Glava 1

Kinematika specijalne teorije relativnosti

Kada se pomene reč *relativnost* većina ljudi ima asocijaciju na Ajnštajna. Prve uspešne teorije relativnosti su međutim razvili još Galilej i Njutn. Pod relativnošću se u fizici podrazumeva proučavanje toga kako različiti posmatrači (u relativnom kretanju) vide isti događaj. Relativnost koju je Ajnštajn razvio je stoga preciznije zvati "moderna" teorija relativnosti pri čemu se ona deli na specijalnu i opštu. Specijalna relativnost se odnosi na opisivanje merenja koja se vrše u različitim **inercijalnim** (neubrzanim) sistemima reference, dok se u okviru OTR proučavaju i ubrzano relativno kretanje i gravitacija. Ajnštajnove teorije relativnosti[1] su napravile radikalne rezove u predstavama o prostoru i vremenu i dale revolucionarna predviđanja pa stoga nisu odmah po formulisanju prihvaćene. Danas su ove teorije potvrđene sa velikom preciznošću u velikom broju eksperimenata.

Njutnova fizika i Galilejeva relativnost, iako ne potpuno tačne, predstavljaju veoma dobru aproksimaciju za (relativno) velika tela koja se kreću (relativno) sporo. Primena pak samo klasične fizike u lansiranju satelita i funkcionisanju, na primer, modernog sistema za globalno određivanje položaja (GPS) dovela bi do značajnih grešaka. U klasičnom limesu ("velika" tela koja se kreću sporije od 1% brzine svetlosti[2]) Ajnštajnova relativnost daje iste rezulate kao i Njutnova mehanika.

[1]Osim Ajnštajnovih, postojale su i alternativne teorije relativnosti koje su pak odbačene jer nisu prošle odgovarajuće eksperimentalne testove.

[2]Termin *brzina svetlosti* se odnosi na brzinu svetlosti (c) u vakuumu, ukoliko nije naglašeno drugačije. Brzina svetlosti u bilo kojoj materijalnoj sredini je uvek manja od c a može biti manja i od brzine kretanja naelektrisanih čestica u istoj sredini. Ovakva pojava je poznata pod nazivom efekat Čerenkova.

1.1 Brzina svetlosti i zakon sabiranja brzina

Krajem 19. veka, zdanje klasične fizike je bilo uglavnom završeno. Dva najvažnija kamena temeljca, Njutnovi zakoni iz 1687. godine (koji počivaju na pojmovima o apsolutnom prostoru i vremenu) i Maksvelove jednačine iz 1865. godine (opisuju elektromagnetne i svetlosne pojave) jesu, kako je izgledalo, bila dovoljno čvrsto postavljena. Tako na primer, Maksvelove jednačine predviđaju da se svetlost u vakuumu kreće brzinom $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, gde su $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m i $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, dielektrična i magnetna permeabilnost vakuuma, respektivno.

Za svetlost se tada sa pouzdanošću smatralo da je talas,[3] na šta je upućivao još Jangov eksperiment difrakcije svetlosti na dva proreza iz 1801. godine. Do tada je bilo poznato više vrsta mehaničkih talasa a svima je bilo zajedničko da im je za prostiranje uvek bila neophodna neka sredina.[4] Na osnovu toga se smatralo da i za svetlost, ukoliko je talas, mora da postoji neka sredina koja sve prožima i koja bi služila za prenošenje svetlosnog talasa sa jednog mesta na drugo. Brzina svetlosti c bi, prema tome, bila brzina *u odnosu* na sredinu koja je prenosi. Ta sredina je dobila naziv *etar*.

Moderno shvatanje etra potiče od Kristijana Hajgensa iz 1678. godine. Termin je pozajmljen od Aristotela, koji je tako nazvao peti element, "supstancu od koje su sazdana nebesa i koja sve prožima". Hajgens je prilagodio Aristotelov etar u nastojanju da objasni otkriće danskog astronoma Olafa Remera da je svetlosti sa jednog Jupiterovog meseca potrebno izvesno vreme da stigne do Zemlje, umesto da tu udaljenost prevali trenutno. To je ličilo na situaciju kod prostiranja zvučnog talasa kroz vazduh kome treba određeno vreme da se kroz sredinu prenese od izvora do prijemnika pa je on zaključio da je i svetlost talas. Za zvučne talase je međutim bio potreban medijum, a ako je prostor prazan, smatralo se, kroz njega ne bi mogao da se kreće nikakav talas pa je pretpostavljeno postojanje etra.[5]

Ako imamo medijum (koji ne vidimo i ne osećamo) koji prenosi svetlosni talas, prirodno je da se zapitamo kakve su njegove osobine. Francuski fizičar Ogisten-Žan Frenel je 1821. godine pokazao da je svetlost transverzalni ta-

[3] Time je, izgledalo je, rešena dugogodišnja zagonetka prirode svetlosti. Naime, do tada je preovladavalo mišljenje da je Njutnovo čestično objašnjenje ponašanja svetlosti bolje od Hajgensove ideje da je svetlost talas.

[4] Naime, kroz prazan prostor – vakuum, mehanički talasi ne mogu da se prostiru, jer nema šta da ih prenese (zvuk se ne može čuti u vakuumu).

[5] Videćemo da je Hajgensov etar morao da ima veoma neobične osobine pa stoga za života Hajgensa ova teorija nije bila prihvaćena već je preimućstvo dato Njutnovom čestičnom viđenju svetlosti.

las. Iz toga je sledilo da sredina koja je prenosi mora da ima određene elastične osobine koje su definisane implicitno izrazom za brzinu svetlosnog talasa $c = \sqrt{E/\rho}$, gde je E veličina koja opisuje elastične osobine sredine (u odnosu na deformacije smicanja), a ρ njena gustina.[6] Kako je za brzinu svetlosti izmerena mnogo veća vrednost nego za mehaničke talase,[7] nametnuo se zaključak da ta hipotetička sredina, koja prožima sve u kosmosu, mora da bude **izuzetno elastična** i **veoma male gustine**.[8] Sa druge strane, s obzirom na to da je apsolutno sve uronjeno u nju i da se sva tela kreću kroz etar ne osećajući njegovo postojanje, to je moguće samo ako je trenje između etra i "ostatka" sveta jednako nuli. Na primer Zemlja kada se kreće kroz etar ne **povlači ga za sobom** jer nema trenja.[9] Iz toga sledi da ta sveprožimajuća sredina treba da bude u stanju apsolutnog mirovanja.

Takav medijum za prenošenje svetlosti − etar, koji poseduje navedene osobine, omogućio bi onda određivanje nečega sto se do tada smatralo nemogućim, a to je **apsolutno kretanje**. Naime, ako je reč o sredini koja miruje, onda bismo mogli da u odnosu na nju posmatramo kretanja svih tela i da određujemo njihove apsolutne brzine.

U osnovi klasične mehanike se nalazi Galilejev princip relativnosti i Njutnovi zakoni koji u istom obliku važe u svim inercijalnim sistemima reference. Prema Galilejevom principu relativnosti, ne postoji nijedan od takvih sistema koji bi po nečemu bio privilegovan u odnosu na druge − svi su ravnopravni. Direktna posledica ove činjenice je da će rezultat bilo kog mehaničkog eksperimenta biti jednak u svim takvim sistemima.[10] Drugim rečima, **zakoni mehanike su isti u svim inercijalnim sistemima reference.** Podsetimo se takođe da je u to vreme Njutnova mehanika smatrana potpuno tačnom i proverenom teorijom koju je moguće, uz manje ili veće modifikacije, primeniti na sve procese i pojave u prirodi.

U takvim uslovima, sasvim je prirodno zapitati se do kakvih rezultata će dovesti primena Galilejevog principa relativnosti na "novu" vrstu nemehaničkih talasa, odnosno na svetlost. Kako je besmisleno govoriti o brzini

---

[6] Ovaj izraz je napisan po analogiji sa izrazom koji važi za mehaničke transverzalne talase koji se prostiru kroz elastičnu sredinu.

[7] Podsetimo se da brzina zvuka kroz suvi vazduh temperature 20 $^{\circ}$C iznosi 343,2 m/s.

[8] Iz ovakvog razmatranja je bilo jasno da sredina sa ovakvim osobinama, ako stvarno postoji, mora da izgleda veoma čudno, najčudnije od svih do tada poznatih. Naime, najelastičnije sredine su sredine koje možemo da smatramo praktično idealnim krutim telom. Dakle, ta hipotetička sredina u kojoj se nalazi sve i kroz koju se sve kreće bi morala da bude neka vrsta krutog tela!?

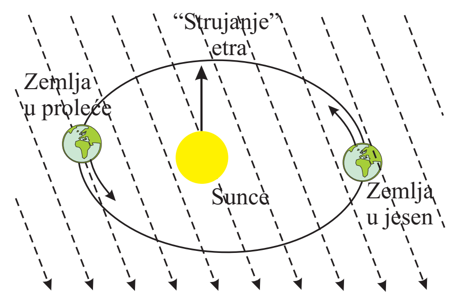
[9] Slično kretanju lopte kroz idealan fluid - fluid bez unutrašnjeg trenja.

[10] Primer koji se najčešće navodi je izvođenje mehaničkih eksperimenata u vozu koji se kreće uniformno pravolinijski u odnosu na Zemlju i u vozu koji miruje u odnosu na nju.

nečega a ne reći u odnosu na šta se taj objekat kreće izmerenom brzinom, u ovom postupku je prvo neophodno razrešiti netrivijalno pitanje sistema reference u odnosu na koji svetlost ima brzinu c.

Polazeći od klasičnog zakona sabiranja brzina, koji je posledica Galilejevog principa relativnosti, dolazi se do zaključka da u različitim sistemima reference i brzina svetlosti mora da ima različitu vrednost.[11] Drugim rečima, izmerena vrednost za brzinu svetlosti c mora da se odnosi na jedan sistem reference koji bi bio vezan za etar i koji bi, prema tome, mirovao. Ukoliko bi se posmatrač u odnosu na taj sistem kretao nekom brzinom u u pravcu kretanja svetlosti, onda bi za njega brzina svetlosti morala da bude različita od c, odnosno iznosila bi $c \pm u$, u zavisnosti od toga da li se on kreće ka izvoru svetlosti ili od njega. To govori teorija a da vidimo šta kaže eksperiment.

Interesantno je napomenuti da je i sam Maksvel, nakon formulisanja jednačina elektromagnetizma, ubeđen da je svetlost talas, bio pristalica teorije o postojanju etra. Maksvel je bio i prvi koji je uočio da, ukoliko se svetlost kreće brzinom c u odnosu na etar i ukoliko se Zemlja kreće kroz njega kružnom (zapravo eliptičnom) orbitom oko Sunca, onda će brzina kojom se svetlost približava Zemlji varirati u zavisnosti od toga gde se Zemlja na svojoj orbiti nalazi (slika 1.1). Maksvel je 1864. godine postavio i prvi eksperiment za proveru ove pretpostavke. Pripremio je i rad koji nije objavio a o svojoj ideji je pred smrt napisao pismo jednom prijatelju na osnovu koga je rad objavljen posthumno u časopisu *Nature*.



Slika 1.1: Etar i njegovo "strujanje" oko Zemlje.

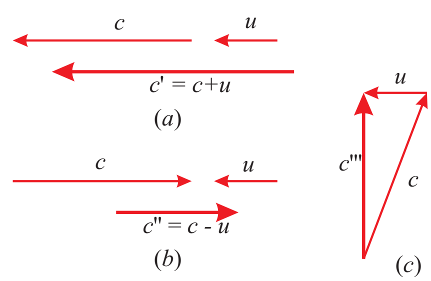
Sve negde do pred kraj 19. veka, merna aparatura kojom su raspolagale laboratorije nije bila dovoljno precizna da bi mogla da izmeri malu razliku između c i $c \pm u$, a i metodologija koja se zasnivala na kretanju aparature u laboratoriji nije puno obećavala. Da bi se razrešio taj problem tragalo se u dva pravca. Jedan je povećanje brzine u čiji bi se "dodatak" na brzinu svetlosti mogao izmeriti, a drugi razvijanje aparatura veće rezolucije koje bi to lakše registrovale. Tako se 1880. godine došlo na ideju da se u ovu svrhu iskoristi kretanje Zemlje oko Sunca koje se odvija brzinom od oko

[11] Ovaj zaključak automatski znači i da se vrednosti dielektrične i magnetne konstante vakuuma menjaju pri prelasku iz jednog inercijalnog sistema u drugi!

$u = 3 \cdot 10^4$ m/s i da se za Zemlju veže pokretni referenti sistem iz koga bi se merila razlika u brzini svetlosti. Situaciju u kojoj se npr. Zemlja kreće u susret svetlosti brzinom u, u tom smislu ćemo smatrati, na bazi klasičnog zakona slaganja brzina, ekvivalentnom situaciji u kojoj je Zemlja nepokretna a svetlost se ka njoj kreće brzinom $c + u$.[12] Na taj način, u ovom slučaju možemo situaciju da predstavimo analognom situaciji u kojoj je Zemlja (i aparatura koja se nalazi na njoj) statična, a etar se kreće ka njoj ili od nje.[13]

Merenja su se, prema tome, svodila na određivanja brzine strujanja etra prilikom kretanja Zemlje kroz njega brzinom u. U tom slučaju, izmerena brzina svetlosti će imati maksimum $c' = c + u$, kada se svetlost kreće ”niz vetar” (slika 1.2), biće minimalna $c'' = c - u$ kada se svetlost kreće ”uz vetar”, a imaće neku vrednost $c''' = \sqrt{c^2 - u^2}$, koja je između ove dve, kada se meri u smeru normalnom na ”vetar”.

Ukoliko se pretpostavi da Sunce miruje u odnosu na etar, brzina strujanja etra će biti jednaka orbitalnoj brzini Zemlje (oko $3 \cdot 10^4$ m/s). Očekivalo se da odstupanja od brzine svetlosti mogu da se registruju prilikom merenja ”uz vetar” i ”niz vetar”. Merenja su vršena Majkelsonovim interferometrom koji je imao mogućnost da izvrši merenje potrebne tačnosti, međutim, svi pokušaji da se odredi ovaj uticaj na brzinu svetlosti (a time i pokaže postojanje apsolutnog referentnog sistema vezanog za etar) bili su neuspešni.



Slika 1.2: Razlika u brzini svetlosti u zavisnosti od načina kretanja ”vetra”.

Negativan rezultat je ukazivao na moguću teorijsku kontradikciju između Maksvelove elektrodinamike i Njutnove mehanike. Zaključci koji slede iz ovih razmatranja su da: (i) ili osnovni zakoni elektromagnetizma nisu isti u svim inercijalnim sistemima reference, ili (ii) Galilejev zakon sabiranja brzina nije tačan.

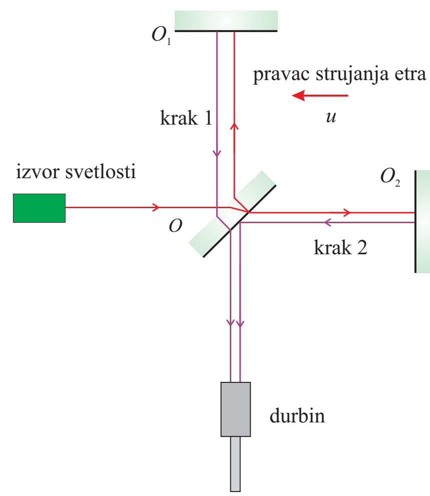
[12] Brzina u bi bila relativna brzina etra (koji ”nosi” i svetlost brzine c u odnosu na njega) u odnosu na Zemlju.

[13] Primetimo da okolnost da Zemlja kruži oko Sunca određenom brzinom ne znači da se i kroz etar kreće tom istom brzinom s obzirom na raznoobraznost i složenost kretanja u kojima ona učestvuje. Bez obzira na to odavde ipak proizilazi da se Zemlja u svakom slučaju kreće kroz etar nekom brzinom za koju je prirodno očekivati da se menja sa vremenom (a ta promena mora biti najuočljivija sa promenom godišnjih doba), budući da se pravac i smer kretanja Zemlje (u odnosu na etar) takođe menja u zavisnosti od njenog trenutnog položaja na orbiti.

Ukoliko je prvi zaključak tačan, morao bi da postoji jedan sistem reference u kojem je brzina svetlosti c. Brzine svetlosti koje mere posmatrači koji se nalaze u drugim inercijalnim sistemima moraju onda da budu veće ili manje od ove, u zavisnosti od brzine relativnog kretanja sistema. Ukoliko je tačan drugi zaključak, morale bi da se razmotre predstave o apsolutnom prostoru i vremenu koje predstavljaju osnovu klasične mehanike.

1.2 Majkelson-Morlijev eksperiment

Sada ćemo se upoznati sa detaljima najpoznatijeg eksperimenta[14] koji je osmišljen da izmeri očekivanu malu promenu u brzini svetlosti, a koji je izveo Albert Majkelson 1881. godine.[15]



Slika 1.3: Majkelson-Morlijev interferometar.

U tu svrhu je iskorišćen interferometar (slika 1.3), izuzetno osetljiv uređaj koji je Majkelson konstruisao da bi mogao da vrši dovoljno precizna meranja u kojima bi mogli da se uoče predviđeni efekti. U njemu, snop svetlost koji emituje svetlosni izvor nailazi na polupropustljivo ogledalo O,[16] koje je postavljeno pod uglom od 45^{O} u odnosu na pravac prostiranja snopa. Polupropustljivo ogledalo ima zadatak da upadni snop svetlosti podeli na dva snopa koji će se nadalje kretati različitim pravcima. Jedan snop nastavlja da se kreće u istom pravcu i smeru, odnosno ka ogledalu O_2 a drugi se reflektuje i kreće se ka ogledalu O_1. Recimo da je krak 2 interferometra u početku bio postavljen u pravcu kretanja Zemlje po orbiti.

[14]Osim ovog vršeni su i drugi eksperimenti koji su imali isti cilj. Samo neki od fizičara koji su se bavili ovim problemom su Fizo (1860.), Maskart (1872.), Lord Rejli (1902.). Njihovi eksperimenti su imali za cilj da izmere promene u indeksu prelamanja dielektrika izazvane kretanjem Zemlje kroz etar. Interesantni su i eksperimenti Trouda i Noblea (1903.) koji su pokušali da odrede promenu u nalektrisanju ploča kondenzatora usled njegovog kretanja kroz etar.

[15]Eksperiment je kasnije ponovio više puta u saradnji sa Edvardom Morlijem pa je zato u nauci poznat pod nazivom Majkelson-Morlijev eksperiment.

[16]Lagano posrebreno polupropustljivo ogledalo je izumeo Fizo 1851. godine.

Kao što je već rečeno, kretanje Zemlje kroz etar brzinom u je ekvivalentno strujanju etra prema Zemlji brzinom istog intenziteta ali suprotnog smera. Strujanje etra u smeru suprotnom od realnog kretanja Zemlje, dovodi do toga da brzina svetlosti u sistemu reference vezanom za Zemlju postaje $c-u$ kada se svetlost kreće ka ogledalu O_2 a $c+u$ nakon reflektovanja od njega.

Dva svetlosna snopa odbijena od ogledala O_1 i O_2, kada se sretnu interferiraju i daju sliku koja se sastoji od niza naizmeničnih tamnih i svetlih (koncentričnih) traka. Majkelson je znao da dva kraka njegovog uređaja ne mogu biti idealno jednakih dužina kao i to da nema načina da izmeri njihove dužine sa greškom manjom od talasne dužine korišćene svetlosti. Osim toga, nije imao načina da sazna kakav ugao njegov uređaj gradi sa brzinom strujanja etra. Ove probleme je rešio tako što je rotirao uređaj za 90 stepeni, čime su zraci menjali uloge, i merio pomake u interferencionim slikama pre i posle rotacije. Rotacija je trebalo da izmeni interferencionu sliku za mali ali merljivi iznos jer je usled rotacije promenjena brzina strujanja etra duž kraka interferometra. Merenja su, međutim, pokazala da nema nikakve promene u interferencionoj slici. Eksperiment je ponovljen više puta tokom kalendarske godine, jer se očekivalo da je promenjen i smer a i intenzitet brzine strujanja etra oko Zemlje, ali je rezulat uvek bio isti: **nije primećena promena interferencione slike koja bi po veličini odgovarala teorijskim predviđanjima.**

Da vidimo sada kako su izgledali teorijski proračuni koji su proveravani u Majkelson-Morlijevom eksperimentu. Pretpostavimo da oba kraka interferometra imaju istu dužinu L. Kao što je već naglašeno brzina svetlosti duž kraka 2 interferometra je $c-u$ kada se svetlost približava ogledalu O_2, a $c+u$ nakon reflektovanja svetlosti o ogledalo. Na taj način, vreme potrebno svetlosti da pređe put L, krećući se ka ogledalu iznosi $L/(c-u)$, a od ogledala $L/(c+u)$. Ukupno vreme potrebno svetlosti da ode do ogledala i vrati se, prema tome je

$$t_1 = \frac{L}{c+u} + \frac{L}{c-u} = \frac{2Lc}{c^2-u^2} = \frac{\frac{2L}{c}}{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{1.1}$$

Razmotrimo sada kretanje svetlosnog snopa duž kraka 1, koji se nalazi pod pravim uglom u odnosu na strujanje etra. Kako je brzina svetlosti u odnosu na Zemlju u tom slučaju $\sqrt{c^2-u^2}$, vreme koje joj je potrebno da ode do ogledala O_1 je $L/\sqrt{c^2-u^2}$. Vreme potrebno da se vrati nazad je jednako, pa je ukupno vreme za putovanje svetlosti u pravcu kraka 1

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{1.2}$$

Razlika ova dva vremena je

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c}\left[\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right]. \tag{1.3}$$

Kako je $u^2/c^2 \ll 1$, prethodni izraz može da se uprosti razvojem binoma, uz zanemarivanje članova drugog i višeg reda, pa se za razliku vremena dobija

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{Lu^2}{c^3}. \tag{1.4}$$

Ova razlika u vremenima koja su potrebna zracima da dođu na zaklon izaziva njihovu faznu razliku odnosno ima za posledicu stvaranje interferencione slike na njemu. Kada se interferometar zarotira za 90^{O}, zraci menjaju mesta, pa će doći i do promene u interferencionoj slici. Rezultat je duplo veća vremenska razlika ova dva zraka od one date relacijom (1.4). Usled toga će razlika pređenih puteva zraka biti

$$\Delta d = c(2\Delta t) = \frac{2Lu^2}{c^2}. \tag{1.5}$$

Promena u pređenom putu za jednu talasnu dužinu dovodi do pomeranja u interferencionoj slici za jednu svetlu traku. Na taj način pomeranje interferencione slike S zavisi od odnosa putne razlike i talasne dužine svetlosti

$$S = \frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{2Lu^2}{\lambda c^2}. \tag{1.6}$$

U eksperimentima koje su vršili Majkelson i Morli, svaki zrak je bio reflektovan više puta o ogledalo, tako da je efektivno prelazio put od 11 metara. Na taj način je razlika u putevima između zraka bila

$$\Delta d = \frac{2 \cdot 11 \text{ m}(3 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}. \tag{1.7}$$

Ta putna razlika je trebalo da prouzrokuje merljivi pomeraj u interferencionoj slici. Ukoliko se u eksperimentu koristi svetlost talasne dužine 500 nm, predviđeni pomeraj u interferencionoj slici je

$$S = \frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{2,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \approx 0,44. \tag{1.8}$$

Uređaj koji su koristili u eksperimentu Majkelson i Morli je mogao da detektuje pomeraj u interferencionoj slici reda veličine 0,01. Međutim, na njihovo iznenađenje, nije primećena nikakva promena. Nakon toga, eksperiment je ponovljen mnogo puta, od strane mnogih naučnika i pod različitim uslovima, ali nikakvo pomeranje nije uočeno. Nužno je sledio zaključak da kretanje Zemlje u odnosu na etar ne može biti registrovano.[17]

Negativan rezultat Majkelsona i Morlija je naišao na mlaku reakciju u naučnoj javnosti. Većina naučnika je mislila da eksperiment jednostavno, usled neke greške, nesavršenosti aparature ili metode, nije uspeo da registruje efekat u koji su svi bili toliko sigurni da ga nisu dovodili u sumnju − apsolutnu brzinu kretanja Zemlje kroz etar. Svi su svesno ignorisali činjenicu da je taj rezultat dobijen instrumentom izuzetne osetljivosti, i prema tome, verodostojan je. Mnogo truda je uloženo u pogrešno nastojanje da se objasni negativan rezultat eksperimenta tako što bi se sačuvao koncept etra i Galilejev zakon sabiranja brzina. Veoma brzo se međutim pokazivalo da su svi ti pokušaji bili pogrešni.

I tako je bilo sve do 1905. godine, kada je Ajnštajn objavio svoj prvi rad o specijalnoj relativnosti u kome je, pošavši od radikalno novih ideja, pokazao da postojanje etra zapravo nije neophodno. U ovom radu je, analizirajući Maksvelove jednačine, činjenicu da one za brzinu svetlosti predviđaju c, proglasio postulatom svoje specijalne teorije relativnosti.[18]

1.3 Ajnštajnovi postulati

Ajnštajn je, razmišljajući o tome da se svetlost (u vakuumu) kreće uvek brzinom c, zaključio da postoji kontradikcija između tog predviđanja i Njutnove mehanike, u kojoj se brzine sabiraju kao vektori. Ako bi ovo bilo primenljivo i na elektromagnetne talase, onda bi dva posmatrača koja se kreću različitim brzinama registrovali različite brzine kretanja svetlosti.[19]

[17]Bez obzira na Majkelsonov ”neuspeh” u najvažnijem eksperimentu koji je izvršio svojim interferometrom, rad na njemu je bio od izuzetnog značaja jer je tako osetljiv instrument našao mnogobrojne primene. Tako je 1920. i 1921. godine, sa Frensisom Pizom uspeo, koristeći modifikaciju interferometra koja je nazvana astronomski interferometar, da odredi prečnik nekih zvezda. Majkelson je za svoja otkrića postao prvi Amerikanac koji je dobio Nobelovu nagradu za fiziku, 1907. godine.

[18]Ajnštajn je o relativnosti razmišljao od svoje 16. godine a formulisao ju je dok je bio zaposljen kao službenik nižeg ranga u jednom patentnom birou u Bernu. Iste godine je objavio još četiri rada. Osim relativnosti u njima je bilo reči o još dve značajne teme − o Braunovom kretanju (rad koji spada u najcitiranije u istoriji moderne fizike) gde se ukazivalo na to kako u eksperimentima može biti određena veličina atoma, a druga tema se ticala objašnjenja fotoefekta. Objašnjenje koje je on ponudio je bitno uticalo na zasnivanje kvantne mehanike. Za ovaj rad Ajnštajn je 1921. godine dobio Nobelovu nagradu.

[19]U stvari, on je pokušao da shvati kako bi svetlosni talas izgledao nekome ko se kreće istom brzinom kao i sam talas. Ako bi takvo kretanje bilo moguće, ovaj talas (koji pred-

Sve brzine se mere u odnosu na neki sistem reference. Najprostiji sistemi reference su oni koji se ne kreću ubrzano i koji ne rotiraju. Njutnov prvi zakon (zakon inercije) važi u takvim sistemima, koji se prema tome nazivaju **inercijalni sistemi reference**. Posmatrano iz njih, tela koja miruju ostaju u stanju mirovanja, a ona koja se kreću konstantnim brzinama po pravoj liniji nastavljaju da se tako kreću sve dok na njih ne deluju spoljašnje sile.

Štaviše, zakoni fizike imaju najprostiju formu u inercijalnim sistemima reference. Na primer, sistem reference koji je vezan za Zemlju je samo približno inercijalan. S obzirom na to da se Zemlja ne kreće uniformno i pravolinijski, može da se primeti da u njoj postoji dodatna sila[20] (Koriolisova), koja komplikuje opisivanje kretanja tela u odnosu na Zemlju.[21] I što je još važnije, zakoni fizike imaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference, jer ne postoji ni jedan koji bi bio po bilo čemu privilegovan.

Ajnštajnova specijalna teorija relativnosti počiva na dva postulata:

1. Princip relativnosti: Zakoni fizike imaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference.

2. Princip konstantnosti brzine svetlosti: Brzina svetlosti u vakuumu, odnosno maksimalna brzina prostiranja interakcije, iznosi $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i ima, nezavisno od relativne brzine izvora svetlosti i posmatrača, istu vrednost u svim inercijalnim sistemima reference.

Prvi postulat predstavlja tvrđenje da su **svi** zakoni fizike (iz oblasti mehanike, elektriciteta, optike, magnetizma, termodinamike, ...) isti u svim referentnim sistemima koji se, jedni u odnosu na druge, kreću konstantnim relativnim brzinama. Ovaj postulat je generalizacija Galilejevog principa relativnosti koji se odnosi samo na mehaničke pojave.

Sa eksperimentalne tačke gledišta, Ajnštajnov princip relativnosti kazuje da svi eksperimenti (na primer merenje brzine svetlosti), izvršeni u laboratoriji koja je u stanju mirovanja, mora da daju iste rezultate i kada se izvrše u laboratoriji koja se kreće konstantnom brzinom u odnosu na nju. Drugim

stavlja spregnuto oscilovanje električnog i magnetnog polja pod pravim uglom u odnosu na pravac prostiranja talasa) bio bi stacionaran (nepromenljiv u vremenu) za posmatrača, sa električnim i magnetnim poljem čiji bi intenziteti imali različite vrednosti na različitim udaljenostima od njega, pri čemu se one ne bi menjale sa vremenom. Ajnštajn je međutim znao da tako nešto Maksvelova elektrodinamika ne predviđa. Zaključio je da su ili Maksvelove jednačine pogrešne, ili da je nemoguće kretati se brzinom svetlosti. Ukoliko su jednačine ipak tačne jasno je da to ukazuje na nemogućnost kretanja brzinom c sa jedne strane, a sa druge da je brzina svetlosti u vakuumu jednaka za sve posmatrače. Posledica toga je da za svetlost ne važi klasični zakon sabiranja brzina.

[20]U tom slučaju ukupna sila koja deluje na telo nije jednaka proizvodu mase tela m i ubrzanja $\vec{a}$ već se mora dodati još jedan sabirak.

[21]Ova sila, između ostalog, izaziva i dodatnu rotaciju orkanskih vetrova.

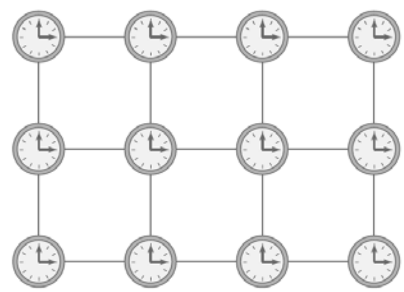
rečima, nema privilegovanih sistema, te prema tome nije moguće definisati apsolutno kretanje.

Drugi postulat je u određenom smislu povezan sa prvim. Naime, ako brzina svetlosti ne bi bila ista u svim sistemima reference, njeno merenje bi moglo da se iskoristi za pravljenje razlika između sistema, odnosno ne bi bili svi ravnopravni, što je u kontradikciji sa prvim postulatom.

U skladu sa postulatima STR, jasno je da je osnovna premisa Majkelson−Morlijevog eksperimenta (bazirana na klasičnom zakonu sabiranja brzina i na koncepciji apsolutnog prostora i vremena) pogrešna, pa je tako i negativan rezultat eksperimenta logičan.[22]

1.4 Posledice Ajnštajnovih postulata

Pre upuštanja u posledice Ajnštajnovih postulata, razmotrimo na koji način posmatrač koji se nalazi u nekom sistemu reference opisuje događaj. Svaki događaj je u datom referentnom sistemu S određen trima prostornim (x, y, z) i jednom vremenskom koordinatom t.[23] Jasno je da različiti posmatrači, iz svojih sistema reference opisuju iste događaje različitim koordinatama. Sistem reference iz koga opisujemo događaje se, u principu, sastoji od koordinatne mreže i skupa časovnika koji se nalaze u tačkama preseka mreže, kao što je pokazano na slici 1.4 u dve dimenzije.



Slika 1.4: Koordinatna mreža sa sinhronizovanim satovima.

Kako u datom sistemu reference ima više časovnika, oni moraju biti sinhronizovani. To se može uraditi uz pomoć svetlosnih signala na sledeći način. Pretpostavimo da se u tački koja predstavlja koordinatni početak nalazi posmatrač sa "glavnim" satom i da je, kada je na njegovom satu bilo

[22]Interesantno je napomenuti da Ajnštajn u svojim izvornim radovima nije citirao rezultate Majkelsona i Morlija i na njima gradio osnove svoje teorije (kao što je uobičajeno danas u većini udžbenika iz ove oblasti). On se, umesto toga, bavio nesaglasnošću Njutnove mehanike i Maksvelove elektrodinamike u odnosu na formule koje omogućuju prelaz iz jednog inercijalnog sistema reference u drugi. Forma jednačina Njutnove mehanike se očuvava pri Galilejevim, a forma Maksvelovih pri Lorencovim transformacijama.

[23]Naime, za svaki događaj, kao i u svakodnevnom životu, moramo da znamo gde se desio i kada je to bilo.

$t = 0$ s, poslao svetlosni puls. Pulsu je potrebno vreme r/c da dođe do sata koji je na rastojanju r od koordinatnog početka. Prema tome, taj sat je sinhronizovan sa glavnim samo ukoliko pokaže r/c u trenutku kada puls stigne do njega. Ovakva procedura sinhronizacije[24] podrazumeva činjenicu da se svetlost kreće jednakom brzinom u svim pravcima i u svim sistemima reference. Posmatrač koji se nalazi u jednom sistemu reference S će neki događaj okarakterisati skupom prostorno vremenskih koordinata (x, y, z, t) koji odgovaraju njegovoj koordinatnoj mreži i satovima koji su sinhronizovani u njoj. Drugi posmatrač, koji se nalazi u nekom drugom sistemu reference S', istom događaju će pripisati druge koordinate (x', y', z', t').

1.4.1 Relativnost istovremenosti

Jedna od osnovnih premisa Njutnove mehanike je da postoji univerzalna vremenska skala, ista za sve posmatrače. Iz toga sledi da ako su u jednom sistemu reference dva događaja istovremena, istovremeni su u svim sistemema reference koji se u odnosu na njega kreću (ma koliko velikom) konstantnom brzinom. Međutim, ukoliko važe Ajnštajnovi postulati, *dva događaja koja su istovremena u jednom sistemu reference ne mogu biti istovremena u drugom koji se u odnosu na prvi kreće nekom uniformnom brzinom.*

Pretpostavimo da jedan posmatrač (označimo ga slovom B) registruje dva nezavisna događaja (recimo da ih obeležimo bojama da bismo ih razlikovali C-"crveni" i P-"plavi" događaj) koji se, za njega, odigravaju u isto vreme. Pretpostavimo da postoji još jedan posmatrač, A, koji se kreće konstantnom brzinom $\vec{u}$ u odnosu na posmatrača B i registruje iste događaje C i P. Da li će za njega oni biti takođe istovremeni? Odgovor je da u opštem slučaju to neće da se dogodi i da može da se kaže da: *Ukoliko se dva posmatrača nalaze u relativnom kretanju oni se, u opštem slučaju, neće složiti oko toga da li su dva posmatrana događaja istovremena ili ne. Ukoliko jedan od njih utvrdi da jesu, onaj drugi će u opštem slučaju tvrditi da nisu.*

Mi čak ne možemo reći da je jedan od njih u pravu a da drugi greši. Bitna osobina STR je upravo u tome da su obojica u pravu i da ne postoji opravdanje za tvrdnju da je bilo koji od njih ravnopravniji od onog drugog (princip relativnosti).[25]

---

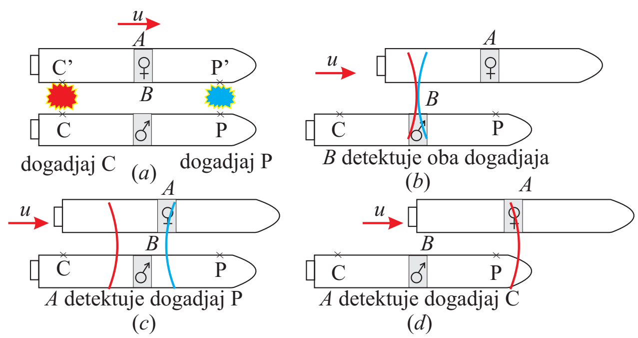
[24] Važno je takođe istaći da ovakav način sinhronizacije časovnika ima za posledicu da su ispunjena dva uslova: (a) *uslov simetrije* – ako je časovnik koji se nalazi u tački A sinhron sa časovnikom koji se nalazi u tački B, onda je i časovnik u B sinhron sa časovnikom u A, (b) *uslov tranzitivnosti* – ako je časovnik u A sinhron sa časovnikom u B, a časovnik u B sa časovnikom u C, tada je i časovnik u A sinhron sa časovnikom koji se nalazi u tački C.

[25] Od Ajnštajnove teorije relativnosti verovatno i očekujemo ovakva nesvakidašnja

Možemo da zaključimo sledeće: *Istovremenost nije apsolutni već relativni pojam i prema tome zavisi od relativnog kretanja posmatrača.*

Ukoliko je relativna brzina kretanja posmatrača mnogo manja od brzine svetlosti, odstupanje istovremenosti će biti toliko malo da merna apartura kojom raspolažemo verovatno neće moći da ga registruje. Upravo sa takvim situacijama se srećemo u svakodnevnom životu pa nam zato relativnost istovremenosti izgleda neobično.

Na slici 1.5 su prikazana dva kosmička broda A i B za koje su vezani inercijalni referentni sistemi dva posmatrača. Neka se posmatrači u njima nalaze tačno na sredini svakog od brodova i neka relativna brzina broda A u odnosu na brod B iznosi $\vec{u}$.



Slika 1.5: Registrovanje dva ista događaja sa stanovišta dva posmatrača.

Na slici 1.5 (a) je prikazan trenutak u kome se posmatrači nalaze jedan naspram drugog. Pretpostavimo da su dva velika meteora okrznula oba broda izazivajući dve varnice, crvenu C i plavu P. Neka svaki događaj ostavlja ogrebotinu na oba broda na mestima C i C', odnosno P i P'. Od mesta na kojima su se pojavile varnice se širi svetlost u obliku talasnih frontova. Pretpostavimo da oba talasna fronta (od crvene varnice i plave varnice) stižu do posmatrača B u isto vreme (po njegovom časovniku), što je prikazano na slici 1.5 (b). Da bi proverio šta se dogodilo on je prvo otišao do jednog pa do drugog kraja broda i uočio ogrebotine. Direktnim merenjem ustanovio je da se nalaze na mestima jednako udaljenim od onoga na kome je bio kada je registrovao istovremeni dolazak svetlosti do njega. Na osnovu toga on zaključuje sledeće:

B. *Svetlost je sa mesta gde su se odigrali crveni i plavi događaj stigla do mene u istom trenutku. Mereći rastojanja od mene do mesta na kojima se nalaze ogrebotine na brodu (koje su bile izvor svetlosti) uočio*

tvrđenja koja se u ovom slučaju svode na to da imamo dva kontradiktorna rezultata o istom događaju. Podsetimo se da se sa sličnim rezultatom srećemo i u klasičnoj mehanici kod Doplerovog efekta, gde frekvencija zvučnog talasa koju meri posmatrač zavisi od relativnog kretanja izvora i posmatrača. Oni će meriti različite frekvencije *istog talasa* kao posledicu međusobnog relativnog kretanja.

sam da sam sve vreme bio tačno na sredini između izvora iz kojih se svetlost prostirala. Iz toga zaključujem da su "crveni" i "plavi" događaj istovremeni.

Kada je reč o posmatraču A, sa slike je evidentno da se on kreće *ka* talasnom frontu plavog događaja i *od* talasnog fronta crvenog događaja. Iz tog razloga će talasni front plavog događaja do njega doći pre nego što će to biti slučaj sa talasnim frontom crvenog događaja. Ovaj posmatrač će stoga doći do sledećeg zaključka:

A. *Svetlost sa mesta gde se odigrao plavi događaj je do mene stigla pre svetlosti sa mesta gde se desio crveni (slika 1.5 (c) i (d)). Mereći rastojanja od mene do mesta na kojima se nalaze ogrebotine na brodu koje su bile izvor svetlosti utvrdio sam da sam sve vreme bio tačno na sredini između izvora iz kojih se svetlost prostirala. Iz toga zaključujem da crveni i plavi događaj nisu istovremeni već da se plavi odigrao pre crvenog.*

Iako se izveštaji ova dva posmatrača ne slažu, ipak su oba u potpunosti tačna. Primetimo da su oni registrovali trenutak stizanja po jednog talasnog fronta koji je krenuo sa mesta gde su nastale varnice i da su se oba kretala istom brzinom c u oba sistema reference, kao što zahteva drugi postulat.

Pomenimo na kraju da je moguća situacija u kojoj bi sevanje varnica bilo istovremeno za posmatrača A ali u tom slučaju bi ono bilo neistovremeno za posmatrača B.

Stožer relativnosti (i Galilej-Njutnove i Ajnštajnove) je da *bilo koji sistem reference može da se koristi za opisivanje događaja* odnosno da **ne postoji inercijalni sistem reference koji bi bio po ma čemu privilegovan u odnosu na druge.**

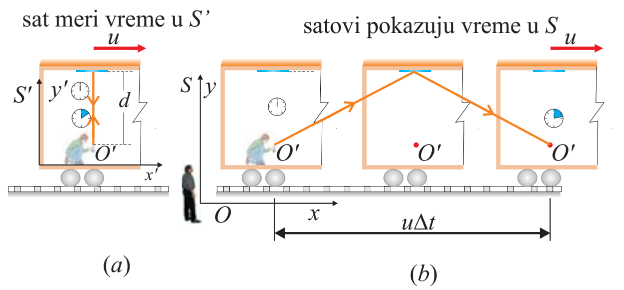
Činjenica da posmatrači koji se nalaze u različitim referentnim sistemima, svojim časovnicima i lenjirima mere različite vremenske intervale i dužine, nije u suprotnosti sa tvrđenjem o ravnopravnosti sistema reference. Ravnopravnost se svodi na to da svi posmatrači moraju da se saglase oko forme osnovnih zakona fizike koja mora biti ista za sve posmatrače koji se kreću uniformno. Tako relacija $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ u sistemu S mora da ima istu formu $d\vec{p}\,'/dt' = \vec{F}\,'$ u sistemu S' koji se kreće uniformno u odnosu na njega.[26]

[26] Ovo je činjenica koja se ističe i prilikom analize Galilejevog principa relativnosti. U okviru Ajnštajnove teorije se tvrdi da ona važi i za velike brzine kretanja i za sve fundamentalne (ne samo mehaničke) fizičke zakone. U tom smislu i Maksvelove jednačine elektrodinamike moraju imati isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference.

1.4.2 Dilatacija vremena

Iz relativnosti pojma istovremenosti sledi da će posmatrači koji su u relativnom kretanju, mereći vremenski interval između dva (ista) događaja, dobijati različite rezultate. Zašto? Zbog toga što se, kao u prethodnom primeru, ovi događaji dešavaju na različitim mestima u prostoru. Što su naime brodovi sa slike 1.5 duži, vremenski interval između dolaska plavog i crvenog signala do posmatrača A će biti veći. Može se reći da će: *vremenski interval između dva događaja zavisiti od toga koliko daleko su se oni odigrali u ova dva sistema reference odnosno da, drugim rečima, postoji veza između prostornih i vremenskih intervala.*

Sada će biti analizirana ova povezanost ali u jednom veoma specifičnom slučaju: *Za jednog od dva posmatrača oba događaja će se desiti na istoj prostornoj lokaciji.*



Slika 1.6: Putanja svetlosnog signala u (a) sistemu reference koji se kreće zajedno sa izvorom i ogledalom i (b) i u stacionarnom sistemu reference.

Proanalizirajmo vremenske intervale između dva događaja merena u "pokretnom" S' i "nepokretnom" sistemu reference[27] S na primeru merenja vremena potrebnog svetlosnom pulsu da pređe određeno rastojanje (slika 1.6). Neka je ogledalo fiksirano za plafon vagona, a putnik koji miruje u odnosu na vagon, drži laser na udaljenosti d od ogledala. Laser emituje svetlosni puls usmeren ka ogledalu. Odbivši se, puls se nakon nekog vremena merenog u tom sistemu vraća ka laseru. Neka je na satu u S' za interval vremena između ta dva događaja izmereno vreme $\Delta t'$. Kako se svetlosni puls kreće brzinom c i prelazi put $2d$ (ka ogledalu i nazad), ovaj interval vremena je

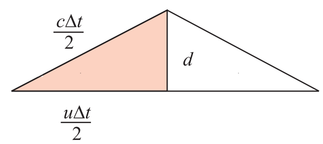
$$\Delta t' = \frac{2d}{c}. \tag{1.9}$$

Podsetimo se da je za njegovo merenje (u sistemu S') dovoljan **samo jedan sat**, koji se sve vreme **nalazi na istom mestu** sa koga je emitovan i na koje se potom vraća svetlosni puls.

[27]Napomenimo da ni jedan od posmatrača ne zna (nema način da utvrdi) da li se kreće ili ne. Tačnije, svako od njih je u stanju mirovanja u sopstvenom sistemu reference. Iz tog razloga su i nazivi sistema "pokretni" i "nepokretni" zapisani sa navodnicima.

Za posmatrača koji se nalazi u sistemu S (slika 1.6 (b)), ogledalo i laser se kreću na desno brzinom u, usled čega niz ova dva događaja za njega izgleda drugačije. Dok svetlost stigne do ogledala, ono se pomeri na desno na rastojanje $u\Delta t/2$, gde je Δt vreme potrebno svetlosnom pulsu da polazeći iz tačke O' nakon odbijanja od ogledala ponovo dođe u nju, ali mereno iz sistema S (u odnosu na koji se vagon kreće uniformno brzinom u). S obzirom na ovakvo kretanje vagona i ogledala, on zaključuje da će svetlosni puls doći do ogledala jedino ukoliko napusti laser pod nekim uglom u odnosu na vertikalu. Upoređivanjem situacija (a) i (b) na pomenutoj slici, vidi se da, gledano iz njegovog sistema reference, svetlost mora preći **veći put** da bi došla nazad do lasera.

Važno je takođe napomenuti da on odgovarajuća vremena očitava na dva stacionarna (sinhronizovana) časovnika, od kojih se jedan nalazi na lokaciji gde eksperiment započinje (emitovanje signala) a drugi na lokaciji gde se završava (prijem signala). U tom smislu, sa njegove tačke gledišta, on će upoređivati pokazivanje jednog pokretnog sata koji se nalazi u vagonu, na mestu odašiljanja i primanja signala, sa pokazivanjem dva nepokretna sata koja se nalaze u njegovom sistemu reference.



Slika 1.7: Trougao pređenih puteva svetlosnog zraka i lasera.

U skladu sa postulatom o konstantnosti brzine svetlosti, za oba posmatrača se ona kreće jednakom brzinom c. Kako mereno iz sistema S, svetlost prelazi veći put, interval vremena Δt, izmeren između događaja 1 i 2 je veći od intervala vremena $\Delta t'$ koji je izmerio posmatrač koji se nalazi u sistemu S'. Da bi se dobila veza ova dva intervala zgodno je iskoristiti pravougli trougao prikazan na slici 1.7. Primenom Pitagorine teoreme

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2 + d^2, \tag{1.10}$$

za Δt se dobija

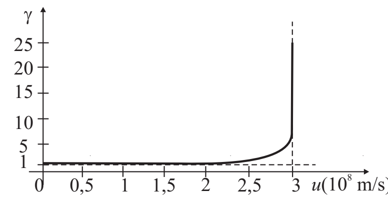
$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2d}{c\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{1.11}$$

odnosno, uz korišćenje (1.9)

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t', \tag{1.12}$$

gde je $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ Lorencov faktor.

Kako je faktor γ uvek veći od jedinice, ovaj rezultat pokazuje da je vremenski interval Δt, izmeren od strane posmatrača u odnosu na koga se izvor svetlosti kretao, veći od vremenskog intervala $\Delta t'$ izmerenog u sistemu reference vezanom za izvor. Kako posmatrač u odnosu na kojeg se izvor kreće meri veći vremenski interval, efekat je nazvan **dilatacija vremena**. Drugim rečima vreme u pokretnim sistemima teče sporije jer svi časovnici, uključujući i biološke, pokazuju kraće vremenske intervale.



Slika 1.8: Grafik zavisnosti γ od brzine kretanja tela v.

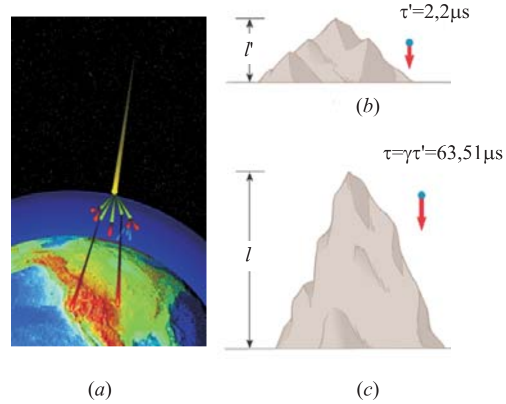
Vremenski interval $\Delta t'$ meren u sistemu S' koji se kreće zajedno sa instrumentom koji je korišćen za merenje, naziva se sopstveni vremenski interval i često označava sa $\Delta\tau$ da bi se istakla njegova specifičnost. Naziv *sopstveni vremenski interval* potiče od toga što je meren u (sopstvenom) sistemu reference u kome se posmatrano telo-instrument ne kreće. U suštini **sopstveno vreme je vremenski interval između dva događaja meren od strane posmatrača za koga se oni dešavaju na istom mestu u prostoru**. U tom smislu se sopstveno vreme uvek može meriti jednim satom koji miruje u odnosu na referentni sistem u kojem se dešavaju događaji. Ukoliko se taj posmatrani sat kreće u odnosu na nas (a mi se nalazimo u sistemu S), on počinje da zaostaje (kuca sporije) za sinhronizovanim satovima koji se nalaze u čvorovima koordinatne mreže našeg inercijalnog sistema S. Stepen zaostajanja je određen Lorencovim faktorom γ. To zaostajanje za male brzine nije merljivo a postaje to značajnije što je brzina pokretnog sistema bliža brzini svetlosti.

Zaključak je izveden za mehaničke satove, međutim on se može generalizovati i na sve fizičke procese (uključujući hemijske i biološke) koji postaju usporeni u odnosu na njihovo trajanje u "nepokretnom" sistemu reference S. Na primer, otkucaju srca astronauta koji putuje brodom kroz svemir će biti usklađeni sa radom odgovarajućeg sata koji se nalazi u njegovom sistemu reference. I otkucaji srca i taj sat će biti usporeni[28] u odnosu na "nepokretan" sat koji se nalazi na Zemlji.[29]

[28] Astronaut ipak neće ni na koji način moći da oseti efekte tog usporavanja sve dok se nalazi u sopstvenom inercijalnom sistemu (princip relativnosti).

[29] Dilatacija vremena je fenomen koji može da se verifikuje i pri relativno malim brzinama ukoliko se vreme meri izuzetno preciznim satom. U radu koji su u časopisu Science, 1972.

Jedna vrsta nestabilnih elementarnih čestica, koje su nazvane mioni[30] (odnosno μ mezoni), nastaju u višim slojevima atmosfere prilikom sudara kosmičkog zračenja sa česticama vazduha. Prosečno vreme života miona (interval između događaja: događaj1 = stvaranje miona i događaj2 = raspad miona)[31] je oko $2,200$ μs, mereno u njihovom sopstvenom sistemu reference.



Slika 1.9: (a) Nastanak kosmičkog zračenja u višim slojevima atmosfere. (b) Put koji mion prelazi u svom sistemu reference. (c) Put koji mion prelazi u sistemu reference Zemlje.

Ako pretpostavimo da mioni nastaju na visini od oko 5 km, kreću pravo ka Zemlji, brzinom od oko $0,9994c$ i raspadaju se u proseku nakon $2,200$ μs, interesantno je proveriti računski da li će mion uspeti da stigne do površine Zemlje pre nego što se raspadne.

Na prvi pogled put koji mioni mogu da pređu pre nego što se raspadnu iznosi $l' = 659,6$ m, s obzirom na to da je $l' = \tau' \cdot v = 2,200\mu\text{s} \cdot 0,9994 \cdot 3 \cdot 10^8$ m/s $\approx 659,6$ m. Na osnovu ovoga bi se moglo zaključiti da do površine Zemlje ne bi mogao da dođe ni jedan mion nastao u gornjim slojevima Zemljine atmosfere jer bi se svi mnogo ranije raspali. Međutim, eksperimenti pokazuju da na površinu Zemlje stiže puno miona. Objašnjenje ove činjenice

godine objavila dva američka fizičara Joseph C. Hafele i Richard E. Keating, pod nazivom "Around the World Atomic Clocks: Relativistic Time Gains Observed", prezentovani su rezultati eksperimenta sa cezijumskim satovima. Četiri takva sata su se nalazila u avionu tokom njegovog komercijalnog leta a njihov rad je upoređivan sa radom referentnog cezijumskog sata koji se nalazio na Zemlji. Rezultati su u nesumnjivom skladu sa predviđanjima specijalne teorije relativnosti a pokazivali su na to da su "leteći" satovi kasnili 59 ± 10 ns dok je teorija predviđala da kašnjenje bude 40 ± 23 ns, što predstavlja prilično dobar sklad očekivanja i rezultata merenja. Primetimo da brzina kretanja aviona ne spada u takozvane "relativističke" tj. dovoljno velike da bi efekat bio merljiv standarnim satovima. U eksperimentu je on utvrđen veoma preciznim cezijumskim satovima koji imaju dovoljno veliku rezoluciju. S obzirom na to, kad god se oni transportuju sa jednog mesta na drugo avionima, neophodno je izvršiti ponovnu sinhronizaciju da ne bi unosili u pokazivanje relativistički efekat dilatacije vremena.

[30] Mioni imaju naelektrisanje jednako naelektrisanju jednog elektrona dok im je masa oko 207 puta veća od mase elektrona.

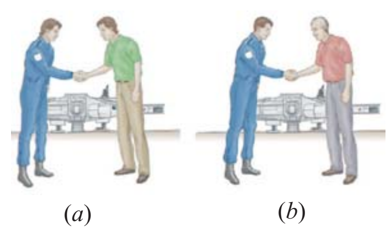
[31] Nakon isteka tog vremena (u proseku) mion se raspada na elektron, mionski neutrino i elektronski antineutrino.

daje dilatacija vremena. U odnosu na posmatrača koji se nalazi na Zemlji, vreme života miona nije τ' već $\tau = \gamma\tau'$, gde je τ' vreme života miona u njegovom sopstvenom sistemu reference. Ukoliko mion ima brzinu od $v = 0,9994c$, to znači da je brzina kretanja njegovog sistema reference u jednaka toj vrednosti i da je faktor $\gamma \approx 28,87$, pa je na osnovu toga $\gamma\tau' = 63,51\mu$s. Na osnovu ovoga je srednje rastojanje koje je prešao mion, mereno u sistemu reference vezanom za Zemlju $l = \tau v = \gamma\tau' v \approx 19040$ m, što objašnjava činjenicu registrovanja velikog broja miona na Zemlji.

Paradoks blizanaca

Jedna od veoma intrigantnih konsekvenci dilatacije vremena je takozvani *paradoks blizanaca*.[32] Razmotrimo misaoni eksperiment u kome učestvuju dva brata blizanca. Kada su imali po 20 godina jedan od njih odlazi na kosmičko putovanje na planetu X, udaljenu 20 svetlosnih godina od Zemlje.[33] Ukoliko se kosmički brod kretao brzinom od $0,95c$ u odnosu na Zemlju, do planete X je putovao oko 21 godinu. Nakon toga je krenuo odmah nazad ka Zemlji brzinom istog intenziteta. Kada je došao na Zemlju, bio je šokiran činjenicom da je njegov brat ostareo 42 godine i da sada ima 62 godine. On sam je u međuvremenu (po zemaljskim merilima), ostareo svega 13 godina.

Gledano iz sistema reference blizanca koji je ostao na Zemlji, on je mirovao a njegov brat je putovao. Iz perspektive pak onoga koji je bio u kosmičkom brodu, kosmički brod je bio u stanju mirovanja a Zemlja se, najpre udaljavala od broda 6,5 godina a potom mu se približavala jednakom brzinom narednih 6,5 godina. Naizgled, ne bi trebalo da bude razlike u njihovim godinama, tj. rezultat "eksperimenta" je paradoksalan.



Slika 1.10: (a) Odlazak jednog blizanca na putovanje sa Zemlje. (b) Kada se vratio sa putovanja bio je mlađi od blizanca koji je ostao na Zemlji.

Paradoksa u stvari nema već je Ajnštajnova teorija pogrešno primenjena. Podsetimo se da se ona odnosi na pojave i procese koji se odvijaju u **inercijalnim sistemima reference**, odnosno onima koji se kreću jedan u odnosu na drugi uniformno. Da li su sistemi vezani za Zemlju i brod sve vreme takvi i da li su stoga potpuno ravnopravni?

[32] Ovaj paradoks se pripisuje Lanževenu a ne Ajnštajnu.

[33] Jedna svetlosna godina je rastojanje koje svetlost pređe u vakuumu za vreme od jedne kalendarske godine.

Jednostavna analiza pokazuje da to nije tako i da time nema simetrije u opisivanju protoka vremena u ovim sistemima.

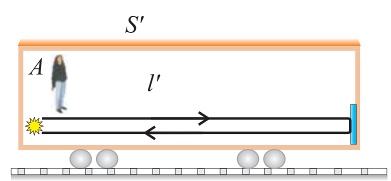
Blizanac koji je otputovao brodom, da bi dostigao brzinu od $0,95c$ morao je prvo da ubrzava, zatim da na kraju prvog dela puta uspori, zaustavi i okrene brod, potom da ponovo ubrza, a na kraju da uspori brod i pristane na Zemlju. Stoga on nije sve vreme ni bio u inercijalnom sistemu reference pa je primena STR vezano za njegov sistem reference neosnovana. Sledi da on, u fazama putovanja kada je brod ubrzavao, ne može da kaže da se nalazio u sistemu reference koji miruje, dok se blizanac koji je ostao na Zemlji kretao uniformno pravolinijski u odnosu na njega.

Blizanac koji je putovao brodom bi naravno mogao da kaže kako je interval vremena u toku koga je njegov brod ubrzavao relativno mali u odnosu na ukupno vreme putovanja pa je tako većinu vremena ipak proveo u inercijalnom sistemu reference - i tu bi bio potpuno u pravu. Međutim, kada dođe do planete X, on mora da zaustavi brod, okrene ga nazad i saopšti mu brzinu jednaku onoj koju je imao do tada ali suprotnog smera. Od tog momenta on se nalazi u **drugom sistemu reference**! To znači da jedino blizanac koji je ostao na Zemlji ima pravo da primenjuje formulu za dilataciju vremena (1.12) jer jedino u njegovom sistemu reference ona važi. Na osnovu nje, ako su na Zemlji protekle 42 godine, u svemirskom brodu je proteklo

$$\Delta t' = 42g\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 13\,\text{godina.}$$

1.4.3 Kontrakcija dužina

Iz dosadašnjeg razmatranja je jasno da jedna od veličina, oko čijeg iznosa posmatrači iz različitih inercijalnih referentnih sistema mogu da se slože, jeste njihova relativna brzina. Kako je ona količnik rastojanja između sistema (pod navedenim uslovima) i vremenskog intervala (za koji smo videli da zavisi od toga iz kog sistema reference ga merimo), jasno je da i rastojanje sistema mora da zavisi od relativnog kretanja posmatrača. Jer, ukoliko dva posmatrača mere različita vremena, da bi relativna brzina ostala ista za obojicu, onda oni moraju da mere i različite dužine.

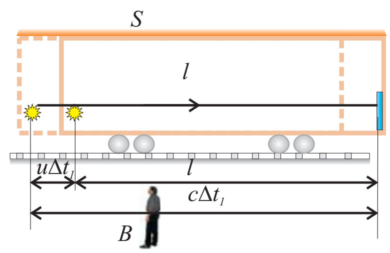


Slika 1.11: Kretanje svetlosti u sopstvenom sistemu reference izvora.

Razmotrimo sledeću situaciju. Osoba A se nalazi u vagonu dužine l' mereno iz njenog (sopstvenog) sistema reference (sistema reference vezanog za vagon), dok se osoba B nalazi van vagona, pored pruge. Izvor svetlosti se nalazi na zadnjoj strani vagona (slika 1.11), dok se ogledalo nalazi na prednjoj. Vagon se kreće brzinom u u odnosu na Zemlju. Izvor emituje svetlost koja se kreće ka ogledalu, odbija se od njega i odlazi natrag ka izvoru.

U sistemu reference osobe A (slika 1.11), vreme potrebno svetlosti da pređe opisani put je

$$\Delta t_A = \frac{2l'}{c}. \tag{1.13}$$



Slika 1.12: Pređeni put svetlosti, od izvora do ogledala, uvećan je za put koji je prešao vagon krećući se brzinom u.

Gledano iz sistema reference osobe B, situacija je nešto komplikovanija. Neka je dužina vagona merena iz njega l. Posmatrano iz tog sistema, za vreme t_1, za koje je svetlosni zrak došao do ogledala, s obzirom na to da se ceo vagon, krećući se brzinom u pomerio za rastojanje $u\Delta t_1$, svetlosni zrak je prešao

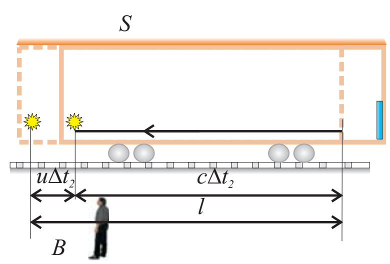
$$c\Delta t_1 = l + u\Delta t_1, \tag{1.14}$$

odakle je vreme Δt_1

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c-u}. \tag{1.15}$$

Nakon odbijanja, s obzirom na to da se vagon kreće suprotno od zraka svetlosti zrak je za Δt_2 prešao put $c\Delta t_2 = l - u\Delta t_2$, što znači da je ovo vreme

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c+u}. \tag{1.16}$$



Slika 1.13: Pređeni put svetlosti, od ogledala do izvora, umanjen je za put koji je prešao vagon brzinom u.

Ukupno vreme, mereno iz sistema osobe B, je zbir ova dva vremena

$$\Delta t_B = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{1.17}$$

Iskoristimo li relaciju za dilataciju vremena (1.12), koja ovde glasi

$$\Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

i zamenimo u jednačinu (1.17), imajući u vidu da važi i relacija (1.13), dobijamo

$$l = l'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{l'}{\gamma}. \tag{1.18}$$

Kako je faktor $\gamma > 1$, jasno je da će posmatrač B za dužinu voza izmeriti dužinu l koja je manja od dužine merene u sistemu reference vezanom za sam voz. Drugim rečima uvek je $l < l'$, gde je sa l' označena sopstvena dužina tela. Efekat je poznat pod nazivom **kontrakcija dužine** i javlja se u pravcu paralelnom pravcu relativnog kretanja dva sistema.

1.4.4 Doplerov efekat za svetlost

Važna posledica dilatacije vremena je pomeraj u frekvenciji svetlosti koju emituju atomi koji se nalaze u kretanju u odnosu na svetlost emitovanu od strane istih atoma koji se nalaze u stanju mirovanja. Ovaj fenomen, poznat u fizici pod imenom Doplerov efekat, uveden je ranije za zvučne talase. Za slučaj takvih talasa, budući da su mehanički, efekti kretanja izvora zvuka u odnosu na sredinu kroz koju se prostire talas razlikuju se od efekta kretanja posmatrača u odnosu na sredinu. Svetlosni talasi se međutim razlikuju od zvučnih u tome što im za prostiranje nije neophodna sredina. U tom smislu u slučaju svetlosnih talasa nemamo način da napravimo razliku između kretanja izvora talasa i kretanja posmatrača (što se inače radi kod analize Doplerovog efekta u akustici). Već na osnovu ovoga se vidi da je, u ovom slučaju, neophodno izvršiti pažljiviju analizu uticaja kretanja izvora i prijemnika na razliku u frekvencijama emitovanog i primljenog signala.

Pretpostavimo da svetlosni izvor, u njegovom sopstvenom sistemu reference S', emituje svetlosne pulseve frekvencijom ν', krećući se ka posmatraču, odnosno njegovom sistemu reference S, brzinom u. Kolika će biti frekvencija svetlosnih pulseva koji dolaze do oka posmatrača?

Postoje zapravo dva faktora koji doprinose Doplerovom efektu. Prvi je relativistički efekat dilatacije vremena: period između pulseva je veći u sistemu S pa je time i frekvencija koja će biti registrovana u tom sistemu manja. Drugi uticaj je uobičajeni Doplerov efekat koji se javlja usled kretanja izvora pulseva $-$ sukcesivni pulsevi treba da pređu sve manje i manje rastojanje (ili sve veće i veće u slučaju da se izvor svetlosti udaljava-tada je brzina u negativna) da bi stigli do prijemnika. Usled toga se frekvencija pulseva koji stižu do posmatrača povećava (ili opada ako je u suprotno usmerena).

Slika 1.14: Izvor emituje svetlost ka nepokretnom posmatraču.

Neka je vreme između pulseva u sopstvenom sistemu reference izvora $\Delta t' = 1/\nu'$. Gledano iz sistema S, fotoni jednog pulsa pređu rastojanja $c\Delta t = c\gamma\Delta t'$ do emitovanja narednog pulsa. U toku tog vremenskog intervala, između emitovanja dva sukcesivna pulsa, izvor pulseva prelazi rastojanje $u\Delta t = u\gamma\Delta t'$ ka sistemu reference S. Zaključujemo da su, u trenutku kada je emitovan naredni puls, njegovi fotoni na rastojanju (gledano iz S) $c\Delta t - u\Delta t = c\gamma\Delta t' - u\gamma\Delta t'$ iza fotona prethodnog pulsa. Vreme između dolaska pulseva do posmatrača, ΔT, dobija se kada se to rastojanje podeli brzinom pulseva c i iznosi

$$\Delta T = \frac{c-u}{c}\Delta t = \frac{c-u}{c}\gamma\Delta t' = \frac{1-\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Delta t'. \tag{1.19}$$

Na osnovu ovog izraza je frekvencija pulseva koje registruje posmatrač

$$\nu = \frac{1}{\Delta T} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}}\nu'. \tag{1.20}$$

Kako je ovaj izraz izveden za slučaj kada se izvor kreće ka posmatraču jasno je da je $\nu > \nu'$ i da njutnovski doprinos ukupnom efektu (faktor $1/(1-u/c)$) dominira nad efektom dilatacije vremena. Nakon jednostavnih transformacija prethodna formula postaje

$$\nu = \sqrt{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}}\nu'. \tag{1.21}$$

Ukoliko se izvor svetlosti udaljava od posmatrača, treba prosto promeniti znak brzine pa formule (1.20) i (1.21) postaju

$$\nu = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}}\nu' = \sqrt{\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}}\nu'. \tag{1.22}$$

Sada je frekvencija registrovane svetlosti manja od frekvencije emitovane a na to, "u istom smeru", utiču oba efekta (i njutnovski i ajnštajnovski).

Doplerov efekat za male brzine

Za male brzine kretanja izvora svetlosti je $u \ll c$. Radi kompaktnijeg pisanja uvešćemo oznaku $\beta = u/c$, tako da će u ovom slučaju važiti $\beta \ll 1$. U tom slučaju jednačina (1.22), nakon razvoja do članova drugog reda po β, postaje

$$\nu = \nu_0(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2), \tag{1.23}$$

gde je $\nu_0 = \nu'$ sopstvena frekvencija izvora svetlosti. Odgovarajuća jednačina za zvučne talase sadrži prva dva sabirka, što znači da treći, koji je proporcionalan β^2, predstavlja relativistički efekat koji se ispoljava kada se izvori svetlosti kreću malim brzinama.[34]

Astronomski Doplerov efekat

Posmatranjem zvezda, galaksija i drugih izvora svetlosti, moguće je odrediti koliko brzo i u kom smeru se oni kreću merenjem Doplerovog efekta svetlosti koja sa njih dolazi do nas. Ukoliko se posmatrana zvezda ne udaljava od nas, mi ćemo detektovati svetlost određene sopstvene frekvencija ν_0. Ukoliko se pak udaljava od nas ili nam se približava, frekvencija će joj biti promenjena. Kako na Doplerov efekat utiče jedino brzina radijalnog kretanja zvezde u odnosu na nas, na osnovu ovog efekta je nju jedino i moguće odrediti.

Pretpostavimo da se zvezda (ili neki drugi izvor svetlosti) kreće u odnosu na nas radijalnom brzinom v (brzina njenog sistema reference u u odnosu na nas je jednaka njenoj brzini v u odnosu na Zemlju) koja je dovoljno mala, tako da možemo da zanemarimo član proporcionalan sa β^2 u jednačini (1.23). Ova relacija tada postaje

$$\nu = \nu_0(1 - \beta). \tag{1.24}$$

Pošto prilikom merenja određujemo obično talasnu dužinu, a ne frekvenciju, prepisaćemo ovaj izraz pomoću nje, tj.

$$\lambda = \lambda_0(1 - \beta)^{-1}. \tag{1.25}$$

Kako je β mala veličina, moguće je po njoj razviti gornji izraz pa se dobija

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta), \tag{1.26}$$

odakle je

$$\beta = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}. \tag{1.27}$$

[34]Policijski radar koristi Doplerov efekat kod mikrotalasa za određivanje brzine automobila. Radar je izvor snopa mikrotalasa određene sopstvene frekvencije ν_0 koje emituje duž puta. Ovi mikrotalasi pogađaju automobil koji se kreće ka njima a frekvencija koju on "registruje" je veća od ν_0. Automobil reflektuje mikrotalase a detektor u policijskom uređaju ih registruje sa dodatno pomerenom frekvencijom jer se automobil sada ponaša kao izvor tih talasa koji se kreće brzinom u. Brzina kretanja automobila u se određuje na osnovu razlike registrovane i sopstvene frekvencije mikrotalasa.

Kada se zameni β sa $\frac{v}{c}$ i $\lambda - \lambda_0$ sa $|\Delta\lambda|$, radijalna brzina izvora svetlosti je

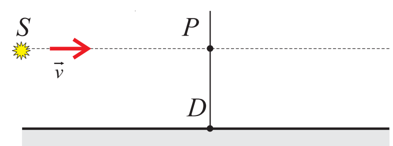
$$v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} c. \tag{1.28}$$

Razlika u talasnim dužinama je posledica astronomskog Doplerovog efekta.[35]

Podsetimo se uslova pod kojima važi jednačina (1.28). Prvo, ona važi za male brzine kretanja izvora svetlosti kao i za kretanje koje se odvija prema nama ili od nas. Ukoliko se izvor svetlost kreće od nas, talasna dužina koju registrujemo λ je veća od λ_0, $\Delta\lambda$ je pozitivno i Doplerov efekat tom slučaju izaziva "crveni pomak" u spektralnim linijama koje se snimaju.[36] Ukoliko se pak izvor približava nama, talasne dužine koje registrujemo će biti kraće od sopstvene, $\Delta\lambda$ će biti negativno a Doplerov efekat izaziva "plavi pomak" u spektralnim linijama.

Transverzalni Doplerov efekat

U dosadašnjoj analizi Doplerovog efekta pretpostavljali smo da se izvor kreće direktno ka ili od posmatrača.[37]



Slika 1.15: Izvor prolazi pored posmatrača na nekom rastojanju.

Na slici (1.15) je prikazana situacija u kojoj svetlosni izvor S prolazi pokraj posmatrača D. Kada izvor dođe do tačke P brzina izvora je usmerena pod pravim uglom u odnosu na liniju koja spaja tačke P i D i u tom momentu se izvor ne kreće radijalno u odnosu na posmatrača. Ukoliko bi se radilo o izvoru zvuka tada bi prijemnik registrovao zvuk frekvencije jednake emitovanoj, odnosno ne bi postojao Doplerov efekat. Ukoliko se, međutim, radi o izvoru svetlosti i dalje bi postojao pomeraj u frekvenciji koji se, s obzirom na geometriju situacije, naziva transverzalni Doplerov efekat. U toj situaciji, promena u

[35] Apsolutna vrednost ove razlike je uzeta zato što se instrumentima ona jedino i meri.

[36] Termin "crveni" ne znači da se u ovom slučaju detektuje crvena svetlost, pa čak ni to da je ona makar vidljiva. Naziv je usvojen iz Doplerovog efekta koji se odnosi na linije koje padaju u vidljivi deo spektra, jer se one u ovom slučaju pomeraju ka delu spektra gde se nalaze veće talasne dužine kojima odgovara crvena boja.

[37] Ovo je uobičajena pretpostavka koja se obično koristi i kada se obrađuje Doplerov efekat u akustici, a koja u realnosti obično nije ispunjena. Kada bi naime bilo tako onda bi zvuk automobilske sirene koji čujemo prilikom približavanja imao konstantnu visinu. Ovo bi moralo da važi i kada se udaljava od nas a ove dve frekvencije bi se razlikovale od originalne. Međutim pošto to nije slučaj onda naše uho registruje stalni porast u frekvenciji pri približavanju zvučnog izvora kao i njeno stalno smanjenje kada se on udaljava od nas.

frekvenciji detektovane svetlosti je izazvana jedino dilatacijom vremena i zadata je izrazom

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{1.29}$$

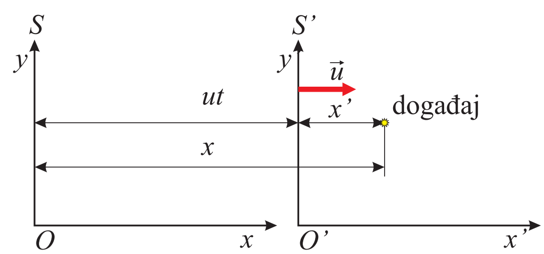
Za male brzine izvora ($\beta \ll 1$) razvojem ove jednačine se dobija

$$\nu = \nu_0(1-\frac{1}{2}\beta^2). \tag{1.30}$$

1.5 Lorencove transformacije

Pošto su Galilejev princip relativnosti, odgovarajuće transformacije i klasičan zakon sabiranja brzina koji se dobija na osnovu njih, u suprotnosti sa eksperimentalnom činjenicom konstantnosti brzine svetlosti, potrebno je uvesti nove transformacije koordinata između inercijalnih sistema reference. One, za razliku od Galilejevih, moraju da važe za sve brzine kretanja, od $u = 0$ do $u = c$.

Neka je sistem S, vezan sa Zemlju ("nepokretan" sistem reference), a S' se kreće u pozitivnom smeru x ose ("pokretan" sistem reference) konstantnom brzinom u. Pretpostavimo da su se oba sistema reference u trenutku $t = t' = 0$ poklapala. Isti događaj, posmatrač iz S bi opisao prostorno vremenskim koordinatama (x, y, z, t) dok bi im posmatrač iz S' pripisao koordinate (x', y', z', t'). U kakvoj međusobnoj vezi se nalaze ove koordinate? Za slučaj malih brzina, one su povezane Galilejevim tranformacijama



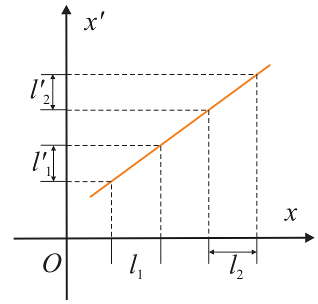
Slika 1.16: Jedan isti događaj ima različite koordinate u dva različita sistema reference.

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \tag{1.31}$$

iz kojih sledi klasičan zakon sabiranja brzina koji daje netačne rezultate kada se primeni na svetlost. Stoga je potrebno pronaći nove transformacije koordinata koje bi važile i pri velikim brzinama relativnog kretanja sistema reference. S obzirom na prikazan način kretanja ova dva sistema reference, bez obzira na iznos njihove relativne brzine, kako duž osa y i z nema kretanja sistema, kao i u slučaju Galilejevih transformacija, važi

$$y' = y, \quad z' = z. \tag{1.32}$$

Oko određivanja funkcionalne veze preostalih koordinata (jedne prostorne i vremenske) mora se imati u vidu da ona treba da očuva osobine prostora i vremena. Osnovne osobine prostora su da je homogen i izotropan a za vreme da je homogeno.[38] Odavde sledi da transformacija koordinata mora da bude zadata linearnom funkcijom (slika 1.17). Kako se sa slike vidi, u tom slučaju dužina odsečka neće zavisiti od toga u kojoj oblasti prostora će se on nalaziti, naime ako je $l_1 = l_2$ biće i $l'_1 = l'_2$.[39] Ako bi transformacije bile nelinearne (slika 1.18), iz $l_1 = l_2$ bi sledilo da je $l'_1 \neq l'_2$, odnosno dužina odsečka bi zavisila od toga u kom delu prostora se on nalazi, što bi narušilo homogenost prostora. Analogan zaključak važi i za vreme.

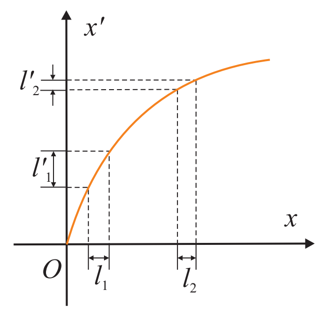


Slika 1.17: Linearna veza x i x' koordinate.

Prema tome, traženi zakon transformacije koordinata, odnosno njihova međusobna veza mora da bude linearna. Najopštija linearna veza koordinata je:

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Mx + Nt, \tag{1.33}$$

gde su A, B, M i N konstante koje treba odrediti.



Slika 1.18: Nelinearna veza x i x' koordinate.

Ukoliko posmatramo kretanje neke materijalna tačke duž pravca x ose, gledano iz sistema reference S', ona će u vremenskim trenucima t'_1 i t'_2 imati prostorne koordinate x'_1 i x'_2, a njen pomeraj će biti

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = A(x_2 - x_1) + B(t_2 - t_1) = A\Delta x + B\Delta t. \tag{1.34}$$

Interval vremena za koji se on desio (takođe u sistemu S') je

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = M(x_2 - x_1) + N(t_2 - t_1) = M\Delta x + N\Delta t. \tag{1.35}$$

[38]Podsetimo se da ove činjenice imaju direktne veze sa zakonima održanja u mehanici.

[39]Ovu činjenicu ne treba mešati sa efektom relativnosti dužine koji se odnosi na merenja jedne dimenzije jednog istog tela iz dva sistema reference koji su u međusobnom kretanju. U ovom slučaju je reč o merenju u sistemima reference u kojima tela miruju, dakle o određivanju sopstvenih dužina.

Na osnovu ovoga je sada (srednja) brzina posmatrane materijalne tačke koja se kreće duž x ose

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{A\Delta x + B\Delta t}{M\Delta x + N\Delta t}. \tag{1.36}$$

Kako je u odnosu na sistem S brzina te iste tačke $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, veza ove dve brzine je data izrazom

$$v' = \frac{Av + B}{Mv + N}. \tag{1.37}$$

Dobijen je opšti izraz koji mora da važi za sve brzine v i v', pod pretpostavkom da između koordinata u dva sistema postoji veza oblika (1.33). Međutim, da bi izraz koji povezuje brzine bio od praktične važnosti, treba u njemu odrediti konstante A, B, M i N. U tu svrhu je zgodno razmotriti nekoliko posebnih slučajeva kretanja.

Neka materijalna tačka miruje u odnosu na sistem S' (nalazi se u sopstvenom sistemu reference). U tom slučaju je $v' = 0$ dok je $v = u$, odnosno gledano iz nepokretnog sistema ona se kreće brzinom jednakom brzini pokretnog sistema reference. Imajući u vidu tu činjenicu, izraz (1.37) postaje

$$0 = \frac{Au + B}{Mu + N},$$

odakle je

$$B = -Au. \tag{1.38}$$

U slučaju kada tačka miruje u odnosu na S, biće $v = 0$, dok joj u tom slučaju brzina u odnosu na sistem S' iznosi $v' = -u$. Ukoliko to zamenimo u jednačinu (1.37) i iskoristimo (1.38), dobijamo $-u = -Au/N$, odakle sledi da je

$$N = A. \tag{1.39}$$

Ukoliko umesto materijalne tačke posmatramo kretanje svetlosnog talasa na osnovu postulata konstantnosti brzine svetlosti, dobijamo

$$v' = v = c, \tag{1.40}$$

a ako to zamenimo u (1.37), iskoristimo (1.38) i (1.39), sledi $c = \frac{Ac - Au}{Mc + A}$, odakle je

$$M = -\frac{Au}{c^2}. \tag{1.41}$$

Zamena dobijenih vrednosti za B, M i N u (1.38), daje izraz koji se naziva *relativistički zakon sabiranja brzina* (za kretanje duž x ose)

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \tag{1.42}$$

odakle se, rešavanjem po brzini v, dobija relacija

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}. \tag{1.43}$$

Jedina razlika ovih dveju jednačina je u predznaku brzine relativnog kretanja dva posmatrana sistema reference što je, u skladu sa principom relativnosti, trebalo i očekivati.

1.5.1 Lorencove transformacije

Relacije (1.33), nakon zamene vrednosti konstanti B, M i N, postaju

$$x' = A(x - ut), \quad t' = A\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \tag{1.44}$$

u kome je ostala samo još jedna neodređena konstanta A.

Prema principu relativnosti, postoji potpuna ravnopravnost posmatranih sistema reference. To znači da možemo za nepokretan sistem reference uzeti S' i smatrati da se u odnosu na njega sistem S kreće brzinom "$-u$" (uporedi jednačine (1.42) i (1.43)). Na osnovu toga, relacije koje povezuju x i t sa x' i t' glase

$$x = A(x' + ut'), \quad t = A\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right). \tag{1.45}$$

Kada (1.45) zamenimo u (1.44) dobija se

$$x' = A^2\left(x' + ut' - ut' - \frac{u^2}{c^2}x'\right), \tag{1.46}$$

odakle nakon skraćivanja x' sledi $A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Dakle, konstanta A je jednaka ranije uvedenom Lorencovom faktoru γ. Na osnovu ovako određenih konstanti, transformacije koje su poznate pod nazivom Lorencove[40] imaju oblik

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{1.47}$$

odnosno

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{1.48}$$

[40]Transformacije ovog oblika je 1890. godine dobio Hendrik A. Lorenc (1853-1928) u vezi sa elektromagnetnim pojavama. Značaj Ajnštajna je u tome što je prvi uvideo njihovu važnost i dao im odgovarajuću interpretaciju u okviru specijalne teorije relativnosti.

One povezuju prostorno vremenske koordinate (x, y, z, t) i (x', y', z', t') jednog istog događaja posmatranog iz dva inercijalna sistema reference S i S' za slučaj kada se sistem S' kreće duž x ose konstatnom brzinom u.[41]

1.5.2 Relativistički zakon sabiranja brzina

Neka je, kao i do sada, S stacionarni sistem reference a S' sistem koji se u odnosu na njega kreće brzinom $\vec{u} = u\vec{e}_x$. Neka neko telo ima brzinu $\vec{v}$ u odnosu na sistem S. Gledano iz sistema S' njegova brzina će biti $\vec{v}\,'$, a njena x' komponenta je

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}.$$

Prema jednačini (1.47), diferencijali dx' i dt' su

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \text{i} \quad dt' = \frac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{1.49}$$

a njihov odnos je

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}}.$$

Kako je dx/dt u stvari v_x komponenta brzine tela u odnosu na sistem S, transformacioni izraz za v'_x komponentu brzine postaje

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}. \tag{1.50}$$

Na analogan način, polazeći od toga da je $v'_y = dy'/dt'$ i $v'_z = dz'/dt$, dobija se da za preostale dve komponente brzine važe relacije

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}. \tag{1.51}$$

Različitost izraza za transformaciju brzine po komponentama je izazvana činjenicom da se sistem S' kreće duž x ose u odnosu na sistem S. U slučaju da se kretanje odvija duž y ili z ose došlo bi do odgovarajuće izmene transformacionih relacija.

U slučaju da su i v_x i u mnogo manje brzine od brzine svetlosti c, imenilac u izrazu (1.50) je jednak jedinici, pa ovaj izraz postaje $v'_x = v_x - u$, što

[41]Primetimo da se polazeći od istog izraza (1.33) uz uslov da je $t = t'$ (i bez korišćenja uslova da je brzina svetlosti ista u svim sistemima reference), dobijaju Galilejeve transformacije između sistema S i S'.

predstavlja Galilejev zakon sabiranja brzina. U drugom graničnom slučaju, kada je $v_x = u = c$, ova jednačina (1.50) daje

$$v'_x = \frac{c-u}{1-\frac{cu}{c^2}} = \frac{c\left(1-\frac{u}{c}\right)}{1-\frac{u}{c}} = c.$$

Drugim rečima, ako se neko telo kreće brzinom c u odnosu na posmatrača koji se nalazi u sistemu S, onda nezavisno od relativne brzine sistema, obavezno ima istu brzinu i u odnosu na posmatrača koji se nalazi u sistemu S'.

Formule (1.50) i (1.51) omogućuju da se, ako su poznate komponente brzine v_x, v_y i v_z tela u odnosu na sistem S, dobiju njene komponente v'_x, v'_y i v'_z u odnosu na sistem S'. Obrnuto, ukoliko su poznate komponente brzine u odnosu na sistem S', komponente brzine u odnosu na sistem S glase[42]

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1+\frac{uv'_x}{c^2}}, \tag{1.52}$$

$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{uv'_x}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{uv'_x}{c^2}}. \tag{1.53}$$

1.5.3 Ubrzanje u specijalnoj teoriji relativnosti

Dekartove komponente ubrzanja čestice u sistemu S definisane su izrazima

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}, \tag{1.54}$$

dok su u S'

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}, \quad a'_y = \frac{dv'_y}{dt'}, \quad a'_z = \frac{dv'_z}{dt'}. \tag{1.55}$$

Diferencijali komponenti brzine u S' se nalaze iz formula (1.50) i (1.51) pa je tako na primer

$$dv'_x = \frac{dv_x}{(1-\frac{uv_x}{c^2})^2}(1-\frac{u^2}{c^2}).$$

Kako je diferencijal vremena u sistemu S' zadat relacijom (1.49), x komponenta ubrzanja u ovom sistemu će biti

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}}{(1-\frac{uv_x}{c^2})^3}a_x. \tag{1.56}$$

[42]Ove formule se dobijaju kada se zamene mesta primovanim i neprimovanim komponentama u relacijama (1.50) i (1.51) uz zamenu brzine u sa $-u$.

Za preostale dve komponente se na analogan način dobija

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{(1-\frac{uv_x}{c^2})^2}a_y + \frac{uv_y(1-\frac{u^2}{c^2})}{c^2(1-\frac{uv_x}{c^2})^3}a_x,$$
$$a'_z = \frac{dv'_z}{dt'} = \frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{(1-\frac{uv_x}{c^2})^2}a_z + \frac{uv_z(1-\frac{u^2}{c^2})}{c^2(1-\frac{uv_x}{c^2})^3}a_x. \tag{1.57}$$

Na osnovu ovih relacija, koje omogućuju transformaciju komponenti ubrzanja između dva inercijalna sistema reference, možemo da zaključimo da ubrzanje nije invarijantna veličina, što je različito u odnosu na situaciju u Njutnovoj mehanici. Svi inercijalni posmatrači će međutim biti saglasni da ubrzanje *postoji*. Drugim rečima, ako se čestica gledano iz jednog inercijalnog sistema reference kreće ubrzano, onda je ona ubrzana i u svim ostalim sistemima reference. Takođe, ukoliko je ubrzanje u jednom od njih nula, onda je ono jednako nuli i za sve ostale sisteme.

1.6 Osnovne posledice Lorencovih transformacija

Formule za dilataciju vremena i kontrakciju dužine su već izvedene primenom postulata STR. Sada će biti pokazano kako se one dobijaju na osnovu Lorencovih transformacija.

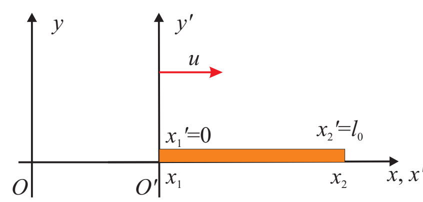
1.6.1 Dilatacija vremena

Neka se u koordinatnom početku inercijalnog sistema reference S' nalazi sat. On će pokazivati vreme t' a njegove koordinate u tom sistemu reference su $x' = y' = z' = 0$. Ako zamenimo te vrednosti prostorno-vremenskih koordinata u izraze za Lorencove transformacije (1.48), dobićemo koordinate sata gledano iz laboratorijskog (nepokretnog) sistema u odnosu na koji se sat, odnosno njegov sopstveni sistem reference S', kreće brzinom u: $x = ut, y = 0, z = 0$ (zato što se gledano iz S sat kreće duž x ose). Vremenska koordinata će biti

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \text{ ili } t' = t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{1.58}$$

Reč je zapravo o relacijama koje predstavljaju vezu između intervala vremena koje pokazuju sat u laboratorijskom i sat u pokretnom sistemu reference. Kao što smo i ranije zaključili, vreme koje pokazuje sat u sistemu S' u kome miruje, manje je od vremena izmerenog u sistemu S. Vreme t' koje pokazuje sat u sistemu reference u kome miruje, naziva se *sopstveno vreme*[43] i, kao što je ranije rečeno, često se označava sa τ.

1.6.2 Kontrakcija dužine



Slika 1.19: Upređivanje dužine štapa u dva sistema reference.

Neka je za štap, koji se u pravcu svoje ose simetrije kreće brzinom u u odnosu na sistem S, vezan sistem S' (slika 1.19). Interesantno je uporediti dužinu štapa, merenu iz različitih inercijalnih sistema reference. U tu svrhu je ključno utvrditi kako se dolazi do njene vrednosti. Potrebno je naime odrediti koordinate krajeva štapa u **jednom istom trenutku** pa tek onda napraviti njihovu razliku. Dužina štapa merena u njegovom sopstvenom sistemu reference S', naziva se **sopstvena dužina** i obično označava sa l_0. Neka se jedan kraj štapa nalazi u koordinatnom početku ($x'_1 = 0$), a drugi na mestu sa koordinatom $x'_2 = l_0$. Iz Lorencovih transformacija (1.47) se, za krajeve štapa, gledano iz sistema S, dobija: $x_1 = ut$ i $x_2 = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2} + ut$. Razlika ovih dveju koordinata predstavlja dužinu štapa u sistemu S

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \qquad (1.59)$$

Pokretni štap je prema ovoj relaciji kraći od štapa koji se nalazi u stanju mirovanja.

1.6.3 Paradoks blizanaca sa stanovišta Lorencovih transformacija

Pretpostavimo da kosmički brod kreće sa Zemlje iz tačke A, trenutno ubrzava i odlazi duž x ose brzinom u. Kada dođe u neku tačku B, okreće, kreće se ka Zemlji istom brzinom, koči i zaustavlja se u istoj tački iz koje je pošao. Recimo da su odgovarajući inercijalni sistemi reference Zemlje, broda koji odlazi i broda koji se vraća na nju, označeni slovima S, S' i S'' respektivno. Uporedimo interval vremena Δt_Z, između odlaska i dolaska broda, izmerenog satom koji je na Zemlji sa intervalom vremena Δt_b, između istih događaja, izmerenim satom koji se nalazi na brodu.

[43] Konkretna konstrukcija satova je nebitna i ne utiče na ovaj efekat, jer je reč o tome da vremenski intervali više nisu invarijantni za različite sisteme reference.

Interval vremena između pomenuta dva događaja, izmeren na Zemlji je

$$\Delta t_Z = t_{2A} - t_{1A}, \tag{1.60}$$

gde je sa t_{1A} označen trenutak odlaska broda sa Zemlje, meren po zemaljskom satu, a sa t_{2A} trenutak povratka u istu tačku na Zemlji. Pogodno je podeliti kretanje broda na dve etape, prva se odnosi na kretanje sa Zemlje i dolazak u tačku B koji se dešava u trenutku t_B a druga je polazak iz tačke B i povratak na Zemlju. Potreban interval vremena za prvu etapu puta je $\Delta t_{AB} = t_B - t_{1A}$, a za drugu $\Delta t_{BA} = t_{2A} - t_B$, pa je vreme (1.60)

$$\Delta t_Z = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BA} = (t_B - t_{1A}) + (t_{2A} - t_B). \tag{1.61}$$

Vremena merena u S' i u S'' su sa vremenom merenim u S povezana na sledeći način[44]

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad t'' = \frac{t + \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{1.62}$$

Sada treba izračunati interval vremena koji je izmerio kosmonaut koji se nalazio u brodu. Njegovo kretanje je logično podeliti takođe na dve etape pa će ukupno vreme koje je izmerio biti

$$\Delta t_b = \Delta t' + \Delta t'', \tag{1.63}$$

gde je $\Delta t' = t'_B - t'_{1A}$ vreme koje mu je po njegovom satu trebalo da dođe od tačke A' do tačke B', a $\Delta t'' = t''_{2A} - t''_B$, vreme koje mu je bilo potrebno (po njegovom satu) da dođe od tačke B'' do tačke A''.

S obzirom na relacije (1.62) pomenuti intervali vremena su

$$\begin{aligned}
\Delta t' = t'_B - t'_{1A} &= \frac{t_B - \frac{u}{c^2}x_B}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t_{1A} - \frac{u}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_B - t_{1A} + \frac{u}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\
\Delta t'' = t''_{2A} - t''_B &= \frac{t_{2A} + \frac{u}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t_B + \frac{u}{c^2}x_B}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_{2A} - t_B + \frac{u}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Imajući u vidu da je

$$\frac{x_B - x_A}{t_B - t_{1A}} = u, \quad \frac{x_A - x_B}{t_{2A} - t_B} = -u,$$

[44]Predznak brzine u drugom izrazu je negativan jer se u tom slučaju kretanje odvija ka Zemlji.

zamenom u (1.64), za traženo vreme se dobija

$$\Delta t_b = (t_B - t_{1A})\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + (t_{2A} - t_B)\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \tag{1.65}$$

odnosno

$$\Delta t_b = [(t_B - t_{1A}) + (t_{2A} - t_B)]\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \Delta t_Z\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{1.66}$$

Ovaj zadatak se može rešiti i sa pozicije kosmonauta koji se nalazi u brodu. Sat koji miruje u odnosu na brod, pokazuje njegovo spostveno vreme pa je

$$\Delta t_b = \Delta t_0' + \Delta t_0''. \tag{1.67}$$

Vreme mereno prema zemaljskom satu je

$$\Delta t' + \Delta t'' = \frac{\Delta t_0'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \frac{\Delta t_0''}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_b}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \tag{1.68}$$

što se poklapa sa formulom (1.66).

Na ovaj način se vidi da, bez obzira na način izračunavanja, vreme u kosmičkom brodu teče sporije nego na Zemlji. Kad bi brzina broda bila $u = 0,9998c$, vreme bi teklo oko 50 puta sporije ($\Delta t_b = 1/50\Delta t_Z$). Kao posledica te činjenice, ukoliko bi jedan blizanac otišao ovom brzinom na putovanje kosmosom, i pri tom (po svom kalendaru) ostareo 1 godinu, njegov brat koji je ostao na Zemlji bi ostareo 50 godina.[45]

1.7 Interval

Vratimo se za trenutak u Njutnovu mehaniku i podsetimo se kako se određuje kvadrat rastojanja Δl dve tačke sa koordinatama (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2). S obzirom na to da je prostor klasične mehanike ravan, primenom Pitagorine teoreme se dobija

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \tag{1.69}$$

[45]Usporavanje protoka vremena u kosmičkog brodu koji se kreće veoma brzo, daje principijelnu mogućnost putovanja ka dalekim zvezdanim sistemima (naravnom, o ovim putovanjima ljudi koji bi ostali na Zemlji ne bi mogli ništa da saznaju). Primetimo da danas nisu poznati tehnički uslovi (npr. izvori energije koji bi obezbedili ovakvo putovanje) koji bi mogli da obezbede da se kosmički brod ubrza do ovako velikih (ultra)relativističkih brzina. Ovo tim pre jer je i ubrzavanje elementarnih čestica do tih brzina kompleksan i teško rešiv problem.

gde je $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ i $\Delta z = z_2 - z_1$. Koordinate ove dve tačke u principu mogu da budu koordinate dva događaja, jednog koji se desio u t_1 i drugog koji se desio u t_2, pri čemu je vremenski interval između njih $\Delta t = t_2 - t_1$. Uvek kada pominjemo koordinate nekog događaja moramo da naglasimo u odnosu na koji sistem ih merimo. Neka to bude neki sistem S koji ćemo smatrati laboratorijskim odnosno "nepokretnim". Gledano iz nekog drugog inercijalnog sistema reference S', koji se u odnosu na laboratorijski kreće uniformno brzinom u, prostorne i vremenske koordinate ova dva događaja će biti (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) i (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2), a kvadrat prostornog rastojanja

$$\Delta l'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2, \tag{1.70}$$

dok je vremenski interval $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Relativno lako se proverava da je prostorni interval (1.69) invarijantan u odnosu na Galilejeve transformacije (1.31) tj. da važi da je $\Delta l' = \Delta l$. Za vremenski interval je stvar trivijalna s obzirom na to da je vreme u mehanici malih brzina apsolutno, pa važi $\Delta t' = \Delta t$. Drugim rečima, vremenski intervali i prostorna rastojanja u njutnovskoj mehanici ne zavise od toga iz kog inercijalnog sistema reference se mere.

Kada je reč o telima koja se kreću velikim brzinama, videli smo da ni prostorna rastojanja a ni vremenski intervali nisu invarijantni (efekti kontrakcije dužine i dilatacije vremena) a da je veza dva inercijalna sistema reference data Lorencovim transformacijama. Postavlja se logično pitanje da li možda i u ovom slučaju postoji neka veličina kojom se može opisati "rastojanje" između događaja a čiji bi oblik bio invarijantan odnosno nezavisan od izbora inercijalnog sistema reference.

S obzirom na to da je do sada postalo jasno da je, u slučaju kretanja velikim brzinama, vremenska koordinata ravnopravna i neodvojiva od prostornih, kao i to da su koordinate dva događaja (x_1, y_1, z_1, ct_1) i (x_2, y_2, z_2, ct_2) (od sada pa na dalje će često umesto vremena biti korišćen proizvod vremena i brzine svetlosti u vakuumu jer ima dimenzije dužine), logično je pokušati zadavanje traženog izraza u obliku

$$\Delta s^2 = \Delta l^2 + c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + c^2 \Delta t^2.$$

Lako je međutim pokazati da ovaj izraz nije invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije, odnosno da nema istu vrednost za sve inercijalne posmatrače. Pokazuje se, međutim da izraz

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{1.71}$$

ostaje invarijantan pri prelazu iz jednog inercijalnog sistema u drugi. Ovaj izraz predstavlja *kvadrat invarijantnog intervala*.[46]

Napomenimo na kraju još jednu veoma važnu stvar, a to je da dok je izraz (1.69) uvek pozitivan, izraz za kvadrat intervala u specijalnoj teoriji relativnosti (1.71) može da bude pozitivan, negativan ali i jednaki nuli!

1.7.1 Tipovi intervala

Kako interval (1.71) može da ima tri grupe vrednosti, potrebno je posebno ih proanalizirati. Kada je $\Delta s^2 > 0$ reč je o intervalima takozvanog **vremenskog** tipa jer u njihovom izrazu dominira prvi sabirak koji je u vezi sa vremenskim intervalom između dva događaja. Kako je interval definisan kao invarijantna veličina, ukoliko je on vremenskog tipa u jednom inercijalnom sistemu reference, biće takav i u svim ostalim. Pri tome naravno merenja iz ostalih inercijalnih sistema daju različite vrednosti za $\Delta t'$ i $\Delta l'$ ali je njihov međusobni odnos uvek takav da je $c^2\Delta t'^2 > \Delta l'^2$. U takve sisteme spada i sistem u kome se događaji dešavaju na istom mestu u prostoru, odnosno za koji je $\Delta l' = 0$. Tada je

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2,$$

a vreme t' izmereno u njemu je *sopstveno vreme*. Ono je sa vremenom iz sistema S, s obzirom na invarijantnost Δs, povezano na sledeći način

$$c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2, \tag{1.72}$$

odnosno

$$c^2dt'^2 = c^2dt^2 - dl^2, \tag{1.73}$$

ukoliko pretpostavimo da su koordinatne separacije infinitezimalne. Iz relacije (1.72) se takođe vidi da je vremenski interval među događajima ovakvog tipa u svakom drugom sistemu reference veći nego u S' u kome se oni odigravaju na istom mestu. Za intervale vremenskog tipa, u svim inercijalnim sistemima reference jedan događaj se dešava *pre* a drugi *posle*. Drugim rečima, ne postoji sistem reference u kojem bi ovakva dva događaja (razdvojena vremenskim intervalom) bila *istovremena*.

Intervali za koje je $\Delta s^2 < 0$, s obzirom na dominaciju prostornog dela $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ u njima, u odnosu na vremenski deo $c^2\Delta t^2$, nazivaju se **prostornim**. Kao i u prethodnom slučaju, kako je reč o invarijantnoj

[46]Naglasimo da izbor invarijantnog intervala nije potpuno jednoznačan jer ako je izraz (1.71) invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije, invarijantan je takođe i izraz $-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$.

veličini, ona je ista u svim inercijalnim sistemima reference. Kako i Δt i Δl mogu da imaju bilo koje vrednosti uz jedini uslov da je $\Delta s^2 < 0$, postoji bar jedan sistem reference u kome su događaji *istovremeni*, to jest za koji važi $\Delta t' = 0$. U tom slučaju, s obzirom na invarijantnost Δs^2, važi

$$\Delta s'^2 = -\Delta l^2,$$

(interval takvih događaja se svodi samo na prostorni interval) a rastojanje ova dva događaja u sistemu S' u kome su istovremeni, naziva se *sopstveno rastojanje*. Iz invarijantnosti intervala onda sledi da će u svakom drugom sistemu reference njihova prostorna razdvojenost biti veća. Dva događaja razdvojena intervalom prostornog tipa *ne mogu* se odigravati na *istom mestu* ni u jednom sistemu reference.

Za $\Delta s^2 = 0$ intervali se nazivaju **homogeni**, **nulti** ili **svetlosni**. Za njih je $c\Delta t = \Delta l$. Ukoliko postoji sistem reference u kome se dva događaja dešavaju na istom mestu ($\Delta l = 0$) i istovremeno ($\Delta t = 0$), onda će oni (zbog invarijantnosti intervala) biti povezani nultim intervalom i u svakom drugom inercijalnom sistemu reference.

1.8 Prostor Minkovskog

Konfiguracioni prostor njutnovske fizike (fizički prostor u kome se odigrava kretanje tela) je primer euklidskog odnosno ravnog prostora.[47] U jednom takvom prostoru, kvadrat rastojanja dve beskonačno bliske tačke je, prema relaciji (1.69), zadat izrazom

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1.74}$$

Iz ove relacije se mogu izvući sve neophodne informacije o prostoru u kome se odvija kretanje. Kako izraz (1.74) omogućuje i merenje rastojanja u ovom prostoru, on se naziva njegovom *metričkom formom* ili *metrikom*. Uočimo takođe da je metrika prostora jednaka skalarnom proizvodu diferencijala vektora položaja[48] $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ sa samim sobom. Iz oblika metrike se takođe može zaključiti da li ona odgovara prostoru koji je ravan ili zakrivljen. Naime, ukoliko je metrika oblika (1.74), odnosno uz diferencijale dx, dy i dz stoje konstante, to znači da je posmatrani prostor ravan. U slučaju da se u metrici uz pomenute diferencijale nalaze funkcije promenljivih x, y, z, i ne

[47] Jedan od kriterijuma za proveru da li je prostor ravan ili zakrivljen je ispitivanje da li u njemu za svaki trougao važi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (α, β i γ su uglovi trougla), odnosno za svaku kružnicu $O/r = 2\pi$, gde je O obim a r poluprečnik kružnice.

[48] Ovaj vektor prikazuje infinitezimalno pomeranje posmatrane materijalne tačke.

postoji transformacija koordinata kojom metrika ovog oblika može da se u celom prostoru svede na oblik sa konstantama ispred diferencijala, prostor je zakrivljen.

Postupajući na isti način i u slučaju prostor-vremena specijalne teorije relativnosti, polazeći od izraza (1.71), za njegovu metriku se dobija

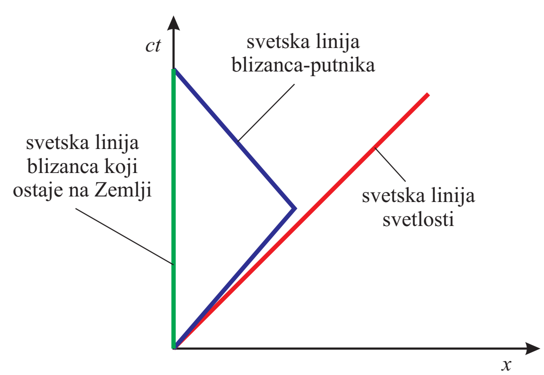
$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{1.75}$$

Kako uz diferencijale nezavisno promenljivih stoje konstante, 4-dimenzionalni prostor specijalne teorije relativnosti je, slično 3-dimenzionalnom prostoru Njutnove mehanike, ravan. S obzirom na to da u izrazu za metriku imamo i negativne kvadrate diferencijala promenljivih, metrika nije euklidska već se naziva *pseudo-euklidskom*.

Prostor sa ovakvim osobinama je uveo matematičar Herman Minkovski i po njemu nosi ime *prostor Minkovskog*.[49] On je 1907. godine, na bazi radova Poenkarea, pokazao da se Ajnštajnova specijalna teorija relativnosti može, na veoma elegantan način, prikazati u ovakvom prostoru.

1.8.1 Grafici u prostor-vremenu

Kao i u drugim prostorima i u prostoru Minkovskog je od velike važnosti prikazivanje kinematičkih funkcionalnih zavisnosti graficima. Pre svega je od interesa prikazati zavisnost pozicije tela prikazane koordinatama x, y, z od vremena. Kako je reč o četvorodimenzionalnom prostoru, taj zadatak je nemoguć, jer bi sve četiri koordinatne ose trebalo da budu međusobno pod pravim uglom. Međutim ako za početak posmatramo samo kretanje koje se odvija duž x ose onda y i z osu i ne moramo da prikazujemo, pa će nam se događaji odigravati u (ct, x) ravni.



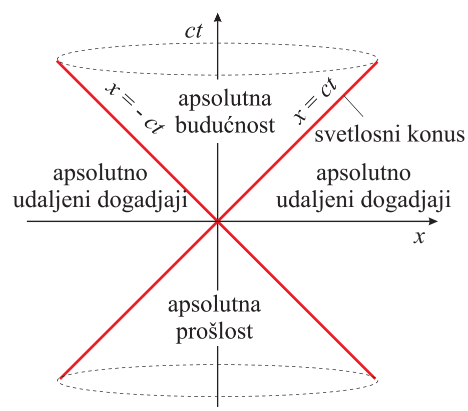
Slika 1.20: Paradoks blizanaca prikazan na grafiku u prostor-vremenu.

Za konstrukciju prostorno-vremenskih grafika ordinatna osa je obično vremenska (u stvari ct) osa, dok je apscisna osa prostorna koordinata x. Svaka linija koja se nacrta na takvom grafiku se naziva **svetska linija**.

[49]Herman Minkovski (1864-1909), nemački matematičar litvansko-jevrejskog porekla.

Paradoks blizanaca je prikazan na takvom grafikonu na slici 1.20. U početnom trenutku vremena svetske linije oba brata se poklapaju jer se nalaze na istom mestu u prostor-vremenu. Kada jedan od njih krene na put, ukoliko se kreće konstantnom brzinom, put koji je prešao je jednak $x = vt$, što se može napisati u obliku $ct = \frac{c}{v}x$. Kako je $v < c$ to će i dirigovati nagibni ugao odgovarajuće svetske linije. U skladu sa tim će svetska linija brata-putnika imati nagibni ugao, u odnosu na x osu (slika 1.20), veći od $\pi/4$. Dakle, svetska linija se udaljava od linije brata blizanca koja se, pošto on ostaje na istom mestu (ne menja mu se x koordinata), poklapa sa ct osom. U momentu kada se oni opet sastanu, s obzirom na to da se tada opet nalaze na istom mestu, svetske linije će im se preseći. Da bi se to desilo, svetska linija blizanca koji putuje mora da bude izlomljena, odnosno kada krene nazad ka Zemlji, ona menja nagib prema x osi.

Svetske linije svetlosnog pulsa (prave čije su jednačine $x = \pm ct$) su dijagonale u prostor-vremenu, odnosno linije sa nagibom od 45° koje idu kroz prvi ili drugi kvadrant u zavisnosti od toga da li se svetlost kreće u pozitivnom ili negativnom smeru x ose. Sve svetske linije mogućih događaja sa blizancima, s obzirom na to da njihova brzina mora da bude manja od brzine svetlosti, nalaze se između ove dve svetske linije svetlosti. Ako svetske linije svetlosti zarotiramo oko ct ose dobijamo takozvani "svetlosni konus" (slika 1.21). U četvorodimenzionalnom prostoru se radi o hiperpovrši koja se naziva hiperkonus čija jednačina je $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$.



Slika 1.21: Svetlosni konus.

Za sve tačke unutar svetlosnog konusa je $c^2t^2 > x^2$, tj. one predstavljaju događaje koji su od nultog događaja razdvojeni intervalom vremenskog tipa. Sve svetske tačke koje leže unutar konusa i iznad x ose ($ct > 0$), predstavljaju događaje koji slede nulti događaj, dok tačke unutar konusa, ali ispod x ose, odgovaraju događajima koji prethode nultom događaju, nezavisno od izbora sistema reference. Iz tog razloga se unutrašnjosti svetlosnog konusa ("gornja" i "donja") nazivaju apsolutna budućnost i apsolutna prošlost, respektivno.

U oblasti van svetlosnog konusa važi $c^2t^2 - x^2 < 0$ i u njoj se nalaze svetske tačke događaja koji su od nultog razdvojeni prostornim intervalom. Ovakvi događaji su prostorno apsolutno razdvojeni od nultog događaja pa se ta oblast naziva oblast apsolutno udaljenih događaja.

1.8.2 Dužine pravih linija u prostoru Minkovskog

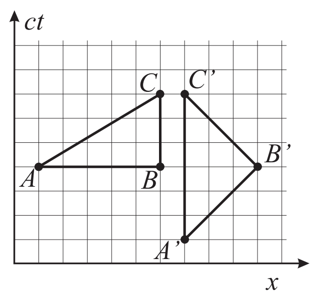
Da bi tvrđenja izneta u vezi sa prostorom Minkovskog do sada bila jasnija pozabavimo se malo sledećim problemom. Na slici 1.22 su prikazana dva trougla u (ct, x) ravni prostora Minkovskog. Hajde da proverimo dve stvari:

(i) Koja od stranica trougla ABC je najduža a koja najkraća?

(ii) Koja je najkraća putanja između tačaka A i C − prava linija između njih ili putanja ABC koja ide preko druge dve stranice trougla?

Zatim ćemo odgovoriti na ista pitanja u slučaju trougla $A'B'C'$.

Kako je reč o prostoru Minkovskog, dužine stranica se određuju na osnovu formule (1.71), uz $\Delta y = \Delta z = 0$, uzimajući da je rastojanje recimo od A do B zadato kao $l_{AB} = \sqrt{|\Delta s^2_{AB}|}$ (s obzirom na to da kvadrat intervala može da bude i negativan).



Slika 1.22: Određivanje rastojanja u prostoru Minkovskog.

Kako su koordinate tačaka prvog trougla u (ct, x) ravni $A = (4, 1)$, $B = (4, 6)$ i $C = (7, 6)$, kvadrati posmatranih intervala su $\Delta s^2_{AB} = (4-4)^2 - (6-1)^2 = -5^2$, $\Delta s^2_{AC} = (7-4)^2 - (6-1)^2 = -4^2$ i $\Delta s^2_{BC} = (7-4)^2 - (6-6)^2 = 3^2$, dok koreni njihovih apsolutnih vrednosti iznose $l_{AB} = 5$, $l_{AC} = 4$ i $l_{BC} = 3$. Na osnovu toga je:

(i) Najduža stranica AB a najkraća BC;

(ii) Najkraći put od A do C pravom linijom koja ih spaja.

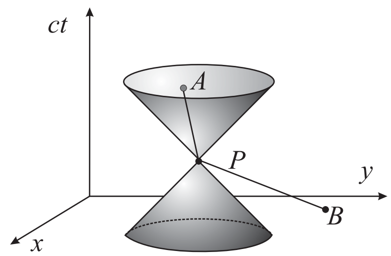
U slučaju trougla $A'B'C'$, kako su koordinate temena zadate sa $A' = (1, 7)$, $B' = (4, 10)$ i $C' = (7, 7)$, kvadrati intervala su $\Delta s^2_{A'B'} = (4-1)^2 - (10-7)^2 = 0$, $\Delta s^2_{A'C'} = (7-1)^2 - (7-7)^2 = 6^2$ i $\Delta s^2_{B'C'} = (7-4)^2 - (7-10)^2 = 0$. Na osnovu toga se odgovori malo razlikuju od prethodnih i glase:

(i) Najduža stranica je $A'C'$ a druge dve imaju dužinu 0;

(ii) Najkraći put od A' do C' nije pravom linijom koja ih spaja (to je čak najduži!) već "okolnim" putem po putanjama koje odgovaraju svetlosnim, pri čemu je dužina tog puta u prostor-vremenu jednaka nuli!

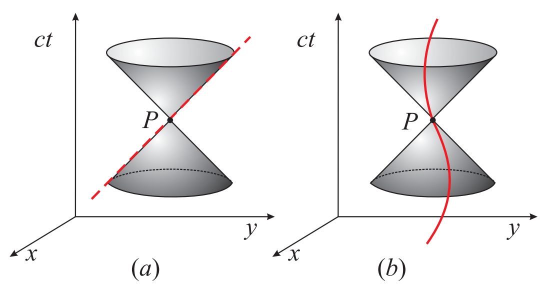
1.8.3 Svetlosni konusi

Izbor "nulte tačke" za koju je na slici 1.21 skiciran svetlosni konus je arbitraran. To znači da se za svaku svetsku tačku P (događaj, odnosno tačku u prostoru Minkovskog) mogu konstruisati dva svetlosna konusa kao trodimenzionalne površi u četvorodimenzionalnom prostor-vremenu čiju poziciju određuju tačke koje su od tačke P odvojene nultim intervalom. Jedan konus generišu zraci svetlosti koji se razilaze polazeći od P (konus budućnosti tačke P), dok granicu drugog generišu zraci koji konvergiraju ka ovoj tački (konus prošlosti).



Slika 1.23: Svetlosni konusi tačke P.

Primetimo da ništa u ovim definicijama ne zavisi od izbora sistema reference već su u pitanju samo geometrijski pojmovi. Za vizuelizaciju je neophodno izabrati konkretan inercijalni sistem reference a primer je dat na slici 1.23.



Slika 1.24: (a) Putanja svetlosti je tangenta na svetlosni konus u svakoj tački putanje. (b) Putanja definisana intervalima vremenskog tipa u svakoj tački putanje leži unutar konusa.

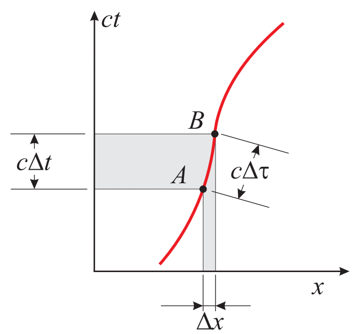
Pošto svaka tačka ima svoj svetlosni konus on je veoma važna karakteristika geometrije prostor-vremena. Svetske tačke koje su od tačke P razdvojene vremenskim intervalom nalaze se unutar konusa (tačka A na slici 1.23). Tačke koje su odvojene prostornim intervalom nalaze se van konusa (tačka B na slici 1.23).

Svetske putanje svetlosnih zraka su prave linije u prostor-vremenu konstantnog nagiba koji odgovara brzini svetlosti i nalaze se na svetlosnom konusu. U svakoj tački P duž svetske linije svetlosnog zraka, ta prava linija je tangenta na svetlosni konus te tačke (slika 1.24). Interval između dve tačke na putanji svetlosnog zraka je nula.

Čestice nenulte mase se kreću duž linija čije tačke su odvojene vremenskim intervalima i nalaze se uvek unutar svetlosnog konusa svake tačke na putanji što odgovara činjenici da je 3-brzina date čestice uvek manja od brzine svetlosti u datoj tački.[50]

Svetlosni konusi usled toga definišu kauzalnu vezu između tačaka u prostor−vremenu. Tako događaj koji se odigrao u tački P može da utiče samo na tačke koje se nalaze *u* ili *na* njegovom svetlosnom konusu budućnosti. Takođe u tu tačku mogu da dođu samo informacije koje se nalaze *u* ili *na* svetlosnom konusu prošlosti. Svi događaji koji se odigravaju iza događaja P nalaze se u njegovom svetlosnom konusu budućnosti. Unutrašnjost i spoljašnost konusa su karakteristike geometrije prostor−vremena a ne izbora sistema reference, te su stoga iste u svim sistemima.

Dve susedne tačke na svetskoj liniji vremenskog tipa su po definiciji odvojene intervalom vremenskog tipa. Stoga duž takve linije važi da je $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 > 0$ i da postoji sistem reference u kojem je $ds^2 = c^2dt'^2$. Taj sistem je zapravo vezan za *sat* koji očitava vreme t' i u tom smislu je to njegov sopstveni sistem. Vreme koje on očitava se zbog toga, kao što je već napomenuto, zove *sopstveno vreme* i označava sa τ. Iz tog razloga se interval sopstvenog vremena $d\tau$ obično koristi da pokaže koliki je pomeraj načinjen (u jedinicama vremena) duž svetske linije, a njegov kvadrat je zadat izrazom



Slika 1.25: Sopstveno vreme i koordinatno vreme duž krive vremenskog tipa.

$$d\tau^2 \equiv \frac{ds^2}{c^2}. \tag{1.76}$$

Interval sopstvenog vremena τ_{AB} između dve tačke A i B na svetskoj liniji vremenskog tipa može da se izračuna (na osnovu (1.76) i (1.75)) kao integral

$$\begin{aligned}\tau_{AB} &= \int_A^B d\tau = \frac{1}{c}\int_A^B \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\\ &= \int_{t_A}^{t_B} dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]},\end{aligned} \tag{1.77}$$

[50]Pomenimo na ovom mestu da entiteti čije su svetske tačke povezane prostornim intervalima teorijski nisu zabranjeni. Takve hipotetičke čestice se nazivaju tahioni i oni nikada ne mogu da se kreću brzinama manjim od brzine svetlosti.

ili kompaktnije

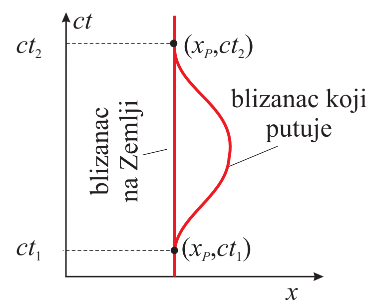
$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{1.78}$$

Sopstveno vreme τ_{AB} je *kraće* nego interval $t_B - t_A$ jer je $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ manji od jedan. Ovim je u stvari opisan fenomen dilatacije vremena čija geometrijska suština je prikazana na slici 1.25. Često se koristi i diferencijalna forma jednačine (1.78) $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Paradoks blizanaca

Jednačina (1.78) pokazuje da će vreme koje će pokazati sat koji se kreće između dve tačke u prostoru zavisiti od putanje kojom će ići između njih čak i ukoliko se vrati u mesto polaska – što dovodi do već pominjanog paradoksa blizanaca.

Svetske linije blizanaca su prikazane ponovo na slici 1.26 gde je uzeto u obzir da se onaj koji putuje ne kreće sve vreme konstantnom brzinom. Stoga njegova svetska linija nije sastavljena od dve duži (kao na slici 1.20) već ima zakrivljen oblik. Oba kreću iz iste tačke u prostoru i vremenu u nekom inercijalnom sistemu reference, recimo iz $x = x_P$ u $t = t_1$. Blizanac putnik se udaljava u prostor-vremenu a kasnije vraća u istu prostornu tačku ali u drugom momentu vremena t_2. Vreme koje je proteklo, po satu onoga koji nije putovao iznosi $t_2 - t_1$. Vreme koje je pokazao sat onoga koji je putovao je uvek *manje* usled postojanja faktora $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ u izrazu (1.78) što znači da će blizanac koji se kretao stareti sporije od drugoga.



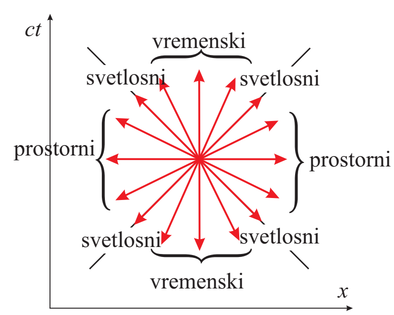
Slika 1.26: Preciznija slika svetskih linija blizanaca (uzima u obzir ubrzanja).

Paradoks blizanaca ilustruje jednu važnu karakteristiku pseudo-euklidske geometrije ravnog prostor-vremena. Kao što pokazuje formula (1.78) svako rastojanje koje duž svetske linije (vremenskog tipa) u prostor-vremenu pređe blizanac koji putuje, između tačaka $A = (x_P, t_1)$ i $B = (x_P, t_2)$, manje je dužine od onoga koje pređe blizanac koji miruje. Na slici 1.26 to izgleda drugačije, međutim, treba imati u vidu da su na njoj prikazane tačke i trajektorije geometrije koja nije euklidska, kao i to da mi vizuelno procenjujemo rastojanja na euklidski način. Udaljenost tačaka u prostoru Minkovskog se pak moraju izračunati preko formule (1.71). Putanja čija je svetska linija prava na slici 1.26 je najduže rastojanje između dve linije odvojene intervalom vremenskog tipa u 4-dimenzionalnom prostor-vremenu. Primetimo da je ovo potpuno suprotno od onoga što važi u euklidskoj geometriji u kojoj su prave linije, linije najkraćeg rastojanja između dve tačke.

1.8.4 Vektori u prostoru Minkovskog

4-vektori

Vektor u prostoru Minkovskog ili 4-vektor[51] se definiše kao orijentisana duž u ovom prostoru, analogno načinu na koji se definišu vektori u 3-dimenzionalnom euklidskom prostoru. U ovom tekstu će, da bi se razlikovali od 3-vektora koji će biti označavani na uobičajen način strelicom iznad odgovarajućeg slova $\vec{v}$, biti označeni podebljanim slovima pa će tako proizvoljni 4-vektor 've' biti označen simbolom $\mathbf{v}$.[52]



Slika 1.27: Vremenski, prostorni i svetlosni 4-vektori. Svetlosni imaju nultu dužinu u prostoru Minkovskog.

Za 4-vektore važe mnoga pravila analogna onima za 3-vektore, npr. sabiranje i oduzimanje se vrši grafički po istim pravilima (recimo nadovezivanjem 4-vektora), prenos vektora paralelno samom sebi ih ne menja, množenje skalarom ne menja pravac vektora već samo njegov intenzitet, itd. Intenzitet 4-vektora je apsolutna vrednost prostorno-vremenskog rastojanja između njegovog kraja i početka. 4-vektori čiji početak i kraj povezuju tačke koje su odvojene intervalom prostornog tipa, nazivaju se *prostornim*, ako povezuju tačke koje su odvojene intervalom vremenskog tipa, nazivaju se *vremenskim* a ako povezuju intervale svetlosnog tipa nazivaju se *svetlosnim, homogenim* ili *nultim* (slika 1.27).

Kako definicija 4-vektora i pravila za operisanje njima nisu definisani ni za jedan poseban sistem reference, znači da važe u svima. Drugim rečima

[51] Takođe se koristi i termin kvadrivektor.

[52] Ovo nije jedini način koji se sreće u literaturi za označavanje 4-vektora, već samo način koji je ovde usvojen u cilju stvaranja što manje zabune prilikom čitanja celog teksta, koji osim specijalne sadrži i opštu teoriju relativnosti. U knjigama koje se bave samo specijalnom teorijom relativnosti često se 4-vektori označavaju velikim štampanim slovima.

4-vektori su invarijantne veličine – isti su u svim inercijalnim sistemima reference. To je od velike važnosti, jer ako zakone mehanike formulišemo preko 4-vektora, to znači da će onda oni imati istu formu u svim inercijalnim sistemima.

Bazisni 4-vektori i komponente

U bilo kom inercijalnom sistemu reference, bazisni 4-vektori se uvode analogno kao i u slučaju 3-vektora, naime, to su jedinični vektori koji su usmereni duž $ct \equiv x^0$, $x \equiv x^1$, $y \equiv x^2$ i $z \equiv x^3$ koordinatne ose respektivno.[53] Označavaćemo ih kao $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$. Oni se nazivaju bazisni jer bilo koji 4-vektor može da se prikaže kao njihova linearna kombinacija

$$\mathbf{v} = v^0\mathbf{e}_0 + v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3, \tag{1.79}$$

gde su v^0, v^1, v^2 i v^3 komponente 4-vektora, ili, što je ekvivalentno,

$$\mathbf{v} = \sum_{\mu=0}^{3} v^\mu \mathbf{e}_\mu. \tag{1.80}$$

Ova jednačina može da se zapiše kompaktnije ukoliko se iskoristi Ajnštajnova sumaciona konvencija da se po indeksima koji se ponove jednom kao donji a drugi put kao gornji, podrazumeva sumiranje. Pri tome grčki indeksi se sumiraju od 0 do 3 a latinski od 1 do 3. Drugim rečima izraz

$$\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu, \tag{1.81}$$

predstavlja isto što i (1.80). Za 3-vektore važi slično

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i. \tag{1.82}$$

Važno je naglasiti da se sumiranje podrazumeva po bilo kom ponovljenom indeksu, tako da jednačina (1.28) može da se piše i preko drugih indeksa

$$\mathbf{v} = v^\beta \mathbf{e}_\beta = v^\gamma \mathbf{e}_\gamma = ... \tag{1.83}$$

Ponovljeni indeksi se zato zovu *nemi* ili *sumacioni indeksi.*

Specificiranje bazisnih 4-vektora i komponenti 4-vektora je ekvivalentno kompletnom zadavanju 4-vektora. U zavisnosti od okolnosti proizvoljan 4-vektor $\mathbf{v}$ će biti zapisivan na više ekvivalentnih načina

$$\mathbf{v} = (v^0, v^1, v^2, v^3);\ \mathbf{v} = (v^0, \vec{v});\ [v^\mu] = (v^0, v^1, v^2, v^3) \text{ ili } [v^\mu] = (v^0, \vec{v}) \tag{1.84}$$

[53] Na ovom mestu su uvedene jednostavnije oznake za koordinatne ose koje, kao što će se videti, omogućuju kompaktniji zapis formula.

gde je sa $\vec{v}$ označen 3-vektorski deo datog 4-vektora a sa v^μ njegova opšta komponenta.

Komponente 4-vektora se razlikuju u različitim sistemima reference s obzirom na to da se razlikuju i bazisni 4-vektori. Komponente 4-vektora (usmerene duži) transformišu se između sistema reference u skladu sa Lorencovim transformacijama koje ih povezuju.

Ukoliko sa $\mathbf{r} = (ct, x, y, z)$, odnosno $\mathbf{r} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ definišemo 4-vektor položaja, njegove komponente će se transformisati po zakonu

$$x'^0 = (x^0 - \beta x^1)\gamma,\ x'^1 = (x^1 - \beta x^0)\gamma,\ x'^2 = x^2,\ x'^3 = x^3, \tag{1.85}$$

($\beta = u/c$), a isto pravilo će važiti i za komponente ma kog 4-vektora $\mathbf{v}$

$$v'^0 = (v^0 - \beta v^1)\gamma,\ v'^1 = (v^1 - \beta v^0)\gamma,\ v'^2 = v^2,\ v'^3 = v^3. \tag{1.86}$$

Skalarni proizvod

Skalarni proizvod dva 4-vektora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ je veoma važna operacija u prostoru Minkovskog. On i u ovom slučaju mora da zadovoljava uobičajena pravila

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \\ (\alpha \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &= \alpha(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}), \end{aligned} \tag{1.87}$$

gde su $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ i $\mathbf{w}$ bilo koja tri 4-vektora a α je neki broj.

Izračunavanje skalarnog proizvoda je jednostavno ukoliko su poznati međusobni skalarni proizvodi svih bazisnih 4-vektora, jer je

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (v^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \cdot (u^\beta \mathbf{e}_\beta) = v^\alpha u^\beta (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta). \tag{1.88}$$

Primetimo da u ovom izrazu imamo duplo sumiranje (i po α i po β). Uobičajeno je da se skalarni proizvod bazisnih 4-vektora označi sa

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta, \tag{1.89}$$

nakon čega je traženi skalarni proizvod

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \eta_{\alpha\beta} v^\alpha u^\beta. \tag{1.90}$$

Dakle, ukoliko je poznata veličina $\eta_{\alpha\beta}$, biće poznat i skalarni proizvod bilo koja dva 4-vektora. Podsetimo se da u slučaju 3-vektora važi analogna relacija $\vec{v} \cdot \vec{u} = \eta_{ij} v^i u^j$ gde je

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.91}$$

Traženu veličinu $\eta_{\alpha\beta}$ ćemo odrediti na osnovu već poznatog rezultata za kvadrat intervala Δs^2 koji je zapravo jednak kvadratu 4-vektora pomeraja $\Delta\mathbf{r} = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \equiv (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$. Sa druge strane je kvadrat intervala jednak skalarnom proizvodu $\Delta\mathbf{r}$ sa samim sobom, odnosno

$$\Delta s^2 = \Delta\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r}, \tag{1.92}$$

a na osnovu izraza (1.71) sledi da će jedine nenulte komponente matrice koja reprezentuje veličinu $\eta_{\alpha\beta}$ biti dijagonalne, odnosno važiće

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.93}$$

Kao što je lako uočiti, radi se o dijagonalnoj i simetričnoj matrici. Na osnovu relacija (1.75) i (1.90) metriku u prostoru 4-vektora možemo kompaktno zapisati (koristići sumacionu konvenciju) kao

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{1.94}$$

Na osnovu (1.93), relacija (1.90) se može zapisati kao

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v^0 u^0 - v^1 u^1 - v^2 u^2 - v^3 u^3 = v^0 u^0 - \vec{v} \cdot \vec{u}. \tag{1.95}$$

S obzirom na ovakvu definiciju skalarnog proizvoda, koja se ne vezuje ni za jedan poseban inercijalni sistem reference, jasno je da on ima istu vrednost u svim takvim sistemima. U nekom drugom inercijalnom sistemu će se komponente istih vektora svakako razlikovati i biće $\mathbf{v} = (v'^0, v'^1, v'^2, v'^3)$ i $\mathbf{u} = (u'^0, u'^1, u'^2, u'^3)$, ali će njihov skalarni proizvod imati i dalje istu vrednost

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v'^0 u'^0 - v'^1 u'^1 - v'^2 u'^2 - v'^3 u'^3 = v'^0 u'^0 - \vec{v}\,' \cdot \vec{u}\,'. \tag{1.96}$$

Ovaj rezultat je moguće i direktno proveriti na osnovu relacije (1.86). Dakle, skalarni proizvod dva 4-vektora je invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije.

1.8.5 Prostor Minkovskog i Lorencove transformacije

Lorencove transformacije (1.85) se mogu prikazati i u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{1.97}$$

odnosno preko komponenti

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{1.98}$$

gde su sa $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ označene komponente matrice Lorencovih trasformacija definisane izrazom (1.97) i gde je opet iskorišćena Ajnštajnova sumaciona konvencija. Uočimo da je i ova matrica realna i simetrična. S obzirom na to da važi

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \delta^{\nu}_{\alpha} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}, \tag{1.99}$$

(gde je sa δ^{ν}_{α} označen Kronekerov simbol za koji važi $\delta^{\nu}_{\alpha} = 0$ za $\nu \neq \alpha$ i $\delta^{\nu}_{\alpha} = 1$ kada je $\nu = \alpha$), njen opšti član se može zapisati kao

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}. \tag{1.100}$$

Matrica inverznih Lorencovih transformacija se dobija na analogan način, polazeći od

$$x^0 = (x'^0 + \beta x'^1)\gamma, x^1 = (x'^1 + \beta x'^0)\gamma,\ x^2 = x'^2,\ x^3 = x'^3, \tag{1.101}$$

i ima oblik

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.102}$$

Lako se proverava da je proizvod matrice Lorencovih direktnih (1.97) i inverznih (1.102) transformacija jednak jediničnoj matrici, kao i da važi

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}. \tag{1.103}$$

1.8.6 Kontravarijantne i kovarijantne komponente vektora

Važno je napomenuti da pojam "kovarijantno" ima u teoriji relativnosti dva značenja tako da može da dođe do zabune ukoliko se nema u vidu smisao iskaza. Prvo značenje je vezano za tip komponenti vektora i biće o njemu reči sada, a drugo za fizičku ideju da ključne relacije ne smeju da promene oblik pri transformacijama koordinata odnosno pri prelasku iz jednog sistema reference u drugi.

Kako je skalarni proizvod dva vektora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \eta_{\mu\nu} v^{\mu} u^{\nu}$ skalar, odnosno invarijanta, izraz koji se u njemu pojavljuje $\eta_{\mu\nu} v^{\nu}$ bi morao da bude vektor jer zavisi od jednog indeksa. Označićemo ga sa v_μ s obzirom na to da se indeks po kome se ne sumira nalazi na donjem mestu, tj. kao kod bazisnih vektora. Sada ćemo se pozabaviti malo njime i videti kako mu izgledaju komponente, u kakvoj su vezi sa komponentama vektora v^μ koje smo do sada koristili, i kako se transformišu pri prelasku iz jednog sistema u drugi. Ako ovaj izraz razvijemo u skladu sa sumacionom konvencijom, on glasi

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu = \eta_{\mu 0} v^0 + \eta_{\mu 1} v^1 + \eta_{\mu 2} v^2 + \eta_{\mu 3} v^3. \tag{1.104}$$

Za $\mu = 0$ se, u skladu sa time, dobija

$$v_0 = \eta_{0\nu} v^\nu = \eta_{00} v^0 + \eta_{01} v^1 + \eta_{02} v^2 + \eta_{03} v^3, \tag{1.105}$$

što je, s obzirom na osobine $\eta_{\mu\nu}$ prema relaciji (1.93)

$$v_0 = v^0. \tag{1.106}$$

Na isti način se za preostale tri komponente dobija

$$v_1 = -v^1, \quad v_2 = -v^2, \quad \text{i} \quad v_3 = -v^3. \tag{1.107}$$

Da vidimo sada kako se transformišu ovakve komponente vektora pri promeni koordinatnog sistema. Na osnovu prethodna dva izraza mora da važi

$$v'_0 = v'^0, \quad v'_1 = -v'^1, \quad v'_2 = -v'^2, \quad \text{i} \quad v'_3 = -v'^3, \tag{1.108}$$

odakle se dobija redom:

$$\begin{aligned} v'_0 &= \gamma v^0 - \beta\gamma v^1 = \gamma v_0 + \beta\gamma v_1, \\ v'_1 &= -(-\beta\gamma v^0 + \gamma v^1) = \beta\gamma v_0 + \gamma v_1, \\ v'_2 &= -v'^2 = -v^2 = -(-v_2) = v_2, \\ v'_3 &= -v'^3 = -v^3 = -(-v_3) = v_3. \end{aligned} \tag{1.109}$$

Na osnovu ovoga se vidi da se komponente v_μ vektora $\mathbf{v}$ transformišu pri Lorencovim transformacijama inverznom transformacijom zadatom relacijom (1.102). S obzirom na to da su i bazisni vektori pisani sa donjim indeksima to znači da će se i oni transformisati na isti način pri prelasku iz jednog inercijalnog sistema u drugi. Kaže se da komponente v_μ vektora $\mathbf{v}$ "kovariraju" sa "variranjem" bazisnih vektora $\mathbf{e}_\mu$ (menjajući se na isti način kao i oni) pa se tako ove komponente nazivaju kovarijantnim.

Kada je reč o komponentama v^μ koje se transformišu kao vektor položaja prema (direktnim) Lorencovim transformacijama, one "kontravariraju" kada se bazisni vektori "variraju", odnosno matrica njihove transformacije je inverzna matrici transformacije bazisnih vektora. U tom smislu se ove komponente nazivaju kontravarijantnim.

Na osnovu ovoga i prema relacijama (1.100) i (1.103), zakoni transformacije za kontravarijantne i kovarijantne komponente vektora imaju oblik

$$v'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} v^{\nu} \quad \text{i} \quad v'_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} v_{\mu}. \tag{1.110}$$

1.8.7 4-vektor brzine

Kako je 3-brzina u Njutnovoj mehanici, odnosno u euklidskom prostoru, definisana izrazom

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{1.111}$$

interesantno je zapitati se kako bi izgledao 3 + 1-dimenzionalni analogon brzine, odnosno 4-brzina. Tragamo zapravo za 4-vektorom koji bi se transformisao u skladu sa Lorencovim transformacijama. U izrazu (1.111) Δt je vreme koje treba posmatranom objektu da izvrši 3-pomeraj $\Delta\vec{r}$. Na prvi pogled generalizacija bi mogla da se uradi uvođenjem 4-pomeraja $\Delta\mathbf{r}$ (umesto $\Delta\vec{r}$) u izraz (1.111). Međutim u tom slučaju bi se delio 4-vektor veličinom koja nije skalar (vremenski interval Δt nije skalar već zavisi od sistema reference iz koga se određuje), pa se rezultat tog deljenja ne bi transformisao prema Lorencovim transformacijama. Da bi otklonili taj problem potrebno je zameniti Δt sopstvenim vremenom $\Delta\tau$ koje odgovara posmatranom 4-pomeraju $\Delta\mathbf{r}$, tako da će 4-brzina biti zadata izrazom

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \tau} = \frac{d\mathbf{v}}{d\tau}. \tag{1.112}$$

Kako je sopstveno vreme povezano sa koordinatnim relacijom $\gamma d\tau = dt$, ovaj izraz postaje

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = (c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}) \\ &= \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{dx}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{dz}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{dy}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = (\gamma c, \gamma\vec{v}). \end{aligned} \tag{1.113}$$

Koristeći se osobinama 4-vektora lako je pokazati da je kvadrat intenziteta 4-vektora brzine

$$\mathbf{v}^2 = c^2. \tag{1.114}$$

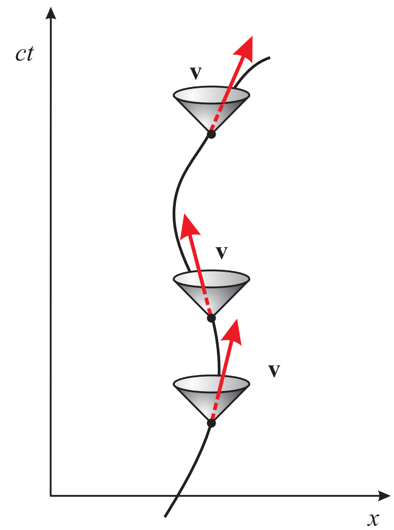
Drugim rečima, koliku god da ima 3-brzinu čestica, intenzitet njene 4-brzine je jednak brzini svetlosti i, prema tome, ima istu vrednost u svim inercijalnim sistemima reference!

S obzirom na to da je reč o 4-vektoru, on se transformiše prema izrazu

$$v'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu}. \tag{1.115}$$

Problemu 4-brzine se može pristupiti i na nešto drugačiji način. Prilikom kretanja čestice njena svetska tačka opisuje svetsku liniju u prostor-vremenu. To je kriva linija koja je određena jednim parametrom, recimo σ, odnosno skupom od 4 jednačine $x^{\alpha}(\sigma)$, koje definišu položaje sukcesivnih tačaka duž svetske linije. Parametar σ se može definisati na razne načine ali je za njega najprirodnije uzeti sopstveno vreme τ. U tom slučaju svetska linija će biti opisana jednačinama

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(\tau), \ \ \alpha = 0, 1, 2, 3. \tag{1.116}$$



Slika 1.28: 4-vektor brzine je tangentni vektor putanje vremenskog tipa.

U tom smislu 4-brzina se može shvatiti kao 4-vektor $\mathbf{v}$ čije komponente v^{α} su izvodi komponenti 4-vektora položaja x^{α} u odnosu na sopstveno vreme τ

$$v^{\alpha} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}. \tag{1.117}$$

4-brzina je, u skladu sa tom definicijom, u svakoj tački putanje (svetske linije čestice) tangentni vektor vremenskog tipa, što znači da leži unutar odgovarajućeg svetlosnog konusa (slika 1.28).

1.9 Zadaci

1. Štap sopstvene dužine l_0, nalazi se u stanju mirovanja u odnosu na sistem reference S u xy ravni pod uglom $\theta = \arctan(3/4)$ u odnosu na x osu. Sistem reference S' se kreće brzinom $\vec{v} = v\vec{e}_x$ u odnosu na sistem S i posmatrano iz njega štap je nagnut pod uglom 45° u odnosu na x' osu. Koliki je intenzitet brzine sistema S' i kolika je dužina štapa l' merena iz istog sistema reference?

2. Brod koji se približava Zemlji brzinom $\frac{1}{2}c$ izbacuje predmet brzinom $\frac{3}{4}c$. Kolikom brzinom se taj predmet kreće u odnosu na Zemlju ukoliko je izbačen u smeru nje a kolika mu je brzina ako je izbačen u smeru suprotnom od nje?

3. Dva voza, A i B, svaki sopstvene dužine l, kreću se u istom pravcu i smeru. Brzina voza A je $4c/5$, a voza B $3c/5$. Voz A polazi nakon polaska voza B. Koliko dugo će, gledano iz sistema reference vezanog za Zemlju, trebati vozu A da pretekne voz B od momenta kada ga je sustigao?

4. Voz, sopstvene dužine L, se kreće brzinom $5c/13$ u odnosu na prugu. Lopta je bačena sa zadnje strane voza ka prednjoj brzinom od $c/3$ u odnosu na voz. Koliki put će preći pri tome i koliko joj je vremena potrebno za njega, mereno iz sistema reference vezanog za Zemlju?

5. Svemirski brod se približava Zemlji brzinom $v = 4c/5$. Radarski signal emitovan sa broda, pogađa Zemlju i vraća se nazad na brod posle 12 dana. Koliko će još vremena proteći, mereno u svemirskom brodu, između prijema radarskog signala i dolaska na Zemlju, pretpostavljajući da će se brod i dalje kretati istom brzinom? Radarski signal, koji je emitovao radar sa broda, registrovan je i na Zemlji. Koliki će vremenski interval proteći između registrovanja tog signala i dolaska svemirskog broda na nju?

6. Astronaut sa Zemlje kreće na putovanje svemirskim brodom ubrzavajući ga konstantnim ubrzanjem α koje, da bi putovanje bilo prijatnije, iznosi $9,8$ m/s^2. Zavisnost udaljenosti svemirskog broda od vremena (mereno sa Zemlje) data je izrazom

$$x = \sqrt{c^2t^2 + \frac{c^4}{\alpha^2}} - \frac{c^2}{\alpha}.$$

   U intervalima od po 24 sata, sa Zemlje se u pravcu leta broda šalju radio signali. Koliko njih će biti registrovano na brodu?

7. Inercijalni sistem reference S' se kreće u odnosu na inercijalni sistem reference S brzinom $\vec{u}_1 = u_1\vec{e}_x$. Inercijalan sistem reference S'' se kreće u odnosu na sistem S' brzinom $\vec{u}_2 = u_2\vec{e}_x$. Izvesti Lorencove transformacije koje povezuju događaje u sistemima S'' i S.

8. Posmatrano iz laboratorijskog sistema reference, telo koje se kreće brzinom v_1 naleće pod pravim uglom na zid koji se kreće ka njemu brzinom

V. Odrediti brzinu tela v_2 nakon odbijanja od zida. Sudar je apsolutno elastičan a masa zida mnogo veća od mase tela. Proanalizirati granične slučajeve. Odrediti brzinu v_2, ako je $v_1 = V = c/3$.

9. Pokazati da je proizvod matrica direktnih i inverznih Lorencovih transformacija jednak jedinici.

10. Primenom relacije (1.86) pokazati da se skalarni proizvod dva vektora očuvava pri prelasku iz jednog inercijalnog sistema u drugi.

11. Pokazati da se Lorencove transformacije mogu prikazati kao rotacije zadate preko hiperboličkih umesto trigonometrijskih funkcija. Ugao rotacije je pri tome definisan izrazom $\psi = \tanh^{-1}\beta$.

12. Pokazati da iz izraza (1.115) sledi relativistički zakon slaganja brzina zadat relacijama (1.50) i (1.51).

13. Automobil sopstvene dužine l_{a0} nailazi brzinom v na garažu sopstvene dužine $l_{g0} < l_{a0}$. Neka je odnos njihovih dužina u stanju mirovanja $k \equiv l_{a0}/l_{g0} \geq 1$. Kolika je minimalna brzina automobila v_m potrebna da bi automobil stao u garažu?

14. Pretpostavimo da je raketa krenula iz stanja mirovanja sa Zemlje i da se kreće sa konstantnim ubrzanjem g. Koliko je daleko došla raketa nakon vremena δt merenog na Zemlji, a koliko daleko ako je ovoliki vremenski interval izmeren u raketi?