Glava 1

Kinematika

Fizika, jedna od baz̆ičnih prirodnih nauka, se bavi osnovnim prinicipima na kojima je zasnovan univerzum. Ona daje osnovu za druge prirodne nauke-astronomiju, biologiju, hemiju, geologiju, ... Lepota fizike leži u jednostavnosti osnovnih fizičkih teorija koja se ogleda u malom broju fundamentalnih koncepata, jednačina i pretpostavki koje mogu da izmene i prošire naš pogleda na svet oko nas.

Logički početak prezentovanja koncepata fizike se zasniva na pojmu kretanja čijim opisivanjem se bave i kinematika i dinamika, svaka na svoj način.

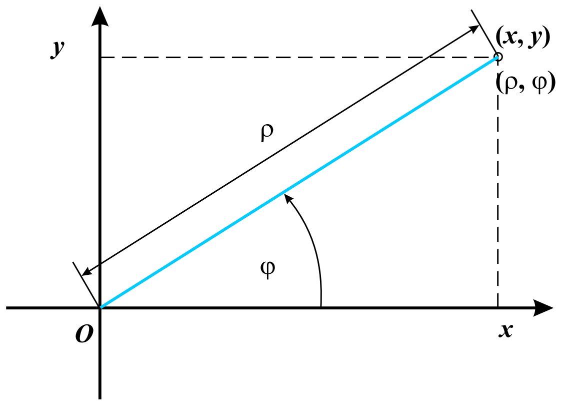
1.1 Koordinatni sistemi u ravni

Za odredjivanje položaja čestice u ravni potrebno je izabrati dva nezavisna broja - koordinate čijim ćemo poznavanjem u svakom momentu vremena tačno moći da znamo gde se čestica nalazi.[1] Najpoznatija su sledeća dva koordinatna sistemi u ravni: 1) pravougli Dekartov koordinatni sistem - u njemu dva broja (x, y) odredjuju položaj tačke u odnosu na koordinatni početak[2] i 2) polarni koordinatni sistem - položaj tačke je odredjen koordinatama (ρ, φ).[3]

[1] Prostor i vreme u klasičnoj mehanici su neprekidni, što u fizičkom smislu znači da telo ne može da nestane, a u matematičkom da se mogu primenjivati za opisivanje položaja i kretanja tela metode matematičke analize, odnosno da se mogu dobro definisati izvodi i integrali odgovarajućih mehaničkih veličina.

[2] Reč je naravno o komponentama vektora položaja $\vec{r}$ koji je u ovom slučaju zadat izrazom $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, gde su $\vec{e}_x$ i $\vec{e}_y$ jedinični vektori koordinatnih osa. U slučaju kretanja čestice u tri dimenzije, vektor položaja će biti predstavljen izrazom $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

[3] Dok je oblast definisanosti dekartovih koordinata x i y od $-\infty$ do $+\infty$, za polarne važi $\rho \in (0, +\infty)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.



Slika 1.1: Dekartov i polarni koordinatni sistem. Koordinata ρ odgovara udaljenosti tačke od koordinatnog početka, dok je φ ugao koji zaklapa vektor položaja tačke sa x osom.

Sa slike 1.1 jasno vidi da je veza jednih i drugih koordinata u ravni zadata relacijama

$$x = \rho \cos\varphi, y = \rho \sin\varphi, \tag{1.1}$$

odnosno

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.2}$$

Primer 1. Dekartove koordinate tačke u (x, y) ravni su a) $(x, y) = (1, 1)$ m, b) $(x, y) = (-1, 1)$ m, c) $(x, y) = (-1, -1)$ m, d) $(x, y) = (1, -1)$ m. Odredi polarne koordinate te tačke.

a) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1m)^2 + (1m)^2} = \sqrt{2}m$ $\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1m}{1m} = 1$. Iz poslednje relacije se za traženi polarni ugao φ dobija dva rešenja 45^o i 225^o (odnosno $\pi/4$ i $5\pi/4$) a na osnovu položaja tačke zadate dekartovim koordinatama x i y tj. na osnovu njihovog znaka da treba uzeti rešenje koje odgovara manjem uglu jer jedino tada tačka leži u prvom kvadrantu. Drugo rešenje odgovara tački koja je navedena pod c) i tom slučaju tačka leži u trećem kvadrantu. U slučajevima b) i c) koordinata ρ ima istu vrednost kao i u ostalim slučajevima, tangens ugla φ je jednak -1 a na osnovu znaka x i y su traženi uglovi $3\pi/4$ i $7\pi/4$.

Primer 2. Opisati dekartovim i polarnim koordinatama kretanje po kružnici poluprečnika R, konstantnom ugaonom brzinom ω.

Kako je u ovom slučaju predjeni ugao za vreme t jednak $\varphi = \omega t$, a udaljenost od koordinatnog početka stalno iznosi R, jednačine koje opisuju kretanje u polarnim koordinatama glase

$$\rho(t) = R, \varphi(t) = \omega t,$$

a u dekartovim

$$x = R\cos(\omega t), y = R\sin(\omega t).$$

Lako je primetiti da je u ovom slučaju pogodnije koristiti polarne koordinate umesto dekartovih.

1.2 Brzina u diferencijalnoj formi

Posmatrajmo kretanje materijalne tačke (čestice) po nekoj trajektoriji. Ukoliko ona, za jednake, ma kako male, vremenske intervale Δt prelazi jednake puteve Δs, kretanje čestice se naziva ravnomernim. Deljenjem ukupnog predjenog puta s, vremenom t za koje je predjen, ili dela predjenog puta Δs i odgovarajućeg intervala vremena Δt dobija se veličina

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.3}$$

koja se naziva intenzitet brzine čestice[4] i jednaka je putu koji ona predje u jedinici vremena.

Ako je kretanje neravnomerno, veličina koja se dobija deljenjem predjenog puta i vremena je intenzitet srednje brzine čestice za dati interval vremena

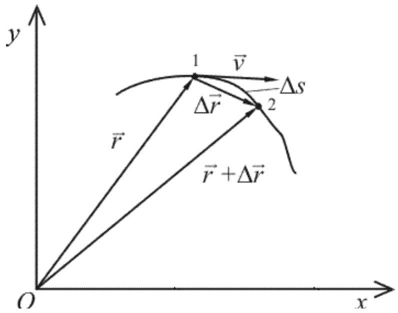
$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

Da bi što preciznije odredili intenzitet brzine v, kojom se čestica kreće u nekom vremenskom trenutku, treba postupiti na sledeći način. Uzima se neki naredni vremenski interval Δt (koji sledi za vremenskim trenutkom t), i odredi se put Δs koji čestica predje za navedeni interval. Odnos Δs i Δt, u tom slučaju predstavlja intenzitet srednje brzine čestice za dati vremenski interval. Ukoliko se medjutim za nalaženje ovog odnosa uzima sve manji i manji vremenski interval Δt (pri ovome će se naravno i predjeni put smanjivati), u graničnom slučaju kada vremenski interval bude dovoljno mali (u matematičkom smislu teži nuli) odnos $\Delta s/\Delta t$ će težiti intenzitetu "prave" brzine u momentu t. To se zapisuje na sledeći način

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

[4]Brzina je vektorska veličina pa je za njeno potpuno poznavanje neophodno navesti još i pravac i smer kojim se telo kreće.

Ukoliko pak želimo da brzinu odmah definišemo kao vektorsku veličinu, potrebno je postupiti na nešto drugačiji način.



Slika 1.2: U momentu vremena t čestica se nalazi u tački 1, čiji položaj je odredjen vektorom položaja $\vec{r}$. Za interval vremena Δt čestica prelazi u tačku 2 čiji položaj je odredjen vektorom položaja $\vec{r}+\Delta\vec{r}$, gde je $\Delta\vec{r}$ vektor pomeraja, tj. priraštaj vektora položaja. Kada Δt teži nuli, tačka 2 se "kreće" ka tački 1. Pri tome dužina luka Δs postaje sve približnije jednaka dužini tetive $|\Delta\vec{r}|$. U graničnom slučaju ove dve dužine su jednake jer tetiva tada zauzme pravac tangente na trajektoriju u tački 1.

Na slici 1.2 je prikazana trajektorija čestice. Za vreme Δt čestica će doživeti pomeraj $\Delta\vec{r}$, koji je jednak priraštaju vektora položaja $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ za dati vremenski interval. Ukoliko priraštaj $\Delta\vec{r}$ podelimo intervalom vremenom Δt za koji se desio, dobićemo srednju vrednost brzine čestice

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.6}$$

Trenutna brzina čestice $\vec{v}$ će biti jednaka graničnoj vrednosti vektora pomeraja čestice i vremenskog intervala Δt za koji se on desio, uz uslov da vremenski interval teži nuli,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.7}$$

Drugim rečima, brzina je izvod vektora položaja po vremenu.[5] U fizici je uobičajeno da se izvodi po vremenu označavaju tačkom iznad slova koje označava datu fizičku veličinu tako da se ovaj izraz često piše u obliku

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \tag{1.8}$$

[5]Vektor položaja je vektor koji zavisi od vremena i kako čestica menja položaj u prostoru tako i ovaj vektor menja svoj pravac, smer i intenzitet.

Sa slike 1.2 se vidi da vektor trenutne brzine $\vec{v}$ ima pravac tangente na trajektoriju u datoj tački gde se nalazi čestica u datom momentu vremena, a smer joj je u smeru kretanja. Intenzitet brzine je jednak apsolutnoj vrednosti izraza (1.7)

$$v = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}. \tag{1.9}$$

Kako se sa slike 1.2 vidi da odnos $\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s}$ teži jedinici kada $\Delta t \to 0$, prethodni izraz može da se transformiše na sledeći način

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{ds}{dt}, \tag{1.10}$$

što se poklapa sa formulom (1.5). Ako se prodiferencira po vremenu izraz za vektor položaja, smatrajući da su jedinični vektori koordinatnih osa konstantni, dolazi se do izraza

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \tag{1.11}$$

iz koga, ako ga uporedimo sa dekartovim zapisom brzine

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z \tag{1.12}$$

za komponente brzine u dekartovom koordinatnom sistemu se dobija

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}. \tag{1.13}$$

1.3 Predjeni put

Ukoliko je poznat intenzitet brzine u svakom momentu vremena, moguće je izračunati put koji je čestica prešla od nekog momenta vremena t_1 do nekog docnijeg momenta t_2. Početni korak je deljenje intervala vremena $t_2 - t_1$ na N malih (ne obavezno jednakih) intervala vremena Δt_i (i je redni broj intervala koji ide od 1 do N). U skladu sa izrazom $v = ds/dt$, može se smatrati da je put Δs_i, predjen za interval Δt_i, približno jednak proizvodu v_i i Δt_i:

$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i \tag{1.14}$$

(ovde je v_i-bilo koja vrednost brzine iz intervala Δt_i jer se može smatrati da se unutar njega brzina toliko malo menja da se smatra skoro konstatnom

- zato je svejedno koja je vrednost uzeta). Ukupan put koji predje čestica jednak je sumi puteva Δs_i

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdot + \Delta s_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i, \tag{1.15}$$

odnosno, ukoliko u ovaj izraz zamenimo svaki interval njegovom približnom vrednošću (1.14),

$$s \approx \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i. \tag{1.16}$$

Ako sada počnemo da smanjujemo intervale vremena Δt_i, proizvodi $v_i \Delta t_i$ će sa sve većom tačnošću odredjivati puteve predjene za te intervale. U graničnom slučaju, kada su svi intervali vremena dovoljno mali, tj. kada teže nuli (N pri tome neograničeno raste), dobija se tačna vrednost predjenog puta kao granična vrednost

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i. \tag{1.17}$$

U matematici se izrazi oblika

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \Delta x_i \tag{1.18}$$

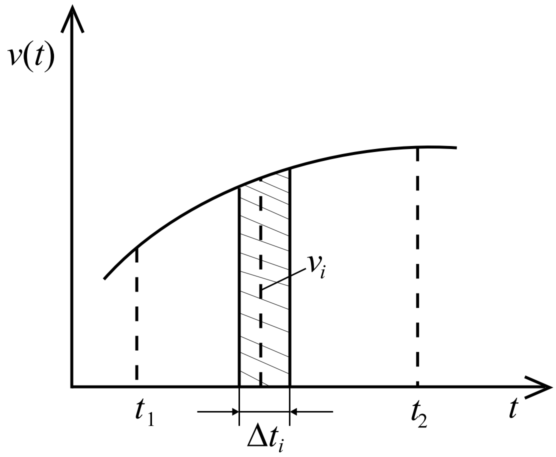
za vrednosti promenljive x u nekom intervalu od a do b, nazivaju odredjeni integral funkcije $f(x)$, u granicama od $x = a$, do $x = b$ i označavaju se simbolom

$$\int_a^b f(x) dx. \tag{1.19}$$

Uporedjujući izraze (1.17) i (1.18) relativno lako se vidi da predjeni put čestice u vremenskom intervalu od t_1 do t_2 može da se predstavi odredjenim integralom funkcije $v(t)$ (ona pokazuje kako se menja sa vremenom intenzitet brzine)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \tag{1.20}$$

Odredjeni integral ima prost geometrijski smisao koji može da se lako primeti upravo na primeru izračunavanja predjenog puta. Na slici 1.3 se vidi da je proizvod $v_i \Delta t_i$ približno jednak površini osenčene "trake" osnove Δt_i. Zbir takvih proizvoda (1.16) je približno jednak površini oblasti ograničene



Slika 1.3: Površina šrafirane oblasti je približno jednaka proizvodu $v_i\Delta t_i$

krivom $v(t)$. Pri deljenju te oblasti na sve uže i uže trake (ovo odgovara procesu $\Delta t_i \to 0$, odnosno $N \to \infty$), zbir površina traka daje površinu oblasti ispod krive ograničene odozdo vremenskom osom a s leva i s desna pravima $t = t_1$ i $t = t_2$. Ta površina je jednaka odredjenom integralu (1.20). Koristeći ovu formulu i formulu (1.4), srednja brzina može da se napiše u obliku

$$v_{sr} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \tag{1.21}$$

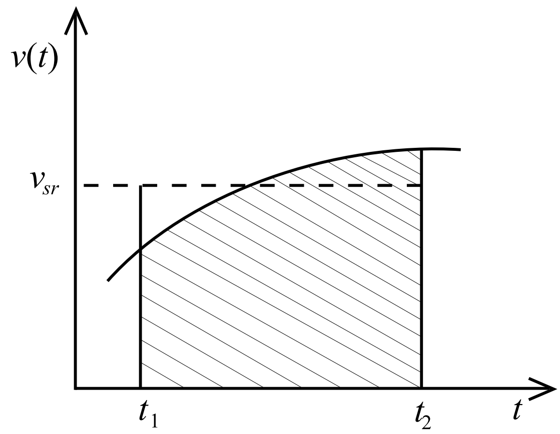
jer je ukupno vreme kretanja iz formule (1.4) t ustvari jednako $t_2 - t_1$. Geometrijski smisao srednje brzine je prikazan na slici (1.4).

1.4 Ubrzanje u diferencijalnoj formi

Pretpostavimo da se čestica kreće duž neke putanje od jedne do druge tačke u prostoru, pri čemu se njena brzina menja od neke početne vrednosti $\vec{v}_i$ (u momentu vremena t_i) do finalne vrednosti $\vec{v}_f$ u momentu vremena t_f. Poznavanje trenutnih brzina u tim dvema tačkama omogućuje nam da odredimo srednje ubrzanje čestice.

Srednje ubrzanje čestice, prilikom njenog kretanja od jedne tačke do neke druge, jednako je odnosu promene (priraštaja) brzine čestice $\Delta\vec{v}$ i intervala vremena za koji se ta promena u brzini desila:

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.22}$$



Slika 1.4: Površina šrafirane oblasti ispod krive $v(t)$ je jednaka površini pravoguaonika visine v_{sr} i osnovice $t_2 - t_1$.

Kako se radi o odnosu vektorske veličine $\Delta\vec{v}$ i skalarne Δt, može se zaključiti da je vektor $\vec{a}_{sr}$ usmeren duž pravca vektora $\Delta\vec{v}$ (slika 1.5). Kako srednje ubrzanje zavisi od intervala vremena za koji je izračunato i menja se tokom kretanja čestice, korisno je definisati trenutno ubrzanje $\vec{a}$: **Trenutno ubrzanje** je granična vrednost odnosa $\Delta\vec{v}/\Delta t$ kada vremenski interval Δt teži nuli

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \tag{1.23}$$

Drugim rečima, trenutno ubrzanje je (prvi) izvod vektora brzine po vremenu. Imajući u vidu da je brzina takodje (prvi) izvod vektora položaja po vremenu i kombinujući prethodnu jednačinu sa (1.8), dobija se

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}, \tag{1.24}$$

odnosno

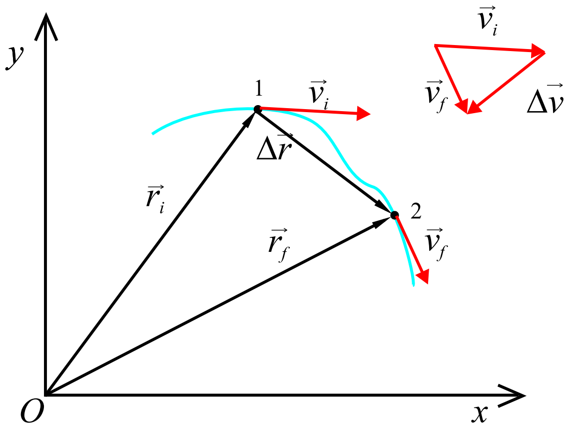
$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z. \tag{1.25}$$

Na osnovu ovog izraza se za dekartove komponente ubrzanja

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \tag{1.26}$$

dobija

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{1.27}$$



Slika 1.5: Čestica se kreće od tačke 1 do tačke 2. Njen vektor brzine se menja od $\vec{v}_i$ na $\vec{v}_f$. Na vektorskom dijagramu, u gornjem desnom delu slike, je pokazano kolika je razlika ova dva vektora $\Delta\vec{v}$.

(komponente ubrzanja su drugi izvodi po vremenu komponenti vektora položaja). Važno je uočiti da promena brzine može da nastane na dva načina. Prvo, brzina može da se menja po intenzitetu (npr. prilikom kretanja čestice duž prave linije). Drugo, brzina može da se menja po pravcu i smeru a da pri tom po intenzitetu ostane ista (npr. prilikom kretanja u ravni). I naravno, postoji mogućnost da se brzina menja i po intenzitetu i po pravcu i smeru.

Primer 1

Razmotrimo pravolinijsko kretanje duž x ose pri čemu je stalno $x = const$. Kako je čestica nepokretna, priraštaj koordinate Δx je jednak nuli pa su i srednja i trenutna brzina takodje jednake nuli, što je u skladu sa činjenicom da je izvod konstantne funkcije nula.

Primer 2

Čestica se kreće tako da se njena koordinata menja sa vremenom po zakonu $x(t) = Bt + C$, gde su B i C konstantni koeficijenti (x je linearna funkcija vremena). Da bi našli srednju brzinu, odredimo pomeraj Δx, koji je čestica doživela za vreme Δt

$$x + \Delta x = x(t + \Delta t) = B(t + \Delta t) + C = Bt + C + B\Delta t,$$

odakle se vidi da je on $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = B\Delta t$. Na osnovu ovoga je srednja brzina konstantna i jednaka koeficijentu B,

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = B$$

a trenutna brzina je takodje konstantna

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = B.$$

Kretanje koje se odvija konstantnom brzinom se naziva *ravnomernim*. Ukoliko sa x_i označimo početnu vrednost koordinate, odnosno vrednost koordinate u $t = 0$, lako je videti da ona odgovara konstanti C u izrazu za zavisnost $x(t)$. Pomeraj je sa druge strane $s = x - x_i = Bt$, odnosno

$$s = vt.$$

Primer 3.

Zavisnost koordinate od vremena je $x(t) = At^2 + Bt + C$, gde su A, B i C konstantni koeficijenti (x je kvadratna funkcija vremena t). U ovom slučaju je

$$x(t)+\Delta x = A(t+\Delta t)^2+B(t+\Delta t)+C = (At^2+Bt+C)+(2At+B)\Delta t+A\Delta t^2$$

što za srednju brzinu daje

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2At + B + A\Delta t.$$

Može da se primeti da srednja brzina zavisi i od vremenskog trenutka t u kome se odredjuje ali i od intervala vremena Δt za koji se odredjuje. U graničnom slučaju, kada Δt teži nuli, poslednji član gornjeg izraza takodje teži nuli pa se za trenutnu brzinu dobija

$$v = 2At + B.$$

Može da se primeti da je trenutna brzina linearna funkcija vremena. Srednje ubrzanje se dobija primenom analogne procedure

$$v+\Delta t = 2A(t+\Delta t)+B = (2At+B)+2A\Delta t, \quad \Delta v = 2A\Delta t, \quad a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2A,$$

odakle je trenutno ubrzanje

$$a = 2A, \quad (A = \frac{a}{2})$$

konstantno. Reč je dakle o kretanju sa konstantnim ubrzanjem, odnosno o jednakoubrzanom kretanju[6]. Kakav bi bio fizički smisao konstanti koje se pojavljuju u zavisnosti koordinate x od vremena? Kao što se vidi iz poslednje relacije konstanta A je jednaka polovini ubrzanja. Ukoliko se uzme da su u početnom trenutku vremena brzina i koordinate bile v_i i x_i lako se dobija da je $B = v_i$ i $C = x_i$, pa je

$$x = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2, \quad v = v_i + at,$$

dok je pomeraj $s = x - x_i$

$$s = v_i t + \frac{1}{2}at^2.$$

1.5 Kinematičke jednačine

Ukoliko je poznata zavisnost vektora položaja čestice od vremena $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$ (konačne jednačine kretanja), onda se primenom jednačina (1.8) i (1.23) mogu dobiti brzina i ubrzanje kao

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{1.28}$$

1.5.1 Ravnomerno ubrzano kretanje tela u jednoj dimenziji

Kretanje koje se ovako naziva je kretanje dužjednog pravca u prostoru koji ćemo poistovetiti sa x osom, sa konstantnim ubrzanjem $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, odakle sledi da je diferencijal brzine

$$dv_x = a_x dt \tag{1.29}$$

a sama brzina je

$$v_x = \int a_x dt = a_x t + C_1 \tag{1.30}$$

gde je C_1 integraciona konstanta. Vrednost integracione konstante zavisi od početnih uslova kretanja. Ako se uzme da je $v_x = v_{xi}$ u trenutnku $t = 0$, tj. u momentu kada smo počeli da posmatramo kretanje, zamenom ovih vrednosti u prethodnu jednačinu se dobija

$$v_{xi} = a_x \cdot 0 + C_1 \tag{1.31}$$

[6]Primeri za ovakvo kretanje su slobodni pad u homogenom polju Zemljine teže u slučaju kada se zanemaruje trenje, i kotrljanje niz strmu ravan (takodje sa zanemarivanjem trenja izmedju tela i podloge.

odakle se za traženu konstantu dobija $C_1 = v_{xi}$. Sada jednačina (1.30) poprima poznat oblik zakona promene brzine sa vremenom u slučaju kada se telo ravnomerno ubrzava

$$v_x = v_{xi} + a_x t. \tag{1.32}$$

Zavisnost koordinate x od vremena se može dobiti na osnovu izraza za brzinu $v_x = \frac{dx}{dt}$ odakle je

$$dx = v_x dt \tag{1.33}$$

a x je u tom slučaju integral (uz korišćenje izraza (1.32))

$$x = \int v_x dt = \int (v_{xi} + a_x t) dt, \tag{1.34}$$

odnosno

$$x = \int v_{xi} dt + \int a_x t dt = v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2 + C_2, \tag{1.35}$$

gde je C_2 nova integraciona konstanta. Za nalaženje konstante C_2 iskoristićemo početni uslov $x = x_i$ (gde je x_i koordinata koja opisuje početan/inicijalan položaj) kada je $t = 0$. To daje $C_2 = x_i$, pa je izraz koji opisuje zavisnost koordinate x od vremena, za konstantno ubrzanje

$$x = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2. \tag{1.36}$$

Na osnovu ovog izraza je lako videti da je pomeraj prilikom kretanja od nultog trenutka (kada smo počeli da posmatramo kretanje) do vremenskog trenutka t

$$x - x_i = v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2. \tag{1.37}$$

1.5.2 Ravnomerno ubrzano kretanje tela u dve i tri dimenzije

Za početak pokušajmo da opišemo ravnomerno ubrzano kretanje čestice u dve dimenzije prilikom koga je ubrzanje konstantno i po pravcu i smeru i po intenzitetu.

Vektor položaja čestice koja se kreće u xy ravni je[7]

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y. \tag{1.38}$$

Ako je poznata zavisnost vektora položaja od vremena, brzina

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y. \tag{1.39}$$

[7] Pri ovome se veličine x, y i $\vec{r}$ menjaju dok se čestica kreće, a jedinični vektori koordinatnih osa $\vec{e}_x$ i $\vec{e}_y$ ostaju konstantni tokom tog vremena.

se može dobiti na osnovu relacije (1.28). Kako je ubrzanje $\vec{a}$ konstantno, konstante su mu i komponente a_x i a_y. Iz tog razloga moguće je primeniti odgovarajuće jednačine iz prethodnog paragrafa nezavisno na obe komponente vektora brzine. Tako zamena $v_x = v_{xi}+a_x t$ i $v_y = v_{yi}+a_y t$ u prethodnu jednačinu daje

$$\vec{v} = (v_{xi} + a_x t)\vec{e}_x + (v_{yi} + a_y t)\vec{e}_y = [v_{xi}\vec{e}_x + v_{yi}\vec{e}_y] + [a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y]t, \quad (1.40)$$

što se očigledno može zapisati kao

$$\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{a}t. \quad (1.41)$$

Ovaj izraz pokazuje da je brzina čestice u nekom momentu vremena t jednaka vektorskom zbiru vektora početne brzine $\vec{v}_i$ i dodatnog vektora $\vec{a}t$ koji je posledica konstantnog ubrzavanja čestice tokom kretanja.

Slično, iz jednačine(1.36) se dobija da se x i y koordinate čestice koja se kreće sa konstantnim ubrzanjem, menjaju sa vremenom na sledeći način

$$x = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad y = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2. \quad (1.42)$$

Zamena ovih izraza u jednačinu (1.38) daje

$$\vec{r} = (x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\vec{e}_x + (y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\vec{e}_y, \quad (1.43)$$

što nakon grupisanja članova može da se zapiše kao

$$\vec{r} = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \quad (1.44)$$

Ova jednačina govori da je pomeraj čestice (od početnog trenutka $t = 0$ do nekog trenutka t) $\Delta\vec{r} = \vec{r}-\vec{r}_i$ vektorska suma pomeraja $\vec{v}_i t$, koji je posledica postojanja početne brzine $\vec{v}_i$, i pomeraja $\frac{1}{2}\vec{a}t^2$ koji je posledica ravnomernog ubrzavanja čestice.

Na kraju vredi napomenuti da relacije (1.41) i (1.44) ostaju u važnosti i u slučaju kada se kretanje odvija u tri dimenzije, uz uzimanje u obzir činjenice da vektor položaja i brzina sada imaju tri komponente, odnosno da su zadati izrazom

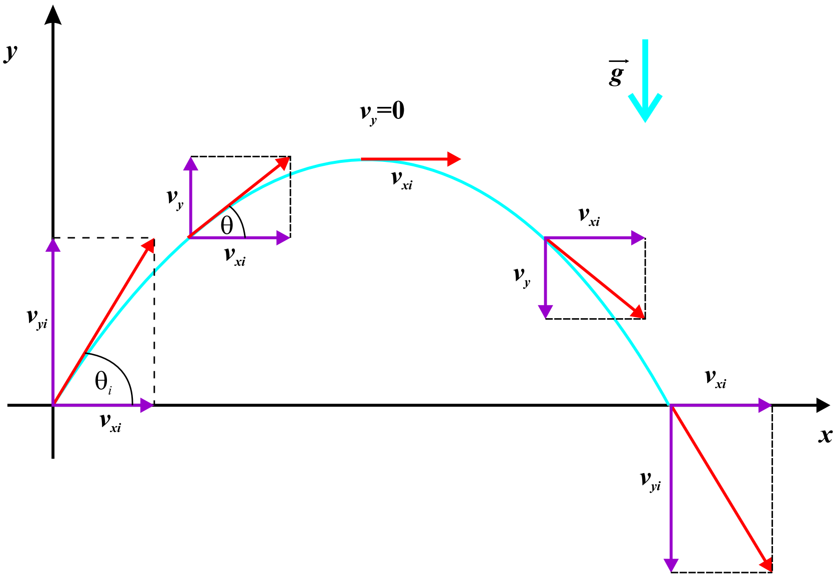
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad (1.45)$$

i

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z. \quad (1.46)$$

1.6 Kosi hitac

Telo koje se, u gravitacionom polju, izbaci pod nekim uglom u odnosu na površinu Zemlje, kreće se po krivolinijskoj putanji. Ovakvo kretanje je relativno lako proanalizirati ako se uzmu u obzir dve pretpostavke: (1) ubrzanje zemljine teže $\vec{g}$ je konstantna veličina u oblasti u kojoj se telo kreće i usmereno je naniže, tj. ka Zemlji[8], (2) zanemaruje se postojanje otpora vazduha. Ukoliko su ispunjene ove dve pretpostavke, može se pokazati da je putanja tela parabola.



Slika 1.6: Parabolična putanja tela izbačenog nekom brzinom v_i i pod nekim uglom θ_i u odnosu na horizontalu.

Izaberimo koordinatni sistem tako da je y osa usmerena naviše. U ovako izabranom koordinatnom sistemu ubrzanje zemljine teže je $\vec{g} = 0 \cdot \vec{e}_x + (-g)\vec{e}_y = -g\vec{e}_y$. Kako je otpor vazduha zanemaren, komponente ubrzanja sa kojim se kreće telo su $a_x = 0$ i $a_y = -g$. Pretpostavimo da je u trenutku $t = 0$ telo izbačeno iz koordinatnog početka ($x_i = y_i = 0$) brzinom $\vec{v}_i$ koja zaklapa ugao θ_i sa horizontom kao što je pokazano na slici 1.6. Sa slike se

[8] Ova pretpostavka je tačna ukoliko je oblast u kojoj se telo kreće mala u poredjenju sa poluprečnikom Zemlje ($6,4 \cdot 10^6 m$). Drugim rečima, ovo znači da se Zemlja smatra ravnom u oblasti u kojoj se telo kreće, odnosno u tom delu prostora gravitaciono polje se smatra homogenim.

vidi da su početne koordinate brzine v_{xi} i v_{yi} sa početnim uglom θ_i povezane relacijama

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i, \quad v_{yi} = v_i \sin\theta_i. \tag{1.47}$$

Vektor brzine se menja i po pravcu i po intenzitetu što je rezultat postojanja ubrzanja usmerenog u negativnom smeru y ose. Za to vreme x komponenta brzine ostaje konstantna u vremenu jer duž te ose nema nikakvog ubrzanja, odnosno važe relacije[9]

$$v_x = v_{xi}, \quad v_y = v_{yi} - gt. \tag{1.48}$$

U skladu sa jednačinom (1.42), uzimajući u obzir da je čestica krenula iz koordinatnog početka i da ima navedene komponente ubrzanja, u proizvoljnom momentu vremena t, njen položaj u ravni je odredjen sa

$$x = v_{xi}t, \quad y = v_{yi}t + \frac{1}{2}(-g)t^2, \tag{1.49}$$

odnosno

$$x = v_i \cos\theta_i t, \quad y = v_i \sin\theta_i t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.50}$$

Ove dve jednačine predsatvljaju jednačinu trajektorije u takozvanom parametarskom obliku (parmetar je vreme t) a da bi je dobili kao zavisnost y od x iz njih treba eliminisati vreme. Kako je iz prve jednačine $t = x/(v_i \cos\theta_i)$, druga postaje

$$y = x \tan\theta_i - \frac{g}{2v_i^2 \cos^2\theta_i}x^2, \tag{1.51}$$

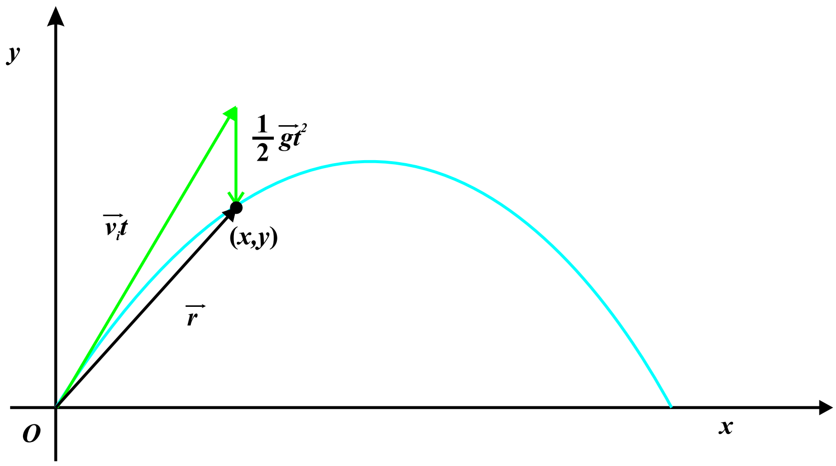
što je jednačina parabole koja prolazi kroz koordinatni početak. Jednačina (1.44) za ovakvo kretanje tela glasi ($\vec{r}_i = 0, \vec{a} = \vec{g}$)

$$\vec{r} = \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{1.52}$$

i prikazana je na slici 1.7. Kao što se vidi sa slike, može se zaključiti da kretanje čestice može da se shvati kao superpozicija kretanja opisanog članom $\vec{v}_i t$ koji odgovara kretanju konstantnom brzinom (bez ubrzanja) i korigovanog članom $\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ izazvanog ubrzanjem Zemljine teže.[10]Može da se zaključi

[9]Lako je primetiti da y komponenta brzine, koja se stalno menja, u najvišoj tački putanje postaje jednaka nuli.

[10]Drugim rečima, kada ne bi bilo ovog ubrzanja, čestica bi nastavila da se kreće po pravoj liniji u pravcu vektora početne brzine $\vec{v}_i$. Vertikalni put koji je telo prešlo $\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ je jednako putu koji bi za isto vreme prešlo telo koje slobodno pada u polju Zemljine teže za isti vremenski interval.



Slika 1.7: Vektor položaja materijalne tačke.

da je kretanje tela pri kosom hicu superpozicija dva kretanja: (1) kretanja konstantnom brzinom u horizontalnom pravcu i (2) slobodnog padanja po vertikali.

Primer 3. Odredjivanje maksimalne visine i dometa kosog hica. Kada je reč o odredjivanju maksimalne visine koju dostiže telo koje se kreće kao kosi hitac, to se može uraditi odredjivanjem vremena penjanja u tu tačku (u njoj je y komponenta brzine jednaka nuli) na osnovu jednačine (1.48) i zamenom u izraz za promenu y koordinate sa vremenom (1.50) koji u tom slučaju daje baš traženu visinu. Druga mogućnost je da potražimo x koordinatu u kojoj funkcija $y = y(x)$, odredjena relacijom (1.51) ima maksimum. U tu svrhu treba odrediti izvod navedene funkcije

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta_i - \frac{g}{v_i^2 \cos^2\theta_i} x \tag{1.53}$$

i pronaći tačku x_m u kojoj je on jednak nuli. Lako se vidi da je pethodna relacija jednaka nuli kada je x ima vrednost

$$x_m = \frac{v_i^2}{g} \sin\theta_i \cos\theta_i. \tag{1.54}$$

Vrednost funkcije $y(x)$ u ovoj tački je

$$y_m = y(x_m) = \frac{v_i^2}{2g} \sin^2\theta_i, \tag{1.55}$$

pa je to i tražena maksimalna visina na koju se može popeti telo. Domet se može dobiti na osnovu simetričnosti trajektorije u odnosu na pravu postavljenu vertikalno na x osu kroz tačku $x = x_m$ pa je domet prosto jednak dvostrukoj vrednosti ove koordinate

$$D = 2x_m = \frac{2v_i^2}{g}\sin\theta_i\cos\theta_i = \frac{v_i^2}{g}\sin 2\theta_i. \tag{1.56}$$

Zadatak 1. Projektil je (u polju zemljine teže) iz oružja ispaljen ka meti tako da napušta oružje istovremeno kada i meta počne da pada. Pokazati da li će, ili ne, projektil da pogodi metu.

1.7 Krivolinijsko kretanje

1.7.1 Kretanje po kružnici konstantnom ugaonom brzinom ω

Razmotrimo za početak kretanje čestice konstantnom ugaonom brzinom ω po kružnici. Pri ovome je vektor položaja čestice zadat relacijom

$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\vec{e}_x + r\sin(\omega t)\vec{e}_y = r(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y) = r\vec{e}_r, \tag{1.57}$$

gde je

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y \tag{1.58}$$

jedinični vektor duž pravca vektora položaja. Trenutna brzina čestice je sada

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\omega(-\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y). \tag{1.59}$$

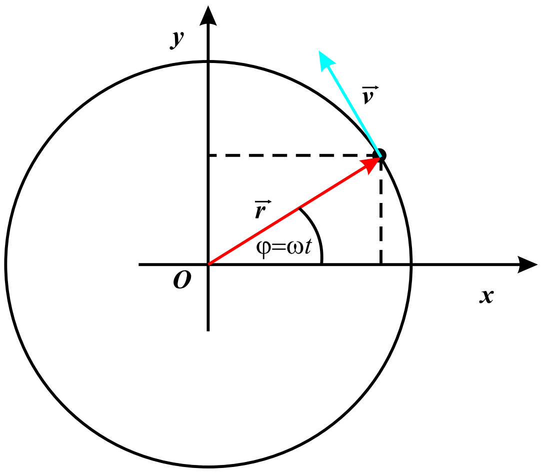
Kako je brzina uvek usmerena po tangenti, može se pisati da je $\vec{v} = v\vec{e}_\tau$, pri čemu važi

$$v = r\omega, \vec{e}_\tau = -\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y. \tag{1.60}$$

Treba primetiti da je intenzitet brzine $v = \omega r$ konstantan jer se kretanje odvija konstantnom ugaonom brzinom a telo je stalno na istom rastojanju od koordinatnog početka r. Ubrzanje kod ovakvog tipa kretanja je prema tome jednostavno

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega\vec{e}_\tau) = r\omega\frac{d}{dt}(\vec{e}_\tau) = r\omega^2(-\cos(\omega t)\vec{e}_x - \sin(\omega t)\vec{e}_y) = -\omega^2\vec{r}. \tag{1.61}$$

Pri ovome je intenzitet ubrzanja konstantan i iznosi $a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$ a usmereno je suprotno od vektora položaja tačke, odnosno ka centru kružne



Slika 1.8:

putanje. Dakle, pri uniformnom kretanju po kružnici ubrzanje je direktno usmereno ka centru kružnice, ima intenzitet v^2/r, gde je v brzuna čestice a r je poluprečnik. Ovo ubrzanje se u tom smislu naziva centripetalno ili radijalno.

1.7.2 Tangencijalno i radijalno ubrzanje

Razmotrimo sada kretanje čestice po krivolinijskoj putanji, pri čemu joj se brzina menja i po pravcu i po intenzitetu kao što je pokazano na slici 1.9. Brzina, kao i uvek, ima pravac tangente na putanju ali se pravac vektora ubrzanja $\vec{a}$ menja od tačke do tačke putanje. Taj vektor može da se razloži na dve komponente: radijalnu $\vec{a}_r$ i tangencijalnu komponentu $\vec{a}_\tau$, odnosno

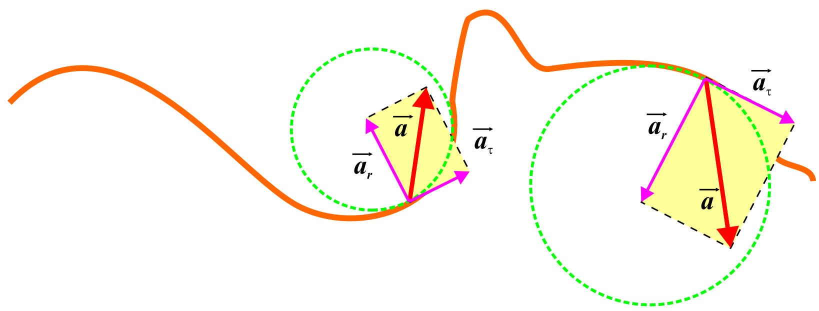
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\tau. \tag{1.62}$$

Tangencijalno ubrzanje opisuje promenu intenziteta brzine čestice. Ono je paralelno vektoru trenutne brzine a intenzitet mu je

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{1.63}$$

Radijalno ubrzanje opisuje promenu pravca vektora brzine a njegov intenzitet je odredjen ranije kao

$$a_r = \frac{v^2}{r} \tag{1.64}$$



Slika 1.9: Kretanje čestice duž krive linije koja leži u xy ravni. Promena vektora brzine i po pravcu i po intenzitetu ukazuje na to da ubrzanje $\vec{a}$ ima radijalnu $\vec{a}_r$ i tangencijalnu komponentu $\vec{a}_\tau$.

gde je r poluprečnik krivine u datoj tački. Kako su navedene dve komponente ubrzanja ortogonalne jedna na drugu, intenzitet ukupnog ubrzanje je

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\tau^2}. \tag{1.65}$$

Kao i u slučaju uniformnog kretanja po kružnici, vektor $\vec{a}_r$, je prilikom neuniformnog kretanja uvek usmeren ka centru krivine (Slika 1.9). Za datu vrednost brzine, a_r je utoliko veće ukoliko je poluprečnik krivine u datoj tački manji a ima manju vrednost u tačkama u kojima je poluprečnik krivine veći, odnosno tamo gde je putanja manje zakrivljena. Smer ubrzanja $\vec{a}_\tau$ je ili isti kao i smer brzine $\vec{v}$ (ukoliko ona raste), ili je suprotan od nje (ukoliko se ona smanjuje). Kompletan izraza za ubrzanje je dakle

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau. \tag{1.66}$$

Prilikom uniformnog kretanja po kružnici, prilikom koga je $v = const$, tangencijalno ubrzanje je nula i ukupno ubrzanje je uvek radijalno, odnosno centripetalno.

Ukoliko se pak smer brzine $\vec{v}$ ne menja, nema radijalnog ubrzanja, odnosno kretanje je jednodimenzionalno a celokupno ubrzanje je tangencijalno.

1.8 Smisao izvoda i integrala u fizici

Proces graničnog prelaza, pomoću koga se definiše izvod se naziva diferenciranje. Pojam izvoda ima široku primenu u mehanici a i u praktično svim drugim oblastima fizike. Upravo problem odredjivanja trenutne brzine proizvoljnog kretanja je i doveo Njutna do uvodjenja ovog pojma tako da se on, zajedno sa Lajbnicom, smatra rodonačelnikom diferencijalnog računa. Oznaku za izvode oblika dx/dt, kakve koristimo danas je uveo Lajbnic. U matematici se ovaj simbol smatra celinom a ne odnosom dva "beskonačno mala" priraštaja. U proceduri nalaženja ove veličine se prvo obrazuju odnose konačnih priraštaja $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, pretpostavljajući da priraštaji Δt nisu jednaki nuli. Nakon toga treba nekom pogodnom tranformacijom tog odnosa odrediti graničnu vrednost ovog izraza. Drugim rečima, ne sme da se smatra da je prvo napravljen granični prelaz od Δx i Δt na "beskonačno male" veličine dx i dt, koje se nazivaju diferencijalima, pa da je zatim uzet njihov odnos. U stvari, u matematici, pojam izvoda je "stariji" od pojma diferencijala, odnosno, diferencijal promenljive se definiše preko izvoda na sledeći način: $dx = \dot{x}dt$.

Ukoliko nas medjutim interesuje primena matematike u fizici, treba stalno imati u vidu to, da se fizičke veličine dobijaju, u osnovi, kao rezultat merenja, a sva merenja se vrše sa greškom koje ulaze na odredjeni način u dobijeni rezultat izvršenog merenja. Ovo nam ukazuje na to da je u fizici zapravo nemoguće izvršiti granični prelaz $\Delta t \to 0$, koji se u matematici uvodi kod definisanja izvoda.

P r i m e r. Merenje brzine kretanja metka kroz vazduh. Zadatak se svodi na merenje rastojanja Δx i intervala vremena Δt za koji metak predje to rastojanje. Ukoliko za interval vremena uzmemo preveliku vrednost, može da se desi da se za to vreme brzina taneta znatno umanji zbog otpora vazduha. Odnos $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, u tom slučaju može da bude znatno manji od brzine taneta u datom momentu vremena. Umanjujući pak, interval vremena Δt, moglo bi da se primeti, da, počev od neke vrednosti, odnos $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, u granicama tačnosti merenja, prestaje da se menja. Dalje smanjivanje vremenskog intervala je besmisleno, jer pri tome ovaj odnos počinje da se menja na neuredjen način, odnosno poprima razne vrednosti, od jako velikih do jako malih.

Razlog leži u tome što je tačnost bilo kog merenja to manja što je manja veličina koja se meri. Na primer, nije naročito teško izmeriti dužinu od oko jedan metar sa tačnošću do jednog milimetra, tj. sa relativnom tačnošću od 1/1000. Ali izmeriti sa istom relativnom tačnošću rastojanje reda milimetra je znatno teže. Dakle, što je manji vremenski interval Δt, to je manja tačnost sa kojom je izračunat odnos priraštaja $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Iz ovoga sledi da ako interval vremena smanjimo na beskonačno malu veličinu, vrednost pomenutog odnosa neće težiti ni jednoj odredjenoj vrednosti. Ovo nam ukazuje na to da zbog grešaka koje uvek postoje pri merenju, granični prelaz $\Delta t \to 0$, ne može da se ostvari u ranije navedenom strogo matematičkom smislu. Drugim rečima, izračunavanje trenutne brzine, odnosno izvoda $v = \dot{x}$, na osnovu fizičkih merenja je moguće samo približno, i u tom slučaju se izjednačava sa odnosom konačnih priraštaja $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Optimalna vrednost intervala vremena, pri kojem je tačnost izračunavanja trenutne brzine maksimalna, odredjena je konkretnim uslovima. Mali, ali konačni priraštaji Δx i Δt, čiji odnos sa dovoljnom tačnošću aproksimira izvod $\dot{x}$, u fizici se nazivaju *fizički beskonačno male veličine*. Označavaju se na potpuno isti način kao i diferencijali i sa njima se operiše kao sa diferencijalima. Na taj način, u fizici pod izvodima se smatra odnos konačnih, ali dovoljno malih priraštaja funkcije i argumenta, a ne granična vrednost tog odnosa.

Ovaj zaključak važi, ne samo za izvode koordinata, već i za izvode svih fizičkih veličina. Pretpostavimo, na primer, da je potrebno odrediti gustinu materije u nekoj tački prostora. U tom slučaju se postupa na sledeći način. Opkoli se data tačka prostora zatvorenom površi koja na taj način obuhvata zapreminu ΔV koja u sebi sadrži tačku u kojoj odredjujemo gustinu. Označimo sa Δm masu materije koja se nalazi u datoj zapremini. Odnos

$$\rho_{sr} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{1.67}$$

se naziva *srednjom gustinom materije u zapremini* ΔV. Srednja gustina, uopšteno govoreći, zavisi od oblika zapremine u kojoj se nalazi data tačka (za istu vrednost zapremine kojoj odgovaraju njeni različiti oblici oni mogu da obuhvate različite mase). Da bi eliminisali tu zavisnost, uvodi se (prava) gustina materije koja se dobija putem graničnog prelaza $\Delta V \to 0$. Kaže se da u tom slučaju srednja gustina ρ_{sr} teži odredjenoj graničnoj vrednosti ρ, koja se naziva gustinom materije u datoj tački prostora

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \tag{1.68}$$

i predstavlja prvi izvod mase po zapremini. Ova veličina na taj način zavisi samo od tačke na koju se odnosi.

Medjutim, ukoliko se u ovoj formuli, granični prelaz shvata u strogo matematičkom smislu, on za realna tela ne može da bude uradjen zbog atomske strukture materije. Pri smanjivanju zapremine u njoj će se pre ili kasnije naći samo mali broj molekula, a ponekad i ni jedan. Osim toga, molekuli vrše termalno kretanje, odnosno jedni molekuli odlaze iz uočene zapremine a neki dolaze u nju. Iz tih razloga se broj molekula u "premalenoj" zapremini brzo i neuredjeno menja u vremenu. Ovo znači da će se pri smanjenju zapremine, odnos $\Delta m/\Delta V$ takodje brzo i neuredjeno menjati od nule, kada unutar izabrane zapremine nema molekula, do vrlo velikih vrednosti kada se u njoj nadju molekuli. Drugim rečima, pri beskonačnom smanjenju zapremine, odnos $\Delta m/\Delta V$ ne teži odredjenoj graničnoj vrednosti, pa prilikom odredjivanja gustine materije, veličine Δm i ΔV ne mogu da budu proizvoljno male. Zapremina mora da ima makroskopske razmere, tj. da sadrži dovoljno veliki broj molekula. Sa druge strane, ova zapremina mora da bude i dovoljno mala da bi se materija sadržana u njoj mogla smatrati približno makroskopski homogenom. Ukoliko su oba zahteva ispunjena, ovako dobijeni odnos $\Delta m/\Delta V$ se u fizici naziva izvodom mase po zapremini. Veličine Δm i ΔV, koje zadovoljavaju navedene uslove, se u fizici nazivaju *fizički beskonačno male* a sa njima se postupa kao sa matematičkim diferencijalima. U matematičkom smislu, tome odgovara zamena realnog tela idealizovanim modelom u kome je masa neprekidno rasposredjena po datom delu prostora u kome se ono nalazi.

Situacija sa integralima je analogna. U matematici je integral odredjen graničnom vrednošću

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(x_i)\Delta x_i. \qquad (1.69)$$

Interval (a, b) se pri tom deli na N podintervala $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_N$. Dužina svakog od njih se množi vrednošću funkcije u proizvoljnoj tački unutar datog podintervala. Nakon toga se formira suma $\sum f(x_i)\Delta x_i$ i uzima njena granična vrednost kada $N \to \infty$, što odgovara činjenici da tada dužina svakog podintervala teži nuli. U fizici, zbog grešaka pri merenju, ili pak iz principijelnih razloga (na primer zbog atomske strukture materije), deljenje intervala na podintervale dužine manje od neke odredjene (čija veličina zavisi od konkretnog slučaja) gubi smisao. Iz tog razloga, granični prelaz $\Delta x_i \to 0$ ne može da se izvrši do kraja odnosno mora da se prekine na odredjenoj dužini podintervala. Ovo znači, da u fizici integral nije granična vrednost sume, već suma konačno velikog broja dovoljno malih sabiraka oblika $f(x_i)\Delta x_i$.