Sadržaj

Glava 2

Dinamika

U prethodnoj glavi kretanje je opisivano preko veličina kao što su pomeraj, brzina, ubrzanje, odnosno tražen je oblik zavisnosti ovih veličina od vremena. Pitanja koja su u vezi sa uzajamnim delovanjem tela koja dovode do promene stanja kretanja nisu razmatrana. U ovoj glavi će biti upravo razmatrano ono što izaziva izmene u stanju kretanja čestice a oblast fizike koja se time bavi se zove dinamika. Dva glavna pojma - fizičke veličine koje u vezi s tim treba razmotriti su *sile* koje deluju na objekat i njegova *masa*. Osnovu takozvane klasične[1] ili njutnovske dinamike čine tri zakona koja je pre više od tri stotine godina formulisao Isak Njutn. Njutnovi zakoni nastali su uopštavanjem velikog broja eksperimentalnih rezultata. Mehanika bazirana na njima je nakon formulisanja postigla tako velike uspehe da su mnogi fizičari XIX veka bili ubedjeni u njenu svemogućnost. Smatralo se da je, objasniti neku fizičku pojavu, značilo svesti je na mehaničke procese koji se pokoravaju Njutnovim zakonima. Ipak, sa razvojem nauke su otkrivene nove činjenice koje nisu mogle da se uklope u okvire postojeće teorije. Te činjenice su uspešno objašnjene novim teorijama - specijalnom teorijom relativnosti i kvantnom mehanikom. U specijalnoj teoriji relativnosti (STR), koju je formulisao Albert Ajnštajn 1905. godine, podvrgnute su radikalnom razmatranju njutnovske predstave o prostoru i vremenu. To je dovelo do formulisanja "mehanike velikih brzina" ili, kako se drugačije kaže, relativističke mehanike. Ova nova mehanika, nije medjutim poništila njutnovu mehaniku. Jednačine relativističke mehanike u graničnom slučaju, za brzine male u poredjenju sa brzinom svetlosti, prelaze u jednačine klasične - nerelativističke mehanike. Na taj način je njutnova

[1]Pod terminom klasična dinamika misli se na dinamiku makroskopskih tela koja se kreću brzinama koje nisu jako velike, odnosno koje su puno manje od brzine svetlosti.

mehanika ustvari sadržana u ajnštajnovoj i služi, kao i ranije, za opisivanje kretanje tela čija je brzina znatno manja od brzine svetlosti. Analogna je situacija i sa odnosom klasične i kvantne mehanike koja je nastala dvadesetih godina prošlog veka kao rezultat razvoja fizike atoma. Jednačine kvantne mehanike takodje u graničnom slučaju (za tela čije mase znatno prevazilaze mase atoma) daju jednačine klasične - nekvantne mehanike. Iz toga sledi da je i u ovom slučaju njutnova mehanika na odredjen način sadržana u novoj kvantnoj mehanici.[2]

2.1 Sile

Verovatno svako ima, u skladu sa iskustvima iz svakodnevnog života, osećaj za pojam sile. Kada odgurnemo prazan tanjir od sebe, mi ustvari delujemo silom na njega. Slično, kada bacimo ili udarimo loptu mi delujemo ustvari nekom silom na nju. U ovim primerima pojam *sila* je u vezi sa nekom mišićnom aktivnošću i sa odredjenim promenama u stanju kretanja nekog drugog tela na koje se deluje. Sile, medjutim ne izazivaju uvek promene u stanju kretanja. Na primer, dok sedite i čitate ovu knjigu, na vas deluje gravitaciona sila a vaše telo svejedno ostaje i dalje nepokretno. Takodje, ukoliko pokušamo da odgurnemo neku veliku stenu ili zid kuće verovatno nećemo uspeti u tome iako sve vreme delujemo silom na dati objekat.

Možemo takodje da se zapitamo da li je način kretanja Meseca oko Zemlje izazvan delovanjem neke sile. Njutn je na ovo i slična pitanja odgovorio tako što je označio silu kao uzrok promene brzine objekta. Na taj način, da bi se održalo uniformno kretanje nekog objekta, nema potrebe za postojanjem sile.[3] Kako promene u brzini tela nastaju delovanjem sila, njih treba shvatati kao fizičke veličine (fizičku veličinu) koje telu saopštavaju odredjeno ubrzanje.

Šta se dešava kada više sila deluje na telo? U tom slučaju, telu se saopštava ubrzanje koje je rezultat ukupnog delovanja svih sila. Kada saberemo vektorski sve sile koje deluju na telo onda se dobija takozvana rezultujuća

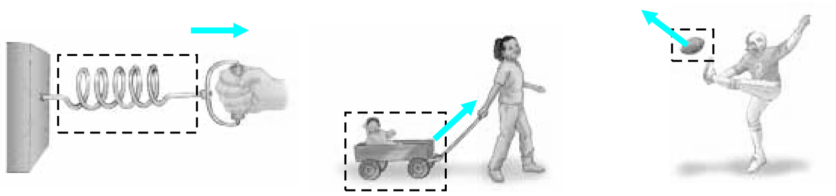
[2] Ova analiza pokazuje da dalji razvoj naučne misli, nakon formulisanja njutnove mehanike, nije poništio klasičnu mehaniku već je samo ukazao na njenu ograničenost u pogledu primene. Klasična mehanika, bazirana na Njutnovim zakonima, jeste prema tome mehanika tela velikih (u poredjenju sa masom atoma) masa, koja se kreći relativno malim (u poredjenju sa brzinom svetlosti) brzinama.

[3] Brzina kojom se kreće Mesec nije konstantna jer se on kreće po zakrivljenoj putanju oko Zemlje, što znači da se njegova brzina svakog momenta menja, makar po pravcu. Ove promene u brzini upravo izaziva Zemlja delujući gravitacionom silom na njega.

sila.[4]

Prostom analizom delovanja tela u prirodi se primećuje da ima jako puno sila pa se može postaviti pitanje da li se mogu nekako klasifikovati kao i da li možda medju njima ima odredjen broj osnovnih u smislu da sve ostale mogu da se svedu na njih.

Kada rukom povučemo (dovoljno jako) oprugu prikačenu drugim krajem o npr. zid razvući cemo je. Ako dovoljno jako povučemo stacionarna kolica da savladamo silu trenja izmedju njih i podloge, uspećemo da ih pokrenemo. Ako šutnemo nogom fudbalsku loptu, prvo ćemo je usled udarca deformisati a onda i naterati da se kreće. Svi ovi primeri su primeri klase sila pod nazivom *kontaktne sile*, obzirom da se dešavaju prilikom kontakta dva objekta.



Slika 2.1: Neki primeri kontaktnih sila. U svim slučajevima sila deluje na telo, uokvireno isprekidanom linijom, putem odredjenih posrednika.

Druga klasa sila su sile koje deluju na objekte preko odgovarajućeg *polja*, pri čemu nema direktnog kontakta tela koja interaguju. Gravitaciona sila je primer takve sile.[5]

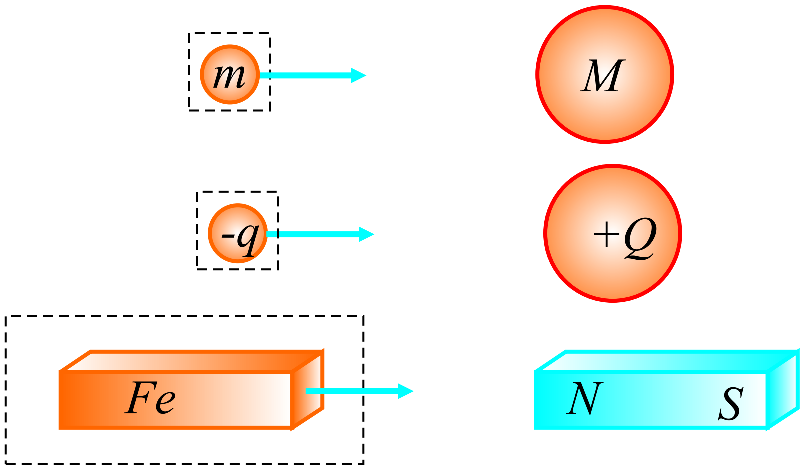
Drugi uobičajen primer za silu čije se delovanje prenosi putem polja je električna sila kojom jedno naelektrisano telo deluje na drugo. To mogu biti na primer elektron i proton u atomu vodonika. Treći primer je delovanje magnetne šipke na komad gvoždja. Sile koje drže na okupu čestice koje čine atomsko jezgro su takodje sile koje deluju preko odgovarajućeg polja ali, za razliku od ostalih pobrojanih, imaju veoma kratak domet. One su interakcija koja je dominantna kada se ove čestice nalaze na rastojanju reda 10^{-15} m.

Kroz istoriju, naučnici su,[6] bili zbunjeni idejom da tela mogu da deluju jedna na druga a da nisu u kontaktu. Da bi se prevazišao taj, ispostavilo

[4]Na osnovu ovoga je jasno da može da se desi da se brizna tela ne menja čak i kad na njega deluje više sila, ukoliko je njihova rezultanta jednaka nuli, tj. ukoliko se njihovo delovanje medjusobno poništava.

[5]Gravitaciona sila nas drži na Zemlji, odgovorna je za egzistenciju i kretanje tela u našem planetnom sistemu a može se reći i da dominira u celom kosmosu.

[6]Uključujući Njutna.



Slika 2.2: Neki primeri sila koje deluju posredstvom polja. Odgovarrajuće sile putem svojih polja deluju na isprekidano uokvirena tela.

se, konceptualni problem, Majkl Faradej (1791-1867.) je uveo pojam *polja*. U skladu sa tim pristupom, kada se objekat 1 nadje u prostoru u nekoj tački P blizu objekta 2, kaže se da objekat 1 interaguje sa objektom 2 (npr. gravitaciono) preko polja koje postoji u tački P kreirano od strane objekta 2. Analogno tome, u tački u kojoj se nalazi objekat 2 takodje postoji polje koje kreira objekat 1. U realnosti, oba objekta kreiraju odgovarajuća polja u prostoru oko sebe.[7]

Treba imati u vidu da razlika izmedju kontaktnih sila i sila čije se delovanje prenosi putem polja nije tako oštra kao što bi moglo da se pomisli na osnovu napred izloženog.

U okviru klasične fizike se srećemo samo sa gravitacionim i elektromagnetnim silama, kao i sa silama trenja i elastičnim silama. Poslednje dve, medjutim imaju veze sa medjumolekularnim interakcijama koje imaju elektromagnetnu prirodu pa se prema tome svode na ovaj tip interagovanja. Gravitacione i elektromagnetne su pak fundamentalne interakcije jer ne mogu da se svedu na neke druge.

Osim ovih dveju fundamentalnih interakcija postoje još dve i to: jaka nuklearna sila koja deluje izmedju subatomskih čestica i slaba nuklearna sila koja se ispoljava prilikom odredjenih radioaktivnih raspada.

[7]Ukoliko se radi o masivnim i naelektrisanim telima onda ona u prostoru oko sebe stvaraju gravitaciono, električno, a ako se kreću, i magnetno polje.

Jake i slabe sile su takozvane kratkodometne (ovo znači da je "lako" osloboditi se njihovog delovanja-treba se samo udaljiti od izvora te sile), ispoljavaju se na rastojanjima manjim od 10^{-12}cm.

Elektromagnetne i gravitacione sile su pak dalekodometne i sa rastojanjem opadaju po zakonu obrnutih kvadrata.

Ako želimo da utvrdimo da li u nekom delu prostora deluje elektromagnetna sila potrebno je u taj deo prostora uneti neko naelektrisanje na osnovu čijeg ponašanja možemo da zaključimo postoje li ili ne ove sile. Takodje je dobro poznato da se one mogu eliminisati takozvanim "Faradejevim kavezom".

Sa gravitacionim silama situacija je malo drugačija - naime one se, u principu, ne mogu poništiti. Medjutim zahvaljujući činjenici da one svim telima saopštavaju jednako ubrzanje, eliminacija gravitacionog polja se može izvršiti lokalno, prelaskom u sistem reference koji "slobodno pada" u gravitacionom polju. Na pojave koje se dešavaju u takvom sistemu reference, homogeno gravitaciono polje ne utiče.

2.2 Prvi Njutnov zakon. Inercijalni sistemi reference

Prvi Njutnov zakon se može formulisati na sledeći način: *Svako telo nalazi se u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja, sve dok ga dejstvo drugih tela ne primora da promeni to stanje.*

Telo koje se nalazi u takvom stanju se naziva slobodnim telom a kretanje slobodnim kretanjem ili kretanjem po inerciji.

Da li u prirodi postoje takva (slobodna) tela? Odgovor glasi **ne**. Slobodna tela su fizička apstrakcija. Možemo medjutim da se zapitamo koji bi to bio kriterijum da utvrdimo da li je telo slobodno ili ne? Odgovor koji se nameće je da je reč o telima koja nisu pod dejstvom sila, tj. koja ne interaguju sa drugim telima.

Iako to do sada nije posebno naglašavano, izbor referentnog sistema u okviru kinematike nije bitan. Drugim rečima svi sistemi reference su kinematički ekvivalentni.

U dinamici to medjutim nije tako. Naime, prvi Njutnov zakon ne važi u svim sistemima reference.[8] Sistemi reference u kojima važi I Njutnov zakon se

[8]Da bi se u ovo uverili dovoljno je da zamislimo dva sistema reference koji se, jedan u

nazivaju inercijalnim.[9] Inercijalnih sistema ima beskonačno mnogo. Bilo koji sistem koji se kreće pravolinijski i ravnomerno u odnosu na neki inercijalni sistem je takodje inercijalan.

2.3 Drugi Njutnov zakon u diferencijalnoj formi

Prvi Njutnov zakon govori o tome šta se dešava sa telom ukoliko na njega ne deluju sile (ili je njihova rezultanta jednaka nuli).[10] Drugi Njutnov zakon daje odgovor na pitanje šta se dešava sa telom ukoliko na njega deluje nenulta rezultujuća sila. Imajući u vidu da se opisivanje kretanje u suštini svodi na odredjivanje zavisnosti koordinata, kojima opisujemo položaj čestice, od vremena, možemo da se zapitamo kako izgleda jednačina čijim rešavanjem se to može dobiti?

Ako materijalna tačka nije izolovana, usled interakcije sa drugim telima njen impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ se menja (u izolovanom sistemu važi zakon održanja impulsa). Kako opisati promenu impulsa u vremenu? Prirodno je za meru te promene uzeti njegov izvod po vremenu $\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Ono što izaziva tu promenu su interakcije posmatranog tela sa okruženjem. Ta interakcija zavisi od položaja posmatranog tela u odnosu na druga a ponekad i od brzine i može da se opiše nekom funkcijom koordinata i brzina (ustvari relativne brzine datog tela i njegovog relativnog položaja u odnosu na druga tela sa kojima interaguje) $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ koju nazivamo silom koja daje meru te interakcije, odnosno izrazom

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{2.1}$$

Ovaj izraz ustvari kazuje da je brzina promene impulsa jednaka sili koja deluje na telo i to predstavlja II Njutnov zakon.[11] Ova jednačina koja predstavlja matematički izraz II Njutnovog zakona se naziva jednačinom kretanja tela ili **osnovnom jednačinom dinamike**. Ukoliko u nju zamenimo izraz za

---

odnosu na drugi, kreću sa nekim ubrzanjem. Ukoliko neko telo u odnosu na jedan od njih miruje, u odnosu na drugi će se očigledno kretati sa nekim ubrzanjem.

[9]Sam zakon se naziva zakonom inercije. Sistemi reference u kojim I Njutnov zakon ne važi se nazivaju neinercijalnim.

[10]Kao što je naglašeno u prethodnom paragrafu ono ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja.

[11]Drugim rečima izvod impulsa materijalne tačke po vremenu je jednak sili koja na nju deluje.

impuls, $\vec{p} = m\vec{v}$, i izvršimo naznačeno diferenciranje, dobija se

$$\frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{2.2}$$

Za tela kod kojih masa ne zavisi od vremena (prvi sabirak jednak nuli),[12] ovaj izraz može da se piše i u sledeća dva vida:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \tag{2.3}$$

odnosno

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{2.4}$$

iz kojih se vidi da je u tom slučaju proizvod mase tela i njegovog ubrzanja jednak rezultujućoj sili.

Osnovni zadatak mehanike se sastoji, kao što je već više puta napomenuto, u odredjivanju konkretnog oblika funkcije $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ i u rešavanju na osnovu toga dobijene diferencijalne jednačine

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}) \tag{2.5}$$

čije rešenje je formalnog oblika

$$\vec{p}(t) = \int \vec{F}(\vec{r}, \vec{v})dt. \tag{2.6}$$

P r i m e r. Oscilovanje harmonijskog klatna (za male elongacije) bez uračunavanja efekta trenja se može opisati sledećim izrazom

$$x(t) = A\cos\frac{2\pi t}{T} = A\cos\omega t. \tag{2.7}$$

Ako se ovaj izraz diferencira jedan puta po vremenu, dobija se brzina klatna a nalaženjem još jednog izvoda, ubrzanje

$$\dot{x} = -\frac{2\pi A}{T}\sin\frac{2\pi t}{T} = -\omega A\sin\omega t,$$

[12] Dve su mogućnosti da ovo bude slučaj i obe će naknadno biti razmotrene - jedna je da se masa tela menja sa vremenom zbog toga što se menja količina supstancije koja čini telo (na primer raketa koja troši gorivo) a druga da se masa tela menja u toku promene njene brzine, što se dešava kada se telo kreće velikom brzinom.

$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi A}{T}\right)^2 \cos\frac{2\pi t}{T} = -\omega^2 A\cos\omega t = -\omega^2 x.$$

Množenjem druge jednačine masom tela m i uvodjenjem oznake $k = m\omega^2$ ona postaje

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{2.8}$$

Uporedjivanjem ovog izraza sa II Njutnovim zakonom se vidi da je sila koja deluje na harmonijsko klatno oblika $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$ i da ona zavisi samo od elongacije,[13] odnosno istezanja opruge harmonijskog klatna.[14]

2.4 Galilejev princip relativnosti

Iz jednačine (2.4) kojom se izražava drugi Njutnov zakon se vidi da ona nema isti vid u svakom sistemu reference iz prostog razloga što ubrzanje nije isto u sistemima reference koji se kreću jedni u odnosu na druge ubrzano. Što se tiče izraza za silu, on bi trebao da ima isti oblik jer zavisi samo od relativnog položaja i relativnih brzina a to su veličine koje ne zavise od izbora sistema reference. U svakom slučaju iz ovoga se vidi da drugi Njutnov zakon zavisi od izbora sistema reference i da sasvim sigurno nije isti u sistemima koji se kreću ubrzano.

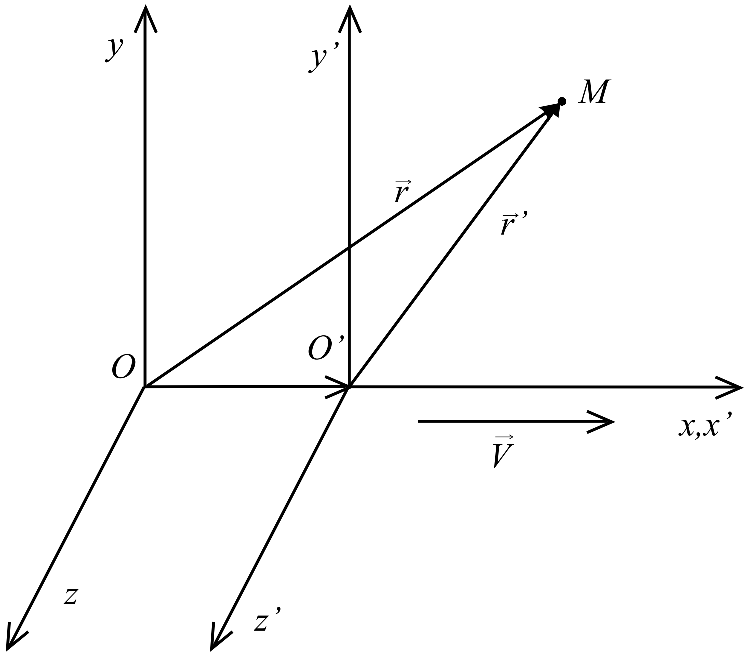
Neka je sa S označen inercijalni sistem reference a sa S' neki drugi inercijalni sistem koji se u odnosu na prvi kreće translatorno konstantnom brzinom $\vec{V}$. Neka je poznato kretanje materijalne tačke u odnosu na prvi sistem. Postavlja se pitanje kako odrediti njeno kretanje u odnosu na drugi sistem kao i da li je ono u nekoj vezi sa kretanjem u odnosu na prvi sistem reference. Zadatak se ustvari sastoji u nalaženju formula koje daju vezu

[13] Pažljivi čitaoci će u ovome prepoznati Hukov zakon koji daje vezu izmedju veličine deformacije i intenziteta primenjene sile koja je izaziva.

[14] Taj rezultat je medjutim približan i važi samo ukoliko istezanje opruge nije veliko (elastična deformacija). Veličina k koja se pojavljuje u ovim izrazima je poznata pod nazivom koeficijent elastičnosti ili krutost opruge. Prostim ogledom se medjutim može utvrdi da se proces ovakvog oscilovanja, u realnim uslovima, sa vremenom gasi usled trenja-otpora vazduha, odnosno sredine u kojoj se vrši oscilovanje. To naravno znači da diferencijalna jednačina kojom opisujemo ovo kretanje nije kompletna i da joj se zapravo mora dodati još i član koji opisuje otpor sredine, odnosno trenje. Tražena jednačina u tom sluv caju ima oblik

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}.$$

izmedju koordinata (x', y', z') koje opisuju kretanje tačke u sistemu S' sa koordinatama (x, y, z) u sistemu S u datom momentu vremena.



Slika 2.3:

Radi jednostavnosti ćemo pretpostaviti da su odgovarajuće koordinatne ose medjusobno paralelne i da su oba koordinatna početka bila na istom mestu, tj. da su se sistemi potpuno poklapali u trenutku $t = 0s$. Osim toga, može se smatrati da je brzina $\vec{V}$ paralelna x osi[15].

Neka se u momentu vremena t čestica našla u položaju označenom sa M. Tada je $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$. Za navedeno vreme, koordinatni početak drugog sistema je iz položaja O prešao u položaj O', pri čemu je $\vec{OO'} = \vec{V}t'$, što dovodi do relacije[16]

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{V}t', \quad t = t', \tag{2.9}$$

gde su $\vec{r}$ i $\vec{r'}$ vektori položaja materijalne tačke u jednom, odnosno drugom

[15]Ove pretpostavke ne umanjuju opštost zaključaka koji će slediti, zato što prelaz na opšte formule može da se izvrši dopunskom translacijom koordinatnog početka (u neku drugu tačku) i rotacijom koordinatnih osa.

[16]Vreme u njutnovoj mehanici je apsolutno.

sistemu reference. Projekcije ovog izraza na koordinatne ose su:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{2.10}$$

Odgovarajuća inverzna transformacija je

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t', \quad t' = t, \tag{2.11}$$

odnosno

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{2.12}$$

Ove formule predstavljaju rešenje postavljenog zadatka. One se zovu Galilejeve transformacije. Formulama za transformaciju prostornih koordinata je pridružena i formula $t = t'$ da bi se eksplicitno istakla činjenica da je u nerelativističkoj kinematici vreme apsolutno, tj. ne transformiše se pri prelasku iz jednog u drugi sistem reference.

Diferenciranje izraza za Galilejeve transformacije jednom po vremenu[17] daje

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V}, \tag{2.13}$$

odnosno

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \tag{2.14}$$

gde je sa $\vec{v}$, označena brzina materijalne tačke u sistemu S, a sa $\vec{v}'$ u sistemu S'. Dobijena formula predstavlja takozvani nerelativistički zakon sabiranja brzina.

Diferenciranjem ovog izraza još jednom po vremenu, imajući u vidu da je brzina kretanja drugog sistema reference konstantna, dobija se

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}, \tag{2.15}$$

odnosno

$$\vec{a} = \vec{a}'. \tag{2.16}$$

Ovde je $\vec{a}$, ubrzanje materijalne tačke u sistemu S, a $\vec{a}'$ u sistemu S' i ove dve veličine su jednake u oba sistema reference. Drgugim rečima ubrzanje je invarijantno u odnosu na Galilejeve transformacije. Kako je izraz za silu isti

[17] Kako je $t = t'$ onda je svejedno da li se izvodi traže po vremenu merenom iz S ili S'.

u oba sistema reference može da se zaključi da je drugi Njutnov zakon ima isti oblik u oba sistema reference, tj.

$$m\vec{a}' = \vec{F}' \tag{2.17}$$

uz uslove da je $\vec{a} = \vec{a}'$ i $\vec{F} = \vec{F}'$. Jednačine koje ostaju neizmenjene pri prelasku od jednog sistema reference na drugi se nazivaju invarijantnim. Na taj način, jednačine Njutnove mehanike su invarijantne u odnosu na Galilejeve transformacije. Iz ovog principa zapravo sledi potpuna ravnopravnost svih inercijalnih sistema reference.

Da li iz ovoga može da se zaključi da jedno isto kretanje izgleda isto u svim sistemima reference? Odgovor je ne! Kretanje tela koja padne sa stola koji se nalazi u vagonu koji se kreće jednoliko je pravolinijsko ako se gleda u odnosu na vagon. To isto kretanje, ukoliko se gleda iz sistema reference koji je vezan za prugu je parabolično iako su Njutnovi zakoni isti u oba sistema reference! Zašto je to tako? Kretanje izgleda različito jer je drugi Njutnov zakon (osnovni zakon dinamike) izražen takozvanom diferencijalnom jednačinom koja sama po sebi nije dovoljna da se kretanje u potpunosti odredi. Da bi kretanje moglo da se odredi na jedinstven način, ovim jednačinama moraju da se dodaju i takozvani početni uslovi, tj. da se odredi početni položaj tela i početna brzina. Ovi podaci služe da se, u toku procesa rešavanja diferencijalnih jednačina, pomoću njih odrede konstante integracije koje se tom prilikom pojavljuju. U navedenom primeru diferencijalna jednačina je ista u oba sistema reference ali su upravo početni uslovi različiti. U sistemu reference vezanom za vagon, telo pada sa stola bez početne brzine, tj. ona je u tom slučaju jednaka nuli. U drugom sistemu reference, telo ima početnu brzinu u horizontalnom pravcu i ona je jednaka brzini vagona.

2.5 Kauzalnost klasične mehanike

Vektorska jednačina kretanja, kojom se izražava II Njutnov zakon za materijalnu tačku čija masa se ne menja sa vremenom (2.4), se može zapisati u koordinatnoj formi kao

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z, \tag{2.18}$$

što ustvari predstavlja projekciju polazne jednačine $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ na koordinatne ose. Na taj način je data jednačina (2.4) ekvivalentna trima skalarnim diferencijalnimi jednačinama (2.18). Svaka od njih je drugog reda.[18] Da bi se lakše proanalazirala situacija i izvukli neki dovoljno opšti zaključi pretpostavimo da na česticu, koja može da se kreće samo po pravoj liniji deluje duž tog pravca sila f konstantna i po intenzitetu i po pravcu. Neka se čestica u početnom vremenskom trenutku nalazila u tači x_i i neka je imala početnu brzinu v_i. Umesto tri skalarne diferencijalne jednačine (2.18) za opisivanje kretanja čestice nam je sada dovoljna samo prva (ukoliko x osu orijentišemo u smeru kretanja čestice)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f. \tag{2.19}$$

Nakon prve integracije po vremenu se dobija

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{f}{m}t + C_1 \tag{2.20}$$

a nakon druge

$$x = \frac{f}{2m}t^2 + C_1 t + C_2, \tag{2.21}$$

gde su C_1 i C_2 konstante integracije (lako je proveriti, neposredno zamenom, da je poslednja relacija najopštije rešenje polazne diferencijalne jednačine-opšte rešenje). Na ovom mestu valja uočiti da je broj konstanti koje se pojavljuju u opštem rešenju diferencijalne jednačine jednak njenom redu. Medjutim, da bi rešeje diferencijalne jednačine opisivalo konkretno kretanje kod koga je $x(0) = x_i$ i $v(0) = v_i$, konstante integracije moraju da se odrede upravo iz tih uslova, što dovodi do dveju algebarskih jednačina (u ovom slučaju trivijalnih) po nepoznatim konstantama

$$C_2 = v_i, C_1 = x_i. \tag{2.22}$$

Imajući u vidu ovaj rezultat, izrazi za koordinatu i brzinu čestice u vremenskom trenutku t (2.21) i (2.20) postaju

$$x = \frac{f}{2m}t^2 + v_i t + x_i, \tag{2.23}$$

odnosno

$$v = \frac{f}{m}t + v_i. \tag{2.24}$$

[18]Red diferencijalne jednačine je odredjen redom najvišeg izvoda koji se pojavljuje u njoj

Jednačina (2.21) je takozvano partikularno rešenje polazne diferencijalne jednačine (ovo znači da je ta jednačina, za date početne uslove, jednoznačno rešena). Na ovaj način je rešavanjem polazne diferencijalne jednačine, za date početne uslove, kretanje čestice potpuno odredjeno. U ovom iskazu se ogleda kauzalnost[19] klasične mehanike.

Uopštenje na tri dimenzije.

U ovom slučaju se dobijaju, kao što smo videli, iz jedne vektorske diferencijalne jednačine drugog reda (2.4) tri skalarne diferencijalne jednačine (2.18) takodje drugog reda za čije jednoznačno rešavanje (dobijanje partikularnog rešenja) je potrebno šest poětnih uslova (tri početne koordinate (x_i, y_i, z_i) i tri komponente početne brzine (v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})).

Uopštenje na sistem od N tela

U ovom slučaju imamo N polaznih vektorskih diferencijalnih jednačina drugog reda što dovodi, nakon projektovanje na koordinatne ose do $3N$ skalarnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Njihovim rešavanjem se dobija opšte rešenje koje sadrži $6N$ integracionih konstanti koje mogu da se odrede jednoznačno iz isto toliko početnih uslova kojima je zadat početni položaj tela i njegova početna brzins.

2.5.1 Rešavanje osnovne jednačine Njutnove dinamike

U cilju prostijeg zapisivanja ograničimo se u ovom delu na kretanje materijalne tačke u jednoj dimenziji, i recimo da je duž linije kretanja postavljena x osa. Videli smo do sada da se odredjivanje konačnih jednačina kretanja, odnosno zavisnosti koordinata koje opisuju položaj tela svodi na rešavanje diferencijalne jednačine tipa $m\ddot{x} = F$. Kako izraz za silu može da zavisi od položaja tela, njegove (relativne) brzine u odnosu na telo sa kojim interaguje i od vremena, potrebno je rešiti jednačinu opšteg oblika

$$m\ddot{x} = F(x, v, t). \tag{2.25}$$

Uopšteno govoreći ova jednačina ne može uvek biti rešena egzaktno po $x(t)$,[20] ali je moguće dobiti njeno rešenje u nekim posebnim slučajevima. Zapravo,

[19] Uzročno-posledična povezanost ...

[20] Precizan iskaz je da ona ne može uvek da se reši analitički ali je uvek moguće rešiti je numerički sa željenom tačnošću.

skoro sva kretanja koja inače razmatramo u mehanici se mogu svesti na tri specijalna slučaja a to su slučajevi u kojima je sila F funkcija samo vremena t, prostorne koordinate x ili pak brzine tela v.

• Sila je funkcija samo vremena: $F = F(t)$.

Kako je $a = d^2x/dt^2$, potrebno je dva puta integraliti $a = F/m$ da bi se dobilo $x(t)$. Za početak se $F = ma$ piše kao

$$m\frac{dv}{dt} = F(t), \tag{2.26}$$

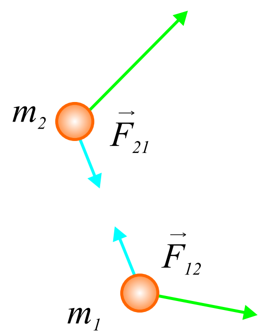
pa se onda razdvajaju promenljive i vrši integracija obeju strana jednačine

2.6 Zakon održanja impulsa i III Njutnov zakon

Razmotrimo zatvoren sistem, koji se sastoji od dve interagujuće materijalne tačke. Kao što je dobro poznato, u tom slučaju važi zakon održanja impulsa, oblika

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const, \tag{2.27}$$

koji govori o tome da se ukupan impuls takvog sistema ne menja sa vre-



Slika 2.4:

menom. Diferenciranjem ove relacije jedan puta po vremenu, dobija se

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0, \tag{2.28}$$

što na osnovu II Njutnovog zakona (2.1) daje

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0, \tag{2.29}$$

odnosno

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.30}$$

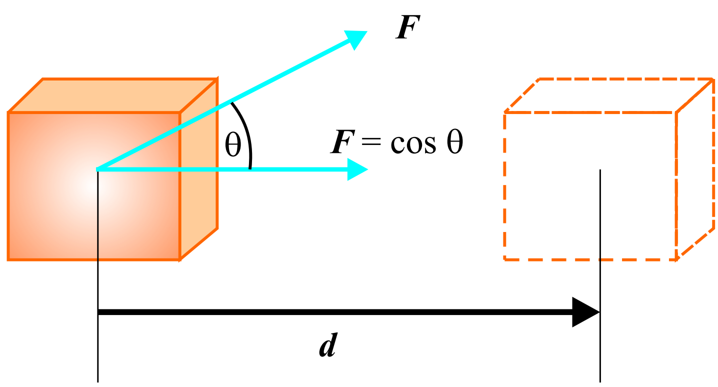
U ovim izrazima su $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$ sile kojima materijalne tačke deluju jedna na drugu.[21] Formula (2.29) i (2.30) predstavljaju matematički iskaz trećeg Njutnovog zakona[22]: *Sile interakcije dveju materijalnih tačaka su jednake po intenzitetu, deluju duž pravca koji ih spaja i suprotnog su smera.*

2.7 Rad

U ovom poglavlju će biti prvo uveden koncept rada izvršenog od strane neke sile na nekom telu.

Skoro sve fizičke veličine koje su do sada pomenute (brzina, ubrznje, sila, ...) imaju isti smisao u fizici kao i u svakodnevnom životu. Ovde će biti obradjen *rad* koji u fizici ima smisao koji je ponekad različit od onog u svakodnevnom životu.

2.7.1 Rad konstantne sile



Slika 2.5:

[21]Ovo mogu biti na primer sile koje se javljaju usled gravitacione interakcije ove dve čestice.

[22]Treći Njutnov zakon ne važi uvek. U potpunosti važi samo u slučajevima kontaktnih interakcija, tj. kada se tela koja interaguju nalaze u neposrednom dodiru, kao i u slučaju da su tela koja interaguju nalaze na nekom rastojanju ali u *stanju mirovanja*.

Da bi razumeli na šta se misli pod pojmom *rad* u fizici, proanalizirajmo situaciju u kojoj se silama jednakog intenziteta pod različitim uglovima deluje na telo u pokušaju da se ono pomeri. Ukoliko nas zanima koliko je sila efikasna u pomeranju tela jasno je da moramo da, osim intenziteta, uzmemo u obzir i pravac delovanja sile. Lako se takodje dolazi do zaključiti da je za pomeranje tela na dužem putu potrebno izvršiti veći *rad*. Sledeća definicija ove fizičke veličine je u skladu sa navedenom analizom: *Rad A izvršen na objektu, od strane kostantne sile je jednak proizvodu komponente sile u pravcu kretanja tela i rastojanja na koje je sila pomerila telo*

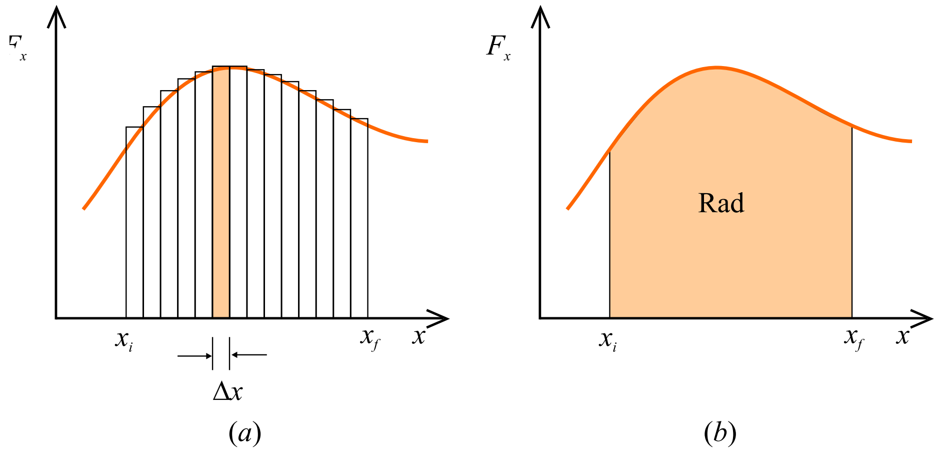
$$A = Fd\cos\theta. \tag{2.31}$$

Razlika izmedju navedeno i intuitivnog shvatanja rada se lako uočava ukoliko proanaliziramo izvršeni rad prilikom držanja u rukama nekog teškog predmeta odredjeno vreme. Na kraju datog vremenskog intervala prirodno će se javiti osećaj umora u mišićima iako predmet nije pomeren.U skladu sa gore navednom definicijom rada nikakav rad medjutim nije izvršen. Mi smo delovali nekom silom na dati predmet ali kako on nije pomeren sa mesta na kome se nalazio na početku posmatranja, rad nije izvršen.[23]

Na osnovu jednačine (2.31), rad koji se izvrši nad telom je jednak nuli kada sila deluje pod pravim uglom u odnosu na pravac duž koga telo može da se pomera.[24] Takodje se može zaključiti da znak rada zavisi od ugla izmedju pomeraja[25] $\vec{d}$ i sile $\vec{F}$. Tako je rad sile koja podiže telo u vis, u polju zemljine teže, pozitivan jer su smer sile i smer pomeraja isti. Ukoliko nas u ovom istom primeru kretanja zanima rad gravitacione sile, lako se zaključuje da je on negativna jer je sila suprotno usmerena od pomeraja. Na kraju zakljčimo da rad konstante sile može da se, na osnovu definicije skalarnog proizvoda, zapiše kao

$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}, \tag{2.32}$$

gde je sa $\Delta\vec{r}$ označen vektor pomeraja $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.



Slika 2.6:

2.7.2 Rad sile koja nije konstantna

Posmatrajmo česticu koja se pomera duž x ose pod dejtvom sile koja nije konstantna. Neka se čestica pri tome pomera u smeru porasta koordinate od $x = x_i$ do $x = x_f$. U ovom slučaju rad ne može da se piže da se računa na osnovu formule $A = Fd\cos\theta$ jer se postavlja pitanje koju vrednost uzeti za silu obzirom da ona nije kontantna već se menja. Medjutim, može da se postupi slično kao u situaciji kada je tražen izraz za predjeni put kod kretanja koje se ne odvija konstantnom brzinom. Naime, posmatra se mali pomeraj Δx unutar koga se sila može smatrati konstantnom pa je rad izvršen na tom pomeranju

$$\Delta A = F\Delta x, \tag{2.33}$$

što je jednako površini osenčenog dela na slici 2.6(a). Ako se pretpostavi da je kriva zavisnosti sile od predjenog puta podeljena na veliki broj takvih intervala, ukupan rad će približno biti jednak zbiru sabiraka oblika (2.33)

$$A \approx \sum_{x_i}^{x_f} F\Delta x. \tag{2.34}$$

[23]Ustvari, rad se ipak vrši dok se predmet drži u rukama obzirom da se mišići naizmenično kontrahuju i opuštaju i na taj način deluju na naše ruke. Na taj način je rad izvršen nad našim telom a ne nad predmetom.

[24]Tada je ugao $\theta = \pi/2$.

[25]Prisetimo se ovde da je vektor pomeraja $\Delta\vec{r}$ koji je ovde označen sa $\vec{d}$, jednak $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Ako sada pretpostavimo da dimenzija intervala Δx teži nuli, odnosno ukoliko broj intervala teži beskonačnosti, vrednost sume (2.34) teži vrednosti koja je jednaka površini ispod krive zavisnosti sile F od predjenog puta, odnosno integralu (2.33)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F dx. \tag{2.35}$$

Kako je rad sile na pomeranju od x_i do x_f jednak ovoj površini, može se pisati

$$A = \int_{x_i}^{x_f} F dx. \tag{2.36}$$

Ukoliko posmatrana sila deluje pod nekim uglom u odnosu na pomeranje (koje se vrši duž x ose) potrebno je u izraz staviti projekciju sile na x osu, odnosno $F_x = F \cos\theta$ (θ je ugao izmedju pravca sile i pravca duž koga se vrši pomeranje), pa je rad

$$A = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} F \cos\theta dx. \tag{2.37}$$

Prirodna generalizacija dosadašnjih izraza za rad, koja bi se odnosila na rad sile koja nije konstanta na pomeranju tela od tačke odredjene vektorom položaja $\vec{r}_i$ do tačke odredjene vektorom $\vec{r}_f$ je

$$A = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{2.38}$$

U skladu sa time se elementarni rad (rad na elementarnom pomeranju tela $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$, definiše kao

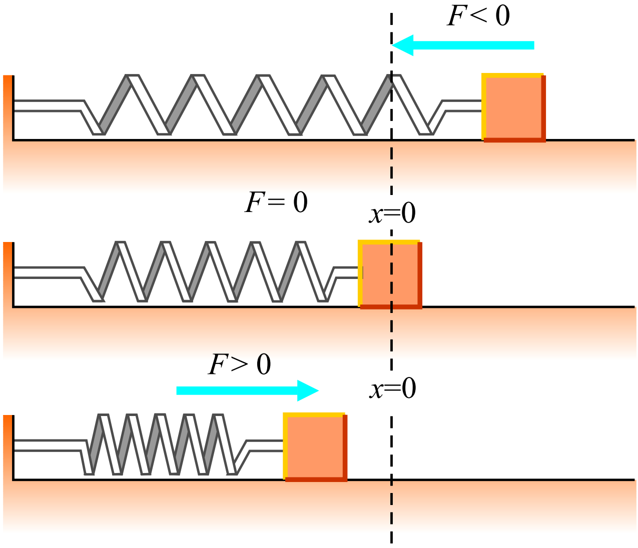
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{2.39}$$

2.7.3 Rad elastične sile

Primer sile koja nije konstantna je sila koja se javlja pri elastičnom istezanju opruge (za relativno mala istezanja u odnosu na situaciju kada je opruga relaksirana). Kako je navedeno ranije ta sila, za slučaj kada se opruga isteže i sabija duž x ose je oblika $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$, odnosno uvek je usmerena ka ravnotežnom položaju ($x = 0$).

Kako je elementaran rad ove sile

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -kxdx, \tag{2.40}$$



Slika 2.7:

ukupna rad na pomeranju tela zakačenog za kraj opruge (Slika 2.7) od tačke x_i u tačku x_f je[26]

$$A = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2. \tag{2.41}$$

Ukoliko je finalna tačka koordinatni početak, koji je smešten u tačku u kojoj je opruga relaksirana, rad je jednak $A = \frac{1}{2}kx_i^2$. Važno je primetiti da rad ove sile zavisi samo od početne i krajnje tačke u kojima se telo nalazi kao i to da je jednak nuli u slučaju kada se one poklapaju.

2.8 Snaga

Zamislimo da imamo dva automobila jednakih masa ali sa različitim motorima, jedan sa slabijim a drugi sa jačim motorom. Prvo ćemo jednim a onda drugim automobilom da se popnemo na brdo (smatramo da su i polazna i krajnja taķa putanje iste.). Potpuno je očigledno da će automobila će izvršiti isti rad nasuprot gravitacionoj sili ali će onom koji ima jači motor za to trebati kraće vreme. Iz ovog primera je jasno da je sa praktične strane

[26]Uz korišćenje integrala $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ za $n = 1$.

bitno da znamo ne samo rad koji će izvršiti neka mašina već i koliko brzo će ga uraditi. Brzina vršenja rada je nova fizička veličina koja se naziva **snaga**.

Ukoliko neka spoljašnja sila, za vreme Δt izvrši rad A, njena srednja snaga je

$$P_{sr} = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \tag{2.42}$$

Na slična način kao što smo dolazili do trenutne brzine i ubrzanja, možemo da definišemo **trenutnu snagu** P kao graničnu vrednost

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}, \tag{2.43}$$

gde je sa dA označeno beskonačno mali prira vstaj rada koji se dešava za vreme dt. Koristeći izraz (2.39), izraz za trenutnu snagu postaje

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \tag{2.44}$$

Jedinica za snagu u SI je džul u sekundi (J/s), odnosno *wat* (W).[27]

2.9 Energija

Energija je jedna od najvažnijih fizičkih veličina i pojmova u fizici i tehnici, zbog svog izuzetnog značaja za dosadašnji i budući razvoj i opstanak ljudskog roda. U svakodnevnom životu o energiji obično razmišljamo kao o gorivu koje koristimo za transport i zagrevanje, o električnoj energiji koju koristimo za osvetljavanje i pokretanje mašina, o energiji koju unesemo u organizam kroz hranu, ... Energija ima jako puno oblika u kojima se pojavljuje a uključena je praktično u sve procese u prirodi i našem okruv zenju. Ona može da se prenosi sa tela na telo, da menja oblike, medjutim, ne može da se pojavi niotkuda niti da nestane bez traga. U tom smislu, ona predstavlja jednu od fizičkih veličina koje se očuvavaju (konzervišu) u svim procesima.[28]. Bez obzira na otkrića raznih oblika energije, eksperimenti su uvek pokazivali da zakon očuvanja ostajen na snazi. Konceptualno veoma bitan doprinos

[27]Stara jedinica za snagu je konjska snaga (KS) čija je veza sa sadašnjom jedinicom 1 KS=746 W.

[28]Ova činjenica je zasnovana na eksperimentima a prvi koji je ukazao na nju je bio engleski biolog Majer na osnovu proučavanja toplotnog bilansa živih organizama

proučavanju raznih oblika energije je dao i Albert Ajnštajn ukazujući na vezu mase i energije,[29] odnosno na to da je i masa jedan od oblika energije.

Na osnovu ovoga je jasno da ne postoji dovoljno prosta, a istovremeno dovoljno precizna, definicija energije. Pre svega se moraju imati u vidu njene osnovne osobine a to su da ima razne oblike kao i to da se očuvava u procesima u prirodi. Energiju bi u principu mogli da definišemo kao sposobnost tela da izvrši rad, pri čemu moramo biti oprezni pri ovakvom shvatanju energije, jer moramo imati u vidu da ponekad nije moguće iskoristiti svu energiju koju ima telo svrhu vršenja rada.

2.9.1 Kinetička energija

Tela pod dejstvom sila menjaju svoju brzinu pa se može reći da je rad sile vezan upravo za promenu brzine. Ta veza se može izraziti preko fizičke veličine koja se zove kinetička energija tela.

U cilju lakšeg dobijanja rezutata[30] pretpostavimo da se telo kreće u jednoj dimenziji (duž x ose) i da na njega deluje rezultujuća sila F_x. Uzimajući u obzir drugi Njtunov zakon u obliku $ma_x = F_x$, može se pisati

$$A = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} m a_x dx. \tag{2.45}$$

Ukoliko se rezultanta F_x menja duž x ose, menja se i ubrzanje te integraciju u gornjem izrazu nije moguće uraditi u opštem slučaju, te ćemo pribeći sledećem nizu transformacija

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}. \tag{2.46}$$

Zamena ovog izraza za ubrzanje u prethodni izraz za rad dovodi do

$$A = \int_{x_i}^{x_f} mv\frac{dv}{dx}dx = \int_{v_i}^{v_f} mv dv = \int_{v_i}^{v_f} d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \tag{2.47}$$

odnosno

$$A = \frac{mv^2}{2}\Big|_{v_i}^{v_f} = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}. \tag{2.48}$$

Veličina $\frac{1}{2}mv^2$ predstavlja energiju koju čestica poseduje usled toga što se kreće i koja se zove **kinetička energija**. Na osnovu poslednje jednačine se

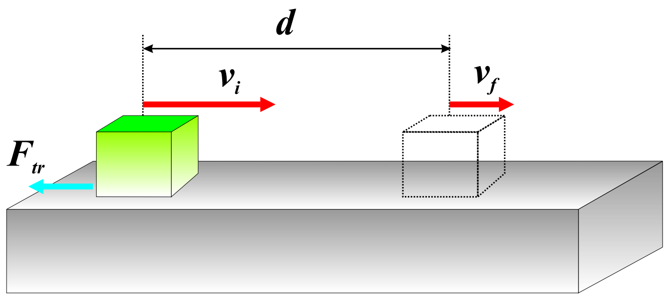
[29] Ova veza je data, verovatno široj javnosti, najpoznatijom relacijom iz fizike, $E = mc^2$.

[30] Koji je kao što ćemo kasnije videti lako generalizovati.

može reći da je ukupan rad sila koje deluju na česticu jednak promeni njene kinetičke energije.

Promena kinetičke energije usled delovanja sile trenja

Pretpostavimo da se telo kreće po nekoj horizontalnoj površini koja je takva da ne može da se zanemari postojanje trenja izmedju tela i podloge.



Slika 2.8: Usporavanje tela koje klizi po horizontalnoj površi izazvano gubitkom kineti'čke energije.

U tom slučaju, po vetna kinetička energija tela se smanjuje sa vremenom jer stalno mora da se vrši rad na savladavanju sile trenja koja ima smer suprotan smeru kretanja tela. Pretpostavimo d a je u toku nekog intervala vremena, telo prešlo rastojanje d (Slika 2.8) pri čemu je na početku kretanja imalo brzinu $\vec{v}_i$ a na kraju $\vec{v}_f$. Sila koja izaziva usporavanje tela je sila trenja $\vec{F}_{tr}$ koja ima smer suprotan od smera kretanja tela. Obzirom na to da je smer pomeraja suprotan, rad koji je izvršen na savladavanju nje je

$$A = \vec{F}_{tr} \cdot \vec{d} = -F_{tr} d, \tag{2.49}$$

što mora da bude, prema (2.48), jednako promeni kinetičke energije, odnosno

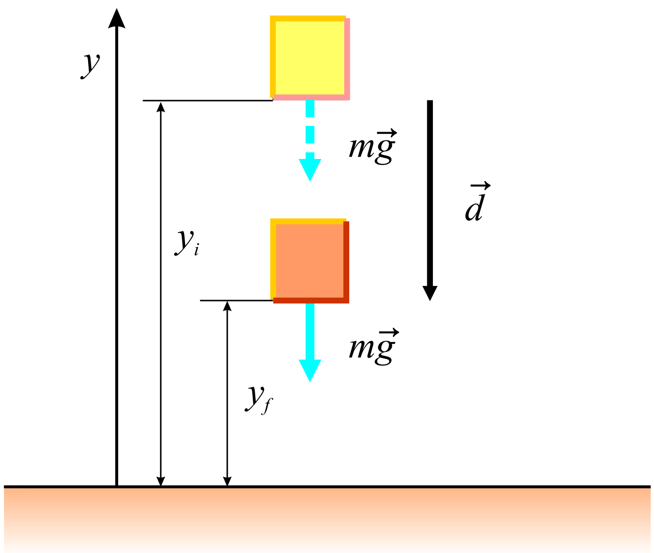
$$-F_{tr} d = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}. \tag{2.50}$$

2.9.2 Potencijalna energija

U prethodnom poglavlju je uvedena kinetička energija, kao energija koju telo poseduje usled svog kretanja. U ovome će biti uvedena druga forma energije pod nazivom potencijalna energija koja je u vezi sa relativnim položajem tela koja interaguju, odnosno sa položajem tela u polju neke sile. Ona se obično označava sa E_p ili sa U, a kako je vezana za relativan položaj tela koja čine sistem, svaka promena položaja tela koja čine sistem, izaziva i promenu potencijalne energije. Potencijalna energija može biti shvaćena kao energija koja je akumulirana i koja može ili da predje u kinetičku ili da se na osnovu nje izvrši neki rad.

Gravitaciona potencijalna energija

Kada neko telo pada ka Zemlji, to se dešava usled toga što Zemlja na njega deluje silom $m\vec{g}$ (za male visine na kojima se može smatrati da je polje Zemljine teže homogeno) u smeru koji se poklapa sa smerom kretanja tela. Gravitaciona sila vrši rad na telu što izaziva povećanje njegove kinetičke energije.



Slika 2.9: Rad sile pri pomeranju kocke (slobodnom padu) u polju Zemljine težena sa visine y_i na y_f.

Zamislimo da je neka kocka, mase m puštena da pada (iz stanja mirovanja). Padajući njoj raste brzina a time i kinetička energija. Sistem kocka-Zemlja poseduje potencijalnu energiju na kojoj god da se visini kocka nalazi iznad Zemlje. Prilikom pada ta potencijalna energija se konvertuje u kinetičku. Pretpostavimo da je kocka puštena da pada sa visine y_i kao što je to pokazano na slici (2.9). Ako zanemarimo otpor vazduha, jedina sila koja deluje na kocku prilikom njenog pada je Zemljina gravitaciona sila, jednaka $m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$. Rad koji ona izvrši prilikom pomeraja $\vec{d} = (y_f - y_i)\vec{e}_y$ je

$$A_g = m\vec{g} \cdot \vec{d} = (-mg\vec{e}_y) \cdot (y_f - y_i)\vec{e}_y = mgy_i - mgy_f. \tag{2.51}$$

Rad gravitacione sile dakle, zavisi samo od izmene y koordinate tela, odnosno od promene u visini tela[31]. Veličina $U(y) = mgy$ se naziva gravitacionom potencijalnom energijom posmatranog sistema, a rad je

$$A = U_i - U_f = -(U_f - U_i) = -\Delta U. \tag{2.52}$$

Može se reći da je rad gravitacione sile jednak negativnoj promeni u gravitacionoj potencijalnoj energiji izmedju početnog i konačnog položaja tela.

Potencijalna energija kod elastičnih deformacija

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od kocke i opruge (Slika 2.10). Sila kojom opruga deluje na kocku je $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$. Kao što je već izračunato, rad koji izvrši opruga na kocku pomerajući je iz početnog položaja x_i u finalni x_f, je

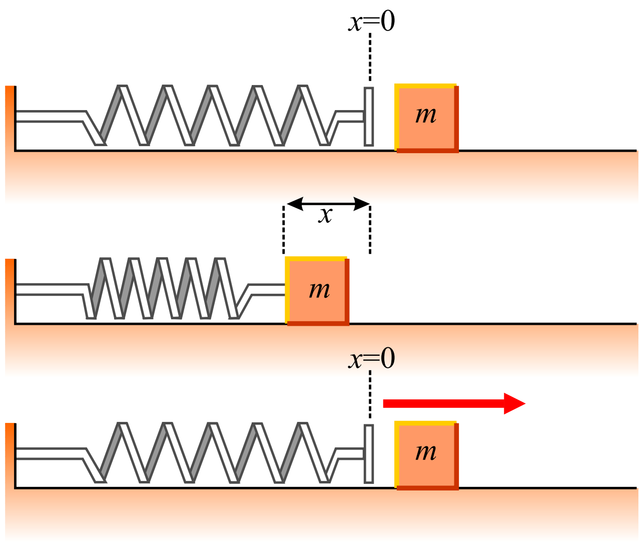
$$A = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2}. \tag{2.53}$$

Potencijalna energija elastične opruge se, u skladu sa time, može uvesti kao

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \tag{2.54}$$

Važno je primetiti da, kao i u prethodnom slučaju, rad elastične sile zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja tela na kojem se vrši, kao i da je za "zatvorenu putanju" (kada se poklope početna i krajnji položaj) jednak nuli. Potencijalna energija elastične deformacije se može shvatiti kao energija koja je akumulirana u deformisanoj opruzi (bilo da je sabijena ili istegnuta). Prvi deo slike 2.10 predstavlja nedeformisanu oprugu na podlozi po kojoj kocka može da klizi bez trenja. Na drugom delu je opruga deformisana tako što je pritisnuta kockom i na taj način sabijena za x. Na trećem delu je prikazano kretanje kocke koje je izazvano delovanjem elastične sile opruge na nju. Potencijalna energija sabijene opruge je prešla u kinetičku energiju kocke.

[31] Ukoliko kretanje ima i x komponentu, tada je pomeraj $\vec{d} = (x_f - x_i)\vec{e}_x + (y_f - y_i)\vec{e}_y$ ali rad i dalje ima istu vrednost obzirom da je $-mg\vec{e}_y \cdot (x_f - x_i)\vec{e}_x = 0$.



Slika 2.10: Potencijalna energija sabijene opruge prelazi u kinetičku energiju kocke.

2.9.3 Konzervativne i nekonzervativne sile

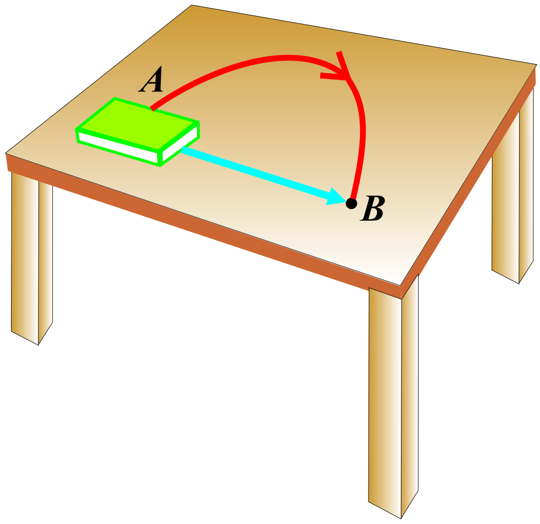
Rad gravitacione sile ne zavisi od toga da li telo slobodno pada u polju Zemljine teže ili klizi niz strmu ravan, već zavisi samo od promene položaja tela po visini. Sa druge strane, gubitak energije usled trenja, u skladu sa (2.50), **zavisi** od puta koji je telo prešlo. Drugim rečima konkretna putanja je nebitna kada je reč o radu u polju Zemljine teže (taj rad kao što smo videli zavisi samo od kranje i početne tačke putanje, tj. od njihove "visinske" razlike), dok je veoma bitna kada je reč o gubitku energije usled postojanja sile trenja. Upravo ova razlika služi za klasifikovanje sila u dve grupe: konzervativne i nekonzervativne sile.

Konzervativne sile

Konzervativne sile imaju dve važne karakteristike

1. Njihov rad je nezavisan od oblika putanje po kojoj se čestica kreće od početne do kranjne tačke putanje.

2. Rad koji izvrši jedna konzervativna sila na putu koji je zatvoren (početna i kranja tačka putanje su iste) je jednak nuli.



Slika 2.11: Gubitak kinetičke energije tela usled trenja zavisi od puta kojim se telo kreće.

Kao što je lako primetiti, gravitaciona i sila elastičnosti su primeri konzervativnih sila. Obema silam smo pridružili potencijalne energije a rad koji one vrše na nekom telu može da se zapiše kao

$$A = U_i - U_f = -\Delta U, \tag{2.55}$$

ili ako je reč o diferencijalnim promena energije i elementarnom radu

$$dA = -dU. \tag{2.56}$$

Nekonzervativne sile

2.9.4 Konzervativne sile i potencijalna energija

Pretpostavimo da se čestica kreće duž x ose i neka neka konzervativna sila deluje na česticu deluje komponentom F_x na nju. U prethodnim poglavljima smo videli kako se dolazi do promene potencijalne energije u slučaju da je poznata sila. Sada ćemo videti kako se nalazi sila za slučaj kada je poznata potencijalna energija.

Kao što je poznato, rad konzervativne sile na pomeranju Δx jednak je negativnoj promeni potencijalne energije, odnosno $\Delta A = F_x \Delta x = -\Delta U$.

Ukoliko se pod dejstvom sile čestica pomeri za infinitezimalno rastojanje dx, infinitezimalna promena u potencijalnoj energiji je

$$dU = -F_x dx. \tag{2.57}$$

Odavde se može dobiti da je, u slučaju kretanja u jednoj dimenziji, veza konzervativne sile i potencijalne energije zadata relacijom

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \tag{2.58}$$

Na osnovu ovoga je, u ovom slučaju[32] sila, kao vektorska veličina zadata sa

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\vec{e}_x. \tag{2.59}$$

Ovo je veoma važan rezultat koji govori da je **konzervativna sila koja deluje na telo jednaka negativnom izvodu potencijalne energije sistema u odnosu na prostornu koordinatu koju koristimo za opisivanje položaja tela**.

Lako je pokazati da u dva primera konzervativnih sila koje smo ranije razmatrali važi ovo tvrdjenje. U slučaju deformisane opruge je potencijalna energija $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, pa je sila

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}kx^2) = -kx. \tag{2.60}$$

U slučaju gravitacione potencijalne energije $U(y) = mgy$, se za silu dobija

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}(mgy) = -mg, \tag{2.61}$$

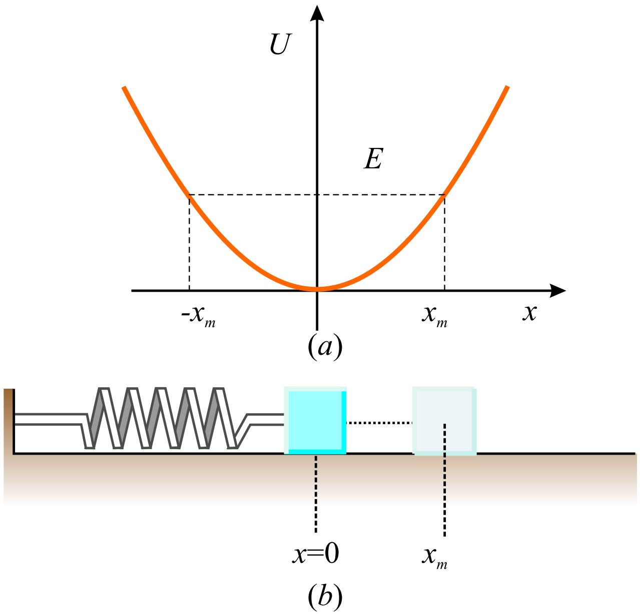
gde se podrazumeva da je y osa usmerena vertikalno naviše.

Može se zaključiti da je potencijalna energija veoma važna funkcija, obzirom da se iz nje (ako je poznata) može lako dobiti izraz za silu. Takodje može da se uoči da je potencijalna energija odredjena do na konstantan sabirak, što se vidi iz izraza (2.58) jer je sila ista i ukoliko se u tom izrazu traži izvod od $U + C$, gde je $C = const$.

[32] U tri dimenzije, izraz za silu je $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$, gde je $\frac{\partial U}{\partial x}$ takozvani parcijalni izvod.

2.9.5 Energijski dijagrami i stabilnost sistema

Kretanje sistema može veoma lepo da se razume kvalitativno (bez konkretnih numeričkih izračunavanja) analiziranjem grafika potencijalne energije u funkciji rastojanja izmedu objekata koji čine sistem.



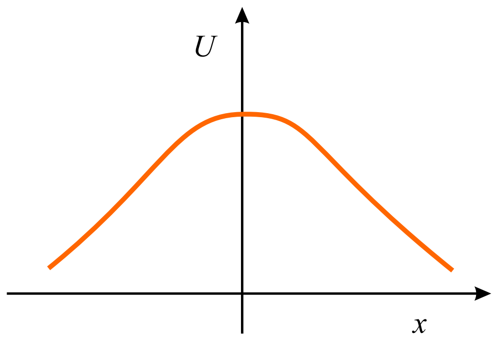
Slika 2.12: (a) Grafik potencijalne energija sistema telo-opruga u zavisnosti od deformacije opruge. (b) Telo osciluje izmedju amplitudnih položaja $\pm x_m$.

Razmotrimo potencijalnu energiju sistema kocka-opruga, oblika $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (Slika 2.12). Sila kojom elastična opruga deluje na telo je

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx. \tag{2.62}$$

Kada se telo nalazi u stanju mirovanja ($x = 0$), tada je $F = 0$, ostaje u njemu ukoliko nema spoljašnjih sila koje bi ga izvele iz tog položaja. Ako spoljašnja sila rastegne oprugu, otklon ela iz ravnotežnog položaja x je pozitivan, $\frac{dU}{dx}$ je takodje pozitivno (tangenta na krivu u toj tački zaklapa oštar ugao sa x osom), dok je sila suprotno usmerena od istezanja, dakle negativna i telo se ubrzava ka položaju odredjenom sa $x = 0$. Ukoliko spoljašnja sila sabije oprugu, x je negativno, $\frac{dU}{dx}$ je negativno (tangenta na krivu u toj tački zaklapa tup ugao sa x osom), sila je pozitivna, i opet usmerena ka položaju $x = 0$.

Iz ove analize se vidi da je stanje odredjeno sa $x = 0$ ovog sistema stanje **stabilne ravnoteže**. To se vidi na osnovu toga što bilo kakvo pomeranje tela iz tog položaja rezultira pojavom sile koja je uvek usmerena ka njemu. Uopšteno govoreći položaj stabilne ravnoteže odgovara tački u kojoj funkcija $U(x)$ ima minimum.



Slika 2.13: Grafik zavisnosti $U(x)$
čestice koja u $x = 0$ ima položaj nestabilne ravnoteže.

Razmotrimo sada česticu koja se kreće duž x ose pod dejstvom konzervativne sile F_x, gde je grafik zavisnosti U od x predstavljen na slici 2.13. Za $x = 0$ je sila $F_X = 0$ i telo je u ravnoteži u tom položaju. Medjutim, to je položaj **nestabilne/labilne ravnoteže** iz sledećeg razloga: Pretpostavimo da se čestica pomeri na desno ($x > 0$). Kako je u toj oblasti prvi izvod $\frac{dU}{dx} < 0$, sila koja je $F_x = -\frac{dU}{dx}$ je stoga pozitivna i čestica se ubrzava od koordinatnog početka. Ako se umesto toga čestica pomeri na levo ($x < 0$), sila je negativna jer je izvod $\frac{dU}{dx}$ pozitivan ičestica se opet ubrzava u suprotnom smeru od koordinatnog početka. Na osnovu ovoga se vidi da je položaj $x = 0$ položaj nestabilne ravnoteže jer ma kako mali otklon, bilo levo bilo desno, od njega, kao posledicu ima pojavu sile koja teži da telo još više otkloni od položaja ravnoteže. Zapravo sile deluju na telo tako da se ono kreće ka položaju gde je potencijalna energija manja. Mov ze da se zaključi da je **položaj nestabilne ravnoteže odgovara tački u kojoj funkcija** $U(x)$ **ima maksimalnu vrednost**.

Na kraju, može da se desi da je U konstanto u nekoj oblasti, te je stoga $F_x = 0$. To odgovara položaju **indiferentne ravnoteže**. Mali pomeraj iz takvog položaja nema za posledicu ni pojavu sila koje bi vratile telo u

ravnotežni položaj niti onih koje bi ga još više udaljile.[33]
Primer 1 Potencijalna energija koja odgovara interakciji dva neutralna atoma u molekulu može biti predstavljena Lennard-Jones potencijalom

$$U(x) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right] \tag{2.63}$$

gde je x rastojanje izmedju atoma. Funkcija $U(x)$ sadrži dva parametra σ i ϵ koji se odredjuju eksperimentalno. Tipične vrednosti za interakciju dva atoma u molekulu su $\sigma = 0,263$ nm i $\epsilon = 1,51 \times 10^{-22}$ J. (a) Odrediti najeverovantije rastojanje izmedju molekula, (b) Odrediti silu F_x kojom jedan atom deluje na drugi u molekulu, (c) Skicirati potencijalnu energiju i silu.

⋄ (a) Atomi se nalaze na najverovatnijem rastojanju onda kada su u stabilnoj ravnoteži, a to se dešava kada potencijalna energija ima minimum. Tačka minimuma će se dobiti kada potražimo prvi izvod i izjednačimo ga sa nulom:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\epsilon\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right] = 4\epsilon\left[\frac{-12\sigma^{12}}{x^{13}} - \frac{-6\sigma^{6}}{x^{7}}\right] = 0. \tag{2.64}$$

Rešavanje po x daje za traženo ravnotežno rastojanje izmedju atoma u molekulu $x = \sigma(6)^{1/6} = 2,95 \times 10^{-10}$ m. (b) Pošto atomi formiraju molekul, tražena sila mora da bude privlačna kada se atomi udalje od ravnotežnog položaja a odbojna kada se to rastojanje smanji. Ukoliko ne bi bilo tako, molekul bi se ili sam od sebe dezintegrisao ili bi pak atomi pali jedni na druge. Ovo znači da u tački stabilne ravoteže sila mora da promeni znak, slično kao sila kod elastične opruge. Sila je prema izrazu za potencijal

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = -4\epsilon\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right] = 4\epsilon\left[\frac{12\sigma^{12}}{x^{13}} - \frac{6\sigma^{6}}{x^{7}}\right]. \tag{2.65}$$

Primer 2 Potencijalna energija ima oblik $U(x,y) = 3x^3y - 7x$. Odredi oblik sile koja deluje na telo koje se nalazi u tački odredjenoj koordinatama (x, y).

⋄ Kako se radi o kretanju u ravni, sila je $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$, pri čemu su komponente

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, F_y = -\frac{dU}{dy},$$

[33]Primer za telo koje je u inidiferentnoj ravnoteži je lopta koja se nalazi na ravnom stolu.

gde prilikom traženja izvoda funkcije $U(x, y)$ po promenljivoj x, treba smatrati da je promenljiva y konstantna i obrnuto. Na taj način se dobija

$$F_x = -9x^2y - 7, F_y = -3x^3.$$

Primer 3 Potencijalna energija sistema je $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k_xx^2 + \frac{1}{2}k_yy^2 + \frac{1}{2}k_zz^2$,gde su k_x, k_y i k_z konstante. Odrediti silu koja deluje na telo u tački (x, y, z)

• Sila je zadata sa $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$, pri čemu je, kao što se lako vidi, u konkretnom slučaju

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}k_xx\vec{e}_x - \frac{1}{2}k_yy^2\vec{e}_y - \frac{1}{2}k_zz\vec{e}_z.$$

2.9.6 Ukupna mehanička energija. Zakon održanja energije

Ukupna mehanička energija

Telo koja podignemo i držimo na visini h iznad površine Zemlje nema kinetičku energiju. Medjutim, ono poseduje gravitacionu potencijalnu energiju mgh, odnosno potencijalnu energiju jer se nalazi u polju gravitacione sile. Ako pustimo telo ono će početi da pada, pri čemu mu brzina, počev od nule raste, što znači da mu se potencijalna energija smanjuje, dok kinetička počinje da raste.

Ukupna mehanička energija tela je prema tome zbir kinetičke i potencijalne energije

$$E = E_k + U. \tag{2.66}$$

Kinetička energija se preko impulsa može zapisati kao $E_k = \frac{p^2}{2m}$ a vrlo često se označava i velikim slovom T, tako da ukupnu mehaničku energiju možemo pisati kao

$$E = \frac{p^2}{2m} + U = T + U, \tag{2.67}$$

a kako je potencijalna energija (kada je reč o konzervativnim silama) funkcija od medjusobnog prostornog rasporeda tela koja čine sistem (ovo se izražava njihovim vektorima relativnog položaja npr.), ovaj izraz ima oblik

$$E(\vec{p}, \vec{r}) = T(\vec{p}) + U(\vec{r}), \tag{2.68}$$

Zakon održanja mehaničke energije

Ukoliko se zanemari otpor vazduha, prilikom pada tela u polju Zemljine teže, smanjenje potencijalne energije je tačno jednako povećanju kinetičke. Ovo je iskaz zakona održanja mehaničke energije, odnosno **u jednom izolovanom sistemu, koji interaguje samo konzervativnim silama, ukupna mehanička energija ostaje konstantna**.

Generalizacija zakona održanja energije

Ovaj iskaz je dobro poznata činjenica koja je više puta pokazana kada je reč o kretanju tela koja čine sistem u kome nema nekonzervativnih sila. Takodje je dobro poznato da se mehanička energija sistema smanjuje kada su prisutne nekonzervativne sile.

Kao što je poznato iz termodinamike, mehanička energija tela može da se transformiše u energiju koja može biti akumulirana *unutar* samih tela koja čine sistema. Ta energija se naziva *unutrašnja energija.* Na primer, kada telo klizi po neravnoj površi, gubi mehaničku energiju koja se usled pojave trenja transformiše u unutrašnju koja prelazi delom na telo a delom na površ po kojoj telo klizi, što u konačnom izaziva promenu njihovih temperatura. Ako se pak dublje sagledaju procesi u telima, na atomskom nivou, ispostavlja se da se to što u termodinamici nazivamo unutrašnjom energijom potiče od oscilacija atoma oko ravnotežnih položaja[34], što znači da se opet radi o kinetičkoj i potencijalnoj energiji tela, pa se na taj način može reći da ona ostaje očuvana.

Ovo je bio samo jedan primer kako prilikom sve dublje i dublje analize jednog izolovanog sistema, možemo uvek doći do zaključka da se ukupna količina energije ne menja, ukoliko uračunamo sve forme energija. To znači da **energija ne može biti ni stvorena ni uništena. Energija može samo da menja formu od jedne na drugu ali ukupna energija izolovanog sistema ostaje konstantna**. Ukoliko maksimalno generalizujemo ovaj iskaz možemo reći da je **ukupna energija Univerzuma konstantna**. Ovo znači da, ako u jednom delu Univerzuma imamo porast energije, to obavezno znači da je ostatak Univerzuma ostao bez tačno tolikog iznosa energije (u nekoj njenoj formi).

[34]Zagrevanje tela izaziva intenizivnije oscilovanje atoma oko ravnotežnih položaja, većom brzinom i sa većim otklonom od ravnotežnih položaja.

2.10 Teorema o kretanju centra masa

Centar mase ili centar inercije sistema materijalnih tačaka, masa m_1, m_2, ..., m_N, čiji su položaji, u odnosu na neki referentni sistem, odredjeni vektorima položaja $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_N$, je zamišljena tačka čiji je vektor položaja odredjen relacijom

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{m} \tag{2.69}$$

gde je $m = m_1 + m_2 + ... + m_N$ ukupna masa sistema. Ako se ovaj izraz prodiferencira po vremenu i pomnoži masom sistema, dobija se

$$m\dot{\vec{r}}_{CM} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 + ... + m_N\dot{\vec{r}}_N, \tag{2.70}$$

odnosno

$$m\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_N\vec{v}_N, \tag{2.71}$$

gde je sa $\vec{v}_{CM}$ označena brzina centra masa sistema. Kako ovaj izraz može da se zapiše kao

$$m\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_{tot}, \tag{2.72}$$

može da se zaključi da je ukupni impuls sistema jednak proizvodu njegove ukupne mase i brzine centra masa. Drugim rečima, ukupan impuls sistema je jednak impulsu jedne čestice mase jednake ukupnoj masi sistema m koja se kreće brzinom centra masa $\vec{v}_{CM}$. Takodje se može uvesti impuls centra masa kao $\vec{p}_{CM} = m\vec{v}_{CM}$ koji je prema tome jednak ukupnom impulsu sistema. Ako se sada diferencira jednačina (2.71) po vremenu dobija se

$$m\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} \tag{2.73}$$

što se može zapisati kao

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i. \tag{2.74}$$

Imajući u vidu II Njutnov zakon ovaj izraz postaje

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N. \tag{2.75}$$

gde se na desnoj strani relacije nalaze rezultujuće sile koje deluju na odgovarajuće čestice sistema (npr. sa $\vec{F}_1$ je označena rezultujuća sila koja deluje na prvu česticu, itd.). Te sile se mogu podeliti na unutrašnje (koje potiču od interagovanja posmatrane čestice sa ostalim česticama sistema) i spoljašnje (koje potiču od interagovanja čestica sistema sa telima koja ne pripadaju njemu), pa tako na primer na prvu česticu sistema deluje rezultujuća sila

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1un} + \vec{F}_{1sp} \tag{2.76}$$

što znači da prethodni izraz može da se zapiše kao

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{1in} + \vec{F}_{1sp} + \vec{F}_{2un} + \vec{F}_{2sp} + ... + \vec{F}_{Nun} + \vec{F}_{Nsp}. \tag{2.77}$$

Kako unutrašnja sila koja deluje npr. na prvu česticu u principu može da potiče od svih preostalih čestica ona je zbir $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + ... + \vec{F}_{1N} = \sum_{k\neq 1} \vec{F}_{1k}$, pa je ukupna sila koja deluje na nju

$$\vec{F}_1 = \sum_{k\neq 1} \vec{F}_{1k} + \vec{F}_{1sp}, \tag{2.78}$$

dok je ukupna sila koja deluje na i-tu česticu

$$\vec{F}_i = \sum_{k\neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_{isp}, \tag{2.79}$$

gde je sa $\vec{F}_{ik}$ označena sila kojom na i-tu česticu deluje k-ta. Analogno tome je $\vec{F}_{ki}$ sila kojom na k-tu česticu deluje i-ta. Prema trećem Njutnovom zakonu ove sile su istog intenziteta i pravca a razlikuju se samo po smeru, odnosno za njih važi $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$. Važno je uočiti da svaka od unutrašnjih sila ("akcija") u prethodnim izrazima ima svoj par ("reakciju"), a pošto one u zbiru daju nulu, na desnoj strani izraza (2.77) ostaju neponištene samo spoljašnje sile, odnosno taj izraz sada glasi

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{isp} = \vec{F}, \tag{2.80}$$

u kome je sa $\vec{F}$ označena rezultanta svih spoljašnjih sila. Drugim rečima proizvod ukupne mase sistema i ubrzanja centra masa jednak je rezultanti spoljašnih sila. Uporedi li se ovaj iskaz sa II Njutnovim zakonom za jednu česticu, možemo da primetimo sledeće: *Centar mase sistema se kreće kao* *materijalna tačka, čija masa je jednaka ukupnoj masi celog sistema, pod dejstvom sile koja je jednaka zbiru svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem.* Ovaj iskaz predstavlja teoremu o kretanju centra masa.

Ukoliko je rezultanta spoljašnih sila jednaka nuli, dobija se

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = m\vec{a}_{CM} = 0, \tag{2.81}$$

pa je

$$\vec{p}_{tot} = m\vec{v}_{CM} = const, \quad (\vec{F} = 0). \tag{2.82}$$

Ovo znači da je ukupan impuls sistema čestica očuvan kada ne postoje spoljašne sile, odnosno za izolovan sistem čestica i ukupan impuls i brzina centra masa su konstantne tokom vremena.[35]

Pretpostavimo da posmatramo izolovan sistem koji se sastoji od dve ili više čecstica koje su u stanju mirovanja. Centar masa takvog sistema ostaje u stanju mirovanja ukoliko ne postoji delovanje spoljašnjih sila. Zamislimo na primer da čovek stoji na splavu koji se nalazi na vodi i pretpostavimo da su i splav i čovek u početku bili u stanju mirovanja, kako jedan u odnosu na drugi tako i u odnosu na vodu. Ako čovek skoči u horizontalnom pravcu u vodu, centar masa sistema ostaje, prema gornjem iskazu, u stanju mirovanja (ukoliko zanemarimo silu trenja izmedju npr. vode i splava). Takodje je impuls čoveka koji je skočio u vodu jednak po intenzitetu impulsu koji ima splav ali je suprotnog smera.

2.11 Odredjivanje položaja centra masa krutih dela različitog oblika

2.11.1 Centar masa krutog tela

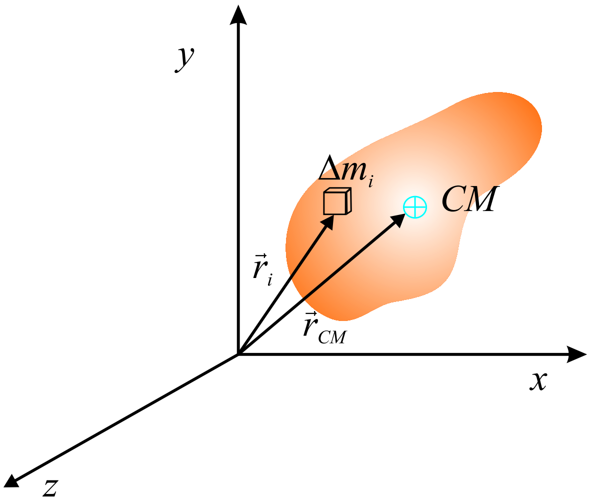
Kruto telo je telo kod koga se uzajamna rastajanja njegovih delova tokom vremena ne menjaju. Ukoliko za jedan takav objekat želimo da primenimo relaciju (2.69) koja važi za sistem čestica, onda izdelimo u mislima kruto telo na veliki broj delića koje smatramo česticama koje su veoma blizu jedna drugoj, toliko blizu da su praktično kontinualno rasporedjene u delu prostora koji zauzima kruto telo. Kako je masa svake od tih "čestica" jednaka Δm_i a

[35] Ovaj iskaz predstavlja generalizaciju zakona održanja impulsa na sistem čestica.

nalaze se u tačkama čiji je vektor položaja $\vec{r}_i = x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z$, x koordinata centra masa je približno

$$x_{CM} \approx \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{m}, \tag{2.83}$$

gde je m ukupna masa krutog tela. Izrazi za preostale dve koordinate centera masa y_{CM} i z_{CM} imaju analogan oblik.



Slika 2.14: Kruto telo razmatrano kao skup delića masa Δm_i. Centar masa se nalazi u nekoj tački odredjenoj vektorom položaja $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\vec{e}_x + y_{CM}\vec{e}_y + z_{CM}\vec{e}_z$.

Ukoliko broj delića na koje smo izdelili kruto telo teži beskonačnosti suma u ovom izrazu postaje integral po masi

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{m} = \frac{1}{m}\int x dm, \tag{2.84}$$

a za ostale dve koordinate pri tom važe izrazi

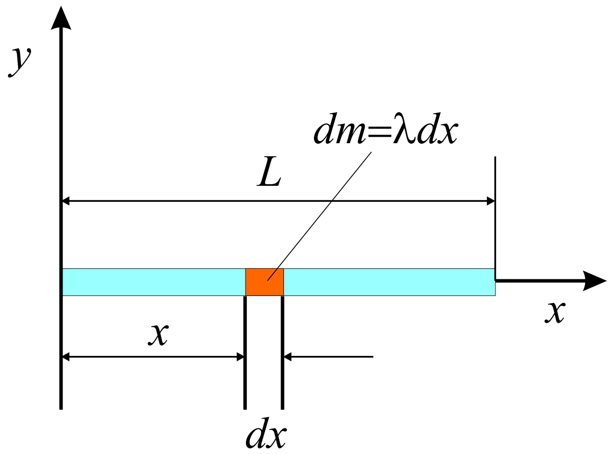
$$y_{CM} = \frac{1}{m}\int y dm, \quad \text{i} \quad z_{CM} = \frac{1}{m}\int z dm. \tag{2.85}$$

Na osnovu ovih izraza se može pisati da je vektor položaja centra masa

$$\vec{r}_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i \vec{r}_i \Delta m_i}{m} = \frac{1}{m}\int \vec{r} dm. \tag{2.86}$$

Odredjivanje položaja centra masa homogenog štapa

Primer 1. Pokazati da se centar mase štapa kod koga je masa uniformno rasporedjena po dužini štapa, nalazi na njegovoj sredini.



Slika 2.15: .

⋄ Ukoliko x osu postavimo duž štapa, y i z koordinate centra masa su jednake nuli, tako da treba odrediti samo njegovu x koordinatu. Kako je masa štapa uniformno rasporedjena po njegovoj dužini (štap je homogen), može da se uvede podužna gustina mase λ kao $\lambda = m/L$, gde je m ukupna masa štapa. Ukoliko sada podelimo štap na deliće dužine dx, masa svakog takvog delića je $dm = \lambda dx$, tako da izraza za odredjivanje x_{CM} postaje

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\int x dm = \frac{1}{m}\int_0^L x\lambda dx = \frac{\lambda}{m}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2m}. \tag{2.87}$$

Ako se još podsetimo da je $\lambda = m/L$, za položaj centra masa se dobija

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{m}{L}\right) = \frac{L}{2}. \tag{2.88}$$

Odredjivanje položaja centra masa štapa čija se gustina menja linearno

Odrediti položaj centra masa kod štapa čija masa se menja linearno po dužini.

⋄ U ovom slučaju nema principijelno novih stvari sem što je podužna gustina sada zavisna od x koordinatte kao $\lambda = \alpha x$, gde je α konstanta. U integral sada zamenjujemo dm sa λdx imajući u vidu da λ nije konstanta

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\int x dm = \frac{1}{m}\int_0^L x\lambda dx = \frac{1}{m}\int_0^L x\alpha x dx = \frac{\alpha}{m}\int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha L^3}{3m}. \tag{2.89}$$

Konstanta α koja se pojavljuje u ovom izrazu se može eliminasti ako podjemo da je ukupna masa štapa odredjena izrazom

$$m = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L = \alpha x dx = \frac{\alpha L^2}{2}. \tag{2.90}$$

Zamena ovog izraza u prethodni dovodi do

$$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \frac{2}{3}L. \tag{2.91}$$

Odredjivanje položaja centra masa homogenog pravouglog trougla

Kruto telo mase m ima oblik pravouglog trougla. Smatrajući da je njegova masa uniformno rasporedjena, odrediti položaj centra masa.

$\diamond$ U cilju odredjivanja x koordinate centra masa, podelimo trougao na tanke pojaseve širine dx i visine y, čija je površina prema tome $dS = ydx$ (Slika 2.16). Masa svake ovakve trake je

$$dm = \sigma dS = \sigma y dx, \tag{2.92}$$

gde je sa σ označena površinska gusitna mase $\sigma = m/S = m/(\frac{1}{2}ab)$.

U skladu sa time, x koordinata centra masa je odredjena izrazom

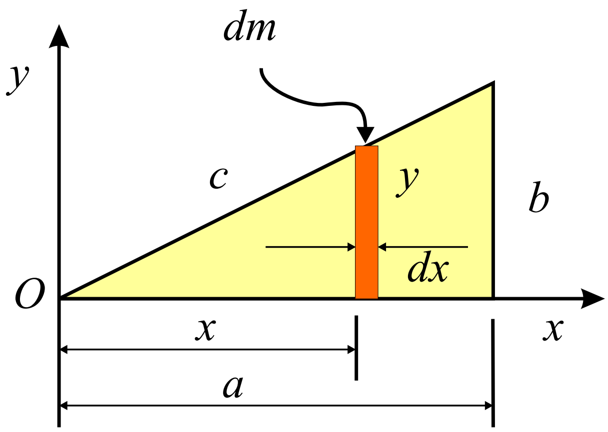
$$x_{CM} = \frac{1}{m}\int x dm = \frac{1}{m}\int_0^a x\sigma y dx = \frac{1}{m}\int_0^a x\frac{2m}{ab} y dx = \frac{2}{ab}\int_0^a x y dx. \tag{2.93}$$

U ovom integralu se osim promenljive x pojavila i promenljiva y koja za različito x ima različite vrednosti. Stoga je potrebno naći vezu ove dve veličine, izraziti potom y preko x i zameniti u gornji integral. Na osnovu sličnosti odgovarajućih trouglova sa slike 2.16 je

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}, \quad \text{odnosno} \quad y = \frac{b}{a}x. \tag{2.94}$$

Uzimajući to u obzir, jednačina (2.93) daje

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right) dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2 = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a. \tag{2.95}$$



Slika 2.16: .

Analognim proračunom se pokazuje da je y koordinata centra masa

$$y_{CM} = \frac{1}{3}b, \tag{2.96}$$

čime je položaj centra masa potpuno odredjen.

2.12 Redukovana masa

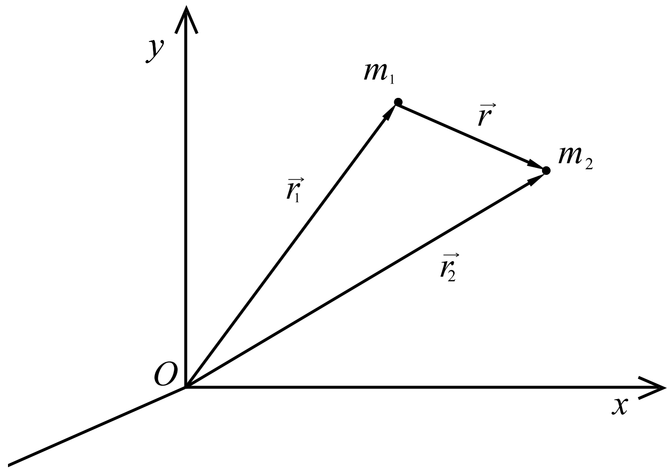
Ako se posmatra sistem koji se sastoji od dve interagujuće materijalne tačke masa m_1 i m_2 na koje ne deluju spoljašnje sile, njihove jednačine kretanja se mogu zapisati u obliku

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{\vec{F}_1}{m_1}, \quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_2}{m_2}, \tag{2.97}$$

pri čemu je prema trećem Njutnovom zakonu $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Uzimanje u obzir ove čijenice, oduzimanjem prve jednačine kretanja od druge dobija se

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right). \tag{2.98}$$

Ova jednačina opisuje kretanje jedne materijalne tačke u odnosu na drugu, zato što je razlika vektora $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$, vektor položaja čiji je početak na



Slika 2.17:

prvoj tački a kraj na drugoj. On jednoznačno odredjuje položaj druge tačke u odnosu na prvu. Ako se još uvede i oznaka

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \tag{2.99}$$

koja za veličinu μ daje

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{2.100}$$

jednačina kretanja (2.98) postaje

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_2. \tag{2.101}$$

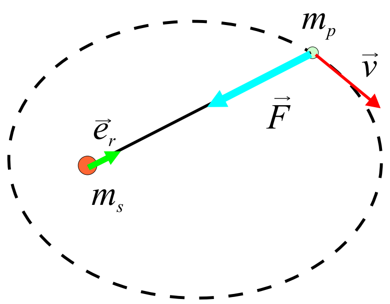
Ova jednačina je formalno analogna drugom Njutnovom zakonu. Ulogu sile igra sila $\vec{F}_2$ koja deluje na drugu materijalnu tačku (od strane prve), a ulogu mase - pomoćna veličina μ, koja se zove redukovana masa. Naravno, jedna jednačina ne može da bude ekvivalentna dvema polaznim jednačinama (2.97). Ipak, ekvivalentnost se može postići, ako se jednačini u kojoj figuriše redukovana masa (2.101) doda jednačina (2.80) koja izražava teoremu o kretanju centra masa. U ovom slučaju, zato što nema spoljašnjih sila, iz te teoreme sledi da se centar masa kreće ravnomerno pravolinijski. Na taj način, opisivanje kretanja sistema dve izolovane materijalne tačke se dekomponuje na dva nezavisna zadatka: 1) opisivanje (ravnomernog) kretanja centra masa, 2) opisivanje relativnog kretanja jedne materijalne tačke u odnosu na drugu. Ovaj drugi zadatak se, kao što smo to videli, formalno svodi na odredjivanje kretanja materijalne tačke mase μ u polju sile koja deluje na drugu materijalnu tačku.

2.13 Kretanje u centralnom polju sila. Problem dva tela

Kretanje planeta oko Sunca, se opisuje Njutnovim zakonom gravitacije

$$\vec{F} = -G\frac{m_p m_s}{r^2}\vec{e}_r \tag{2.102}$$

u kome je vektor $\vec{e}_r$ jedinični vektor čiji je početak vezan za Sunce a usmeren je ka trenutnom položaju planete, G je Njutnova univerzalna gravitaciona konstanta, m_p i m_s su mase planete i sunca, respektivno.



Slika 2.18:

Ovaj zakon (kao i Kulonov koji opisuje naelektrisanih čestica) opisuje delovanje tela preko centralnih sila, odnosno preko odgovarajućih centralnih polja. Centralno polje sila je takvo polje u kome je pravac delovanja sile na česticu, u svakoj tački polja usmeren ka jednoj tački O koja se naziva centar polja, pri čemu intenzitet sile zavisi samo od rastojanja od tog centra.

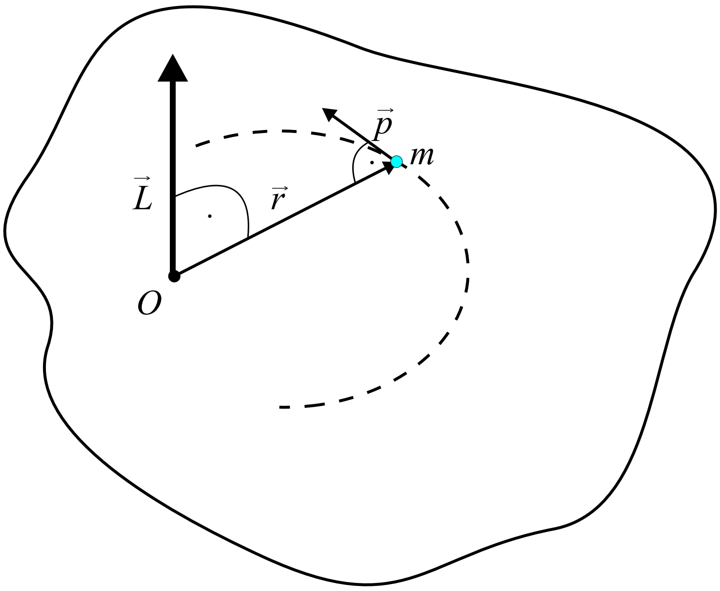
2.13.1 Centralno polje sila

Na osnovu napred rečenoga, izraz za silu koja spada u centralne je oblika

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_r, \tag{2.103}$$

gde je $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ jedinični vektor vektora položaja $\vec{r}$, a $f(r)$ je projekcija vektora sile na pravac radijus vektora. Ukoliko je data sila odbojna, funkcija $f(r)$ je pozitivna, dok je za privlačne sila negativna. Prilikom pisanja prethodne jednačine je uzeto u obzir da se koordinatni početak nalazi u tački O odnosno u centru polja.

Moment, $\vec{M}$, svake centralne sile (2.103) u odnosu na tačku O je očigledno jednak nuli.[36] Odatle sledi zaključak da se moment impulsa čestice, koja se kreće u polju centralne sile ne menja tokom vremena.[37] Vektor $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, je obzirom na svoju definiciju, u svakom momentu vremena ortogonalan na ravan koju obrazuju vektori $\vec{r}$ i $\vec{p}$ (kao njihov vektorski proizvod). Kako je osim toga moment impulsa konstantan tokom vremena ta ravan, u odnosu na koju se on nalazi pod pravim uglom, je fiksna. Na taj način, pri kretanju u polju centralne sile, vektor položaja čestice leži stalno u istoj ravni. U toj istoj ravni leži i vektor impulsa čestice. Posledica ovih činjenica je da je trajektorija čestice kriva u ravni, koja zadržava stalno istu orijentaciju u prostoru, pri čemu ta ravan prolazi kroz centar polja.



Slika 2.19:

Ovaj rezultat ima interesantnu geometrijsku interpretaciju. Vektor položaja

[36]Razlog je jer je $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = f(r)\vec{r} \times e_r = 0$ pošto su vektori $\vec{r}$ i $\vec{e}_r$ kolinearni.

[37]Na osnovu osnovnog zakona dinamike rotacije $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{sp}$.

čestice $\vec{r}$ za vreme dt predje preko površine dS. Ta površina je jednaka polovini površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{r}$ i $d\vec{r}$, odnosno

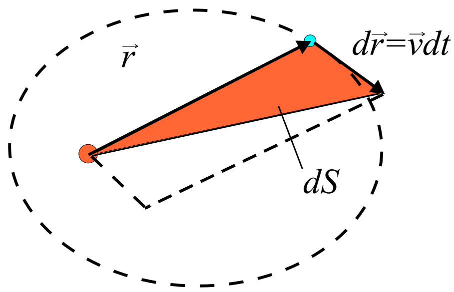
$$dS = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|. \tag{2.104}$$

Kako je pomeraj čestice za vreme dt jednak $d\vec{r} = \vec{v}dt$, dobija se

$$dS = \frac{1}{2}|\vec{r} \times dt\vec{v}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|dt = \frac{L}{2m}dt, \tag{2.105}$$

gde je L intenzitet vektora momenta impulsa čestice mase m, pri čemu je, kako smo to videli, kod kretanja u centralnom polju to konstanta. Na osnovu ovoga se može zaključiti da *vektor položaja čestice koja se kreće u centralnom polju za jednake vremenske intervale prelazi jednake površine*, drugim rečima, veličina koja se naziva, *sektorska brzina* $\frac{dS}{dt}$ je u ovom slučaju kostantna jer je

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = const. \tag{2.106}$$



Slika 2.20:

Centralne sile spadaju u konzervativne pa je njihov jednak negativnoj promeni potencijalne energije čestice

$$dU = -dA = -f(r)\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = -f(r)dr. \tag{2.107}$$

Integracija ovog izraza daje

$$U = -\int f(r)dr, \tag{2.108}$$

odakle sledi da potencijalna energija čestice koja se nalazi u polju centralnih sila zavisi samo od rastojanja čestice od centra polja.

Naročito su interesantne sila koje zavise od rastojanja od centra polja kao

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \tag{2.109}$$

gde je α konstantna veličina.[38] U ovu grupu sila spadaju već pomenute gravitaciona i kulonova sile. Zamena (2.109) u (2.108) daje

$$U = -\alpha \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\alpha}{r} + C \tag{2.110}$$

gde je C integraciona konstanta. Ona se može odrediti iz uslova da je potencijana energija u beskonačnosti jednaka nuli, što za konstantu C daje $C = 0$, pa je potencijalna energija

$$U = \frac{\alpha}{r}. \tag{2.111}$$

Ukupna energija ěcstice koja se kreće u polju centralne sile je prema tome

$$E = E_k + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r}. \tag{2.112}$$

2.13.2 Problem dva tela

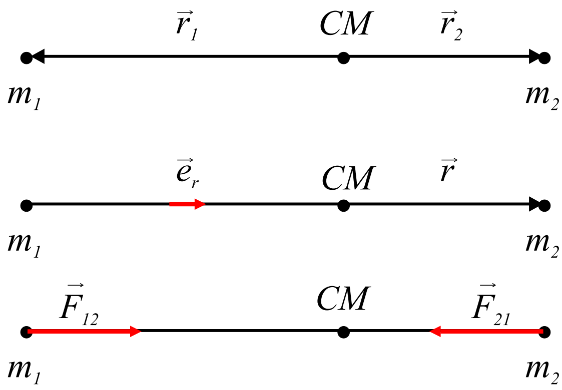
Ono što se u fizici naziva problemom dva tela se odnosi na opisivanje kretanja dve interagujuće čestice pri čemu se pretpostavlja da je taj sistem zatvoren. Kao što je zaključeno ranije, centar masa zatvorenog sistema (nema spoljašnjih sila ili im je rezultanta jednaka nuli), ili miruje ili se kreće uniformno pravolinijski. Stoga se za njega može vezati jedan inercijalan sistem reference (sistem CM ili CM sistem) u odnosu na koji se dalje može analizirati kretanje čestica. U tom slučaju je

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \tag{2.113}$$

jer $\vec{r}_{CM}$ predstavlja vektor položaja centra masa u odnosu na sam centar masa, pa je (slika (2.21))

$$m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2. \tag{2.114}$$

[38] Pri ovome $\alpha > 0$ odgovara slučaju odbijanja od centra a $\alpha < 0$ privljačenju ka centru polja.



Slika 2.21:

Uvedemo li vektor relativnog položaja druge čestice u odnosu na prvu,

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{2.115}$$

rešavajući ove dve jednačine po $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ dobija se

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \tag{2.116}$$

Za slučaj interagovanja dva tela, može se pisati $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = f(r)\vec{e}_r$, gde je $f(r)$ funkcija rastojanja izmedju čestica, pozitivna ako se privlače a negativna ako se odbijaju. Jednačine kretanja ovih dveju čestica su sada

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = f(r)\vec{e}_r, \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -f(r)\vec{e}_r. \tag{2.117}$$

Deljenjem prve jednačine sa m_1, druge sa m_2, nakon njihovog oduzimanja i uvodjena redukovane mase i vektora relativnog položaja, dobija se

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -f(r)\vec{e}_r. \tag{2.118}$$

Na taj način, problem opisivanja kretanja dva tela svodi se na opisivanje kretanja jedne čestice u centralnom polju sila. Kada se iz poslednje diferencijalne jednačine odredi vremenska zavisnost vektora relativnog položaja $\vec{r}(t)$, prema formulama (2.116) se mogu odrediti $\vec{r}_1(t)$ i $\vec{r}_2(t)$, čime se postavljeni problem može smatrati rešenim.

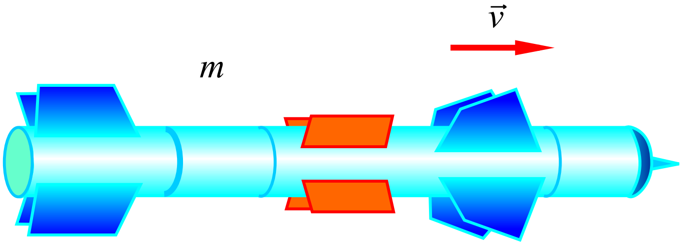
2.14 Kretanje tela promenljive mase. Reaktivno kretanje

Kada se kaže da telo menja masu, obično se ima u vidu relativistička promena mase tela sa brzinom, koja se dešava kada se telo kreće brzinama bliskim brzini svetlosti. Medjutim, od velikog praktičnog značaja je proanlizirati kretanje tela čija se masa menja usled gubitka ili porasta količine materije koja čini telo. Dakle, u ovom poglavlju će biti analizirana, sa stanovišta Njutnovih jednačina, kretanja tela malim brzinama pri čemu im se masa menja sa vremenom. Na primer masa kamiona-cisterne za pranje ulica se smanjuje usled isticanja vode iz njegovog rezervoara (ili se povećava prilikom punjenja cisterne), masa kišne kapi raste pri padanju kroz vazduh zasićen vodenom parom, masa rakete ili mlaznog aviona se smanjuje usled potrošnje goriva, odnosno usled izbacivanja gasova koji nastaju prilikom njegovog sagorevanja, ... U svim ovim slučajevima je reč o kretanju tela promenljive mase. Jednačine kojima se opisuju ovakva kretanja, iako ne sadrže ništa principijelno novo u poredjenju sa Njutnovim jednačinama već su njihova posledica, su veoma interesantne jer su povezane sa npr. raketnom tehnikom.

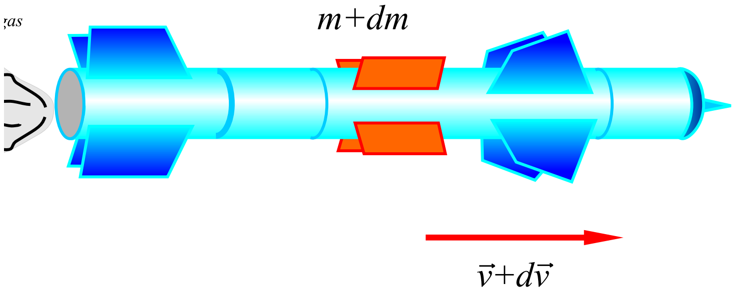
Izvečimo jednačinu kretanja tela promenljive mase na primeru kretanja rakete. Princip funkcionisanja rakete je relativno prost. Raketa izbacuje materiju (gas) delujući na njega velikom silom. Materija koju ona pri tom izbacuje, deluje na raketu jednakom ali suprotno usmerenom silom, saopštavajući joj odgovarajuće ubrzanje. Ukoliko nema spoljašnjih sila, raketa i izbačena materija čine zatvoren sistem te se njegov impuls ne može menjati sa vremenom. Na tom principu i rade rakete. Celishodno je medjutim razmatrati opštiji slučaj, tj. pretpostaviti da na raketu deluju i spoljašnje sile. To mogu biti na primer sila zemljine teže, gravitaciono privlačenje od strane Sunca i planeta, sila otpora sredine kroz koju se kreće raketa, ...

Neka su $m(t)$ i $\vec{v}(t)$ masa i brzina rakete u proizvoljnom momentu vremena t. Impuls rakete će u tom trenutku biti $\vec{p}(t) = m\vec{v}$. Za interval vremena dt masa rakete i njena brzina će imati priraštaje dm i $d\vec{v}$ jer je za navedeno vreme raketa potrošila dm goriva i izbacila ga kao gas (kao produkt sagorevanja goriva) pa se time njena masa promenila za taj iznos[39]. Impuls rakete će u trenutku $t + dt$ biti $(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v})$. Ukupan impuls sistema sadrži još i impuls gasa izbačenog za dati interval vremena dt, odnosno sabirak

[39] Pri ovome je $dm < 0$.



Slika 2.22:



Slika 2.23:

$dm_{gas}\vec{v}_{gas}$, gde je $\vec{v}_{gas}$ brzina izbacivanja gasa a dm_{gas} njegova masa. Razlika impulsa u trenutku $t + dt$ i t predstavlja priprastaj a on je, prema II Njutnovom zakonu jednak $\vec{F}dt$, gde je $\vec{F}$ rezultanta svih spoljašnjih sila koje deluju na raketu, odnosno važi jednačina

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{gas}\vec{v}_{gas} - m\vec{v} = \vec{F}dt, \qquad (2.119)$$

odnosno

$$m\vec{v} + md\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} + dm_{gas}\vec{v}_{gas} - m\vec{v} = \vec{F}dt. \qquad (2.120)$$

Nakon sredjivanja, odbacivanja proizvoda $dmd\vec{v}$ kao infinitezimale višeg reda (drugog) od ostalih, primene zakona održanja mase $dm + dm_{gas} = 0$, i uvodjenja relativne brzine isticanja gasa u odnosu na raketu $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{gas} - \vec{v}$, ova jednačina poprima oblik

$$md\vec{v} = \vec{v}_{rel}dm + \vec{F}dt, \qquad (2.121)$$

a nakon deljenja sa dt, konačno

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} + \vec{F}. \qquad (2.122)$$

Po formi je izraz (2.122) jednak drugom Njutnovom zakonu. Razlika je u tome što u ovom slučaju masa nije konstantna već se menja sa vremenom usled gubitka materije. Spoljašnjoj sili je dodat još jedan član $\vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt}$, koji predstavlja takozvanu reaktivnu silu, tj. silu kojom na raketu deluju gasovi koje ona izbacuje. Ovu jednačinu je prvi dobio ruski naučnik Meščerski (1859-1935) po kome ona i nosi ime (jednačina Meščerskog odnosno jednačina kretanja tela promenljive mase).

P r i m e r 1. Primenimo jednačinu Meščerskog na kretanje rakete na koju ne deluju spoljašnje sile. U tom slučaju ($\vec{F} = 0$) ona glasi

$$m d\vec{v} = \vec{v}_{rel} dm.$$

Ovu vektorsku jednačinu je najcelishodnije projektovati na osu koja se poklapa sa pravcem kretanja rakete i usmerena je u smeru toga kretanja. U tom slučaju ona postaje sledeća skalarna jednačina

$$m dv = -v_{rel} dm.$$

Brzina isticanja gasova se u principu menja tokom leta rakete ali se kao prostiji može razmatrati slučaj kada je ona konstantna. U tom slučaju je rešenje prethodne jednačine

$$v = -v_{rel} \int \frac{dm}{m} = -v_{rel} \ln m + C.$$

Vrednost konstante integracije C je odredjena početnim uslovima. Pretpostavimo da je u početnom momentu vremena brzina rakete bila jednaka nuli a da je njena masa bila m_0. Tada ova jednačina daje $0 = -v_{rel} \ln m_0 + C$, odnosno $C = v_{rel} \ln m_0$. Odavde je sada

$$v = v_{rel} \ln \frac{m_0}{m},$$

odakle se za promenu mase rakete sa vremenom dobija jednačina

$$m = m_0 e^{-\frac{v}{v_{rel}}}. \tag{2.123}$$

Ova jednačina se naziva formulom Ciolkovskog (1857-1935). Interesantno je takodje razmotriti i relativističke modifikacije dobijenih jednačina.

P r i m e r 2. Odrediti vezu izmedju mase rakete, brzine koju je ona dostigla i vremena, ukoliko se raketa kreće vertikalno naviše u polju zemljine teže. Brzinu gasne struje u odnosu na raketu smatrati konstantnom. Otpor vazduha i promenu ubrzanja zemljine teže g sa visinom ne uzimati u obzir. Koliku masu gasa mora raketa da izbacuje svake sekunde da bi ostala nepokretna u polju zemljine teže?

Jednačina kretanja rakete

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{rel}\frac{dm}{dt} - mg$$

može da se zapiše u obliku

$$md(v + gt) = -v_{rel}dm$$

koji je formalno isti obliku jednačine koja je kao rešenje imala formulu Ciolkovskog, s tim što v treba zameniti sa $v + gt$ pa je rešenje ove jednačine

$$m = m_0 e^{-\frac{v+gt}{v_{rel}}}. \tag{2.124}$$

Izraz koji daje brzinu je prema tome

$$v = v_{rel}\ln\frac{m_0}{m} - gt. \tag{2.125}$$

Tražena veličina koja opisuje promenu mase sa vremenom je $\mu = -\frac{dm}{dt}$, se može naći iz uslova da je za nepokretnu raketu $\frac{dv}{dt} = 0$,[40] što dovodi do

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{v_{rel}}e^{-\frac{gt}{v_{rel}}}. \tag{2.126}$$

2.15 Kretanje u prisustvu sila otpora

U prethodnim poglavljima je razmtrano kretanje tela uz zanemarivanje otpora sredine kroz koju se telo kreće.[41] Otpor sredine kretanju se može opisati uvodjenjem sile otpora $\vec{R}$ čiji inetnzitet zavisi od brzine tela[42] a smer je uvek suprotan smeru kretanja tela.

Intenzitet sile otpora sredine može da zavisi od brzine na veoma složene načine a ovde će biti razmatrana dva najčešća oblika zavisnosti. Kada se

[40] Jer je brzina konstantna, to jest jednaka nuli.

[41] Samo neki od primera su: otpor vazduha prilikom kretanja makrskopskih tela (recimo automobila), viskozna sila koja je značajna pri kretanju tela kroz tečnosti, ...

[42] Intenzitet sile otpora sredine uvek opada kada se brzina smanjuje.

radi o kretanju tela relativno malom brzinom kroz tečnost ili kada je reč o kretanju malih tela (npr. čestice prašine) koja padaju kroz vazduh može se smatrati da je otpor sredine proporcionalan prvom stepenu brzine. Ukoliko je reč o kretanju velikih objekata sila otpora je srazmerna drugom stepenu brzine.

2.15.1 Kretanje tela u prisustvu sile otpora proporcionalne brzini tela

Ako se telo kreće kroz fluid (gas ili tečnost) pri 'v cemu na njega deluje sila otpora sredine proporcionalna brzini tela,

$$R = bv \tag{2.127}$$

gde je b konstanta čija vrednost zavisi od karakteristika sredine i oblika i dimenzije objekta[43], i ukoliko se osim gravitacione sile zanemare ostale[44] projekcija II Nutnovog zakona na pravac kretanja tela daje

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv. \tag{2.128}$$

Deljenjem ove jednačine masom daje sledeću diferencijalnu jednav́ cinu za odredjivanje brzine tela

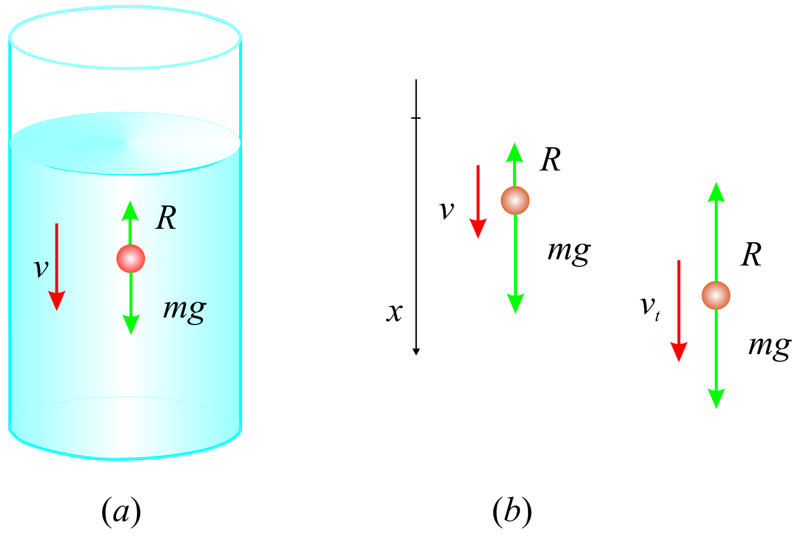
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v. \tag{2.129}$$

Pre nego što pristupimo rešavanju ove jednačine korisno je proanlizirati je. Ukoliko uzmemo da je početna brina čestice jednaka nuli, to znači da je u početku sila otpora $-bv$ takodje bila jednaka nuli a ubrzanje čestice dv/dt je prosto jednako g. Sa vremenom, obzirom da se brzina tela povećava, raste i sila otpora a ubrzanje opada. Ubrzanje postaje jednako nuli kada sila otpora sredine postane jednaka težini tela. U tom slučaju telo je postiglo graničnu vrednost brzine v_g sa kojom nastavlja da se kreće nadalje, pri čemu je ubrzanje jednako nuli. Ta brzina se može dobiti ako se u (9.3) uzme da je $a = dv/dt = 0$ što daje

$$mg - bv_g = 0, \Rightarrow v_g = \frac{mg}{b}. \tag{2.130}$$

[43]Ukoliko je reč o sfernom telu poluprečnika r ova konstanta je proporcionalna r (Stoksov zakon).

[44]U ovom slučaju postoji i sila potiska koja deluje na telo koje je potopljeno u fluid. Prema Arhimedovom zakonu, ova sila je konstantna i jednaka je težini telom istisnute tečnosti i u ovom razmatranju je nećemo nadalje uzimati u obzir.



Slika 2.24:

Diferencijalna jednačina (9.3) se može napisati u obliku

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt, \tag{2.131}$$

koja može da se integrali jer su promenljive na odvojenim stranama jednakosti

$$\int \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = t + C. \tag{2.132}$$

Integral na levoj strani se svodi na tabličan ukoliko se uvede smena $x = g - \frac{b}{m}v$, odakle je $dx = -\frac{b}{m}dv$ pa on prelazi u

$$-\frac{m}{b}\int \frac{dx}{x} = -\frac{m}{b}\ln x = -\frac{m}{b}\ln(g - \frac{b}{m}v), \tag{2.133}$$

tako da je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine

$$-\frac{m}{b}\ln(g - \frac{b}{m}v) = t + C. \tag{2.134}$$

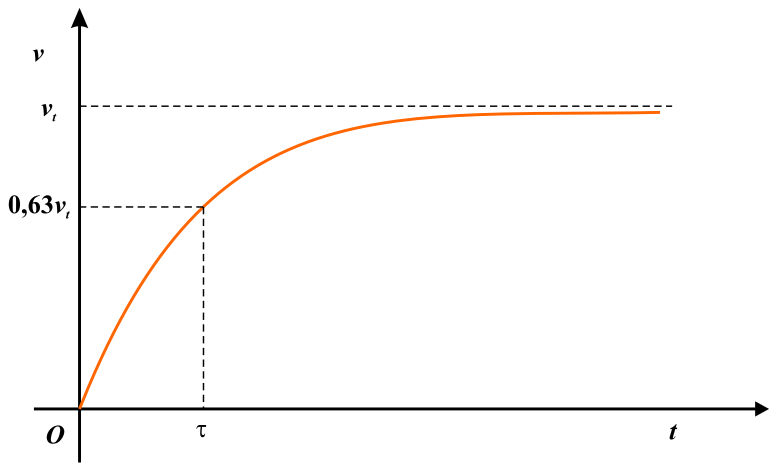
Konstanta C se odredjuje iz početnog uslova da je u početnom trenutku $t = 0$ telo krenulo iz stanja mirovanja, tj. da mu je brzina bila $v = 0$, pa se za konstantu dobija $C = -\frac{m}{b}\ln g$. Uzimanjem toga u obzir, rešavanjem jednačine (2.134) po brzini daje konačno

$$v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-\frac{bt}{m}}), \tag{2.135}$$

odnosno

$$v = v_g(1 - e^{-\frac{bt}{m}}). \tag{2.136}$$

Ova zavisnost je predstavljena na slici 2.25. Može da se primeti da je



Slika 2.25:

odnos m/b konstanta koja ima dimenzije vremena a lako je videti da prema jednačini (2.135) predstavlja vreme nakon koga telo dostigne $63,2\%$ od maksimalne moguće brzine, tako da ova jednačina može da se zapiše i kao

$$v = v_g(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \tag{2.137}$$

2.15.2 Kretanje tela u prisustvu sile otpora proporcionalne drugom stepenu brzine tela

Na tela koja se kreću velikim brzinama kroz vazduh (avioni, automobili, padobranci, lopte,...) za silu otpora se može uzeti da je proporcionalna drugom stepenu brzine. U tim slučajevima, sila otpora ima oblik

$$R = \frac{1}{2}D\rho S v^2, \tag{2.138}$$

gde je ρ gustina vazduha, S je površina poprečnog preseka tela merena u ravni normalnojj na smer kretanja a D je konstantni koeficijent. [45]

Pretpostavimo da, kao i u prethodnom slučaju, telo slobodno pada u homogenom polju zemljine teže polazeći iz stanja mirovanja. Jednačina kretanja, projetkovana na osu duž koje se vrši kretanje, je

$$ma = mg - \frac{1}{2}D\rho S v^2, \tag{2.139}$$

odakle se vidi da se telo pri padu kreće sa ubrzanjem

$$a = g - \left(\frac{D\rho S}{2m}\right)v^2. \tag{2.140}$$

Na osnovu ovoga je granična vrednost brzine koju telo može da dostigne (dobija se stavljajući da je u tom slučaju $a = 0$)

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho S}}. \tag{2.141}$$

2.16 Rotaciono kretanje krutog tela

2.16.1 Kinetička energija pri rotacionom kretanju

Kao što smo već videli, kruto telo možemo da razmatramo kao skup delića (koje tretiramo kao čestice), masa Δm_i koji rotiraju oko z ose nekom ugaonom brzinom ω. Kinetička energija svakog takvog delića je odredjena njegovom masom i linijskom brzinom v_i, odnosno

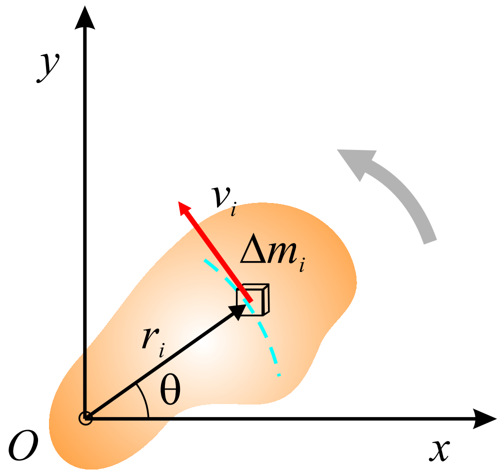
$$E_{kroti} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2. \tag{2.142}$$

Iako svi delići krutog tela imaju istu ugaonu brzinu ω, linijska brzina im se razlikuje jer zavisi od rastojanja delića od ose rotacije r_i, i zadata je relacijom $v_i = r_i\omega$ (uporedi sa jednačinom (1.59)).

Ukupna kinetička energija krutog tela je suma kinetičkih energija delića

$$E_{krot} = \sum_i E_{kroti} = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i r_i^2\omega^2. \tag{2.143}$$

[45] Vrednost ovog koeficijenta se odredjuje empirijski i za sferna tela ima vrednost oko 0,5 dok je za tela nepravilnog oblika veći od 2.



Slika 2.26: .

Ovaj izraz može da se zapiše u obliku

$$E_{krot} = \frac{1}{2}\left(\sum_i \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2, \tag{2.144}$$

gde je iz sume izvučen faktor ω^2 koji je isti za sve deliće krutog tela. Ovaj izraz može da se uprosti ako se uvede da je izraz u zagradi **moment inercije** I

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2, \tag{2.145}$$

pa dobijamo

$$E_{krot} = \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{2.146}$$

Ukoliko se ovaj izraz uporedi sa izrazom za kinetičku energiju čestice mase m, vidi se da ulogu mase kao mere inercije, kod rotacije krutog tela, igra upravo veličina I što je i opravdanje za njen naziv.

2.16.2 Izračunavanje momenata inercije krutih tela različitog oblika

Prilikom konkretnog odredjivanja momenta inercije krutog tela, nakon njegovog deljenja na deliće mase Δm_i, na kraju se uzima granična vrednost

$\Delta m_i \to 0$, nakon čega moment inercije zapravo postaje jednak integralu

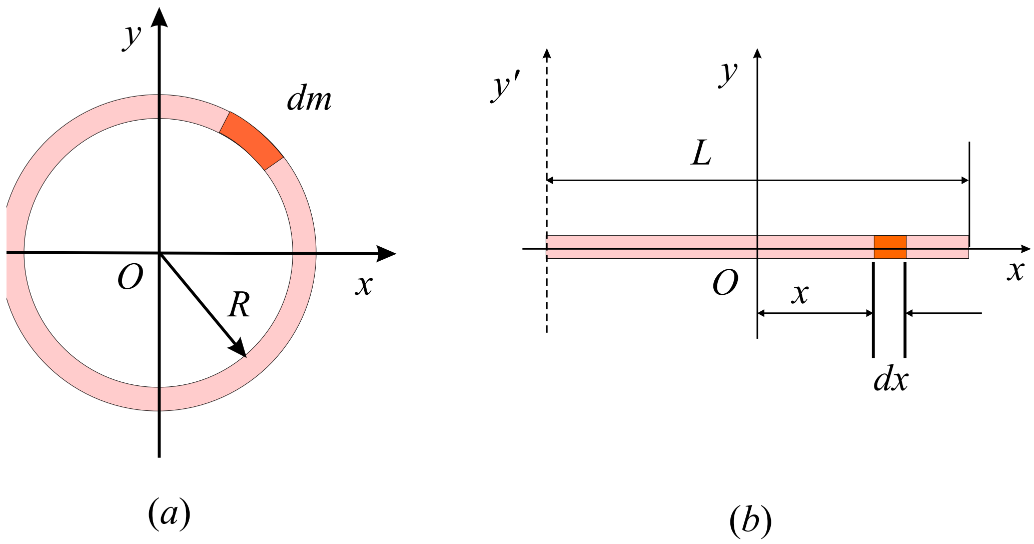
$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm \qquad (2.147)$$

gde se integracija vrši po celom telu čiji moment inercije treba da se odredi. Imajući u vidu relaciju (1.68), izražavajući iz nje $dm = \rho dV$ integral po masi tela postaje integral po zapremini

$$I = \int \rho r^2 dV. \qquad (2.148)$$

Ukoliko je telo homogeno, gustina je konstantna pa može da se izvuče ispred integrala a ukoliko to nije slučaj, ukoliko želimo da izvršimo integraciju, mora da se zna njena zavisnost od prostornih koordinata.

Homogen prsten



Slika 2.27:

Odredimo moment inercije za homogen prsten mase m i poluprečnika R u odnosu na osu koja prolazi kroz središte prstena i normalna je na njega (Slika 2.27 (a)). Svi elementi mase dm prstena su na istom rastojanju $r = R$od z ose oko koje zapravo prsten rotira, pa je moment inercije

$$I_z = \int r^2 dm = R^2 \int dm = mR^2. \qquad (2.149)$$

Moment inercije homogenog prstena oko ose koja prolazi kroz njegov centar i normalna je na prsten, jednak je momentu inercije čestice koja se nalazi na rastojanju jednakom poluprečniku prstena i koja ima masu jednaku masi prstena.

Homogen štap

Posmatrajmo homogen štap dužine L i mase m koji rotira oko ose koja je normalna na njega i koja prolazi kroz njegov centar masa (Slika 2.27 (b)).

Osenčeni deo štapa dužine dx ima masu dm koja je jednaka proizovodu linijske gustine mase λ i dužine datog segmenta

$$dm = \lambda dx = \frac{m}{L} dx. \tag{2.150}$$

Zamenjujući ovo u (2.147), uz $r = x$, za traženi moment inercije se dobija

$$I_y = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{m}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} mL^2. \tag{2.151}$$

Homogen cilindar

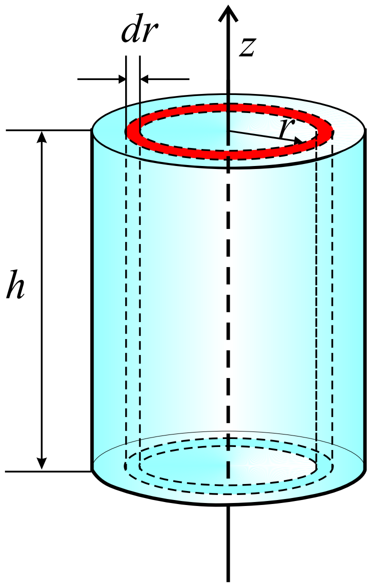
Homogeni puni cilindar, poluprečnika osnove R, mase m i visine h rotira oko svoje centralne ose (z osa na slici 2.28). U cilju odredjivanja momenta inercije, cilindar se deli na cilindrične ljuske, svaka ima poluprečnik r i debljinu dr i visinu h. Zapremina svake takve cilindrične ljuske je jednaka proizvodu površine njenog poprečnog preseka i visine, dakle $dV = dS \cdot h = (2\pi r dr h)$. Kako je masa jedinice zapremine (gustina) jednaka ρ, masa posmatrane diferencijalne zapremine je $dm = \rho dV = 2\pi h \rho r dr$, a moment inercije se dobija integracijom izraza (2.147)

$$I_z = \int r^2 dm = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4. \tag{2.152}$$

Kako je ukupna zapremina cilindra $\pi R^2 h$, gustina je $\rho = m/V = m/(\pi R^2 h)$. Zamenom ove vrednosti za gustinu u prethodnu jednačinu ona postaje

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2. \tag{2.153}$$

Primetimo da ovaj rezultat ne zavisi od visine cilindra, drugim rečima on važi kako za cilindar veoma velike visine, tako i za disk jako male visine.



Slika 2.28:

Lopta

Ako zamislimo da smo loptu izdelili na tanke slojeve (diskove) kao na slici, pri čemu je moment inercije svakog od njih $dI_V = \frac{1}{2}r^2 dm$, ukupan moment inercije lopte će biti suma, odnosno integral[46]

$$I = \int dI_V = \int \frac{1}{2} r^2 dm. \tag{2.154}$$

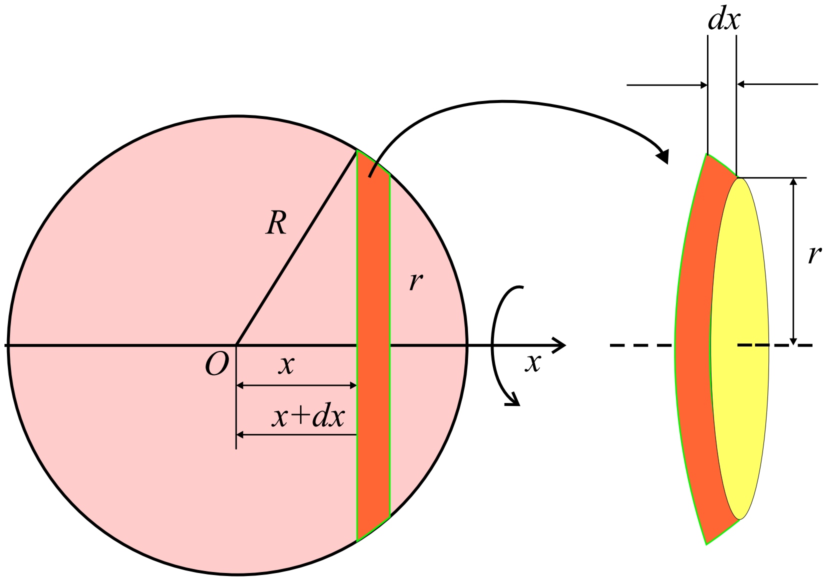
Sa slike se vidi da se veličine koje se pojavljuju u integralu mogu zapisati kao $r^2 = R^2 - x^2$, $dm = \rho dV$, pri čemu je zapremina proizovljnog diska čiji je poluprečnik r a visina dx, jednaka $dV = \pi r^2 dx = \pi(R^2 - x^2)dx$. U skladu sa time prethodni integral postaje

$$I = \int \frac{1}{2} * R^2 - x^2)\rho\pi(R^2 - x^2)dx = \frac{1}{2}\pi\rho \int (R^2 - x^2)^2 dx.$$

Kako je integraljenje potrebno izvršiti po celoj lopti granice integrala su $(-R, R)$, pa je

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2x^2 + x^4)dx = \frac{1}{2}\pi\rho \left[R^4 x - \frac{2R^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-R}^{R},$$

[46]Integracija se vrši po diskovima na koje smo izdelili loptu.



Slika 2.29: Lopta i njen isečak.

što nakon sredjivanja daje

$$I = \frac{8}{15}\pi\rho R^5.$$

Kako je gustina lopte

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

prethodni izraza postaje

$$I = \frac{2}{5}mR^2. \tag{2.155}$$

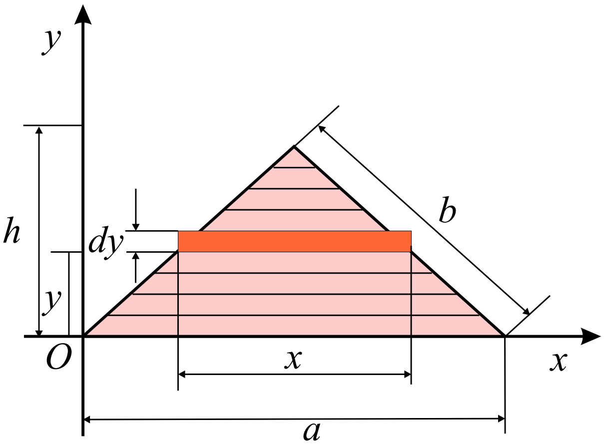
Trougao

Posmatrajmo jednakokraki trougao, mase m, dužine kraka b, koji rotira oko osnovice dučine a. Podelimo u mislima trougao na trake dužine x i mase dm.

Iz sličnosti trouglova se vidi da je

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{y}.$$

Ako je masa jedinice površine trougla $\sigma = \frac{m}{1/2ah}$ (h je visina trougla jednaka



Slika 2.30: Ravnokraki trougao koji rotira oko base, odnosno x ose.

$h = \sqrt{b^2 - (a/2)^2})$ masa uočene trake je

$$dm = \sigma dS = \sigma x dy = \frac{2m}{ah} x dy,$$

a njen moment inercije u odnosu na x osu

$$dI_x = dmy^2 = \frac{2m}{ah} xy^2 dy = \frac{2m}{h^2}(h-y)y^2 dy.$$

Moment inercije celog trougla se dobija sabiranjem momenata inercije svih traka, odnosno integraljenjem

$$I = \int dI = \frac{2m}{h^2} \int_0^h (h-y)y^2 dy,$$

što daje

$$I = \frac{2m}{h^2}\left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{m}{24}(4b^2 - a).$$

Za slučaj jednakostraničnog trougla ($a = b$) se dobija

$$I = \frac{1}{8} ma^2.$$

Primer: Gustina Zemlje na rastojanju r od centra je opisana izrazom

$$\rho(r) = [14,2 - 11,6\frac{r}{R}] \times 10^3 kg/m^3$$

gde je R poluprečnik Zemlje. Pokazati da je moment inercije Zemlje, oko ose koja prolazi kroz centar, $I = 0,330 mR^2$, .

2.17 Numeričko modelovanje u dinamici čestice

Kao što je moglo da se vidi u prethodnim poglavljima, proučavanje dinamike čestice se svodi na odredjivanje konačnih jednačina kretanja, odnosno pronalaženje zavisnosti vektora položaja od vremena

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z, \tag{2.156}$$

a kada je ona poznata brzina i ubrzanje se mogu naći kao odgovarajući izvodi

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \tag{2.157}$$

Kako je ubrzanje posledica primenjenih sila na česticu, bilo kakva analiza kretanja sistema započinje odredjivanjem rezultujuće sile koja deluje na česticu.

Sve do sada smo medjutim koristili takozvani *analitički metod* za odredjivanje oblika ubrzanja, brzine i vektora položaja. Korisno je rekapitulirati metodologiju odredjivanja ovih veličina:

(1) Saberu se sve sile da se dobije rezultujuća sila $\vec{F}$,

(2) Uz pomoć rezultujuće sile odredi se ubrzanje $\vec{a} = \vec{F}/m$,

(3) Na osnovu poznatog ubrzanja se odredjuje zavisnost brzine od vremena rešavanjem diferencijalne jednačine $d\vec{v}/dt = \vec{a}$,

(4) Na osnovu tako odredjene brzine, nalazi se zavisnost vektora položaja od vremena $\vec{r} = \vec{r}(t)$ rešavanjem diferencijalne jednačine $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$.

Kako se uvek radi o vektorskim veličinama u praktičnom radu se one projektuju na koordinatne ose pa se navedena procedura svodi na odredjivanje tri komponente sile, ubrznja, brzina i vektora položaja, a u slučaju da se čestica kreće u jednoj dimenziji, veličine od interesa su $F, a = \frac{F}{m}, \frac{dv}{dt} = a, \frac{dx}{dt} = v$.

Analitički metod je moguće sprovesti samo u ograničenom broju slučajeva (ovo odredjujeno oblik rezultujuće sile). Situacije sa kojima se srećemo u prirodi su medjutim obično jako komplikovane što onemogućava egzaktno rešavanje diferencijalnih jednačina koje se dobijaju u postupku nalaženja konačnih jednačina kretanja. U takvim sitacijama primenjuje se procedura koja se zove *numeričko modelovanje*. Najprostiji numerički model se zove Ojlerov.[47]

---

[47] Leonard Ojler, veliki Švajcarski matematičar (1707-1783.).

2.17.1 Ojlerov metod

U Ojlerovom metodu za rešavanje diferencijalnih jednačina, izvodi se aproksimiraju odnosom konačnih promena odgovarajućih veličina. Tako je na primer za slučaj malog priraštaja vremena Δt veza izmedju brzine čestice i njenog ubrzanja

$$a(t) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \tag{2.158}$$

Na taj način je brzina čestice na kraju vremenskog intervala Δt približno jednaka brzini $v(t)$ na početku intervala kojoj treba dodati sabirak koji je jednak proizvodu ubrzanja u toku tog intervala i intervala vremena Δt:

$$v(t+\Delta t) \approx v(t) + a(t)\Delta t. \tag{2.159}$$

Kako se ubrzanje u principu menja sa vremenom[48], dobijena vrednost za brzinu $v(t+\Delta t)$ je utoliko tačnija što je vremenski interval Δt kraći, jer što je on manji i promena ubrzanja unutar njega je sve manja i manja.

Položaj materijalne tačke $x(t+\Delta t)$ na kraju intervala vremena Δt može da se nadje na analogan način:

$$v(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{2.160}$$

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + v(t)\Delta t. \tag{2.161}$$

Pazljiv čitaoc će primetiti da ovom izrazu nedostaje sabirak oblika $\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$ (koji postoji u egzaktnom rešenju problema), medjutim on nije uključen u izraz za koordinatu u Ojlerovom metodu jer je veličina Δt veoma mala tako da je sabirak koji bi sadržao $(\Delta t)^2$ bio mnogo manji od sabirka koji ga sadrži na prvom stepenu te je stoga zanemarljiv.

Ako je poznato ubrzanje u nekom momentu vremena t, brzina čestice i njen položaj u prostoru se mogu naći primenom jednačina (2.159) i (2.161). Račun se dalje sprovodi u koracima u cilju odredjivanja brzine i položaja u bilo kom docnijem momentu vremena. Ubrzanje je odredjeno poznavanjem rezultujuće sile koja deluje na telo koja, uopšteno govoreći, može da zavisi od konfiguracione koordinate x, brzine i vremena

$$a(x, v, t) = \frac{F(x, v, t)}{m}. \tag{2.162}$$

Korak	Vreme	Položaj	Brzina	Ubrzanje
0	t_0	x_0	v_0	$a_0 = F(x_0, v_0, t_0)/m$
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$	$x_1 = x_0 + v_0\Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0\Delta t$	$a_1 = F(x_1, v_1, t_1)/m$
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$x_2 = x_1 + v_1\Delta t$	$v_2 = v_1 + a_0 1\Delta t$	$a_2 = F(x_2, v_2, t_2)/m$
.	.	.	.	.
n	t_n	x_n	v_n	a_n

Tabela 2.1:

Uobičajeno je da se skup numeričkih rešenja numeriše koracima, kao što je prikazano u narednoj tabeli

Ovaj proračun se takodje može vršiti unekom od programskom jeziku ili uz primenu gotovih komercijalnih programa. Nakon unošenja podataka u tabelu, može se nacrtati grafik zavisnosti brzine od vremena da bi se kretanje moglo da vizuelizuju.

Jedna od prednosti Ojlerovog metoda je ta što dinamika ostaje jasno istaknuta - veze izmedju ubrzanja i sile, brzine i ubrzanja, položaja čestice i brzine, su jasne, štaviše one su srž proračuna.

Ojlerov metod je potpuno pouzdan za jako male intervale vremena ali je u praktičnom računo nužno izabrati neki konačan korak priraštaja vremena. Za tako odabranu vrednost Δt, jednačina (2.159) ostaje u važnosti , ukoliko se može smatrati sa dovoljno velikom tačnošću da je ubrzanje konstantno. Odabir odgovarajućeg priraštaja je odredjen dinamikom čestice i ostaje isti tokom konkretnog proračuna. Veličina ovog priraštaja ima uticaj na tačnost rezultata ali ovo nije lako odrediti ukoliko se ne zna analitičko rešenje. Jedan od metoda za odredjivanje pouzdanosti primene Ojlerovog metoda je ponavljanje proračuna sa manjom vrednošću priraštaja vremena i uporedjivanje tako dobijenoh rezultata sa prethodnim. Ukoliko se ova dva rezultata slažu sa odredjenim brojem značajnih cifara može se zaključiti da je rezultat dobijen pouzdan sa odredjenom tačnošću.

2.18 Primeri i zadaci

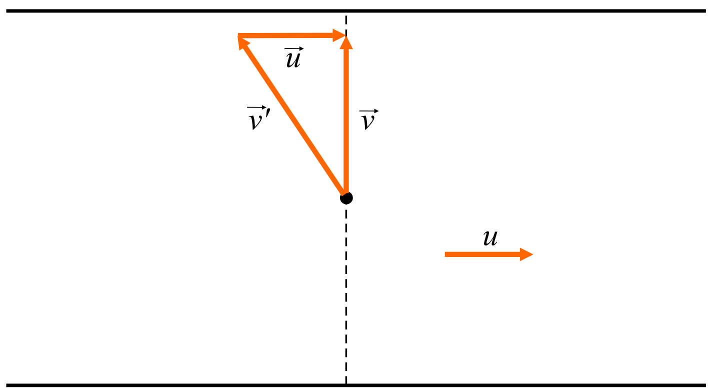
1. Od plovka koji miruje na sredini široke reke (privezan za rečno dno) otišla su dva čamca. Oni se, u odnosu na obalu, kreću duž uzajamno

[48]Prethodna jednačina je potpuno tačna ukoliko je ubrzanje konstantno.

normalnih pravaca - jedan u pravcu rečnog toka, a drugi popreko. Kada se udalje na ista rastojanja od plovka, čamci se vraćaju nazad. Naći odnos vremena kretanja ovih čamaca od odlaska do povratka ako je brzina svakog čamca u odnosu na vodu 1,2 puta veća od brzine vode.

◇ Neka je l rastojanje do koga se svaki čamac udalji od plovka. Čamcu koji se kreće u pravcu rečnog toka potrebno je vreme $t_1 = \frac{l}{v'-u}$ kada ide uzvodno i $t_2 = \frac{l}{v'+u}$ kada ide nizvodno (u je brzina vode, a v' brzina čamca u odnosu na vodu). Dakle, ukupno vreme kretanja tog čamca je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{v'-u} + \frac{l}{v'+u} = \frac{2lv'}{v'^2-u^2} = \frac{2l\cdot 1,2u}{1,44u^2-u^2} = \frac{2,4l}{0,44u}.$$



Slika 2.31: .

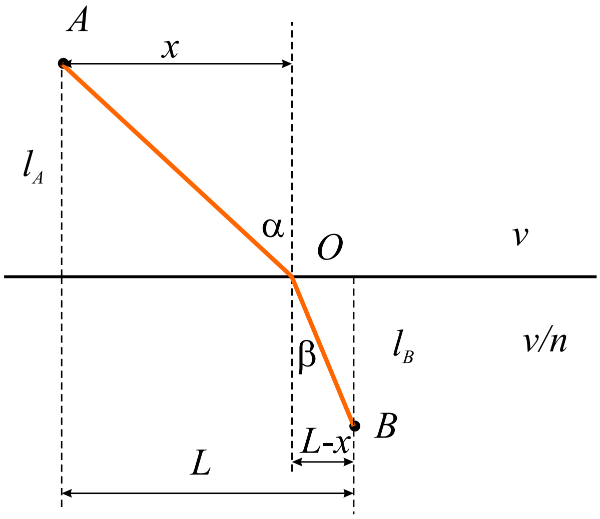
Da bi se drugi čamac kretao u pravcu normale na obalu, njegova brzina u odnosu na vodu ($\vec{v}'$) mora biti usmerenja pod nekim uglom u odnosu na tu normalu tako da je $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$. Po Pitagorinoj teoremi tada je brzina čamca u odnosu na obalu $v = \sqrt{v'^2 - u^2}$. Isto će važiti i kada se čamac bude vraćao ka plovku, pa je ukupno vreme koje je njemu potrebno da ode do mesta udaljenog za l i vrati se

$$t' = \frac{2l}{\sqrt{v'^2-u^2}} = \sqrt{2}lu\sqrt{1,44-1} = \frac{2l}{u\sqrt{0,44}}.$$

Iz ovih rezultata sledi da je traženi odnos vremena

$$\frac{t'}{t}\frac{1,2}{\sqrt{0,44}} = 1,88.$$

2. Tačka A nalazi se na asfaltiranoj aerodromskoj pisti oblika pravougaonika a tačka B na livadi pored nje. Brzina automobila ne livadi je n puta manja od one koju ima na pisti. Da bi se od A do B došlo za najmanje vreme, potrebno je izabrati maršrutu prikazanu na slici. Odrediti odnos izmedju uglova α i β.



Slika 2.32: .

◇ Vreme potrebno automobilu da dodje iz tačke A u tačku B, preko tačke O je zbir vremena t_1 potrebnog da dodje iz tačke A u tačku B krećući se brzinom $v_1 = v$ i vremena t_2 potrebnog da iz tačke O dodje u tačku B krećući se brzinom $v_2 = \frac{v}{n}$, odnosno

$$t = t_1 + t_2.$$

Sa slike se za ova dva vremena dobija

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + l_A^2}}{v}, \quad t_2 = \frac{n\sqrt{(L-x)^2 + l_B^2}}{v},$$

pa je ukupno vreme kretanja

$$t = \frac{1}{v}\left(\sqrt{x^2 + l_A^2} + n\sqrt{(L-x)^2 + l_B^2}\right).$$

Ovaj izraz odredjuje vreme potrebno za prelaženje datog puta kao funkciju rastojanja tačke A od normale na granicu asfaltnog dela i livade postavljene na tačku O, $t = t(x)$. Potrebno je odrediti kada ova funkcija ima minimum, a za to je potrebno da njen prvi izvod bude jednak nuli. Prvi izvod je

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + l_A^2}} - n\frac{L - x}{\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}}\right),$$

odakle, imajući u vidu da je $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+l_A^2}}$ i $\sin\beta = \frac{L-x}{\sqrt{l_B^2+(L-x)^2}}$, uz uzlov da je $\frac{dt}{dx} = 0$, dobijamo

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Primetimo da rezultat ima formu zakona prelamanja svetlosti prilikom njenog prelaska iz optički redje u optički gušću sredinu. Ovo nije iznenadjenje jer se svetlost upravo kreće po putanjama duž kojih joj treba minimalno vreme za prelaženje odredjenog puta.

3. Saobraćaj je u nekoj ulici organizovan tako da su semafori postavljeni na svakom delu puta dužine $l = 1$ km. Rad semafora je sinhronizovan tako da vozač mora da zaustavlja automobil na svakom semaforu, provodeći u proseku $\tau = 1$ min čekajući da se upali zeleno svetlo.

   a) Kolika je srednja brzina v_{sr} automobila ako se na putu izmedju dva semafora kreće konstantnom brzinom $V = 60$ km/h?

   b) Kako će se izmeniti srednja brzina ako se brzina kretanja izmedju semafora poveća duplo?

   c) Kolika je, za date uslove, najveća moguća srednja brzina kretanja automobila?

   $\diamond$ Neki put s auto predje, ukoliko se semafori ne pale, za vreme

$$t_s = \frac{s}{V}.$$

Ukoliko se na tom putu pale semafori, automobil se zaustavlja s/l puta, za v sta mu je potrebno vreme

$$t_1 = \tau\frac{s}{l},$$

a ukupno vreme koje je potrebno autu da predje put s je

$$t = t_s + t_1 = \frac{s}{V} + \tau\frac{s}{l} = s\left(\frac{l + V\tau}{Vl}\right).$$

Srednja brzina je prema tome

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{V}{1 + \frac{V\tau}{l}}.$$

a) Srednja brzina za brzinu $V = 60$ km/h se lako dobija iz prethodne jednačine i iznosi $v_{sr} = 30$ km/h.

b) Srednja brzina za duplo veću brzinu kretanja izmedju semafora, odnosno za $V = 120$ km/h je $v_{sr} = 40$ km/h, odakle može da se zaključi da se srednja brzina mnogo sporije povećava od brzine kretanja izmedju semafora.

c) Najveća moguća brzina kretanja se dobija za slučaj kada $V \to \infty$ i jednaka je

$$v_{sr} = \lim_{V\to\infty} \frac{V}{1 + \frac{V\tau}{l}} = \frac{l}{\tau},$$

odnosno $v_{sr} = 60$ km/h, što znači da grafik zavisnosti $v_{sr}(V)$ ima horizontalnu asimptotu za navedenu brzinu.

4. Materijalna tačka se kreće u ravni po zakonu $x = A\sin\omega t$, $y = A(1 - \cos\omega t)$, gde je $\omega, A = const > 0$. Odrediti put koji tačka predje za vreme τ, kao i ugao θ izmedju njenih vektora brzine i ubrzanja.

$\diamond$ Komponente vektora brzine i ubrzanja tačke su

$$v_x = \dot{x} = A\omega\cos\omega t, \quad v_y = \dot{y} = A\omega\sin\omega t,$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -A\omega^2\sin\omega t, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = A\omega^2\cos\omega t,$$

dok su intenziteti ove dve fizičke veličine

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = A\omega = const, \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = A\omega^2 = const$$

te je prema tome predjeni put prosto jednak proizvodu brzine i vremena

$$s = v\tau = A\omega\tau.$$

Do ugla izmedju brzine i ubrzanja se može doći ako se nadje njihov skalarni proizvod $\vec{v} \cdot \vec{a} =$ koji je sa jedne strane jednak $v_x a_x + v_y a_y$ a sa druge, prema definiciji skalarnog prozivoda $va\cos\theta$. Ako se iskoristi prvi oblik, dobija se

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x a_x + v_y a_y = A\omega\cos\omega t(-A\omega^2 \sin\omega t) + A\omega \sin\omega t A\omega^2 \cos\omega t = 0$$

odakle, obzirom da su intenziteti ova dva vektora različiti od nule, sledi da je $\cos\theta = 0$, odnosno da je ugao izmedju brzine i ubrzanja prav.

5. Telo mase 4 kg ima brzinu $3\vec{e}_x$ m/s u nekom trenutku. Nakon 8 s njegova brzina je $(8\vec{e}_x + 10\vec{e}_y)$ m/s. Pretpostavljajući da je sila koja deluje na telo konstantna odredite njene komponente i intenzitet.

   ◇

6. Sila oblika $\vec{F} = (8\vec{e}_x - 4t\vec{e}_y)N$ deluje na telo mase 2 kg, koje je u $t = 0$ mirovalo. U kom vremenskom trenutku će ono imati brzinu 15 m/s? Koliki će put do tada preći?

   ◇ Kako su komponente sile $F_x = 8$ i $F_y = -4t$, komponente ubrzanja su $a_x = F_x/m$ i $a_y = F_y/m$. Komponente brzine su

$$v_x = \int_0^t a_x dt = \frac{F_x}{m} t = 4t$$

   i

$$v_y = \int_0^t a_y dt = \int_0^t \frac{-4t}{m} dt = -\frac{2}{m} t^2 = -t^2.$$

   Kvadrat intenziteta brzine je prema tome

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (4t)^2 + (t^2)^2 = 16t^2 + t^4,$$

   a vremenski trenutak u kome ona ima odredjenu vrednost se može dobiti iz ovog izraza njegovim rešavanjem po vremenu koje daje za traženo vreme $t = 3s$. Na osnovu toga je predjeni put

$$s = \int_0^3 \sqrt{(t^4 + 16t^2)} dt = ...$$

7. Materijalna tačka mase $m = 0,1$ kg počinje da se kreće pod dejstvom sile $\vec{F} = 2t\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y$. Odrediti rad koji se izvrši nad materijalnom tačkom za vreme $\tau = 2$ s od početka kretanja.

◇ Ubrzanje materijalne tačke je jednako

$$\vec{a} = \frac{2t\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y}{m}$$

a integracijom ovog izraza po vremenu, dobija se da je brzina materijalne tačke (uzeto je da je ona počela da se kreće iz stanja mirovanja pod dejstvom navedene sile)

$$\vec{v} = \frac{t^2\vec{e}_x + t^3\vec{e}_y}{m}.$$

Sila razvija snagu

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = (2t\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y)\cdot(\frac{t^2\vec{e}_x + t^3\vec{e}_y}{m}) = \frac{2t^3 + 3t^5}{m},$$

a rad se može, obzirom da je snaga $P = \frac{dA}{dt}$, dobiti kao integral snage po vremenu

$$A = \int_0^{\tau} Pdt = \frac{1}{m}\int_0^{\tau}(2t^3 + 3t^5)dt = \frac{1}{2m}(\tau^4 + \tau^6) = 4\cdot 10^2 \text{ J}.$$

8. Na telo deluje sila

$$\vec{F} = 4x\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y$$

i pomera ga duž x ose iz koordinatnog početka u tačku $x = 5$ m. Odrediti rad koji je izvršila data sila.

◇ Kako je sila pomerila telo samo duž x ose, infinitezimalni pomeraj tela je u ovom slučaju $d\vec{r} = dx\vec{e}_x$ pa je elementaran rad

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (4x\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y)\cdot dx\vec{e}_x = 4x\vec{e}_x\cdot dx\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y\cdot dx\vec{e}_x = 4xdx.$$

Rad na pomeranju tela od tačke 0 do tačke $x = 5$ je prema tome

$$A = \int_0^5 4xdx = \left.\frac{4x^2}{2}\right|_0^5 = 50 \text{ J}.$$

9.

10. Štap dužine 30 cm ima linijsku gustinu $\lambda(x) = 50\frac{g}{m} + 20x\frac{g}{m^2}$ gde je x rastojanje od jednog kraja štapa, izraženo u metrima. Odrediti masu štapa i položaj njegovog centra masa.

    $\diamond$ Kako je masa delića štapa dužine dx jednaka $dm = \lambda dx$, masa štapa je jednaka integralu

$$m = \int_0^L \lambda(x)dx = \int_0^L [50 + 20x]dx = 50x\Big|_0^L + 20\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = 50L + 10L^2,$$

    što nakon zamene daje $m = 15,9$ g. Položaj centra masa je odredjen izrazom

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\int_0^L xdm = \frac{1}{m}\int_0^L \lambda(x)dx = \frac{1}{m}\int_0^L [50 + 20x]xdx$$

    koji nakon integracije i sračunavanja daje

$$x_{CM} = \frac{1}{m}[50\frac{x^2}{2}\Big|_0^L + 20\frac{x^3}{3}\Big|_0^L] = \frac{1}{m}[25L^2 + \frac{20}{3}L^3] = 0,153m.$$

11. Motorni čamac isključuje motor pri brzini od 10 m/s i prilazi obali. Jednačina po kojoj se menja njegova brzina u tom periodu kretanja je $v = v_i e^{-ct}$, gde je v_i njegova početna brzina (u momentu kada je isključen motor) a c je neka konstantna. Nakon vremena od 20 s brzina čamca je jednaka 5 m/s. Odrediti konstantu c, brzinu u $t = 40$ s, zavisnost ubrzanja od vremena i oblik sile koja deluje na čamac.

    $\diamond$ Konstanta c se može odrediti na osnovu izraza za brzinu, koji može da se zapiše kao $\frac{v_i}{v} = e^{ct}$, što nakon logaritmovanja daje

$$\ln\frac{v_i}{v} = ct, \Rightarrow c = \frac{1}{t}\ln\frac{v_i}{v} = ...$$

    Brzina u vremenskom trenutku $t = 40$ s je

$$v(t = 40s)v_i e^{-c40s} = ...$$

    Do izraza za ubrzanje se dolazi nalaženjem izvoda po vremenu brzine

$$a = \frac{dv}{dt} = (-c)v_i e^{-ct} = -cv,$$

na osnovu čega je oblik sile ($ma = F$) odredjen izrazom

$$F = -mcv = -bv,$$

gde je sa b označena nova konstanta, u ovom slučaju jednaka proizvodu mase tela m i kostante c.

12. Telo mase $m = 4$ kg se kreće duž x ose pri čemu mu se koordinata sa vremenom menja po zakonu $x = t + 2t^3$, gde je x izraženo u metrima a vreme u sekundama. Odrediti njegovu kinetičku energiju, ubrzanje, silu koja deluje na njega, kao i rad te sile od trenutka $t = 0$ s do $t = 2$ s.

   $\diamond$ Kako je brzina tela

   $$v = \dot{x} = 1 + 6t^2$$

   kinetička energija, $E_k = \frac{mv^2}{2}$ je,

   $$E_k = \frac{m}{2}(1 + 6t^2)^2.$$

   Ubrzanje je prvi izvod brzine po vremenu, odnosno

   $$a = \dot{v} = 12t,$$

   pa je sila

   $$F = 12mt.$$

   Snaga se može odrediti kao proizvod sile i brzine tela

   $$P = Fv = 12mt(1 + 6t^2),$$

   a kako je elementaran rad $dA = Fdx = 12mt(dt + 6t^2dt)$, ukupna rad u naznačenom vremenskom intervalu je

   $$A = 12m\int_0^6 (t + 6t^3)dt = 12m(\frac{t^2}{2} + \frac{6t^4}{4})\Big|_0^2 = ...$$

13. Loptica mase 2 grama, počinje da se kroz ulje kreće pod uticajem sile Zemljine teže, polazeći iz stanja mirovanja. Nakon nekog vremena dostiže graničnu brzinu od 5 cm/s^2. Odrediti konstantu τ kao i vreme nakon koga brzina dostiže 90% od granične vrednosti brzine.

$\diamond$ Kako je granična brzina odredjena izrazom $v_g = mg/b$, konstanta b je

$$b = \frac{mg}{v_\tau} = 392\text{g/s}.$$

Vremenska kontanta τ je

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{2\text{g}}{392\text{g/s}} = 5,1 \cdot 10^{-3}\text{s}.$$

Brzina lotpice, u funkciji vremena, je predstavljena jednačinom (2.136). Da bi našli vreme za koje ona dostigne 90% graničine brzine, potrebno je u navedenu jednačinu staviti da je $v = 0,9v_g$ i rešiti je po vremenu:

$$0,9v_g = v_g(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = 0,9$$

$$e^{-t/\tau} = 0,1$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0,1) = -2,3$$

$$t = 2,3\tau = 11,7 \cdot 10^{-3}\text{s} = 11,7\text{ms}.$$

Kao što rezultat pokazuje, posmatrana loptica dostiže graniv cnu vrednost brzine za veoma kratko vreme.

14. Kolika je brizna loptice iz prethodnog zadatka u trenutku $t = 11,3$ ms? Uporedi ovu brzinu sa brzinom koju bi ta ista loptica imala u istom momentu vremena kada bi padala samo pod uticajem gravitacije.

    $\diamond$ Brzina loptice prilikom kretanja kroz ulje je 4,5 cm/s, dok bi pri slobodnom padu bila 11,5 cm/s.

15. Tanak čelični lanac sa vrlo malim karikama, dužine $l = 1$ m i mase $m = 10$ g, leži na horizontalnom stolu. Lanac je razvučen i položen na sto pod pravim uglom u odnosu na njegov kraj. Kraj lanca bliži kraju stola se povlaži lagano tako da deo lanca počinje da visi sa stola. Kada je deo lanca koji se nalazi na stolu činio $\eta = 0,725$ od dužine lanca, on je samostalno počeo da klizi. Smatrajući da je masa lanca rasporedjena homogeno po du zini, odrediti: a) koeficijent trenja izmedju lanca i stola, b) brzinu lanca u momentu kada je u potpunosti skliznuo sa stola.

a) Lanac po?inje da klizi u momentu kada je ispunjen uslov da je sila tee koja deluje na deo lanca koji visi (od duine lanca) jednaka sili trenja (koeficijent trenja neka bude ozna?en sa) koja deluje na onaj deo lanca koji je ostao na stolu

b) U momentu vremena kada je duina dela lanca koji lei na stolu jednaka ( ), ubrzanje lanca je odre?eno jednako?u . Nakon skra?ivanja mase , za ubrzanje se dobija . Imaju?i u vidu da je modul brzine lanca (jer se smanjuje sa vremenom), ubrzanje je , odakle je . Integracijom leve i desne strane se dobija

Glava 9

Dodatak

9.1 Dimenziona analiza

Kao što je poznato, fizičke veličine mogu da imaju dimenzije ili pak da budu bezdimenzionalne.

Veličina ima dimenziju ako njena brojna vrednost zavisi od izbora sistema jedinica. Na primer, interval vremena od izlaska do izlaska Sunca možemo da izrazimo kao 1 dan, 24 h, 1 440 minuta ili 86 400 s. Brojna vrednost se menja u zavisnosti od izbora jedinice za vreme iako je stalno reč o jednom te istom intervalu vremena.

Obzirom na prethodno odredjenje fizičke veličine sa dimenzijom, fizička veličina je bezdimenzionalna ako joj vrednost ne zavisi od izbora sistema jedinica. Na primer, visina Mont Everesta ($h = 8,848$ km) i poluprečnik Zemlje ($R = 6\,370$ km) su očigledno veličine sa dimenzijama, ali njihov *odnos*, $h/R = 0,0014$, je bezdimenzionalna veličina, i prema tome, nezavisna od sistema jedinica.

Dimenzija fizičke veličine u stvari ukazuje na njenu fizičku prirodu. Naime, nezavisno od toga da li *rastojanje* koje merimo izražavamo u stopama ili metrima, reč je o merenju *dužine*. U tom smislu se kaže da je dimenzija (fizička priroda) rastojanja *dužina*.

Simboli koji se obično koriste da se označe dimenzije fizičkih veličina *dužina*, *masa* i *vreme* su L, M i T. Fizičke veličine koje imaju dimenzije, medjusobnim množenjem i deljenjem daju nove fizičke veličine.[1] Na primer,

[1]Kada je reč o sabiranju i oduzimanju te operacije mogu da se rade samo sa veličinama koje imaju iste dimenzije.

odnos predjenog rastojanja i intervala vremena daje novu fizičku veličinu (brzinu), čija je dimenzija L/T.

Ako želimo da prikažemo dimenziju neke fizičke veličine obično se koriste uglaste zagrade [ ]. Na primer, ako želimo da označimo dimenziju brzine v, pisaćemo $[v]$ =L/T. Dimenzija površine, S, je $[S] = \mathrm{L}^2$, zapremine, V, $[V] = \mathrm{L}^3$ a ubrzanja a je $[a] = \mathrm{L}/\mathrm{T}^2$.

Fizički zakon i formula kojom je izražen, ne smeju da zavise od sistema jedinica. To je potpuno prirodno jer, zakoni prirode uspostavljaju vezu izmedju veličina koje su postojale do sada a postojaće i posle nas, dok je sistem jedinica stvar dogovora ljudi. Odavde sledi veoma važan zaključak: **obe strane bilo koje jednačine moraju da imaju iste dimenzije**.

Iz tog razloga je dobro da uvek kada napišemo neku relaciju, proverimo njenu dimenzionalnu zasnovanost, odnosno jednakost levi i desne strane u pogledu dimenzionalnosti. Ova procedura se naziva dimenzionalnom analizom i uvek može da se primeni.[2] U okviru dimenzionalne analize, dimenzije fizičkih veličina se tretiraju kao algebarske promenljive.

Recimo da nas zanima formula koja povezuje put s koje je prešao automobil za vreme t, krećući iz stanja mirovanja konstantnim ubrzanjem a. Pretpostavićemo da su ove tri veličine povezani relacijom oblika

$$s = C a^{\alpha} t^{\beta},$$

odnosno predjeni put je proporcionalan ubrzanju na α i vremenu kretanja na stepen β (C je bezdimenzionalna konstanta, odnosno neki broj). Ovde su α i β nepoznati koeficijenti koje ćemo odrediti iz uslova da su dimenzije leve i desne strane jednake. Leva strana jednačine je u pogledu dimenzije dužina, tako da i dimenzija desne mora da bude dužina, odnosno

$$[a^{\alpha} t^{\beta}] = \mathrm{L} = \mathrm{L}^1.$$

Kako je dimenzija ubrzanja L/T^2 a vremena T, dobija se

$$\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\right)^{\alpha} \mathrm{T}^{\beta} = \mathrm{L}^1,$$

$$\mathrm{L}^{\alpha} \mathrm{T}^{\beta - 2\alpha} = \mathrm{L}^1.$$

[2]Dimenzonalna analiza nam može pomoći u najmanju ruku za svodjenje pamćenja formula na najmanju moguću meru.

Da bi obe strane jednačina imale iste dimenzije, eksponenti moraju biti isti. Na desnoj strani se pojavljje samo L a ne i T, ali to u stvari znači da ga možemo dopisati dignuto na nulu, što znači da su odgovarajuće jednačine za eksponenete: $\beta - 2\alpha = 0$ i $\alpha = 1$, odakle se odmah dobija da je $\beta = 2$. Time je odredjena funkcionalna zavisnost predjenog puta s, ubrzanja a i vremena t kao $x \propto at^2$. Ovaj reuzultat se, od tačnog rezultata za ovaj tip kretanja $s = \frac{1}{2}at^2$, razlikuje samo za faktor 2.[3] Po pravilu su bezdimenzionalne konstante koje se pojavljuju u fizičkim zakonima ($\sqrt{2}$, $1/2$, π, ...) ni prevelike ni premale tako da dimenzionalna analiza može da posluži i da se oceni i red veličine fizičkih veličina.

Prilikom primene dimenzionalne analize treba biti oprezan i imati odredjeno iskustvo. U principu su moguća dva, prikrivena, problema. Prvi se tiče izbora fizičkih veličina od kojih može da zavisi fizička veličina čiju vezu sa njima zapravo tražimo. Da bi ga rešili potrebno je da razumemo fizičke zakone i pojave koje su važne za razmatranje posmatranog sistema. Drugi problem je postojanje veličina koje mogu da obrazuju bezdimenzionalne faktore u izrazu relacije koju tražimo.

9.1.1 Funkcionalna zavisnost sile otpora sredine pri kretanju tela kroz nju

Koristeći dimenzionalnu analizu, pokušajmo da odredimo silu otpora sredine telu koje se kreće kroz nju. Kao što je već napomenuto, neophodno je odrediti od kojih veličina može da zavisi ova sila. Svakodnevno iskustvo nam kazuje da sa porastom brzine tela v raste i sila otpora sredine, što znači da sila mora da zavisi od nje. Osim toga, tela većeg poprečnog preseka trepe veći otpor od onih sa manjim (primer za ovo je padobran). Iz tog razloga u izraz za silu mora da udje i površia poprečnog preseka S. I na kraju, sila otpora mora da zavisi i od neke veličine koja predstavlja karakteristiku sredine. Ovde odmah nailazimo na problem, a to je, koju karakterisitiku sredine izabrati?

Izgleda prirodno da kao takvu karakteristiku treba izabrati gustinu sredine (vazduha, tečnosti) ρ, jer, što je sredina gušća, to ona više utiv ce na kretanje tela. Prema do sada izrečenom, pretpostavićemo silu otpora sredine u obliku

$$F_\rho = \frac{C}{2} v^\alpha S^\beta \rho^2$$

[3]Budući da je taj faktor bezdimenzionalan njega i nije moguće odrediti na ovaj način.

(množitelj 2 može da se uključi u C ali je izdvojen iz istorijskih razloga). Sila ima dimenzije proizvoda mase i ubrzanja, odnosno $[F]$=LT^{-2}M. Iz uslova jednakosti dimenzija leve i desne strane jednačine za silu dobija se

$$\mathrm{L\,T^{-2}M} = (\mathrm{LT^{-1}})^{\alpha}(\mathrm{L^2})^{\beta}(\mathrm{ML^{-3}})^{\gamma} = \mathrm{L}^{\alpha+2\beta-3\gamma}T^{-\alpha}M^{\gamma},$$

odakle slede jednačine

$$1 = \alpha + 2\beta - 3\gamma,$$

$$-2 = -\alpha,$$

$$1 = \gamma.$$

Njihovo rešenje je $\alpha = 2$, $\beta = 1$ i $\gamma = 1$, pa je tražena formula

$$F_\rho = CS\frac{\rho v^2}{2}. \tag{9.1}$$

Sada može da se postavi pitanje zašto smo za karakteristiku sredine izabrali baš gustinu? Zašto umesto nje da ne uzmemo na primer viskoznost η čija su dimenzije $[\eta]$ = ML^{-1}T^{-1}? Ukoliko uradimo to silu možemo da predstavimo u obliku

$$F_\eta = Bv^{\alpha}S^{\beta}\eta^{\delta}$$

(B je konstanta koja zavisi od oblika tela) čije dimenzije su

$$\mathrm{L\,T^{-2}M} = (\mathrm{LT^{-1}})^{\alpha}(\mathrm{L^2})^{\beta}(\mathrm{ML^{-1}T^{-1}})^{\delta} = \mathrm{L}^{\alpha+2\beta-\delta}T^{-\alpha-\delta}M^{\delta}.$$

Iz sistema jednačina

$$1 = \alpha + 2\beta - \delta,$$

$$-2 = -\alpha - \delta,$$

$$1 = \delta,$$

se dobija $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ i $\delta = 1$, pa je tražena formula

$$F_\eta = B\eta\sqrt{S}v. \tag{9.2}$$

Veličina $\sqrt{S}$ je srazmerna karakterističnoj dimenziji tela L (ukoliko je telo oblika lopte poluprečnika r onda je $\sqrt{S} = r$ dok je $C = 6\pi$)tako da gornji izraz postaje

$$F_\eta = B\eta Lv. \tag{9.3}$$

Formule (9.1) i (9.3) su potpuno različite: u jednoj od njih je zavisnost od brizne kvadratična a u drugoj linearna. Koja je onda tačna? Da bi odgovorili na ovo pitanje morali bi da damo sud o tome koja karakteristika sredine (gustina ili viskoznost) dominiraju u konkretnom problemu koji rešavamo. Kada je dominantna gustina važi izraz (9.1) koji predstavlja silu otpora koja je nastala usled razlike u pritiscima na prednjoj i zadnjoj strani tela, a kada je sila otpora posledica trenja, odnosno viskoznosti, važi izraz (9.1) i (9.3). Ukupna sila koja deluje na telo je kombinacija jedne i druge sile, a kada su brzine tela veoma male, sila trenja proporcionalna prvom stepenu brzine, će biti mnogo veća od sile otpora nastale usled razlike u pritiscima, koja je srazmerna drugom stepenu brzine. Pri velikim brzinama važi suprotan zaključak.

9.2 Algebra

9.2.1 Neke važne formule

Razlomci

1. Množenje razlomaka
$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd},$$
2. Deljenje razlomaka
$$\frac{(a/b)}{(c/d)}=\frac{ad}{bc},$$
3. Sabiranje (oduzimanje) razlomaka
$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

Stepenovanje

$$x^0=1$$
$$x^1=x$$
$$x^m\cdot x^n=x^{m+n}$$
$$\frac{x^m}{x^n}=x^m\cdot x^{-n}=x^{m-n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$
$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Faktorizacija

$$\begin{aligned} ax + ay + az &= a(x + y + z) \quad \text{(zajednički množilac)},\\ a^2 \pm 2ab + b^2 &= (a \pm b)^2 \quad \text{(kvadrat zbira (razlike))},\\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \quad \text{(razlika kvadrata)}.\end{aligned}$$

Kvadratna jednačina

Opšti oblik kvadratne jednačine je

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gde je x nepoznata veličina a a, b i c su brojevi koji predstavljaju koeficijente jednačine. Ova jednačina ima dva rešenja (korena) koji se nalaze po pravilu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kada je $b^2 \geq 4ac$, rešenja kvadratne jednačine su realna.

9.2.2 Linearne jednačine

Linearna jednačina ima opšti oblik

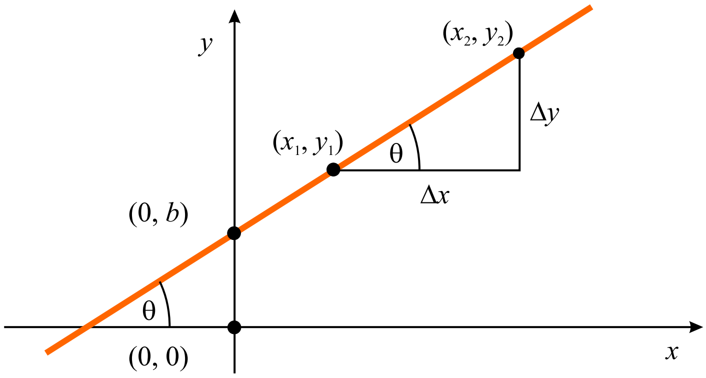
$$y = mx + b, \tag{9.4}$$

gde su m i b konstante. Ova jednačina se naziva linearnom jer je grafik zavisnosti y od promenljive x (i obrnuto) prava linija (slika 9.1).

Veličina b je vrednost y koordinate za koju prava preseca y osu. Konstanta m je pak jednaka nagibu prave linije ka x osi i istvoremeno predstavlja tangens ugla θ koga prava linija zaklapa sa x osom. Ako su poznate koordinate dve bilo koje tačke na pravoj liniji (x_1, y_1) i (x_2, y_2), nagib prave linije se može napisati kao

$$m = \frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta. \tag{9.5}$$

Primetimo da i m i b mogu da imaju i pozitivne i negativne vrednosti. Ukoliko je $m > 0$, prava linija ima pozitivan nagib kao na slici 9.1. Ukoliko je $m < 0$ nagib je negativan.



Slika 9.1: Prava linija nagibnog ugla θ koja na y osi odseca odsečak b.

Logaritmi

Neka je veličina x zapisana kao stepen neke veličine a

$$x = a^y. \tag{9.6}$$

Broj a se u tom slučaju naziva osnova. Logaritam od x u odnosu na osnovu a je jednak izložiocu y u izrazu (9.6), odnosno

$$\log_a x = y. \tag{9.7}$$

U praksi se najčešće koriste dve osnove i to 10 i $e = 2,718...$ (Neperov broj). Ukoliko je osnova logaritma e onda se oni nazivaju prirodnim.

Neke korisne osobine logaritama su

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

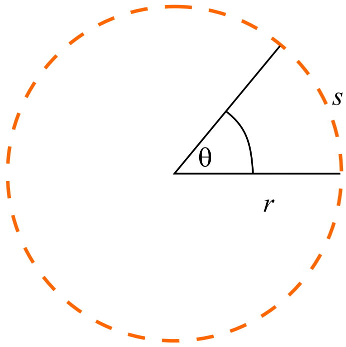
$$\log(a^n) = n \log a$$

$$\ln e = 1$$

9.3 Geometrija

Rastojanje izmedju dve tačke u prostoru sa koordinatama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) je

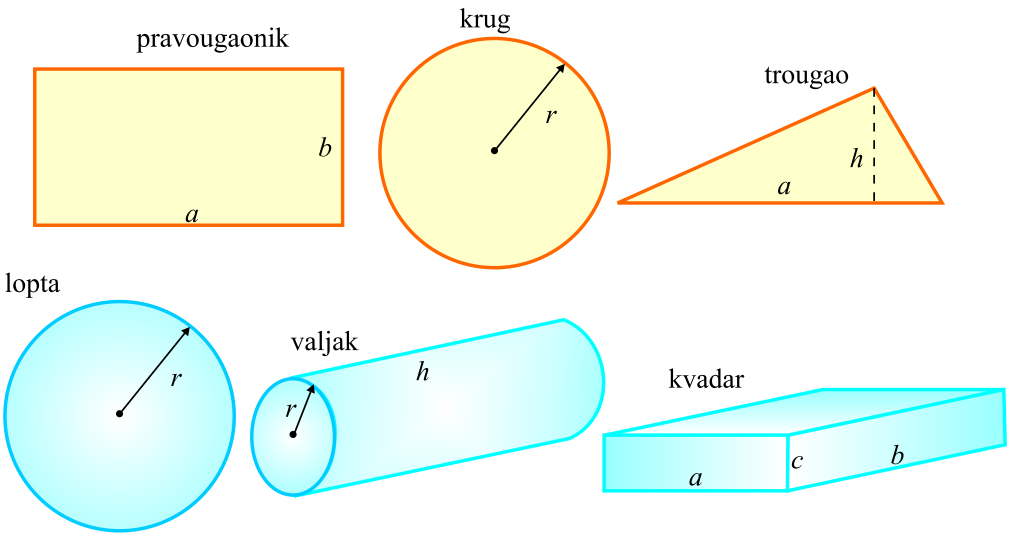
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}. \tag{9.8}$$



Slika 9.2:

Dužina kružnog luka s (slika 9.2) je proporcionalna poluprečniku r sa koeficijentom proporcionalnosti θ (u radijanima):

$$s = r\theta, \quad \theta = \frac{s}{r}. \tag{9.9}$$



Slika 9.3:

Neki korisni izrazi za površine i zapremine:
- površina pravougaonika dužina stranica a i b, $P = ab$,
- krug poluprečnika r, površina $P = \pi r^2$, obim $O = 2\pi r$,
- površina trougla osnove a i odgovarajuće visine h, $P = bh/2$,

- sfera poluprečnika r, površina, $P = \pi r^2$, zapremina $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

- valjak, poluprečnika osnove r a visine h, površina $p = 2\pi rh$, zapremina $V = \pi r^2 h$

- kvadar dužine stranica a, b i c, površina $P = 2(ab + ac + bc)$, zapremina $V = abc$.

Neke korisne jednačine:

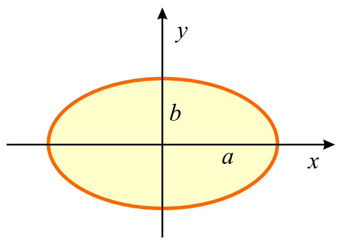
- jednačina prave linije nagiba m koja odseca odsečak dužine b ba y osi je data relacijom (9.4),

- jednačina kružnice poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku je

$$x^2 + y^2 = R^2, \ \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1 \tag{9.10}$$

- jednačina elipse sa centrom u koordinatnom početku je (slika 9.4)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \tag{9.11}$$



Slika 9.4: Elipsa

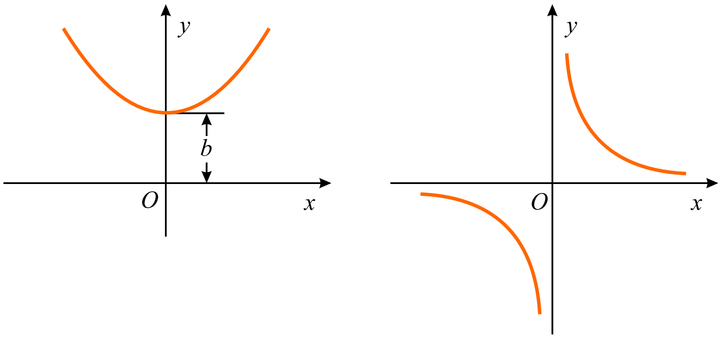
gde su: a dužina velike a b male poluose elipse.

- jednačina parabole koja ima ekstremalnu vrednost u tački $y = b$ je (slika 9.5)

$$y = ax^2 + b, \tag{9.12}$$

- jednačina ravnostrane hiperbole je (slika 9.5)

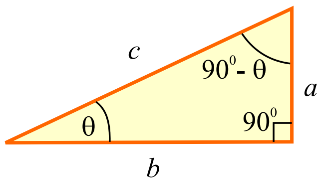
$$xy = const. \tag{9.13}$$



Slika 9.5: Parabola i hiperbola

9.4 Trigonometrija

Oblast matematike koja je bazirana na specijalnim karakteristikama pravouglih trouglova se naziva trigonometrija. Po definiciji, pravougli trougao je onaj koji ima jedan ugao od 90^{O}. Posmatrajmo trougao prikazan na slici 9.6, kod koga je sa a označena kateta koja se nalazi naspram ugla θ, a sa b kateta koja naleže na njega, dok je sa c označena njegova hipotenuza.



Slika 9.6: Pravougli trougao

Tri osnovne trigonometrijske funkcije koje se definišu za takav trougao su funkcije sinus (sin), kosinus (cos) i tangens (tan ili tg), koje su odredjene jednačinama

$$\sin\theta = \frac{a}{c}, \tag{9.14}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{c}, \tag{9.15}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b}. \tag{9.16}$$

Kao četvrta funkcija se često definiše i kotangens (cot) kao recipročna vrednost tangensa, odnosno

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{b}{a}. \tag{9.17}$$

Na osnovu ovih relacija se takodje vidi da važi

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Ukoliko se podje od relacije izmedju kvadrata kateta i kvadrata hipotenuze, odnosno od Pitagorine teoreme

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

dolazi se do osovnog trigonometrijskog identiteta

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \tag{9.18}$$

Sa slike 9.6 se vidi da važe sledeće relacije

$$\sin\theta = \cos(90^{\mathrm{O}} - \theta),$$

$$\cos\theta = \sin(90^{\mathrm{O}} - \theta),$$

$$\cot\theta = \tan(90^{\mathrm{O}} - \theta).$$

Važne osobine trigonometrijskoh funkcija su i:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta,$$

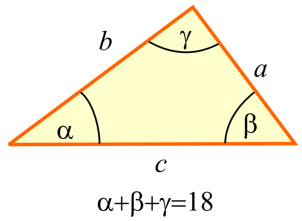
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta.$$

Za bilo koji trougao (slika 9.7), važe sinusna

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{9.19}$$

i kosinusna

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned} \tag{9.20}$$



Slika 9.7: Proizvoljni trougao

teorema.
Neki važni trigonometrijski identiteti:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta,$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$
$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\theta),$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta),$$
$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

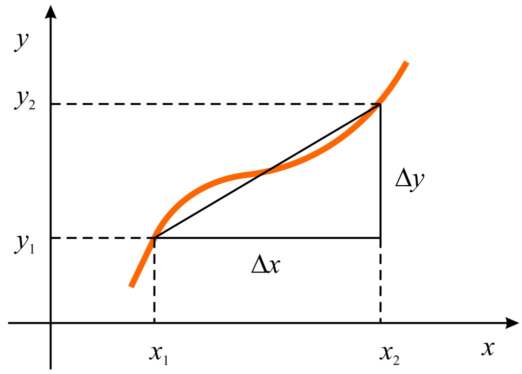
9.5 Diferencijalni račun

Ovu oblast matematike je uveo Njutn u cilju boljeg opisivanja fizičkih pojava. Danas je nemoguće zaobići njenu primenu u proučavanju pojava iz mehanike, termodinamike, molekularne fizike, elektriciteta, magnetizma, ...

Izvod funkcije $y = y(x)$ po promenljivoj x, se definiše kao granična vrednost odnosa priraštaja funkcije $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ i priraštaja Δx promenljive x, kada Δx teži nuli

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}, \tag{9.21}$$

gde su Δy i Δx definisani kao $\Delta x = x_2 - x_1$ i $\Delta y = y_2 - y_1$ (Slika 9.8.).



Slika 9.8:

Ukoliko je funkcija zadata izrazom $y(x) = ax^n$, gde je a konstanta a n bilo koji ceo broj ili razlomak, njen izvod je

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}. \tag{9.22}$$

Primer d1. Neka je funkcija $y(x)$ data izrazom

$$y(x) = ax^3 + bx + c,$$

gde su a i b konstante. Priraštaj funkcije za priraštaj promenljive x za Δx se može dobiti na osnovu

$$y(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c,$$

odnosno

$$y(x + \Delta x) = a(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x + \Delta x) + c,$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + b\Delta x.$$

Zamena ovog izraza u izraz (9.21) daje

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [(3ax^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) + b]$$

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b.$$

9.5.1 Osobine izvoda

Izvod proizvoda dve funkcije. Ako je funkcija $f(x)$ proizvod dve funkcije, recimo $g(x)$ i $h(x)$, izvod funkcije $f(x)$ je

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x)h(x)] = \frac{dg}{dx}h + g\frac{dh}{dx}. \tag{9.23}$$

Izvod zbira dve funkcije. Ako je funkcija $f(x)$ jednaka zbiru dve funkcije, izvod njihovog zbira je jednak zbiru njihovih izvoda

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}. \tag{9.24}$$

Izvod složene funkcije. Ako je $f(x)$ i $x = g(z)$, odnosno $y = f[g(z)]$, izvod funkcije y po nezavisnoj promenljivoj z (dy/dz) je

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz}. \tag{9.25}$$

Drugi izvod. Drugi izvod funkcije y u odnosuu na x je jednak izvodu funkcije dy/dx po x (prvi izvod prvog izvoda). To se obično piše kao

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{9.26}$$

Primer di2. Odrediti izvod funkcije $y = x^3/(x+1)^2$ po x.

Rešenje. Ako se ova funkcija zapiše u obliku $y = x^3(x+1)^{-2}$ i primeni jednačina (9.23), dobija se

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d(x^3)}{dx}(x+1)^{-2} + x^3\frac{d((x+1)^{-2})}{dx} \\ &= 3x^2(x+1)^{-2} + x^3(-2)(x+1)^{-3},\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x^3}{(x+1)^3}.$$

Primer di3. Pokazati da je izvod količnika dve funkcije

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h\frac{dg}{dx} - g\frac{dh}{dx}}{h^2}.$$

Rešenje. *Najpre treba količnik funkcija zapisati kao proizvod* gh^{-1} *pa onda primeniti formule (9.22) i (9.23):*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{d}{dx}(gh^{-1}) = \frac{dg}{dx}h^{-1} + g\frac{d(h^{-1})}{dx} = \frac{dg}{dx}h^{-1} - gh^{-2}\frac{dh}{dx}$$

odakle se sredjivanjem dobija traženi izraz.

9.5.2 Izvodi nekih funkcija

$$\frac{da}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}ax^n = nax^{n-1},$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax},$$

$$\frac{d}{dx}\sin ax = a\cos ax,$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\sin ax,$$

$$\frac{d}{dx}\tan ax = \frac{a}{\cos^2 ax},$$

$$\frac{d}{dx}\cot ax = -\frac{a}{\sin^2 ax},$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}.$$

9.5.3 Razvoj u red nekih funkcija

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots,$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$
$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \cdots,$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Za male vrednosti argumenta, odnosno za $x << 1$, važe sledeći aproksimativni izrazi[4]

$$(1+x)^n \approx 1 + nx, \quad \sin x \approx x,$$
$$e^x \approx 1 + x, \quad \cos x \approx 1,$$
$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x, \quad \tan x \approx x.$$

9.6 Integralni račun

Integraljenje neke funkcije je operacija koja je inverzna operaciji diferenciranja odnosno traženja izvoda funkcije. To se lepo vidi na primeru funkcije

$$f(x) = 3ax^2 + b, \tag{9.27}$$

koja se, kao što smo videli u primeru d1, dobija kao rezultat diferenciranja funkcije

$$y(x) = ax^3 + bx + c.$$

U tom smislu izraz (9.27) može da se napiše kao $f(x) = dy/dx$ odakle formalno sledi da važi

$$dy = f(x)dx = (3ax^2 + b)dx.$$

Iz ove relacije sledi da se funkcija y dobija "sumiranjem" po svim vrednostima funkcije x (y se dobija sabiranjem njenih malih promena odnosno diferencijala dy koje su preko ove relacije u vezi sa diferencijalima nezavisne promenljive

[4]Za trigonometrijske funkcije ovo znači da je $x \leq 0,1$ rad.

x). U matematici se ovakva operacija naziva integraljenje i zapisuje na sledeći način

$$y(x) = \int f(x)dx.$$

Za gore razmatranu funkciju (9.27), ovaj integral daje

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)dx = ax^3 + bx + c,$$

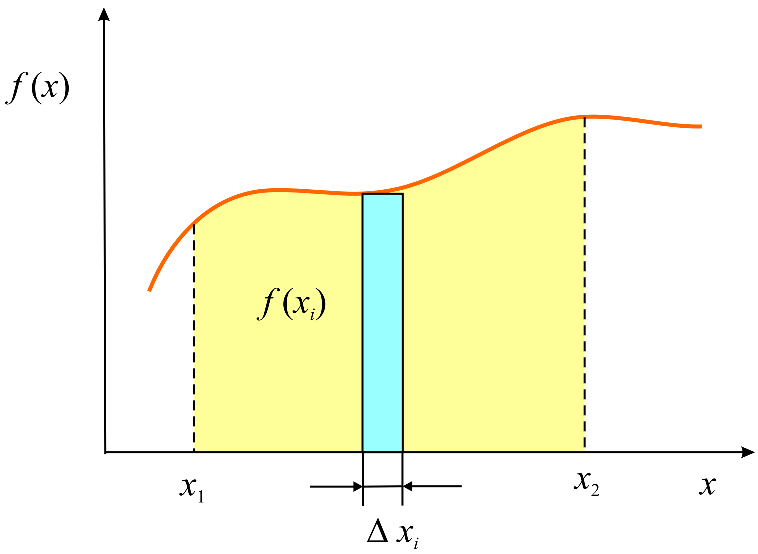
gde se c naziva konstantnom integracije. Ovakav integral se naziva *neodredjeni* integral jer njegova vrednost zavisi od izbora konstante c.

U opštem slučaju, **neodredjeni integral** $I(x)$, funkcije $f(x)$ se definiše kao

$$I(x) = \int f(x)dx,$$

gde je $f(x)$ *integrand* ili *podintegralna funkcija* za koju mora da važi da je $f(x) = dI(x)/dx$, pri čemu se $I(x)$ naziva *primitivna funkcije* funkcije $f(x)$.

Za *neprekidnu* funkciju $f(x)$, ukoliko se znaju moguće vrednosti nezavisne promenljive x, integral može da se shvati kao površina ispod krive koja predstavlja grafik funkcije $f(x)$ i x ose, izmedju odredjenih vrednosti x_1 i x_2 (slika 9.9.).



Slika 9.9:

Uska pravougaona osenčena vrednost ima površinu jednaku $f(x_i)\Delta x_i$. Ukoliko saberemo sve takve elemente od x_1 do x_2 dobili bi približnu vrednost površine ispod krive $f(x)$. A ukoliko uzmemo graničnu vrednost ove sume za $\Delta x_i \to 0$, dobili bi pravu vrednost površine izmedju ove krive i x ose za vrednost nezavisne promenljive izmedju vrednosti x_1 i x_2, odnosno

$$\text{Površina} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{9.28}$$

Integrali ovog tipa se nazivaju **odredjeni integrali**.

U praksi se često srećemo sa integralima oblka

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1). \tag{9.29}$$

Rezultat integracije je jasan i lako proverljiv. Dovoljno je izvršiti diferenciranje desne strane ove jednakosti i videti da se kao rezultat zaista dobija podintegralna funkcija $f(x) = x^n$. Ukoliko su granice integrala definisane, integral postaje odredjen i ima vrednost

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n dx = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1}, \quad (n \neq -1). \tag{9.30}$$

To je posledica jednog opštijeg pravila za odredjeni integral koje glasi

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = I(x)|_{x_1}^{x_2} = I(x_2) - I(x_1). \tag{9.31}$$

Primer ii1.

$$1. \quad \int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

$$2. \int_0^b x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2}|_0^b = \frac{2}{5} b^{5/2}.$$

$$3. \int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2}|_3^5 = \frac{5^2 - 3^2}{2} = 8.$$

9.6.1 Parcijalna integracija

Često je za rešavanje integrala zgodno primeniti metodu *parcijalne integracije* u kojoj se u osnovi koristi osobina diferencijala proizvoda dve funkcije

$$d(uv) = udv + vdu,$$

odakle je

$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{9.32}$$

gde je potrebno izabrati u i v na način pogodan da se polazni složeni integral svede na neki prostiji. Često je pri rešavanju nekih integrala potrebno primeniti ovaj postupak više puta. Na primer, integral $\int x^2 e^x dx$ se može rešiti primenom parcijalne integracije dva puta. Ukolio u prvom koraku uzmemo da je $u = x^2$ a $dv = e^x dx$ (odavde je $v = e^x$), na osnovu formule (9.32) se dobija

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

Za rešavanje integrala u drugom sabiru desne strane zgodno je u narednom koraku uzeti da je $u = x$ i $v = e^x$, što dovodi do

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

Na osnovu ovoga je traženi integral

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

9.6.2 Totalni diferencijal

Druga korisna metoda je metoda *totalnog diferencijala* koja se sastoji u uvodjenju takve smene da diferencijal nezavisne promenljive postane zapravo diferencijal podintegralne funkcije. Da bi pokazali kako se ova metoda primenjuje razmotrimo sledeći integral

$$I(x) = \int cos^2 x \sin x dx.$$

On može da se napiše u obliku

$$\int cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x),$$

odakle je logično da treba uvesti smenu $y = \cos x$, koja daje

$$\int cos^2 x \sin x dx = -\int y^2 dy,$$

što je integral koji se elementarno rešava i ima vrednost $-y^3/3 + c$. Povratak na izvornu promenljivu daje vrednost polaznog integrala

$$\int cos^2 x \sin x dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + c.$$

9.6.3 Integrali nekih funkcija

Slede nedoredjeni integrali nekih funkcija. U rezultat integracije treba dodati i proizvoljnu konstantu.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq 1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x,$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{b} \ln(a+bx),$$

$$\int \frac{xdx}{ax+b} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln(a+bx),$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a} \ln x + ax,$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)},$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, \quad (a^2-x^2>0),$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}, \quad (x^2-a^2>0),$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax},$$

$$\int axdx = x \ln ax - x,$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1),$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac}\ln(a+be^{cx}),$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax,$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax,$$

$$\int \tan ax dx = \frac{1}{a}\ln(\cos ax),$$

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a}\ln(\sin ax),$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a},$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a},$$

9.6.4 Neki odredjeni integrali

$$\int_0^\infty x^n e^{ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}},$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$I_1 = \int_0^\infty xe^{-ax^2} = \frac{1}{2a},$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^2e^{-ax^2} = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}},$$

$$I_3 = \int_0^\infty x^3e^{-ax^2} = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2},$$

$$I_4 = \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} = \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}},$$

$$I_5 = \int_0^\infty x^5 e^{-ax^2} = \frac{d^2 I_1}{da} = \frac{1}{a^3},$$

.
.
.

$$I_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} = (-1)^n \frac{d^n I_0}{da^n},$$

$$I_{2n+1} = \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} = (-1)^n \frac{d^n I_1}{da^n}.$$

Literatura

[1] Halliday, Resnick, Walker, *Fundamentals of Physics*, 7^{th} Edition, Wiley, 2005.

[2] Paul Peter Urone, *College Physics*, Brooks/Cole Publishing Company, 1978

[3] Serway and Jewet, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th edition, ...

[4] S. E. Friš, A. V. Timorjeva, *Kurs opšte fizike, I, II i III*, Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika, 1970.

[5] N. N., *Berklijevski kurs fizike*, Zagreb, Školska knjiga, 1970.

[6] A. N. Matveev, *Kurs opšte fizike. Mehanika*, Moskva, Oniks 21 vek, 2003.

[7] Kalasnjikov, Smondirev, *Osnovi fiziki I i II*, Drofa, Moskva, 2003

[8] Benjamin Crowell, *Newtonian Physics*, www.lightandmatter.com

[9] Benjamin Crowell, *Conservation Laws*, www.lightandmatter.com

[10] Benjamin Crowell, *Vibration nad Waves*, www.lightandmatter.com

[11] David Morin, *Introductory Classical Mechanics, with Problems and Solutions*, Cambridge University Press, 2007.

[12] Ray d'Inverno, *Introducing Einsten's Relativity*, Oxford University Press, 1992.

[13] B. M. Javorskij, A. A. Pinskij, *Osnovi fiziki I i II*, Moskva, Fizmatlit, 2003.