnik, ν_r , je

$$\nu_p = \nu_s \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \nu_s \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right). \quad (8.14)$$

Sa ν_s je označen broj pulseva koje u jedinici vremena emituje izvor. Ovaj broj je sa vremenskim intervalom između emitovanja pulseva t_s povezan relacijom $\nu_s = 1/t_s$, dok je ν_p povezana sa t_p analognom relacijom $\nu_p = 1/t_p$. Na osnovu toga su intervali između pulseva

$$t_p = \frac{t_s}{1 + \frac{v}{c}}. \quad (8.15)$$

Obzirom na ekvivalentnost situacija prikazanih na slici 8.9, zaključujemo da će sat koji se nalazi na kuli raditi brže od onog koji je u njenom podnožju jer za intervale vremena koje su izmerili Δt_h i Δt_0 , prema (8.15) važi relacija¹⁷

$$\Delta t_h = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \Delta t_0. \quad (8.16)$$

¹⁷Primetimo da se vremen t_p meri u inercijalnom sistemu reference S . Pošto se prijemnik pulseva kreće u odnosu na S , to bi značilo da se izraza za frekvenciju ν_p treba množiti još faktorom dilatacije vremena iz specijalne teorije relativnosti $1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ (obzirom da se sat posmatrača-prijemnika kreće sporo u odnosu na S , frekvencija koju on meri je veća od one koja se meri u S). Međjutim, ovo je efekat drugog reda po maloj veličini $v/c = gh/c^2$. Ostali efekti ovog reda su već odbačeni pa mora to da se uradi i sa ovim.

Primetimo da u ovom izrazu gh predstavlja potencijalnu energiju homogenog gravitacionog polja podeljenu masom tela m .

Nakon nekog vremena, sistem reference S nam više neće biti od koristi. Ali mi uvek možemo da uzmemo novi trenutni sopstveni sistem reference rakete, i da u njemu ponovimo prethodnu analizu. Na osnovu toga, rezultat (8.14) važi stalno.¹⁸

8.12 Gravitaciono polje i geometrija. Zakrivljenje prostora.

Drugi postulat OTR (princip ekvivalencije), kao što je već napomenuto, ukazuje zapravo na činjenicu da gravitaciono polje može da se poništi u svakoj tački izborom na odgovarajući način ubrzanog sistema reference koji smo nazvali slobodno padajućim. Ajnštajn je razvio genijalan metod za opisivanje ubrzanja potrebnog da bi gravitaciono polje na datom mestu "nestalo". On je uveo pojam *krivine prostor-vremena* koja opisuje gravitacione efekte u svakoj tački. U stvari krivina prostor-vremena u potpunosti zamenjuje Njutnovu teoriju gravitacije. U skladu sa Ajnštajnovim idejama, gravitaciona sila kao pojam ne postoji. U realnosti, masa koja postoji na nekom mestu izaziva krivinu prostor-vremena, a ta njegova zakrivljenost diktira putanje kojima moraju da se kreću tela na koje ne deluju sile. Veliki fizičar Džon Viler je 1979. godine sumirao Ajnštajnovu teoriju relativnosti u jednoj rečenici: "Prostor govori materiji kako da se kreće a materija govori prostoru kako da se zakrivi".

Posmatrajmo dva putnika koji su iz dve različite tačke na površini Zemlje krenuli ka Severnom polu. Obojica sa punim pravom mogu da kažu da idu ka Severnom polu i u tom smislu se kreću po paralelnim putanjama koje su međjutim sve bliže i bliže jedna drugoj, kao da se na neki način privlače. To je naravno posledica činjenica da površina Zemlje nije ravna već zakrivljena. Na sličan način se objašnjava i privlačenje dva masivna tela. U Ajnštajnovom prilazu ona menjaju osobine prostor-vremena tako što ga zakrivljuju a rezultat toga je njihovo približavanje jednog drugome, slično kao što bi se dve kugle za kuglanje koje se kreću po madracu približavale jedna drugoj zakrivljujući ga.

Šta znači kad se kaže da je neki prostor zakrivljen? Da bi odgovorili na ovo podsetimo se elemenata Euklidove geometrije ravnih prostora. Eu-

¹⁸Efekat dilatacije vremena u opštoj teoriji relativnosti su prvi izmerili Pound i Rebka 1960. godine. Oni su emitovali gama zrake sa 20 m visokog tornja i merili njihove crvene pomake (odnosno smanjenje frekvencije) u podnožju tornja.

klidova geometrija počiva na nizu aksioma. Neeuklidsku geometriju, koja se odnosi na zakrivljene prostore, je razvijalo više naučnika: Karl Fridrih Gaus (1777-1855), Janoš Boljaji (1802-1860), Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1793-1856) a do glavnih karakteristika ovakvih prostora je najlakše doći kroz posmatranje dvodimenzionalnih površi.

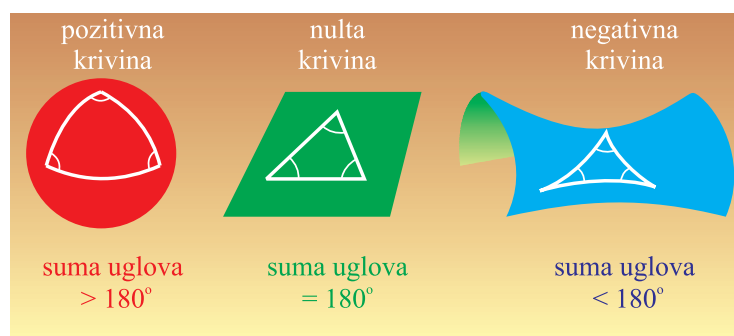
Posmatrajmo na primer površ dvodimenzionalne sfere. Ona ja zakrivljenja, bar za nas koji je gledamo iz trodimenzionalnog prostora u kome se nalazi. Ali, na koji način bi, neko hipotetičko dvodimenzionalno biće moglo da zakaljuči da li je njegov dvodimenzionalni prostor ravan ili zakrivljen? Jedan od načina je da odredi koliki je zbir uglova u dovoljno¹⁹ trouglu. Ukoliko on iznosi 180° , površ će biti ravna. Ukoliko zbir uglova u trouglu ne iznosi toliko prostor je zakriviljen. Na ovom mestu bi takodje mogli da se zapitamo na koji način zapravo konstruišemo trouglove na krivoj površi, na primer, sferi. Da bi to uradili, potrebno je da uzmemo linije koje su ekvivalent pravih linija u ravnom prostoru: to su linije duž kojih je rastojanje između dveju tačka najkraće i one se nazivaju geodezijske. Na sferi, geodezijske linije su lukovi velikih krugova (lukovi koji se dobijaju kada se sfera seče ravnima koje prolaze kroz njen centar), kao što su ekvatorijalna linija i linije geografske dužine na Zemljinoj lopti na primer.

Posmatrajmo kao primer trougao koji se formiraju od dve linije geografske dužine koje prolaze kroz Severni pol i linije ekvatora. Dve linije geografske dužine se nalaze pod pravim uglovima u odnosu na ekvator. Ukoliko su još one pod pravim uglom na mestu gde seku severni pol, suma uglova u tom trouglu je 270° . Iz toga je jasno da prostor u kome se nalazi posmatrani trougao nije Euklidski. Primetimo da, ukoliko je trougao mali u poredjenju sa poluprečnikom sfere, zbir uglova u trouglu će biti skoroo 180° , pa će u tom slučaju taj deo krivog prostora koji on obuhvata biti približno ravan.

Ukoliko krivi prostor nije sferan već se radi o sedlastoj površi, suma uglova u trouglu će biti manja od 180° . Za takve površi se kaže da imaju negativnu krivnu.

U STR se slobodna čestica kreće po pravoj liniji koja zapravo predstavlja najkraći put između dve tačke. U krivom prostoru, koji opisuje efekte gravitacije, čestica se između dve tačke opet kreće po najkraćoj putanji, koja se naziva geodezijska linija. Na sferi, geodezijska linija je takozani veliki krug.

¹⁹Trougao mora biti dovoljno veliki da bi na zbir uglova u trouglu uopšte uticalo to da li je on ravan ili zakrivljen. Naime, čak i u zakrivljenom prostoru, ukoliko je trougao koji posmatramo mali, zbir uglova će iznositi 180° .



Slika 8.10: Sferna površ, ravan i sedlasta (hiperbolična) površ.

8.13 Primena OTR na Vasionu, kosmologija.

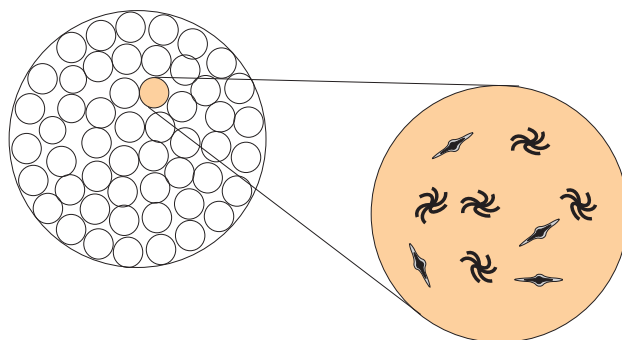
Ajnštajn je, 1917. godine objavio model Vasiona baziran na OTR. U tom modelu je ona predstavljena kao geometrijski konačan (konačne zapremine), simetričan prostor bez granica odnosno rubova. U skladu sa takozvanim kosmološkim principom model se odnosio na homogenu i izotropnu Vasionu. On je takodje i statičan-zapremina Vasiona se ne menja sa vremenom.

Ajnštajn je, u skladu sa svojim ubedjenjem da je Vasiona statična, da bi dobio takav model morao svoje jednačine OTR da izmeni dodavanjem jednog sabirka koji je nazvan kosmološka konstanta i označava se obično sa Λ . Naime, Vasiona se sastoji od masivnih tela koja interaguju privlačnom gravitacionom silom. Usled njenog delovanja sve mase bi trebalo nakon nekog vremena da kolabiraju. Da bi se ovo privlačenje na neki način uravnotežilo Ajnštajn je uveo pomenutu konstantu koja je imala smisao svojevršne anti-gravitacije, odnosno odbojne sile između masivnih tela. Ajnštajn je svoj model objavio pre nego što je otkriven crveni pomak u spektralnim linijama galaksija što je ukazivalo na njihovo udaljavanje, odnosno na činjenicu da se Vasiona širi. Nakon tog otkrića Ajnštajn je uvođenje kosmološke konstante nazvao najvećom greškom u svom životu. Sudbina je ipak htela da današnja merenja ukazuju na to da kosmološka konstanta ipak postoji, odnosno da danas ima nenultu vrednost.

Aleksandar Fridman, fizičar iz Sankt Peterburga, je 1921. godine analizirajući kosmološka rešenja²⁰ Ajnštajnovih jednačina pokazao da, upravo za $\lambda = 0$, ona opisuju Vasionu koja se ili širi ili sakuplja. Izvođenje ovih jednačina bazirano na OTR ovde neće biti prezentovano zbog njegove kom-

²⁰Termin "kosmološka" rešenja se odnose na primenu Ajnštajnovih jednačina OTR na Vasionu kao celinu.

pleksnosti koja daleko prevazilazi matematički nivo ovog materijala. Veoma je medjutim interesantna činjenica da se tri modela, sa odgovarajućim zakonim širenja mogu da dobiju iz razmatranja baziranih na Njutnovom zakonu gravitacije sa rezultatima koji se u potpunosti slažu sa relativističkim.



Slika 8.11: Sferna oblast galaksija čiji je poluprečnik r veći od rastojanja između klastera galaksija ali je manji od rastojanja koja karakterišu univerzum kao celinu.

Posmatrajmo sfernu oblast galaksija poluprečnika r . Masa te sferne oblasti se dobija kada se pomnoži njena zapremina gustinom materije u svemiru²¹

$$M = \frac{4\pi r^3}{3} \rho. \quad (8.17)$$

Posmatrajmo kretanje galaksije mase m koja se nalazi na rubu ovog sfernog regiona. U skladu sa Hablovim zakonom, njena brzina će biti $v = Hr$, a kinetička energija $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. U slučaju sferne raspodele materije, gravitaciona sila koja deluje na sfernu ljusku zavisi samo od mase koja se nalazi unutar nje. Potencijalna energija tela mase m koje se nalazi na rubu te sfere je

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r} = -\gamma \frac{4\pi m r^2 \rho}{3}, \quad (8.18)$$

pa je ukupna energija (koja ostaje konstantna tokom širenja Vasiona)

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{Mm}{r}. \quad (8.19)$$

²¹Da bi imalo smisla računati gustinu vasiona i govoriti o njenoj homogenosti poluprečnik r mora da bude mnogo veći od rastojanja između skupina galaksija ali istovremeno i mnogo manji od dimenzije vasiona.

Vrednost gustine koja odgovara $E = 0$ naziva se kritična gustina ρ_c . Uzi-
majuci u obzir i Hablov zakon, prethodna relacija postaje

$$0 = \frac{1}{2}mH^2r^2 - \gamma\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mH^2r^2 - \gamma\frac{4\pi mr^2\rho_c}{3} = mr^2\left(\frac{1}{2}H^2 - \frac{4\pi}{3}\gamma\rho_c\right),$$

a iz nje se za kritičnu gustinu dobija

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi\gamma}. \quad (8.20)$$

Odnos prave gustine ρ i kritične gustine se naziva parametar gustine $\Omega = \rho/\rho_c$.

Posmatrajmo sada dve tačke koje se nalaze na udaljenosti r , takve da im je relativna brzina v . Neka je $R(t)$ veličina koja reprezentuje veličinu Univerzuma. Ako R raste sa vremenom, sva rastojanja, uključujući i ona između galaksija, takodje rastu. To znači da važi

$$r = \frac{R(t)}{R(t_0)}r_0,$$

i

$$v = \dot{r} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t_0)}r_0$$

gde tačkica, kao i ranije, označava izvod po vremenu. Odavde je hablova konstanta

$$H = \frac{v}{r} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}. \quad (8.21)$$

Na osnovu zakona održanja mase važi $\rho_0 R_0^3 = \rho R^3$ pa jednačina (8.22) za kritičnu gustinu postaje

$$\rho_c = \frac{8\pi\gamma}{3} \frac{\rho_0 R_0^3}{R^3 H^2}. \quad (8.22)$$

Usporeno širenje se karakteriše parametrom dekceleracije q koji se definiše kao

$$q = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}. \quad (8.23)$$

Dekceleracioni paramtera opisuje promenu širenja \dot{R} . Dodatni faktori se nalaze u izrazu da bi on postao bezdimenzionalan, tj. nezavisan od izbora jedinica za dužinu i vreme.

Širenje Univerzuma može da se uporedi sa lansiranjem tela vertikalno sa površine nebeskog tela. Oblik putanje zavisi od početne energije tela.

U toku odredjivanja orbite tela potrebno je da se zna masa tela i njegova početna brzina. Parametri koji odgovaraju ovima, u kosmologiji su srednja gustina i hablova konstanta.

Situacija u kojoj je $E = 0$ odgovara takozvanom "ravnom" Fridmanovom modelu, koji se često zove još i Ajnštajn-de Sitterov model. Ukoliko je gustina veća od kritične, širenje bilo kog sfernog dela će pre ili kasnije da predje u sakupljanje koje vodi kolabiranju u tačku. Takva situacija odgovara "zatvorenom" Fridmanovom modelu. I na kraju, ako je $\rho < \rho_c$, dobija se večno ekspanirajući hiperbolični model.

Ova tri modela Univerzuma se nazivaju standardnim modelima i oni predstavljaju najjednostavnije relativističke kosmološke modele sa $\Lambda = 0$. Modeli u kojima je $\Lambda \neq 0$ su matematički komplikovaniji ali u pogledu evolucije imaju praktično iste osobine.

8.14 Granice primenljivosti OTR

Glava 9

Dodatak

9.1 Numeričko modelovanje u dinamici čestice

Kao što je moglo da se vidi u prethodnim poglavljima, proučavanje dinamike čestice se svodi na određivanje konačnih jednačina kretanja, odnosno pronalaženje zavisnosti vektora položaja od vremena

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z, \quad (9.1)$$

a kada je ona poznata brzina i ubrzanje se mogu naći kao odgovarajući izvodi

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \quad (9.2)$$

Kako je ubrzanje posledica primenjenih sila na česticu, bilo kakva analiza kretanja sistema započinje određivanjem rezultujuće sile koja deluje na česticu.

Sve do sada smo međjutim koristili takozvani *analitički metod* za određivanje oblika ubrzanja, brzine i vektora položaja. Korisno je rekapitulirati metodologiju određivanja ovih veličina:

- (1) Saberu se sve sile da se dobije rezultujuća sila \vec{F} ,
- (2) Uz pomoć rezultujuće sile odredi se ubrzanje $\vec{a} = \vec{F}/m$,
- (3) Na osnovu poznatog ubrzanja se određuje zavisnost brzine od vremena rešavanjem diferencijalne jednačine $d\vec{v}/dt = \vec{a}$,
- (4) Na osnovu tako određene brzine, nalazi se zavisnost vektora položaja od vremena $\vec{r} = \vec{r}(t)$ rešavanjem diferencijalne jednačine $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$.

Kako se uvek radi o vektorskim veličinama u praktičnom radu se one projektuju na koordinatne ose pa se navedena procedura svodi na određivanje tri komponente sile, ubrzanja, brzina i vektora položaja, a u slučaju da

se čestica kreće u jednoj dimenziji, veličine od interesa su $F, a = \frac{F}{m}, \frac{dv}{dt} = a, \frac{dx}{dt} = v$.

Analitički metod je moguće sprovesti samo u ograničenom broju slučajeva (ovo određuje oblik rezultujuće sile). Situacije sa kojima se srećemo u prirodi su međjutim obično jako komplikovane što onemogućava egzaktno rešavanje diferencijalnih jednačina koje se dobijaju u postupku nalaženja konačnih jednačina kretanja. U takvim situacijama primenjuje se procedura koja se zove *numeričko modelovanje*. Najprostiji numerički model se zove Ojlerov.¹

9.1.1 Ojlerov metod

U Ojlerovom metodu za rešavanje diferencijalnih jednačina, izvodi se aproksimiraju odnosom konačnih promena odgovarajućih veličina. Tako je na primer za slučaj malog priraštaja vremena Δt veza između brzine čestice i njenog ubrzanja

$$a(t) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \quad (9.3)$$

Na taj način je brzina čestice na kraju vremenskog intervala Δt približno jednaka brzini $v(t)$ na početku intervala kojoj treba dodati sabirak koji je jednak proizvodu ubrzanja u toku tog intervala i intervala vremena Δt :

$$v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t)\Delta t. \quad (9.4)$$

Kako se ubrzanje u principu menja sa vremenom², dobijena vrednost za brzinu $v(t + \Delta t)$ je utoliko tačnija što je vremenski interval Δt kraći, jer što je on manji i promena ubrzanja unutar njega je sve manja i manja.

Položaj materijalne tačke $x(t + \Delta t)$ na kraju intervala vremena Δt može da se nadje na analogan način:

$$v(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (9.5)$$

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + v(t)\Delta t. \quad (9.6)$$

Pazljiv čitaoc će primetiti da ovom izrazu nedostaje sabirak oblika $\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$ (koji postoji u egzaktnom rešenju problema), međjutim on nije uključen u izraz za koordinatu u Ojlerovom metodu jer je veličina Δt veoma mala tako da je sabirak koji bi sadržao $(\Delta t)^2$ bio mnogo manji od sabirka koji ga sadrži na prvom stepenu te je stoga zanemarljiv.

¹Leonard Ojler, veliki Švajcarski matematičar (1707-1783.).

²Prethodna jednačina je potpuno tačna ukoliko je ubrzanje konstantno.

Ako je poznato ubrzanje u nekom momentu vremena t , brzina čestice i njen položaj u prostoru se mogu naći primenom jednačina (9.4) i (9.6). Račun se dalje sprovodi u koracima u cilju određivanja brzine i položaja u bilo kom docnijem momentu vremena. Ubrzanje je određeno poznavanjem rezultujuće sile koja deluje na telo koja, uopšteno govoreći, može da zavisi od konfiguracione koordinate x , brzine i vremena

$$a(x, v, t) = \frac{F(x, v, t)}{m}. \quad (9.7)$$

Uobičajeno je da se skup numeričkih rešenja numerise koracima, kao što je prikazano u narednoj tabeli

Korak	Vreme	Položaj	Brzina	Ubrzanje
0	t_0	x_0	v_0	$a_0 = F(x_0, v_0, t_0)/m$
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$	$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$	$a_1 = F(x_1, v_1, t_1)/m$
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$	$a_2 = F(x_2, v_2, t_2)/m$
.
n	t_n	x_n	v_n	a_n

Tabela 9.1:

Ovaj proračun se takodje može vršiti unekom od programskom jeziku ili uz primenu gotovih komercijalnih programa. Nakon unošenja podataka u tabelu, može se nacrtati grafik zavisnosti brzine od vremena da bi se kretanje moglo da vizuelizuju.

Jedna od prednosti Ojlerovog metoda je ta što dinamika ostaje jasno istaknuta - veze izmedju ubrzanja i sile, brzine i ubrzanja, položaja čestice i brzine, su jasne, štaviše one su srž proračuna.

Ojlerov metod je potpuno pouzdan za jako male intervale vremena ali je u praktičnom računom nužno izabrati neki konačan korak priraštaja vremena. Za tako odabranu vrednost Δt , jednačina (9.4) ostaje u važnosti, ukoliko se može smatrati sa dovoljno velikom tačnošću da je ubrzanje konstantno. Odabir odgovarajućeg priraštaja je određen dinamikom čestice i ostaje isti tokom konkretnog proračuna. Veličina ovog priraštaja ima uticaj na tačnost rezultata ali ovo nije lako odrediti ukoliko se ne zna analitičko rešenje. Jedan od metoda za određivanje pouzdanosti primene Ojlerovog metoda je ponavljanje proračuna sa manjom vrednošću priraštaja vremena i upoređivanje tako dobijenih rezultata sa prethodnim. Ukoliko se ova dva rezultata slažu sa određenim brojem značajnih cifara može se zaključiti da je rezultat dobijen pouzdan sa određenom tačnošću.

9.2 Maksimalne jednačine i elektromagnetni talasi

Slično Njutnovim jednačinama dinamike, u oblasti elektromagnetizma postoje Maksimalne³ jednačine, koje predstavljaju osnovne zakone električnosti i magnetizma. Ima ih ukupno četiri a u cilju jednostavnosti napisaćemo ih za vakuum, odnosno u slučaju odsustva dielektričnih i magnetnih materijala.

Prve dve imaju sličan oblik

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (9.8)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (9.9)$$

(kružić na integralu znači da se integracija vrši po zatvorenoj površi) i u stvari predstavljaju Gausov zakon za električno i magnetno polje. Druge dve predstavljaju Faradejev i Amper-Maksimalov zakon, odnosno imaju oblik

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (9.10)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (9.11)$$

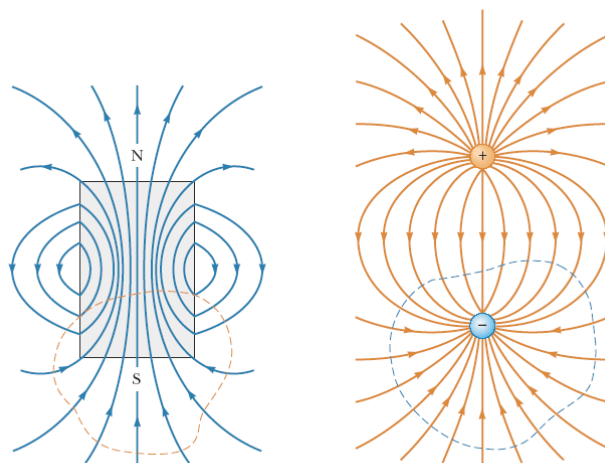
Jednačina (9.8) je Gausov zakon: **Ukupni fluks električnog polja kroz bilo koju zatvorenu površ jednak je ukupnom naelektrisanju koje ona obuhvata podeljenom sa ϵ_0 .** On u stvari predstavlja vezu električnog polja i naelektrisanja koja ga kreiraju.

Jednačina (9.9) može da se shvati kao Gausova jednačina za magnetno polje jer je prema njoj **fluks magnetnog polja kroz zatvorenu površ jednak nuli.** Drugim rečima, broj linija magnetnog polja koje udju u deo sredine oivičen nekom zatvorenom površi, mora da bude jednak broju linija polja koje izlaze iz tog dela sredine. To ukazuje na činjenicu da magnetno polje, za razliku od električnog, nema ni izvore ni ponore (slika 9.1).⁴

Jednačina (9.10) je, u stvari, Faradejev zakon indukcije, koji opisuje stvaranje električnog polja promenom fluksa magnetnog polja. Prema ovom zakonu, **elektromotorna sila koja je u stvari integral električnog polja po zatvorenoj konturi, je jednaka, brzini promene fluksa magnetnog polja kroz bilo koju površ koja je ograničena pomenu-
tom zatvorenom konturom.**

³James Clerk Maxwell, ...

⁴Razlog je u tome što ne postoje magnetni monopoli koji bi mogli da budu izvori ili ponori polja, kao što je to slučaj sa naelektrisanjima.



Slika 9.1: Linije magnetnog i električnog polja.

Jednačina (9.11) je uopštenje Amperovog zakona, koji opisuje stvaranje magnetnog polja električnim poljem i električnom strujom: **Integral magnetnog polja po zatvorenoj konturi je jednak zbiru proizvoda μ_0 i ukupne struje koja je obuhvaćena konturom i proizvoda $\varepsilon_0\mu_0$ i brzine promene fluksa električnog polja, kroz bilo koju površ ograničenu datom konturom.**

Ukoliko poznamo električno i magnetno polje u nekoj tački prostora, sila kojom ona deluju na česticu neelektrisanja q , može da se izračuna iz izraza

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (9.12)$$

koji predstavlja takozvanu Lorencovu silu.

Maksvelove jednačine, zajedno sa izrazom za silu, u potpunosti opisuju sve klasične elektromagnetne pojave.

9.2.1 Elektromagnenti talasi

Kompletan matematički tretman Maksvelovih jednačina koji dovodi do odgovarajuće talasne jednačine nadilazi nivo dosadašnjeg izlaganja pa i neće biti prezentovan ovde. Do odgovarajuće jednačine se ipak može doći uz neke pretpostavke koje neće izmeniti suštinu pojave.

Pretpostavimo da u prostoru postoji elektromagnetni (EM) talas koji se prostire u pozitivnom smeru x ose (to je smer prostiranja EM talasa). U

tom talasu, električno polje \vec{E} je duž y ose, dok je magnetno polje \vec{B} duž z ose.⁵ Pretpostavimo da u svakoj tački prostora, intenziteti električnog E i magnetnog polja B zavise samo od x i t , a ne i od y i od z koordinata. Ovakvi talasi se nazivaju *ravni talasi*, jer je površ koja povezuje tačke koje su u istoj fazi, odnosno talasni front, **ravan**.

Vrednosti električnog i magnetnog polja, E i B , mogu da se povežu jedna sa drugom preko jednačina (9.10) i (9.11). U praznom prostoru, u kome je $Q = 0$ i $I = 0$, jednačina (9.10) ostaje nepromenjena, dok jednačina (9.11) poprima oblik

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (9.13)$$

Na osnovu ovih jednačina, uzimajući u obzir da je reč o ravnim talasima, dobija se diferencijalna jednačina koja povezuje E i B (namerno su izostavljeni indeksi y i z)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (9.15)$$

S obzirom na to da i jedno i drugo polje zavise od dve promenljive, izvodi su parcijalni.⁶ Uzimajući izvod po x jednačine (9.14) i kombinujući dobijeni izraza sa (9.15), dobijamo

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right), \quad (9.16)$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (9.17)$$

Na sličan načina, uzimajući izvod jednačine (9.15) po x i kombinujući rezultat sa jednačinom (9.14), dobija se

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \quad (9.18)$$

I jednačina (9.17) i jednačina (9.18) imaju oblik opšte talasne jednačine, sa brzinom talasa

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (9.19)$$

⁵Talasi kod kojih su električno i magnetno polje paralelni paru uzajamno normalnih osa se nazivaju **linearno polarizovani talasi**.

⁶Podsetimo se da to ne znači ništa drugo do da, kada odredjemo izvod $\partial B/\partial x$, t smatramo konstantnim, i obrnuto.

Uzimajući da je $\varepsilon_0 = 8,85419 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$, i $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}$, za brzinu se dobija $u = 2,99792 \times 10^8 \text{ m/s}$. Kako je brzina EM talasa u vakuumu, u stvari jednaka brzini svetlosti u istoj sredini, dolazimo do zaključka da je svetlost u stvari elektromagnetni talas.

9.3 Dimenziona analiza

Kao što je poznato, fizičke veličine mogu da imaju dimenzije ili pak da budu bezdimenzionalne.

Veličina ima dimenziju ako njena brojna vrednost zavisi od izbora sistema jedinica. Na primer, interval vremena od izlaska do izlaska Sunca možemo da izrazimo kao 1 dan, 24 h, 1 440 minuta ili 86 400 s. Brojna vrednost se menja u zavisnosti od izbora jedinice za vreme iako je stalno reč o jednom te istom intervalu vremena.

Obzirom na prethodno odredjenje fizičke veličine sa dimenzijom, fizička veličina je bezdimenzionalna ako joj vrednost ne zavisi od izbora sistema jedinica. Na primer, visina Mont Everesta ($h = 8,848 \text{ km}$) i poluprečnik Zemlje ($R = 6\,370 \text{ km}$) su očigledno veličine sa dimenzijama, ali njihov odnos, $h/R = 0,0014$, je bezdimenzionalna veličina, i prema tome, nezavisna od sistema jedinica.

Dimenzija fizičke veličine u stvari ukazuje na njenu fizičku prirodu. Naime, nezavisno od toga da li *rastojanje* koje merimo izražavamo u stopama ili metrima, reč je o merenju *dužine*. U tom smislu se kaže da je dimenzija (fizička priroda) rastojanja *dužina*.

Simboli koji se obično koriste da se označe dimenzije fizičkih veličina *dužina*, *masa* i *vreme* su L, M i T. Fizičke veličine koje imaju dimenzije, međusobnim množenjem i deljenjem daju nove fizičke veličine.⁷ Na primer, odnos predjenog rastojanja i intervala vremena daje novu fizičku veličinu (brzinu), čija je dimenzija L/T.

Ako želimo da prikažemo dimenziju neke fizičke veličine obično se koriste uglaste zagrade []. Na primer, ako želimo da označimo dimenziju brzine v , pisaćemo $[v] = \text{L}/\text{T}$. Dimenzija površine, S , je $[S] = \text{L}^2$, zapremine, V , $[V] = \text{L}^3$ a ubrzanja a je $[a] = \text{L}/\text{T}^2$.

Fizički zakon i formula kojom je izražen, ne smeju da zavise od sistema jedinica. To je potpuno prirodno jer, zakoni prirode uspostavljaju vezu između veličina koje su postojale do sada a postojaće i posle nas, dok je

⁷Kada je reč o sabiranju i oduzimanju te operacije mogu da se rade samo sa veličinama koje imaju iste dimenzije.

sistem jedinica stvar dogovora ljudi. Odavde sledi veoma važan zaključak: **obe strane bilo koje jednačine moraju da imaju iste dimenzije.**

Iz tog razloga je dobro da uvek kada napišemo neku relaciju, proverimo njenu dimenzionalnu zasnovanost, odnosno jednakost levi i desne strane u pogledu dimenzionalnosti. Ova procedura se naziva dimenzionalnom analizom i uvek može da se primeni.⁸ U okviru dimenzionalne analize, dimenzije fizičkih veličina se tretiraju kao algebarske promenljive.

Recimo da nas zanima formula koja povezuje put s koje je prešao automobil za vreme t , krećući iz stanja mirovanja konstantnim ubrzanjem a . Pretpostavićemo da su ove tri veličine povezani relacijom oblika

$$s = Ca^{\alpha}t^{\beta},$$

odnosno predjeni put je proporcionalan ubrzanju na α i vremenu kretanja na stepen β (C je bezdimenzionalna konstanta, odnosno neki broj). Ovde su α i β nepoznati koeficijenti koje ćemo odrediti iz uslova da su dimenzije leve i desne strane jednake. Leva strana jednačine je u pogledu dimenzije dužina, tako da i dimenzija desne mora da bude dužina, odnosno

$$[a^{\alpha}t^{\beta}] = L = L^1.$$

Kako je dimenzija ubrzanja L/T^2 a vremena T , dobija se

$$\left(\frac{L}{T^2}\right)^{\alpha} T^{\beta} = L^1,$$

$$L^{\alpha}T^{\beta-2\alpha} = L^1.$$

Da bi obe strane jednačina imale iste dimenzije, eksponenti moraju biti isti. Na desnoj strani se pojavljuje samo L a ne i T , ali to u stvari znači da ga možemo dopisati dignuto na nulu, što znači da su odgovarajuće jednačine za eksponente: $\beta - 2\alpha = 0$ i $\alpha = 1$, odakle se odmah dobija da je $\beta = 2$. Time je određena funkcionalna zavisnost predjenog puta s , ubrzanja a i vremena t kao $x \propto at^2$. Ovaj rezultat se, od tačnog rezultata za ovaj tip kretanja $s = \frac{1}{2}at^2$, razlikuje samo za faktor 2.⁹ Po pravilu su bezdimenzionalne konstante koje se pojavljuju u fizičkim zakonima ($\sqrt{2}$, $1/2$, π , ...) ni prevelike ni premale tako da dimenzionalna analiza može da posluži i da se oceni i red veličine fizičkih veličina.

⁸Dimenzionalna analiza nam može pomoći u najmanju ruku za svodjenje pamćenja formula na najmanju moguću meru.

⁹Budući da je taj faktor bezdimenzionalan njega i nije moguće odrediti na ovaj način.

Prilikom primene dimenzionalne analize treba biti oprezan i imati određeno iskustvo. U principu su moguća dva, prikrivena, problema. Prvi se tiče izbora fizičkih veličina od kojih može da zavisi fizička veličina čiju vezu sa njima zapravo tražimo. Da bi ga rešili potrebno je da razumemo fizičke zakone i pojave koje su važne za razmatranje posmatranog sistema. Drugi problem je postojanje veličina koje mogu da obrazuju bezdimenzionalne faktore u izrazu relacije koju tražimo.

9.3.1 Funkcionalna zavisnost sile otpora sredine pri kretanju tela kroz nju

Koristeći dimenzionalnu analizu, pokušajmo da odredimo silu otpora sredine telu koje se kreće kroz nju. Kao što je već napomenuto, neophodno je odrediti od kojih veličina može da zavisi ova sila. Svakodnevno iskustvo nam kazuje da sa porastom brzine tela v raste i sila otpora sredine, što znači da sila mora da zavisi od nje. Osim toga, tela većeg poprečnog preseka trepe veći otpor od onih sa manjim (primer za ovo je padobran). Iz tog razloga u izraz za silu mora da udje i površia poprečnog preseka S . I na kraju, sila otpora mora da zavisi i od neke veličine koja predstavlja karakteristiku sredine. Ovde odmah nailazimo na problem, a to je, koju karakteristiku sredine izabrati?

Izgleda prirodno da kao takvu karakteristiku treba izabrati gustinu sredine (vazduha, tečnosti) ρ , jer, što je sredina gušća, to ona više utiv ce na kretanje tela. Prema do sada izrečenom, pretpostavićemo silu otpora sredine u obliku

$$F_{\rho} = \frac{C}{2} v^{\alpha} S^{\beta} \rho^2$$

(množitelj 2 može da se uključi u C ali je izdvojen iz istorijskih razloga). Sila ima dimenzije proizvoda mase i ubrzanja, odnosno $[F]=LT^{-2}M$. Iz uslova jednakosti dimenzija leve i desne strane jednačine za silu dobija se

$$L T^{-2}M = (LT^{-1})^{\alpha}(L^2)^{\beta}(ML^{-3})^{\gamma} = L^{\alpha+2\beta-3\gamma}T^{-\alpha}M^{\gamma},$$

odakle slede jednačine

$$1 = \alpha + 2\beta - 3\gamma,$$

$$-2 = -\alpha,$$

$$1 = \gamma.$$

Njihovo rešenje je $\alpha = 2$, $\beta = 1$ i $\gamma = 1$, pa je tražena formula

$$F_{\rho} = CS \frac{\rho v^2}{2}. \quad (9.20)$$

Sada može da se postavi pitanje zašto smo za karakteristiku sredine izabrali baš gustinu? Zašto umesto nje da ne uzmemo na primer viskoznost η čija su dimenzije $[\eta] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$? Ukoliko uradimo to silu možemo da predstavimo u obliku

$$F_\eta = Bv^\alpha S^\beta \eta^\delta$$

(B je konstanta koja zavisi od oblika tela) čije dimenzije su

$$\text{L T}^{-2}\text{M} = (\text{LT}^{-1})^\alpha (\text{L}^2)^\beta (\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1})^\delta = \text{L}^{\alpha+2\beta-\delta} \text{T}^{-\alpha-\delta} \text{M}^\delta.$$

Iz sistema jednačina

$$1 = \alpha + 2\beta - \delta,$$

$$-2 = -\alpha - \delta,$$

$$1 = \delta,$$

se dobija $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ i $\delta = 1$, pa je tražena formula

$$F_\eta = B\eta\sqrt{S}v. \quad (9.21)$$

Veličina \sqrt{S} je srazmerna karakterističnoj dimenziji tela L (ukoliko je telo oblika lopte poluprečnika r onda je $\sqrt{S} = r$ dok je $C = 6\pi$) tako da gornji izraz postaje

$$F_\eta = B\eta Lv. \quad (9.22)$$

Formule (9.20) i (9.22) su potpuno različite: u jednoj od njih je zavisnost od brzine kvadratična a u drugoj linearna. Koja je onda tačna? Da bi odgovorili na ovo pitanje morali bi da damo sud o tome koja karakteristika sredine (gustina ili viskoznost) dominiraju u konkretnom problemu koji rešavamo. Kada je dominantna gustina važi izraz (9.20) koji predstavlja silu otpora koja je nastala usled razlike u pritiscima na prednjoj i zadnjoj strani tela, a kada je sila otpora posledica trenja, odnosno viskoznosti, važi izraz (9.20) i (9.22). Ukupna sila koja deluje na telo je kombinacija jedne i druge sile, a kada su brzine tela veoma male, sila trenja proporcionalna prvom stepenu brzine, će biti mnogo veća od sile otpora nastale usled razlike u pritiscima, koja je srazmerna drugom stepenu brzine. Pri velikim brzinama važi suprotan zaključak.

9.4 Algebra

9.4.1 Neke važne formule

Razlomci

1. Množenje razlomaka

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd},$$

2. Deljenje razlomaka

$$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc},$$

3. Sabiranje (oduzimanje) razlomaka

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Stepenovanje

$$x^0 = 1$$

$$x^1 = x$$

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^m \cdot x^{-n} = x^{m-n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Faktorizacija

$$ax + ay + az = a(x + y + z) \quad (\text{zajednički množilac}),$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \quad (\text{kvadrat zbira (razlike)}),$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad (\text{razlika kvadrata}).$$

Kvadratna jednačina

Opšti oblik kvadratne jednačine je

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gde je x nepoznata veličina a a , b i c su brojevi koji predstavljaju koeficijente jednačine. Ova jednačina ima dva rešenja (korena) koji se nalaze po pravilu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

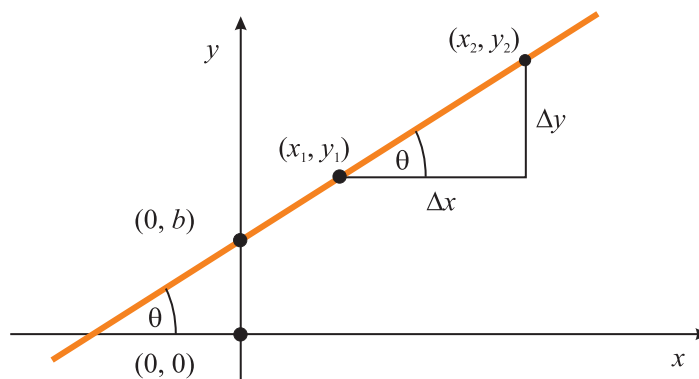
Kada je $b^2 \geq 4ac$, rešenja kvadratne jednačine su realna.

9.4.2 Linearne jednačine

Linearna jednačina ima opšti oblik

$$y = mx + b, \tag{9.23}$$

gde su m i b konstante. Ova jednačina se naziva linearnom jer je grafik zavisnosti y od promenljive x (i obrnuto) prava linija (slika 9.2).



Slika 9.2: Prava linija nagibnog ugla θ koja na y osi odseca odsečak b .

Veličina b je vrednost y koordinate za koju prava preseca y osu. Konstanta m je pak jednaka nagibu prave linije ka x osi i istovremeno predstavlja tangens ugla θ koga prava linija zaklapa sa x osom. Ako su poznate koordinate dve bilo koje tačke na pravoj liniji (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , nagib prave linije se može napisati kao

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta. \tag{9.24}$$

Primetimo da i m i b mogu da imaju i pozitivne i negativne vrednosti. Ukoliko je $m > 0$, prava linija ima pozitivan nagib kao na slici 9.2. Ukoliko je $m < 0$ nagib je negativan.

Logaritmi

Neka je veličina x zapisana kao stepen neke veličine a

$$x = a^y. \quad (9.25)$$

Broj a se u tom slučaju naziva osnova. Logaritam od x u odnosu na osnovu a je jednak izložiocu y u izrazu (9.25), odnosno

$$\log_a x = y. \quad (9.26)$$

U praksi se najčešće koriste dve osnove i to 10 i $e = 2,718\dots$ (Neperov broj). Ukoliko je osnova logaritma e onda se oni nazivaju prirodnim.

Neke korisne osobine logaritama su

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log(a^n) = n \log a$$

$$\ln e = 1$$

9.5 Geometrija

Rastojanje između dve tačke u prostoru sa koordinatama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) je

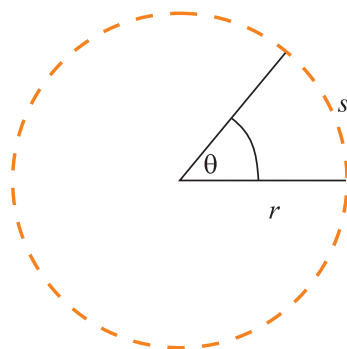
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (9.27)$$

Dužina kružnog luka s (slika 9.3) je proporcionalna poluprečniku r sa koeficijentom proporcionalnosti θ (u radijanima):

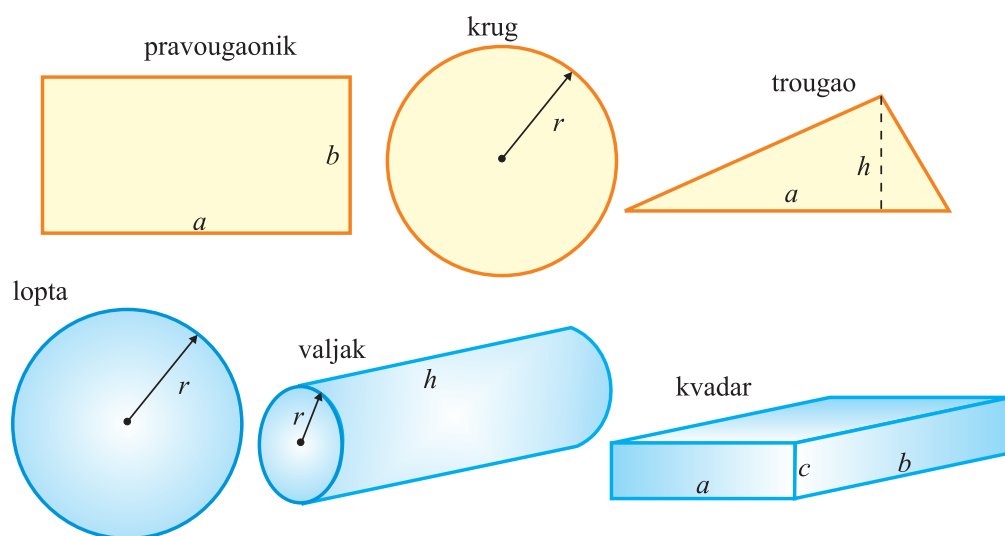
$$s = r\theta, \quad \theta = \frac{s}{r}. \quad (9.28)$$

Neki korisni izrazi za površine i zapremine:

- površina pravougaonika dužina stranica a i b , $P = ab$,
- krug poluprečnika r , površina $P = \pi r^2$, obim $O = 2\pi r$,
- površina trougla osnove a i odgovarajuće visine h , $P = ah/2$,



Slika 9.3:



Slika 9.4:

- sfera poluprečnika r , površina, $P = \pi r^2$, zapremina $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,
- valjak, poluprečnika osnove r a visine h , površina $P = 2\pi r h$, zapremina $V = \pi r^2 h$
- kvadar dužine stranica a , b i c , površina $P = 2(ab + ac + bc)$, zapremina $V = abc$.

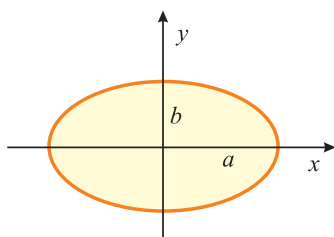
Neke korisne jednačine:

- jednačina prave linije nagiba m koja odseca odsečak dužine b na y osi je data relacijom (9.23),
- jednačina kružnice poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku je

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1 \quad (9.29)$$

- jednačina elipse sa centrom u koordinatnom početku je (slika 9.5)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (9.30)$$



Slika 9.5: Elipsa

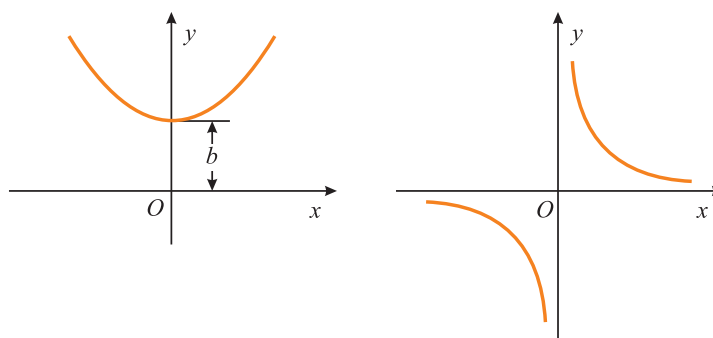
gde su: a dužina velike a b male poluose elipse.

- jednačina parabole koja ima ekstremalnu vrednost u tački $y = b$ je (slika 9.6)

$$y = ax^2 + b, \quad (9.31)$$

- jednačina ravnostane hiperbole je (slika 9.6)

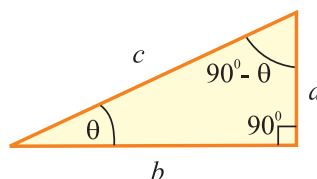
$$xy = \text{const.} \quad (9.32)$$



Slika 9.6: Parabola i hiperbola

9.6 Trigonometrija

Oblast matematike koja je bazirana na specijalnim karakteristikama pravougljih trouglova se naziva trigonometrija. Po definiciji, pravougli trougao je onaj koji ima jedan ugao od 90° . Posmatrajmo trougao prikazan na slici 9.7, kod koga je sa a označena kateta koja se nalazi naspram ugla θ , a sa b kateta koja naleže na njega, dok je sa c označena njegova hipotenuza.



Slika 9.7: Pravougli trougao

Tri osnovne trigonometrijske funkcije koje se definišu za takav trougao su funkcije sinus (\sin), kosinus (\cos) i tangens (\tan ili tg), koje su određene jednačinama

$$\sin \theta = \frac{a}{c}, \quad (9.33)$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c}, \quad (9.34)$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}. \quad (9.35)$$

Kao četvrta funkcija se često definiše i kotangens (\cot) kao recipročna vrednost tangensa, odnosno

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{b}{a}. \quad (9.36)$$

Na osnovu ovih relacija se takodje vidi da važi

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

Ukoliko se podje od relacije izmedju kvadrata kateta i kvadrata hipotenuze, odnosno od Pitagorine teoreme

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

dolazi se do osnovnog trigonometrijskog identiteta

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \quad (9.37)$$

Sa slike 9.7 se vidi da važe sledeće relacije

$$\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta),$$

$$\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta),$$

$$\cot \theta = \tan(90^\circ - \theta).$$

Važne osobine trigonometrijskih funkcija su i:

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta,$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta,$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta.$$

Za bilo koji trougao (slika 9.8), važe sinusna

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}. \quad (9.38)$$

i kosinusna

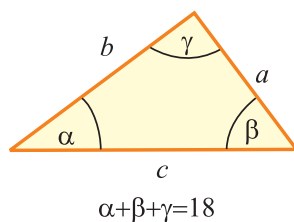
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned} \quad (9.39)$$

teorema.

Neki važni trigonometrijski identiteti:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta,$$



Slika 9.8: Proizvoljni trougao

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta,$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta),$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta),$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

9.7 Diferencijalni račun

Ovu oblast matematike je uveo Njuton u cilju boljeg opisivanja fizičkih pojava. Danas je nemoguće zaobići njenu primenu u proučavanju pojava iz mehanike, termodinamike, molekularne fizike, elektriciteta, magnetizma, ...

Izvod funkcije $y = y(x)$ po promenljivoj x , se definiše kao granična vrednost odnosa priraštaja funkcije $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ i priraštaja Δx promenljive x , kada Δx teži nuli

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}, \quad (9.40)$$

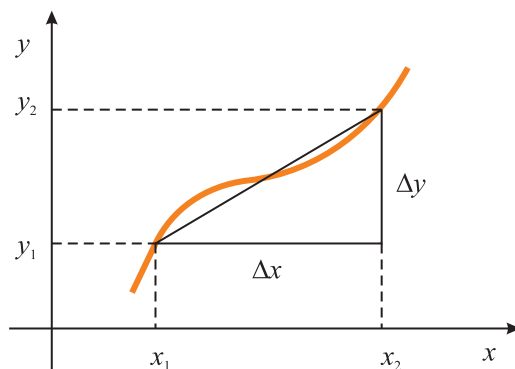
gde su Δy i Δx definisani kao $\Delta x = x_2 - x_1$ i $\Delta y = y_2 - y_1$ (Slika 9.9.).

Ukoliko je funkcija zadata izrazom $y(x) = ax^n$, gde je a konstanta a n bilo koji ceo broj ili razlomak, njen izvod je

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}. \quad (9.41)$$

Primer d1. Neka je funkcija $y(x)$ data izrazom

$$y(x) = ax^3 + bx + c,$$



Slika 9.9:

gde su a i b konstante. Priraštaj funkcije za priraštaj promenljive x za Δx se može dobiti na osnovu

$$y(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c,$$

odnosno

$$y(x + \Delta x) = a(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x + \Delta x) + c,$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + b\Delta x.$$

Zamena ovog izraza u izraz (9.40) daje

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(3ax^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) + b]$$

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b.$$

9.7.1 Osobine izvoda

Izvod proizvoda dve funkcije. Ako je funkcija $f(x)$ proizvod dve funkcije, recimo $g(x)$ i $h(x)$, izvod funkcije $f(x)$ je

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(x)h(x)] = \frac{dg}{dx} h + g \frac{dh}{dx}. \quad (9.42)$$

Izvod zbira dve funkcije. Ako je funkcija $f(x)$ jednaka zbiru dve funkcije, izvod njihovog zbira je jednak zbiru njihovih izvoda

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}. \quad (9.43)$$

Izvod složene funkcije. Ako je $f(x)$ i $x = g(z)$, odnosno $y = f[g(z)]$, izvod funkcije y po nezavisnoj promenljivoj z (dy/dz) je

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz}. \quad (9.44)$$

Drugi izvod. Drugi izvod funkcije y u odnosu na x je jednak izvodu funkcije dy/dx po x (prvi izvod prvog izvoda). To se obično piše kao

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right). \quad (9.45)$$

Primer di2. Odrediti izvod funkcije $y = x^3/(x+1)^2$ po x .

Rešenje. Ako se ova funkcija zapiše u obliku $y = x^3(x+1)^{-2}$ i primeni jednačina (9.42), dobija se

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(x^3)}{dx}(x+1)^{-2} + x^3 \frac{d((x+1)^{-2})}{dx} \\ &= 3x^2(x+1)^{-2} + x^3(-2)(x+1)^{-3}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x^3}{(x+1)^3}.$$

Primer di3. Pokazati da je izvod količnika dve funkcije

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right] = \frac{h \frac{dg}{dx} - g \frac{dh}{dx}}{h^2}.$$

Rešenje. Najpre treba količnik funkcija zapisati kao proizvod gh^{-1} pa onda primeniti formule (9.41) i (9.42):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{d}{dx}(gh^{-1}) = \frac{dg}{dx}h^{-1} + g \frac{d(h^{-1})}{dx} = \frac{dg}{dx}h^{-1} - gh^{-2} \frac{dh}{dx}$$

odakle se sredjivanjem dobija traženi izraz.

9.7.2 Izvodi nekih funkcija

$$\frac{da}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx} ax^n = nax^{n-1},$$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax},$$

$$\frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax,$$

$$\frac{d}{dx} \cos ax = -a \sin ax,$$

$$\frac{d}{dx} \tan ax = \frac{a}{\cos^2 ax},$$

$$\frac{d}{dx} \cot ax = -\frac{a}{\sin^2 ax},$$

$$\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{x}.$$

9.7.3 Razvoj u red nekih funkcija

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots,$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2} x^2 \pm \frac{1}{3} x^3 - \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Za male vrednosti argumenta, odnosno za $x \ll 1$, važe sledeći aproksimativni izrazi¹⁰

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad \sin x \approx x,$$

$$e^x \approx 1+x, \quad \cos x \approx 1,$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x, \quad \tan x \approx x.$$

9.8 Integralni račun

Integraljenje neke funkcije je operacija koja je inverzna operaciji diferenciranja odnosno traženja izvoda funkcije. To se lepo vidi na primeru funkcije

$$f(x) = 3ax^2 + b, \tag{9.46}$$

koja se, kao što smo videli u primeru d1, dobija kao rezultat diferenciranja funkcije

$$y(x) = ax^3 + bx + c.$$

U tom smislu izraz (9.46) može da se napiše kao $f(x) = dy/dx$ odakle formalno sledi da važi

$$dy = f(x)dx = (3ax^2 + b)dx.$$

Iz ove relacije sledi da se funkcija y dobija "sumiranjem" po svim vrednostima funkcije x (y se dobija sabiranjem njenih malih promena odnosno diferencijala dy koje su preko ove relacije u vezi sa diferencijalima nezavisne promenljive x). U matematici se ovakva operacija naziva integraljenje i zapisuje na sledeći način

$$y(x) = \int f(x)dx.$$

Za gore razmatranu funkciju (9.46), ovaj integral daje

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)dx = ax^3 + bx + c,$$

gde se c naziva konstantnom integracije. Ovakav integral se naziva *neodređeni* integral jer njegova vrednost zavisi od izbora konstante c .

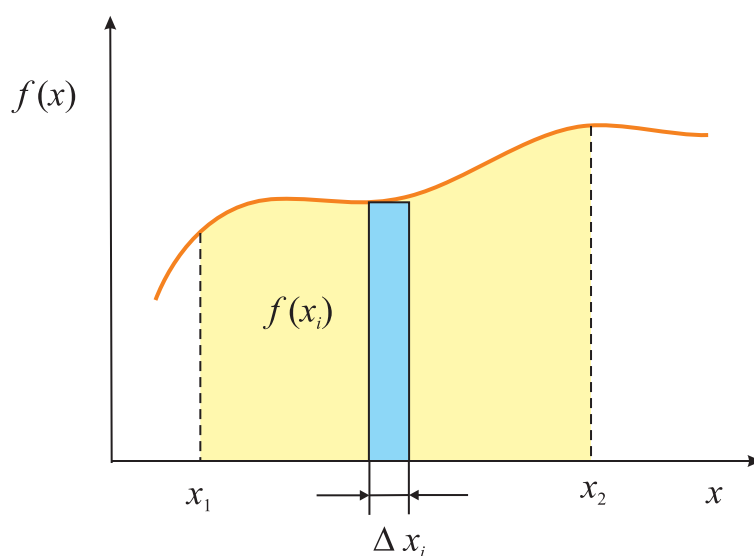
¹⁰Za trigonometrijske funkcije ovo znači da je $x \leq 0,1$ rad.

U opštem slučaju, **neodredjeni integral** $I(x)$, funkcije $f(x)$ se definiše kao

$$I(x) = \int f(x)dx,$$

gde je $f(x)$ *integrand* ili *podintegralna funkcija* za koju mora da važi da je $f(x) = dI(x)/dx$, pri čemu se $I(x)$ naziva *primitivna funkcije* funkcije $f(x)$.

Za *neprekidnu* funkciju $f(x)$, ukoliko se znaju moguće vrednosti nezavisne promenljive x , integral može da se shvati kao površina ispod krive koja predstavlja grafik funkcije $f(x)$ i x ose, između određenih vrednosti x_1 i x_2 (slika 9.10.).



Slika 9.10:

Uska pravougaona osenčena vrednost ima površinu jednaku $f(x_i)\Delta x_i$. Ukoliko saberemo sve takve elemente od x_1 do x_2 dobili bi približnu vrednost površine ispod krive $f(x)$. A ukoliko uzmemo graničnu vrednost ove sume za $\Delta x_i \rightarrow 0$, dobili bi pravu vrednost površine između ove krive i x ose za vrednost nezavisne promenljive između vrednosti x_1 i x_2 , odnosno

$$\text{Površina} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \quad (9.47)$$

Integrali ovog tipa se nazivaju **određeni integrali**.

U praksi se često srećemo sa integralima oblika

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1). \quad (9.48)$$

Rezultat integracije je jasan i lako proverljiv. Dovoljno je izvršiti diferenciranje desne strane ove jednakosti i videti da se kao rezultat zaista dobija podintegralna funkcija $f(x) = x^n$. Ukoliko su granice integrala definisane, integral postaje određen i ima vrednost

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n dx = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1}, \quad (n \neq -1). \quad (9.49)$$

To je posledica jednog opštijeg pravila za određeni integral koje glasi

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = I(x)|_{x_1}^{x_2} = I(x_2) - I(x_1). \quad (9.50)$$

Primer ii1.

1. $\int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3}.$
2. $\int_0^b x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} \Big|_0^b = \frac{2}{5} b^{5/2}.$
3. $\int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_3^5 = \frac{5^2 - 3^2}{2} = 8.$

9.8.1 Parcijalna integracija

Često je za rešavanje integrala zgodno primeniti metodu *parcijalne integracije* u kojoj se u osnovi koristi osobina diferencijala proizvoda dve funkcije

$$d(uv) = u dv + v du,$$

odakle je

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (9.51)$$

gde je potrebno izabrati u i v na način pogodan da se polazni složeni integral svede na neki prostiji. Često je pri rešavanju nekih integrala potrebno primeniti ovaj postupak više puta. Na primer, integral $\int x^2 e^x dx$ se može rešiti primenom parcijalne integracije dva puta. Ukoliko u prvom koraku uzmemo da je $u = x^2$ a $dv = e^x dx$ (odavde je $v = e^x$), na osnovu formule (9.51) se dobija

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

Za rešavanje integrala u drugom sabiru desne strane zgodno je u narednom koraku uzeti da je $u = x$ i $v = e^x$, što dovodi do

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x.$$

Na osnovu ovoga je traženi integral

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c.$$

9.8.2 Totalni diferencijal

Druga korisna metoda je metoda *totalnog diferencijala* koja se sastoji u uvodjenju takve smene da diferencijal nezavisne promenljive postane zapravo diferencijal podintegralne funkcije. Da bi pokazali kako se ova metoda primenjuje razmotrimo sledeći integral

$$I(x) = \int \cos^2 x \sin x dx.$$

On može da se napiše u obliku

$$\int \cos^2 x \sin x dx = - \int \cos^2 x d(\cos x),$$

odakle je logično da treba uvesti smenu $y = \cos x$, koja daje

$$\int \cos^2 x \sin x dx = - \int y^2 dy,$$

što je integral koji se elementarno rešava i ima vrednost $-y^3/3 + c$. Povratak na izvornu promenljivu daje vrednost polaznog integrala

$$\int \cos^2 x \sin x dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + c.$$

9.8.3 Integrali nekih funkcija

Slede nedoređeni integrali nekih funkcija. U rezultat integracije treba dodati i proizvoljnu konstantu.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x,$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{b} \ln(a+bx),$$

$$\int \frac{xdx}{ax+b} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln(a+bx),$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a} \ln x + ax,$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)},$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, \quad (a^2-x^2 > 0),$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}, \quad (x^2-a^2 > 0),$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax},$$

$$\int ax dx = x \ln ax - x,$$

$$\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1),$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a+be^{cx}),$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax,$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax,$$

$$\int \tan ax dx = \frac{1}{a} \ln(\cos ax),$$

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sin ax),$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a},$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a},$$

9.8.4 Neki odredjeni integrali

$$\int_0^{\infty} x^n e^{ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}},$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a},$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}},$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2},$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}},$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} x^5 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2 I_1}{da} = \frac{1}{a^3},$$

⋮

$$I_{2n} = \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = (-1)^n \frac{d^n I_0}{da^n},$$

$$I_{2n+1} = \int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = (-1)^n \frac{d^n I_1}{da^n}.$$

Literatura

- [1] Halliday, Resnick, Walker, *Fundamentals of Physics*, 7th Edition, Wiley, 2005.
- [2] Paul Peter Urone, *College Physics*, Brooks/Cole Publishing Company, 1978
- [3] Serway and Jewet, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th edition, ...
- [4] S. E. Friš, A. V. Timorjeva, *Kurs opšte fizike, I, II i III*, Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika, 1970.
- [5] N. N., *Berklijevski kurs fizike*, Zagreb, Školska knjiga, 1970.
- [6] A. N. Matveev, *Kurs opšte fizike. Mehanika*, Moskva, Oniks 21 vek, 2003.
- [7] Kalasnjikov, Smondirev, *Osnovi fiziki I i II*, Drofa, Moskva, 2003
- [8] Benjamin Crowell, *Newtonian Physics*, www.lightandmatter.com
- [9] Benjamin Crowell, *Conservation Laws*, www.lightandmatter.com
- [10] Benjamin Crowell, *Vibration nad Waves*, www.lightandmatter.com
- [11] David Morin, *Introductory Classical Mechanics, with Problems and Solutions*, Cambridge University Press, 2007.
- [12] Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, 1992.
- [13] B. M. Javorskij, A. A. Pinskij, *Osnovi fiziki I i II*, Moskva, Fizmatlit, 2003.
- [14] I. V. Savelev, *Kurs obscej fiziki, tom I i II*, Moskva, Nauka, 1977
- [15] x. X. Sivuhin, *Kurs obscej fiziki, tom I i II*, Moskva, Nauka, 1977