Glava 9

Dodatak

9.1 Dimenziona analiza

Kao što je poznato, fizičke veličine mogu da imaju dimenzije ili pak da budu bezdimenzionalne.

Veličina ima dimenziju ako njena brojna vrednost zavisi od izbora sistema jedinica. Na primer, interval vremena od izlaska do izlaska Sunca možemo da izrazimo kao 1 dan, 24 h, 1 440 minuta ili 86 400 s. Brojna vrednost se menja u zavisnosti od izbora jedinice za vreme iako je stalno reč o jednom te istom intervalu vremena.

Obzirom na prethodno odredjenje fizičke veličine sa dimenzijom, fizička veličina je bezdimenzionalna ako joj vrednost ne zavisi od izbora sistema jedinica. Na primer, visina Mont Everesta ($h = 8,848$ km) i poluprečnik Zemlje ($R = 6\,370$ km) su očigledno veličine sa dimenzijama, ali njihov *odnos*, $h/R = 0,0014$, je bezdimenzionalna veličina, i prema tome, nezavisna od sistema jedinica.

Dimenzija fizičke veličine u stvari ukazuje na njenu fizičku prirodu. Naime, nezavisno od toga da li *rastojanje* koje merimo izražavamo u stopama ili metrima, reč je o merenju *dužine*. U tom smislu se kaže da je dimenzija (fizička priroda) rastojanja *dužina*.

Simboli koji se obično koriste da se označe dimenzije fizičkih veličina *dužina*, *masa* i *vreme* su L, M i T. Fizičke veličine koje imaju dimenzije, medjusobnim množenjem i deljenjem daju nove fizičke veličine.[1] Na primer,

[1] Kada je reč o sabiranju i oduzimanju te operacije mogu da se rade samo sa veličinama koje imaju iste dimenzije.

odnos predjenog rastojanja i intervala vremena daje novu fizičku veličinu (brzinu), čija je dimenzija L/T.

Ako želimo da prikažemo dimenziju neke fizičke veličine obično se koriste uglaste zagrade [ ]. Na primer, ako želimo da označimo dimenziju brzine v, pisaćemo $[v]$ =L/T. Dimenzija površine, S, je $[S] = \mathrm{L}^2$, zapremine, V, $[V] = \mathrm{L}^3$ a ubrzanja a je $[a] = \mathrm{L}/\mathrm{T}^2$.

Fizički zakon i formula kojom je izražen, ne smeju da zavise od sistema jedinica. To je potpuno prirodno jer, zakoni prirode uspostavljaju vezu izmedju veličina koje su postojale do sada a postojaće i posle nas, dok je sistem jedinica stvar dogovora ljudi. Odavde sledi veoma važan zaključak: **obe strane bilo koje jednačine moraju da imaju iste dimenzije**.

Iz tog razloga je dobro da uvek kada napišemo neku relaciju, proverimo njenu dimenzionalnu zasnovanost, odnosno jednakost levi i desne strane u pogledu dimenzionalnosti. Ova procedura se naziva dimenzionalnom analizom i uvek može da se primeni.[2] U okviru dimenzionalne analize, dimenzije fizičkih veličina se tretiraju kao algebarske promenljive.

Recimo da nas zanima formula koja povezuje put s koje je prešao automobil za vreme t, krećući iz stanja mirovanja konstantnim ubrzanjem a. Pretpostavićemo da su ove tri veličine povezani relacijom oblika

$$s = Ca^\alpha t^\beta,$$

odnosno predjeni put je proporcionalan ubrzanju na α i vremenu kretanja na stepen β (C je bezdimenzionalna konstanta, odnosno neki broj). Ovde su α i β nepoznati koeficijenti koje ćemo odrediti iz uslova da su dimenzije leve i desne strane jednake. Leva strana jednačine je u pogledu dimenzije dužina, tako da i dimenzija desne mora da bude dužina, odnosno

$$[a^\alpha t^\beta] = \mathrm{L} = \mathrm{L}^1.$$

Kako je dimenzija ubrzanja L/T^2 a vremena T, dobija se

$$\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\right)^\alpha \mathrm{T}^\beta = \mathrm{L}^1,$$

$$\mathrm{L}^\alpha \mathrm{T}^{\beta-2\alpha} = \mathrm{L}^1.$$

[2]Dimenzonalna analiza nam može pomoći u najmanju ruku za svodjenje pamćenja formula na najmanju moguću meru.

Da bi obe strane jednačina imale iste dimenzije, eksponenti moraju biti isti. Na desnoj strani se pojavljje samo L a ne i T, ali to u stvari znači da ga možemo dopisati dignuto na nulu, što znači da su odgovarajuće jednačine za eksponenete: $\beta - 2\alpha = 0$ i $\alpha = 1$, odakle se odmah dobija da je $\beta = 2$. Time je odredjena funkcionalna zavisnost predjenog puta s, ubrzanja a i vremena t kao $x \propto at^2$. Ovaj reuzultat se, od tačnog rezultata za ovaj tip kretanja $s = \frac{1}{2}at^2$, razlikuje samo za faktor 2.[3] Po pravilu su bezdimenzionalne konstante koje se pojavljuju u fizičkim zakonima ($\sqrt{2}$, $1/2$, π, ...) ni prevelike ni premale tako da dimenzionalna analiza može da posluži i da se oceni i red veličine fizičkih veličina.

Prilikom primene dimenzionalne analize treba biti oprezan i imati odredjeno iskustvo. U principu su moguća dva, prikrivena, problema. Prvi se tiče izbora fizičkih veličina od kojih može da zavisi fizička veličina čiju vezu sa njima zapravo tražimo. Da bi ga rešili potrebno je da razumemo fizičke zakone i pojave koje su važne za razmatranje posmatranog sistema. Drugi problem je postojanje veličina koje mogu da obrazuju bezdimenzionalne faktore u izrazu relacije koju tražimo.

9.1.1 Funkcionalna zavisnost sile otpora sredine pri kretanju tela kroz nju

Koristeći dimenzionalnu analizu, pokušajmo da odredimo silu otpora sredine telu koje se kreće kroz nju. Kao što je već napomenuto, neophodno je odrediti od kojih veličina može da zavisi ova sila. Svakodnevno iskustvo nam kazuje da sa porastom brzine tela v raste i sila otpora sredine, što znači da sila mora da zavisi od nje. Osim toga, tela većeg poprečnog preseka trepe veći otpor od onih sa manjim (primer za ovo je padobran). Iz tog razloga u izraz za silu mora da udje i površia poprečnog preseka S. I na kraju, sila otpora mora da zavisi i od neke veličine koja predstavlja karakteristiku sredine. Ovde odmah nailazimo na problem, a to je, koju karakterisitiku sredine izabrati?

Izgleda prirodno da kao takvu karakteristiku treba izabrati gustinu sredine (vazduha, tečnosti) ρ, jer, što je sredina gušća, to ona više utiv ce na kretanje tela. Prema do sada izrečenom, pretpostavićemo silu otpora sredine u obliku

$$F_\rho = \frac{C}{2} v^\alpha S^\beta \rho^2$$

[3] Budući da je taj faktor bezdimenzionalan njega i nije moguće odrediti na ovaj način.

(množitelj 2 može da se uključi u C ali je izdvojen iz istorijskih razloga). Sila ima dimenzije proizvoda mase i ubrzanja, odnosno $[F]$=LT^{-2}M. Iz uslova jednakosti dimenzija leve i desne strane jednačine za silu dobija se

$$\mathrm{L\ T^{-2}M} = (\mathrm{LT^{-1}})^{\alpha}(\mathrm{L^2})^{\beta}(\mathrm{ML^{-3}})^{\gamma} = \mathrm{L}^{\alpha+2\beta-3\gamma}T^{-\alpha}M^{\gamma},$$

odakle slede jednačine

$$1 = \alpha + 2\beta - 3\gamma,$$
$$-2 = -\alpha,$$
$$1 = \gamma.$$

Njihovo rešenje je $\alpha = 2$, $\beta = 1$ i $\gamma = 1$, pa je tražena formula

$$F_{\rho} = CS\frac{\rho v^2}{2}. \tag{9.1}$$

Sada može da se postavi pitanje zašto smo za karakteristiku sredine izabrali baš gustinu? Zašto umesto nje da ne uzmemo na primer viskoznost η čija su dimenzije $[\eta]$ = ML^{-1}T^{-1}? Ukoliko uradimo to silu možemo da predstavimo u obliku

$$F_{\eta} = Bv^{\alpha}S^{\beta}\eta^{\delta}$$

(B je konstanta koja zavisi od oblika tela) čije dimenzije su

$$\mathrm{L\ T^{-2}M} = (\mathrm{LT^{-1}})^{\alpha}(\mathrm{L^2})^{\beta}(\mathrm{ML^{-1}T^{-1}})^{\delta} = \mathrm{L}^{\alpha+2\beta-\delta}T^{-\alpha-\delta}M^{\delta}.$$

Iz sistema jednačina

$$1 = \alpha + 2\beta - \delta,$$
$$-2 = -\alpha - \delta,$$
$$1 = \delta,$$

se dobija $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ i $\delta = 1$, pa je tražena formula

$$F_{\eta} = B\eta\sqrt{S}v. \tag{9.2}$$

Veličina $\sqrt{S}$ je srazmerna karakterističnoj dimenziji tela L (ukoliko je telo oblika lopte poluprečnika r onda je $\sqrt{S} = r$ dok je $C = 6\pi$)tako da gornji izraz postaje

$$F_{\eta} = B\eta Lv. \tag{9.3}$$

Formule (9.1) i (9.3) su potpuno različite: u jednoj od njih je zavisnost od brizne kvadratična a u drugoj linearna. Koja je onda tačna? Da bi odgovorili na ovo pitanje morali bi da damo sud o tome koja karakteristika sredine (gustina ili viskoznost) dominiraju u konkretnom problemu koji rešavamo. Kada je dominantna gustina važi izraz (9.1) koji predstavlja silu otpora koja je nastala usled razlike u pritiscima na prednjoj i zadnjoj strani tela, a kada je sila otpora posledica trenja, odnosno viskoznosti, važi izraz (9.1) i (9.3). Ukupna sila koja deluje na telo je kombinacija jedne i druge sile, a kada su brzine tela veoma male, sila trenja proporcionalna prvom stepenu brzine, će biti mnogo veća od sile otpora nastale usled razlike u pritiscima, koja je srazmerna drugom stepenu brzine. Pri velikim brzinama važi suprotan zaključak.

9.2 Algebra

9.2.1 Neke važne formule

Razlomci

1. Množenje razlomaka
$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd},$$
2. Deljenje razlomaka
$$\frac{(a/b)}{(c/d)}=\frac{ad}{bc},$$
3. Sabiranje (oduzimanje) razlomaka
$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

Stepenovanje

$$x^0=1$$
$$x^1=x$$
$$x^m\cdot x^n=x^{m+n}$$
$$\frac{x^m}{x^n}=x^m\cdot x^{-n}=x^{m-n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$
$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Faktorizacija

$$\begin{aligned} ax + ay + az &= a(x + y + z) \quad \text{(zajednički množilac)}, \\ a^2 \pm 2ab + b^2 &= (a \pm b)^2 \quad \text{(kvadrat zbira (razlike))}, \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \quad \text{(razlika kvadrata)}. \end{aligned}$$

Kvadratna jednačina

Opšti oblik kvadratne jednačine je

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gde je x nepoznata veličina a a, b i c su brojevi koji predstavljaju koeficijente jednačine. Ova jednačina ima dva rešenja (korena) koji se nalaze po pravilu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kada je $b^2 \geq 4ac$, rešenja kvadratne jednačine su realna.

9.2.2 Linearne jednačine

Linearna jednačina ima opšti oblik

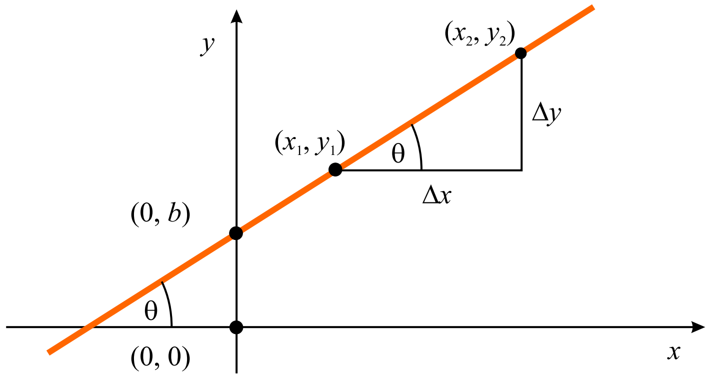
$$y = mx + b, \tag{9.4}$$

gde su m i b konstante. Ova jednačina se naziva linearnom jer je grafik zavisnosti y od promenljive x (i obrnuto) prava linija (slika 9.1).

Veličina b je vrednost y koordinate za koju prava preseca y osu. Konstanta m je pak jednaka nagibu prave linije ka x osi i istvoremeno predstavlja tangens ugla θ koga prava linija zaklapa sa x osom. Ako su poznate koordinate dve bilo koje tačke na pravoj liniji (x_1, y_1) i (x_2, y_2), nagib prave linije se može napisati kao

$$m = \frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta. \tag{9.5}$$

Primetimo da i m i b mogu da imaju i pozitivne i negativne vrednosti. Ukoliko je $m > 0$, prava linija ima pozitivan nagib kao na slici 9.1. Ukoliko je $m < 0$ nagib je negativan.



Slika 9.1: Prava linija nagibnog ugla θ koja na y osi odseca odsečak b.

Logaritmi

Neka je veličina x zapisana kao stepen neke veličine a

$$x = a^y. \tag{9.6}$$

Broj a se u tom slučaju naziva osnova. Logaritam od x u odnosu na osnovu a je jednak izložiocu y u izrazu (9.6), odnosno

$$\log_a x = y. \tag{9.7}$$

U praksi se najčešće koriste dve osnove i to 10 i $e = 2,718...$ (Neperov broj). Ukoliko je osnova logaritma e onda se oni nazivaju prirodnim.

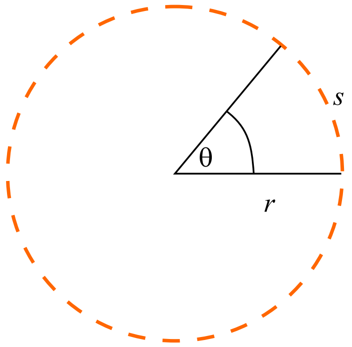
Neke korisne osobine logaritama su

$$\log(ab) = \log a + \log b$$
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$
$$\log(a^n) = n \log a$$
$$\ln e = 1$$

9.3 Geometrija

Rastojanje izmedju dve tačke u prostoru sa koordinatama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) je

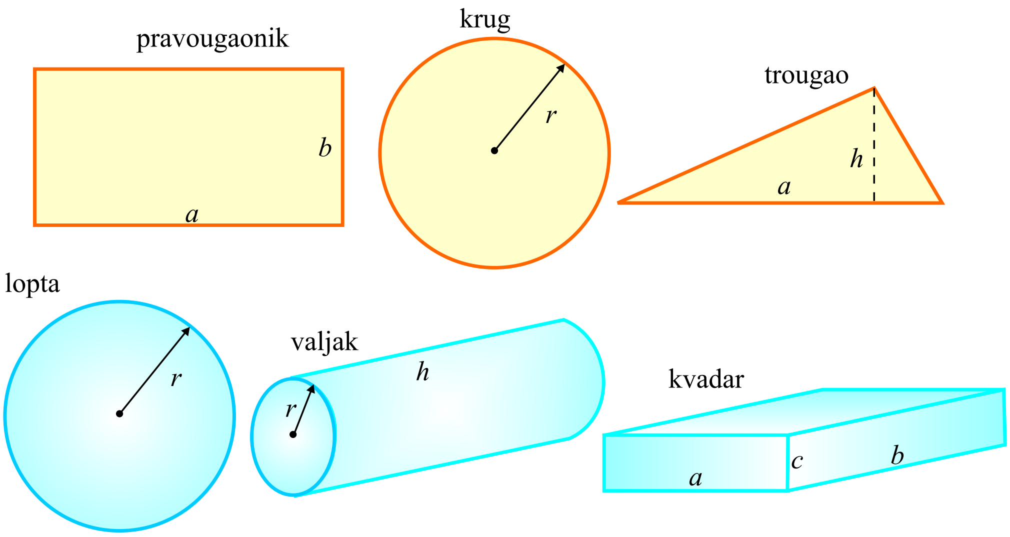
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}. \tag{9.8}$$



Slika 9.2:

Dužina kružnog luka s (slika 9.2) je proporcionalna poluprečniku r sa koeficijentom proporcionalnosti θ (u radijanima):

$$s = r\theta, \quad \theta = \frac{s}{r}. \tag{9.9}$$



Slika 9.3:

Neki korisni izrazi za površine i zapremine:
- površina pravougaonika dužina stranica a i b, $P = ab$,
- krug poluprečnika r, površina $P = \pi r^2$, obim $O = 2\pi r$,
- površina trougla osnove a i odgovarajuće visine h, $P = bh/2$,

- sfera poluprečnika r, površina, $P = \pi r^2$, zapremina $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

- valjak, poluprečnika osnove r a visine h, površina $p = 2\pi r h$, zapremina $V = \pi r^2 h$

- kvadar dužine stranica a, b i c, površina $P = 2(ab + ac + bc)$, zapremina $V = abc$.

Neke korisne jednačine:

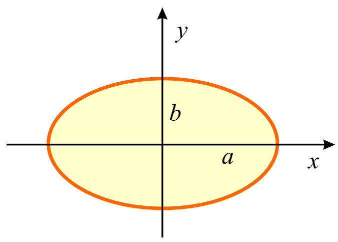
- jednačina prave linije nagiba m koja odseca odsečak dužine b ba y osi je data relacijom (9.4),

- jednačina kružnice poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku je

$$x^2 + y^2 = R^2, \ \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1 \tag{9.10}$$

- jednačina elipse sa centrom u koordinatnom početku je (slika 9.4)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \tag{9.11}$$



Slika 9.4: Elipsa

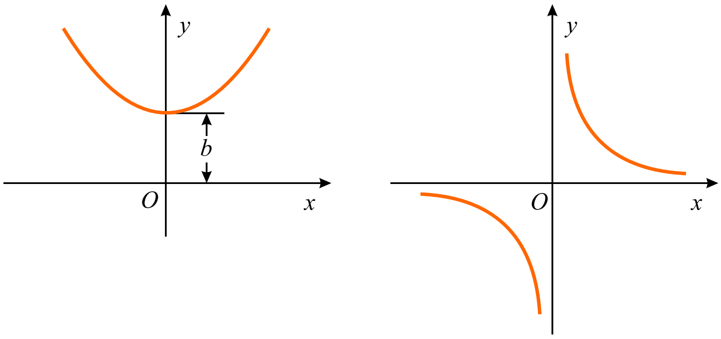
gde su: a dužina velike a b male poluose elipse.

- jednačina parabole koja ima ekstremalnu vrednost u tački $y = b$ je (slika 9.5)

$$y = ax^2 + b, \tag{9.12}$$

- jednačina ravnostrane hiperbole je (slika 9.5)

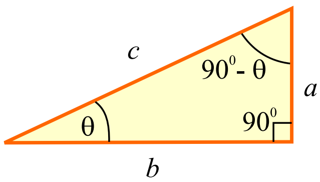
$$xy = const. \tag{9.13}$$



Slika 9.5: Parabola i hiperbola

9.4 Trigonometrija

Oblast matematike koja je bazirana na specijalnim karakteristikama pravouglih trouglova se naziva trigonometrija. Po definiciji, pravougli trougao je onaj koji ima jedan ugao od 90^{O}. Posmatrajmo trougao prikazan na slici 9.6, kod koga je sa a označena kateta koja se nalazi naspram ugla θ, a sa b kateta koja naleže na njega, dok je sa c označena njegova hipotenuza.



Slika 9.6: Pravougli trougao

Tri osnovne trigonometrijske funkcije koje se definišu za takav trougao su funkcije sinus (sin), kosinus (cos) i tangens (tan ili tg), koje su odredjene jednačinama

$$\sin\theta = \frac{a}{c}, \tag{9.14}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{c}, \tag{9.15}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b}. \tag{9.16}$$

Kao četvrta funkcija se često definiše i kotangens (cot) kao recipročna vrednost tangensa, odnosno

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{b}{a}. \tag{9.17}$$

Na osnovu ovih relacija se takodje vidi da važi

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Ukoliko se podje od relacije izmedju kvadrata kateta i kvadrata hipotenuze, odnosno od Pitagorine teoreme

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

dolazi se do osovnog trigonometrijskog identiteta

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \tag{9.18}$$

Sa slike 9.6 se vidi da važe sledeće relacije

$$\sin\theta = \cos(90^{\mathrm{O}} - \theta),$$

$$\cos\theta = \sin(90^{\mathrm{O}} - \theta),$$

$$\cot\theta = \tan(90^{\mathrm{O}} - \theta).$$

Važne osobine trigonometrijskoh funkcija su i:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta,$$

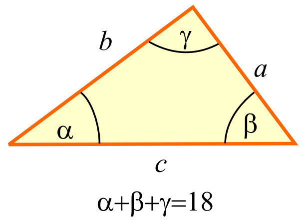
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta.$$

Za bilo koji trougao (slika 9.7), važe sinusna

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{9.19}$$

i kosinusna

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned} \tag{9.20}$$



Slika 9.7: Proizvoljni trougao

teorema.
Neki važni trigonometrijski identiteti:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta,$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$
$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\theta),$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta),$$
$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

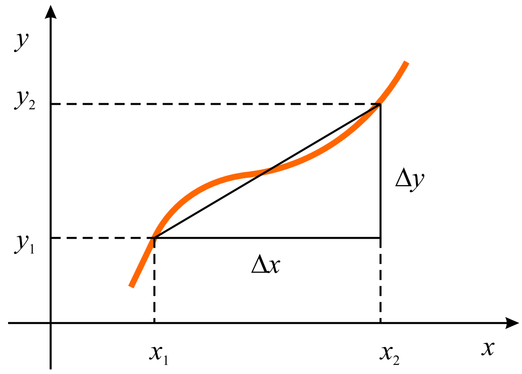
9.5 Diferencijalni račun

Ovu oblast matematike je uveo Njutn u cilju boljeg opisivanja fizičkih pojava. Danas je nemoguće zaobići njenu primenu u proučavanju pojava iz mehanike, termodinamike, molekularne fizike, elektriciteta, magnetizma, ...

Izvod funkcije $y = y(x)$ po promenljivoj x, se definiše kao granična vrednost odnosa priraštaja funkcije $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ i priraštaja Δx promenljive x, kada Δx teži nuli

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}, \tag{9.21}$$

gde su Δy i Δx definisani kao $\Delta x = x_2 - x_1$ i $\Delta y = y_2 - y_1$ (Slika 9.8.).



Slika 9.8:

Ukoliko je funkcija zadata izrazom $y(x) = ax^n$, gde je a konstanta a n bilo koji ceo broj ili razlomak, njen izvod je

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}. \tag{9.22}$$

Primer d1. Neka je funkcija $y(x)$ data izrazom

$$y(x) = ax^3 + bx + c,$$

gde su a i b konstante. Priraštaj funkcije za priraštaj promenljive x za Δx se može dobiti na osnovu

$$y(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c,$$

odnosno

$$y(x + \Delta x) = a(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x + \Delta x) + c,$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + b\Delta x.$$

Zamena ovog izraza u izraz (9.21) daje

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [(3ax^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) + b]$$

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b.$$

9.5.1 Osobine izvoda

Izvod proizvoda dve funkcije. Ako je funkcija $f(x)$ proizvod dve funkcije, recimo $g(x)$ i $h(x)$, izvod funkcije $f(x)$ je

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x)h(x)] = \frac{dg}{dx}h + g\frac{dh}{dx}. \tag{9.23}$$

Izvod zbira dve funkcije. Ako je funkcija $f(x)$ jednaka zbiru dve funkcije, izvod njihovog zbira je jednak zbiru njihovih izvoda

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}. \tag{9.24}$$

Izvod složene funkcije. Ako je $f(x)$ i $x = g(z)$, odnosno $y = f[g(z)]$, izvod funkcije y po nezavisnoj promenljivoj z (dy/dz) je

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz}. \tag{9.25}$$

Drugi izvod. Drugi izvod funkcije y u odnosuu na x je jednak izvodu funkcije dy/dx po x (prvi izvod prvog izvoda). To se obično piše kao

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{9.26}$$

Primer di2. Odrediti izvod funkcije $y = x^3/(x+1)^2$ po x.

Rešenje. Ako se ova funkcija zapiše u obliku $y = x^3(x+1)^{-2}$ i primeni jednačina (9.23), dobija se

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d(x^3)}{dx}(x+1)^{-2} + x^3\frac{d((x+1)^{-2})}{dx} \\ &= 3x^2(x+1)^{-2} + x^3(-2)(x+1)^{-3},\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x^3}{(x+1)^3}.$$

Primer di3. Pokazati da je izvod količnika dve funkcije

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h\frac{dg}{dx} - g\frac{dh}{dx}}{h^2}.$$

Rešenje. *Najpre treba količnik funkcija zapisati kao proizvod* gh^{-1} *pa onda primeniti formule (9.22) i (9.23):*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{d}{dx}(gh^{-1}) = \frac{dg}{dx}h^{-1} + g\frac{d(h^{-1})}{dx} = \frac{dg}{dx}h^{-1} - gh^{-2}\frac{dh}{dx}$$

odakle se sredjivanjem dobija traženi izraz.

9.5.2 Izvodi nekih funkcija

$$\frac{da}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}ax^n = nax^{n-1},$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax},$$

$$\frac{d}{dx}\sin ax = a\cos ax,$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\sin ax,$$

$$\frac{d}{dx}\tan ax = \frac{a}{\cos^2 ax},$$

$$\frac{d}{dx}\cot ax = -\frac{a}{\sin^2 ax},$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}.$$

9.5.3 Razvoj u red nekih funkcija

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots,$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$
$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \cdots,$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Za male vrednosti argumenta, odnosno za $x << 1$, važe sledeći aproksimativni izrazi[4]

$$(1+x)^n \approx 1 + nx, \quad \sin x \approx x,$$
$$e^x \approx 1 + x, \quad \cos x \approx 1,$$
$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x, \quad \tan x \approx x.$$

9.6 Integralni račun

Integraljenje neke funkcije je operacija koja je inverzna operaciji diferenciranja odnosno traženja izvoda funkcije. To se lepo vidi na primeru funkcije

$$f(x) = 3ax^2 + b, \tag{9.27}$$

koja se, kao što smo videli u primeru d1, dobija kao rezultat diferenciranja funkcije

$$y(x) = ax^3 + bx + c.$$

U tom smislu izraz (9.27) može da se napiše kao $f(x) = dy/dx$ odakle formalno sledi da važi

$$dy = f(x)dx = (3ax^2 + b)dx.$$

Iz ove relacije sledi da se funkcija y dobija "sumiranjem" po svim vrednostima funkcije x (y se dobija sabiranjem njenih malih promena odnosno diferencijala dy koje su preko ove relacije u vezi sa diferencijalima nezavisne promenljive

[4]Za trigonometrijske funkcije ovo znači da je $x \leq 0,1$ rad.

x). U matematici se ovakva operacija naziva integraljenje i zapisuje na sledeći način

$$y(x) = \int f(x)dx.$$

Za gore razmatranu funkciju (9.27), ovaj integral daje

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)dx = ax^3 + bx + c,$$

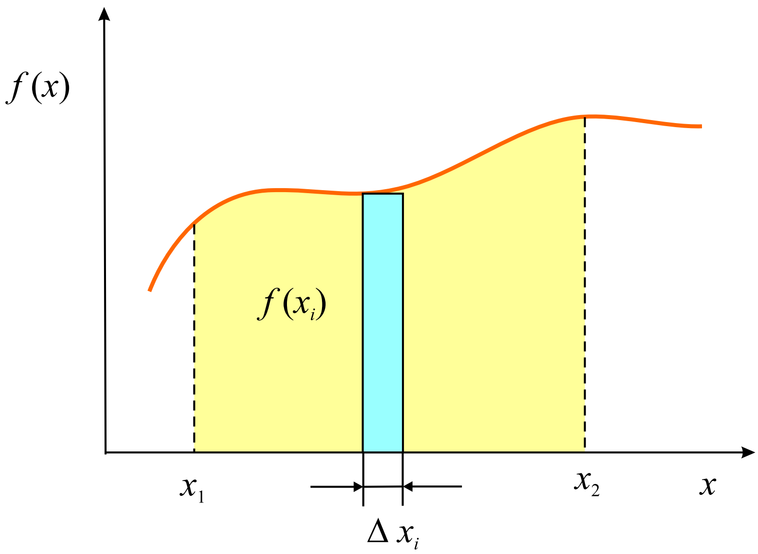
gde se c naziva konstantnom integracije. Ovakav integral se naziva *neodredjeni* integral jer njegova vrednost zavisi od izbora konstante c.

U opštem slučaju, **neodredjeni integral** $I(x)$, funkcije $f(x)$ se definiše kao

$$I(x) = \int f(x)dx,$$

gde je $f(x)$ *integrand* ili *podintegralna funkcija* za koju mora da važi da je $f(x) = dI(x)/dx$, pri čemu se $I(x)$ naziva *primitivna funkcije* funkcije $f(x)$.

Za *neprekidnu* funkciju $f(x)$, ukoliko se znaju moguće vrednosti nezavisne promenljive x, integral može da se shvati kao površina ispod krive koja predstavlja grafik funkcije $f(x)$ i x ose, izmedju odredjenih vrednosti x_1 i x_2 (slika 9.9.).



Slika 9.9:

Uska pravougaona osenčena vrednost ima površinu jednaku $f(x_i)\Delta x_i$. Ukoliko saberemo sve takve elemente od x_1 do x_2 dobili bi približnu vrednost površine ispod krive $f(x)$. A ukoliko uzmemo graničnu vrednost ove sume za $\Delta x_i \to 0$, dobili bi pravu vrednost površine izmedju ove krive i x ose za vrednost nezavisne promenljive izmedju vrednosti x_1 i x_2, odnosno

$$\text{Površina} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{9.28}$$

Integrali ovog tipa se nazivaju **odredjeni integrali**.

U praksi se često srećemo sa integralima oblka

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1). \tag{9.29}$$

Rezultat integracije je jasan i lako proverljiv. Dovoljno je izvršiti diferenciranje desne strane ove jednakosti i videti da se kao rezultat zaista dobija podintegralna funkcija $f(x) = x^n$. Ukoliko su granice integrala definisane, integral postaje odredjen i ima vrednost

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n dx = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1}, \quad (n \neq -1). \tag{9.30}$$

To je posledica jednog opštijeg pravila za odredjeni integral koje glasi

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = I(x)|_{x_1}^{x_2} = I(x_2) - I(x_1). \tag{9.31}$$

Primer ii1.

$$1. \quad \int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

$$2. \int_0^b x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2}|_0^b = \frac{2}{5} b^{5/2}.$$

$$3. \int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2}|_3^5 = \frac{5^2 - 3^2}{2} = 8.$$

9.6.1 Parcijalna integracija

Često je za rešavanje integrala zgodno primeniti metodu *parcijalne integracije* u kojoj se u osnovi koristi osobina diferencijala proizvoda dve funkcije

$$d(uv) = udv + vdu,$$

odakle je

$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{9.32}$$

gde je potrebno izabrati u i v na način pogodan da se polazni složeni integral svede na neki prostiji. Često je pri rešavanju nekih integrala potrebno primeniti ovaj postupak više puta. Na primer, integral $\int x^2 e^x dx$ se može rešiti primenom parcijalne integracije dva puta. Ukolio u prvom koraku uzmemo da je $u = x^2$ a $dv = e^x dx$ (odavde je $v = e^x$), na osnovu formule (9.32) se dobija

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

Za rešavanje integrala u drugom sabiru desne strane zgodno je u narednom koraku uzeti da je $u = x$ i $v = e^x$, što dovodi do

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

Na osnovu ovoga je traženi integral

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

9.6.2 Totalni diferencijal

Druga korisna metoda je metoda *totalnog diferencijala* koja se sastoji u uvodjenju takve smene da diferencijal nezavisne promenljive postane zapravo diferencijal podintegralne funkcije. Da bi pokazali kako se ova metoda primenjuje razmotrimo sledeći integral

$$I(x) = \int cos^2 x \sin x dx.$$

On može da se napiše u obliku

$$\int cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x),$$

odakle je logično da treba uvesti smenu $y = \cos x$, koja daje

$$\int cos^2 x \sin x dx = -\int y^2 dy,$$

što je integral koji se elementarno rešava i ima vrednost $-y^3/3 + c$. Povratak na izvornu promenljivu daje vrednost polaznog integrala

$$\int cos^2 x \sin x dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + c.$$

9.6.3 Integrali nekih funkcija

Slede nedoredjeni integrali nekih funkcija. U rezultat integracije treba dodati i proizvoljnu konstantu.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq 1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x,$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{b}\ln(a+bx),$$

$$\int \frac{xdx}{ax+b} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln(a+bx),$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a}\ln x + ax,$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)},$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}, \quad (a^2-x^2>0),$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}, \quad (x^2-a^2>0),$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln(a^2 \pm x^2),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax},$$

$$\int axdx = x\ln ax - x,$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1),$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac}\ln(a+be^{cx}),$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax,$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax,$$

$$\int \tan ax dx = \frac{1}{a}\ln(\cos ax),$$

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a}\ln(\sin ax),$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a},$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a},$$

9.6.4 Neki odredjeni integrali

$$\int_0^\infty x^n e^{ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}},$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$I_1 = \int_0^\infty xe^{-ax^2} = \frac{1}{2a},$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^2e^{-ax^2} = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}},$$

$$I_3 = \int_0^\infty x^3e^{-ax^2} = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2},$$

$$I_4 = \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} = \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}},$$

$$I_5 = \int_0^\infty x^5 e^{-ax^2} = \frac{d^2 I_1}{da} = \frac{1}{a^3},$$

.
.
.

$$I_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} = (-1)^n \frac{d^n I_0}{da^n},$$

$$I_{2n+1} = \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} = (-1)^n \frac{d^n I_1}{da^n}.$$

Literatura

[1] Halliday, Resnick, Walker, *Fundamentals of Physics*, 7^{th} Edition, Wiley, 2005.

[2] Paul Peter Urone, *College Physics*, Brooks/Cole Publishing Company, 1978

[3] Serway and Jewet, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th edition, ...

[4] S. E. Friš, A. V. Timorjeva, *Kurs opšte fizike, I, II i III*, Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika, 1970.

[5] N. N., *Berklijevski kurs fizike*, Zagreb, Školska knjiga, 1970.

[6] A. N. Matveev, *Kurs opšte fizike. Mehanika*, Moskva, Oniks 21 vek, 2003.

[7] Kalasnjikov, Smondirev, *Osnovi fiziki I i II*, Drofa, Moskva, 2003

[8] Benjamin Crowell, *Newtonian Physics*, www.lightandmatter.com

[9] Benjamin Crowell, *Conservation Laws*, www.lightandmatter.com

[10] Benjamin Crowell, *Vibration nad Waves*, www.lightandmatter.com

[11] David Morin, *Introductory Classical Mechanics, with Problems and Solutions*, Cambridge University Press, 2007.

[12] Ray d'Inverno, *Introducing Einsten's Relativity*, Oxford University Press, 1992.

[13] B. M. Javorskij, A. A. Pinskij, *Osnovi fiziki I i II*, Moskva, Fizmatlit, 2003.