

MERENJE, GREŠKE MERENJA I OBRADA REZULTATA MERENJA

MERENJE

Svaki eksperimentalni rad u fizici praćen je merenjem neke fizičke veličine. Izmeriti neku fizičku veličinu znači uporediti je sa standardnom veličinom koja je uzeta za jedinicu. Vrednost merene veličine, dobijena merenjem, se naziva *rezultat merenja*. Međutim, kada prilikom merenja dobijemo jedan merni broj, njime nije rečeno sve što je bitno dok se ne kaže sa kolikom greškom je rezultat merenja dobijen. Takav, kompletan, prikaz merenja izgleda na primer ovako: merenjem gustine alkohola dobijen je rezultat $\rho = (0,85 \pm 0,03) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, gde je naznačena i greška sa kojom je izvršeno navedeno određivanje gustine izabrane supstance kao i koja jedinica je izabrana za prikaz rezultata. Ovo je primer rezultata jednog indirektnog merenja. Pri direktnim merenjima se pak, vrši direktno upoređivanje merene veličine sa odgovarajućom jedinicom, što je slučaj sa svim veličinama koje su u SI uzete za osnovne.

GREŠKE MERENJA

Prilikom merenja neke fizičke veličine nikad se ne može dobiti njena "prava" vrednost. Svako merenje samo je aproksimacija prave ili apsolutne vrednosti merene veličine. Razlika između rezultata merenja i prosečne vrednosti kojom zamenjujemo pravu vrednost fizičke veličine, obzirom da je ne možemo odrediti, se naziva greška merenja.

Faktori koji utiču na merenje mogu da budu objektivne i subjektivne prirode. Iz tog razloga se, u principu, razlikuju dve vrste grešaka: objektivne (obično se nazivaju *sistematske*) i subjektivne (obično se nazivaju *slučajne*).¹

Sistematske greške su takve greške, koje pri ponovljenim merenjima ostaju konstantne ili se menjaju po određenom zakonu. One mogu biti uslovljene nedostacima metodike merenja ili netačnošću formula za računanje (metodičke greške), a takodje i nesavršenošću mernih uređjaja (greške uređjaja). Ove greške uvek imaju isti "smer" javljanja te se uvođenjem određene korekcije mogu u dobroj meri otkloniti. Pri tome, povećanje broja merenja neće smanjiti sistematsku grešku.

Slučajne greške su posledica mnogobrojnih različitih i promenljivih uzroka, koji se ne mogu kontrolisati i između kojih u opštem slučaju ne postoji

¹Postoje još i grube greške koje su uslovljene ili greškama ekperimentatora pri nepravilnim očitavanjima, ili neispravnošću instrumenata.

nikakva korelacija. Slučajne greške prate sva merenja i ne mogu se otkloniti, kao što je to izvodljivo kod sistematskih grešaka. Medjutim, zahvaljujući činjenici da za slučajne greške važe statistički zakoni raspodele, pri velikom broju merenja, uvek se mogu odrediti granice unutar kojih se nalazi prava vrednost merene fizičke veličine.

Mnogostruko ponavljanje jednog istog merenja, pri tome, smanjuje uticaj slučajnih grešaka. U tom smislu se može reći da aritmetička sredina iz velikog broja rezultata merenja predstavlja najpribližniju vrednost merene veličine. Slučajne greške se u tom slučaju ogledaju u većem ili manjem rasipanju (disperziji) rezultata dobijenih pri višestruko ponovljenom merenju jedne iste veličine.

Povećavanjem broja merenja, povećava se i tačnost merenja. Veliki broj merenja, medjutim, zahteva mnogo vremena i povećava troškove, a nekada ih iz drugih razloga nije moguće izvršiti. Stoga je potrebno naći kompromisni broj merenja koji će dati rezultat sa nekom optimalnom tačnošću.

Neka je prilikom N ponovljenih **direktnih** merenja fizičke veličine X izmereno N vrednosti x_1, x_2, \dots, x_N . Srednja vrednost merenja je²

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}. \quad (1)$$

Kada se izračuna srednja vrednost, apsolutna greška merenja predstavlja odstupanje izmerene vrednosti od njene srednje vrednosti

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}, \quad (2)$$

dok je relativna greška količnik apsolutne vrednosti apsolutne greške i srednje vrednosti veličine

$$\delta x_i = \frac{|\Delta x_i|}{\bar{x}}. \quad (3)$$

Ona se često izražava i u procentima

$$\delta x_i[\%] = \frac{|\Delta x_i|}{\bar{x}} \cdot 100. \quad (4)$$

²Srednja vrednost kod indirektnih merenja (koja su češća od direktnih) se može računati na dva načina. Jedan se svodi na to da se odrede srednje vrednosti direktno merenih veličina i ubace u formulu koja ih povezuje sa indirektno odredjivanom. Rezultat će biti njena srednja vrednost. Druga mogućnost je da se za svaki skup direktno merenih veličina računa indirektna pa da se onda za njih odredi srednja vrednost.

Ako se izvrši veliki broj merenja, značajnu informaciju o grešci merenja daje srednja kvadratna greška koja se određuje kao

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \Delta x_i^2}{N-1}}. \quad (5)$$

PREDSTAVLJANJE REZULTATA MERENJA

Rezultati merenja i izračunavanja veličina, kao i greške merenja prikazuju se tabelarno i u slučaju direktnog i u slučaju indirektnog merenja, kada se prati zavisnost jedne veličine u funkciji druge (ili drugih). Tabela je pogodna jer omogućuje pregledno i sistematsko upisivanje većeg broja podataka. U tabeli svaka kolona sadrži oznaku fizičke veličine i jedinicu kojom se ona izražava.

Način izražavanja rezultata merenja veličine X mora biti takav da sadrži informaciju o izmerenoj vrednosti x , kao i o grešci sa kojom je to merenje izvršeno. Konačan rezultat merenja se predstavlja u vidu zagrade u kojoj figuriše srednja vrednost merenja i greška, a van zagrade odgovarajuća jedinica.

- Za jedno direktno merenje rezultat se izražava u obliku

$$x = x_1 \pm \Delta x$$

gde je sa x_1 predstavljena izmerena vrednost dok je greška Δx određena polovinom vrednosti najmanjeg podeoka na instrumentu ili pak njegovom devijacijom.

Rezultat merenja se može izraziti i preko relativne greške

$$x = x_1 \pm \delta_x.$$

- Ako je izvršeno 5 i više merenja veličine X , onda se rezultat merenja izražava kao

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x.$$

- U slučaju da je izvršeno manje od 5 merenja, rezultat merenja se izražava kao

$$x = \bar{x} \pm |\Delta x_{max}|.$$

ZNAČAJNE CIFRE

Brojevi koje smo u mogućnosti da, pri merenju očitamo i pročitamo na skali instrumenta, nazivaju se *značajne cifre*. One obuhvataju sve *sigurne cifre* i jednu dodatnu cifru, nesigurnu ili sumnjivu cifru koja se procenjuje na podpodeli skale mernog instrumenta.

Broj značajnih cifara u merenju može da se odredi na osnovu sledećih pravila:

1. Prva značajna cifra u merenju je prva cifra različita od nule, računato s leva na desno. Na primer, u merenju dužine čiji je rezultat 57,62 cm, prva značajna cifra je 5.
2. Nule s leve strane prve cifre različite od nule nisu značajne. Na primer u rezultatu merenja $0,06321 \text{ g/cm}^3$, nule levo od cifre 6 nisu značajne cifre, odnosno zaključujemo da merenje u ovom slučaju ima četiri značajne cifre.
3. Nule koje se nalaze između dve značajne cifre predstavljaju značajne cifre, jer su deo merene veličine. Na primer, ako je rezultat merenja 20,0605 g, nule su značajne cifre. U ovom merenju prema tome ima šest značajnih cifara.
4. Krajnje nule u merenjima koje sadrže decimalne razlomke su značajne cifre jer pokazuju preciznost merenja. Na primer ako je rezultat merenja nekog vremenskog intervala 9,0 s, krajnja nula je značajna cifra. Ona označava da je merenje precizno do jednog desetog dela sekunde i da ima dve značajne cifre.
5. Krajnje nule u merenjima, kod celih brojeva mogu, ali ne moraju da budu značajne cifre. Na primer, kod merenja koje je kao rezultat dalo 2600 m/s, u ovakvom zapisu ne može se reći da li su nule značajne cifre ili ne. Iz tog razloga se rezultati merenja izražavaju u vidu faktora koji množi odgovarajući stepen broja deset. Tako, ako se npr. navedeni rezultat napiše kao $2,6 \times 10^3 \text{ m/s}$ to znači da su značajne samo dve cifre. Ako se pak rezultat napiše kao $2,60 \times 10^3 \text{ m/s}$ znači da su značajne tri cifre, itd.
6. Broj značajnih cifara ne zavisi od sistema jedinica. Na primer, merenje koje je dalo rezultat od 2653 mm, može da se napiše i kao 2,653 m

$= 265,3 \text{ cm} = 0,002653 \text{ km}$. U svakom slučaju je broj značajnih cifara četiri.

Prilikom prikaza rezultata merenja nije uvek potrebno da se greške uzimaju sa velikom tačnošću. Apsolutna greška može u principu da utiče samo na izvestan broj cifara u broju koji predstavlja rezultat merenja. Tako na primer, ako je rezultat nekog merenja 5,134, a apsolutna greška 0,004, onda ova greška može da izmeni samo krajnju cifru rezultata, odnosno 4, dok ostale cifre 5,13 ostaju nepromenjene. Ovo znači da se cifre 5,13 ne menjaju ako se merenje ponavlja više puta. Apsolutna greška se po pravilu zaokružuje na jednu značajnu cifru, a u rezultatu merenja se zadržava prva nesigurna cifra.

ZAOKRUŽIVANJE

Prilikom prikaza rezultata merenja potrebno je izvršiti zaokruživanje značajnih cifara prema pravilima zaokruživanja:

1. Pri tome, ako je prva cifra iza poslednje značajne cifre manja od 5 prethodna cifra ostaje nepromenjena.
2. Kada je odbačena cifra veća od 5, prethodna se povećava za 1.
3. U slučaju kada odbačena cifra ima vrednost 5, prethodna ostaje nepromenjena ako je paran broj, dok se povećava za 1 ako je neparan broj.

U slučaju sabiranja ili oduzimanja dva merenja različite preciznosti, treba ih najpre zaokružiti na preciznost manje preciznog merenja, pa tek onda sabirati, odnosno oduzimati.

Prilikom množenja i deljenja potrebno je najpre izvršiti traženu računsku operaciju, a zatim u rezultatu odvojiti onoliko značajnih cifara koliko ima merenje sa manjim brojem značajnih cifara. Evo i par primera zaokruživanja (nesigurne cifre su označene kurzivom)

$$82330 \approx 82300 = 8,23 \cdot 10^4$$

$$0,0063285 \approx 0,0063 = 6,3 \cdot 10^{-3}$$

$$0,02855 \approx 0,0286 = 2,86 \cdot 10^{-2}$$

$$5,485 \approx 5,48.$$

Važna napomena: *Pošto se prilikom sračunavanja vrednosti neke (indirektno merene) fizičke veličine najčešće pojavljuje više od jedne računске operacije, za sve medjurezultate treba koristiti nezaokruženu vrednost, ili makar, zaokruženu vrednost koja ima jednu značajnu ili nesigurnu cifru više od konačnog rezultata.*

PREFIKSI JEDINICA

U fizici se često pri radu sa fizičkim veličinama čija je vrednost puno veća, ili puno manja od osnovne jedinice, koriste prefiksi jedinica koji se stavljaju ispred jedinice, čime se definišu veće ili manje jedinice od osnovne. Prefiksi su dati u sledećoj tabeli:

naziv	oznaka	brojna vrednost
eksa	E	1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}
peta	P	1 000 000 000 000 000 = 10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000 = 10^{12}
giga	G	1 000 000 000 = 10^9
mega	M	1 000 000 = 10^6
kilo	k	1 000 = 10^3
hekto	h	100 = 10^2
deka	da	10 = 10^1
deci	d	0,1 = 10^{-1}
centi	c	0,01 = 10^{-2}
mili	m	0,001 = 10^{-3}
mikro	μ	0,000 001 = 10^{-6}
nano	n	0,000 000 001 = 10^{-9}
piko	p	0,000 000 000 001 = 10^{-12}
femto	f	0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}
ato	a	0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}

Vežbanja

Ime i prezime:

Broj indeksa:

1. Izraziti preko osnovnih jedinica u eksponencijalnom obliku sledeće vrednosti:

86,2 pF =

63 nC =

325 GHz =

11 fm =

3200 EJ =

2. Zaokružiti sledeće brojeve:

3,141592654 na 6 značajnih cifara. Rezultat:

2,7182818 na 2 decimale. Rezultat:

0,69314718 na 3 značajne cifre. Rezultat:

9,445550009 sukcesivno, smanjujući jednu po jednu značajnu cifru. Rezultat:

836 556 809 sukcesivno, smanjujući jednu po jednu značajnu cifru. Rezultat:

3. Merenjem je ustanovljeno da dužina jedne stranice pravougaoonika $a = 10,3$ cm a druge $b = 2,8$ cm. Kolika je njegova površina? Voditi računa o broju značajnih cifara podataka i rezultata kao i pravilima zaokruživanja.

4. Neka su, pri merenju električne otpornosti, dobijeni sledeći rezultati merenja: $R_1 = 37,0 \Omega$; $R_2 = 36,8 \Omega$; $R_3 = 36,8 \Omega$; $R_4 = 36,7 \Omega$ i $R_5 = 37,2 \Omega$.

Popuniti tabelu odgovarajućim vrednostima i ispod nje predstaviti rezultat merenja.

Broj merenja	Rezultat merenja	Srednja vrednost	Apsolutna greška	Relativna greška
i	$R_i[\Omega]$	$\bar{R}[\Omega]$	$\Delta R_i[\Omega]$	$\delta R_i[\%]$
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Mereni električna otpornost iznosi

$$R =$$