

Glava 3

Dinamika

U okviru kinematike se proučavaju načini na koja se tela kreću, uzimanjem u obzir njihovih koordinata, pomeraja, brzina i ubrzanja i nalaženjem veza između njih. U okviru **dinamike** se takodje proučava kretanje tela ali se pri tome uzimaju u obzir još dve nove fizičke veličine: masa tela i sila koje utiču na njegovo kretanje. Celokupna dinamika počiva na Njutnovim zakonima¹ kretanja.

Njutново formulisanje zakona kretanja je toliko značajno da se može reći da simbolički označava prelaz iz vremena renesanse na moderna vremena, u okviru kojih se pogled čoveka na prirodu i njeno funkcionisanje drastično izmenio.

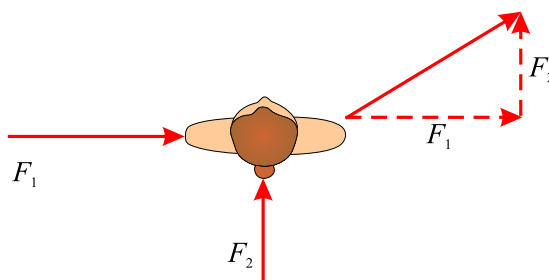
3.1 Pojam sile

Da bi se pravilno razumeli Njutnovi zakoni, neophodno je prethodno uvesti i detaljno objasniti pojam sile. Intuitivna predstava o silama da su one - ono što gura i vuče tela, može da bude polazna tačka daljih razmatranja. Poznato je, da kada nešto gura ili vuče to znači da je određeno intenzitetom, pravcem i smerom.² Naša svakodnevna iskustva nam mogu dati i ideju kako

¹Isak Njutn (Isaac Newton) engleski fizičar i matematičar (1642-1727) je jedan od najvećih naučnika u istoriji. Pre svoje tridesete godine formulisao je osnovne zakone mehanike i zakon univerzalne gravitacije i osmislio osnove diferencijalnog računa. Na osnovu svoje teorije, uspeo je da objasni kretanje planeta, pojavu plime i oseke, kretanje Zemlje i Meseca. Takodje je dao veliki doprinos razumevanju prirode svetlosti. Njegov doprinos je dominirao celokupnom fizikom skoro dva veka, a može se reći da je i danas veoma važan.

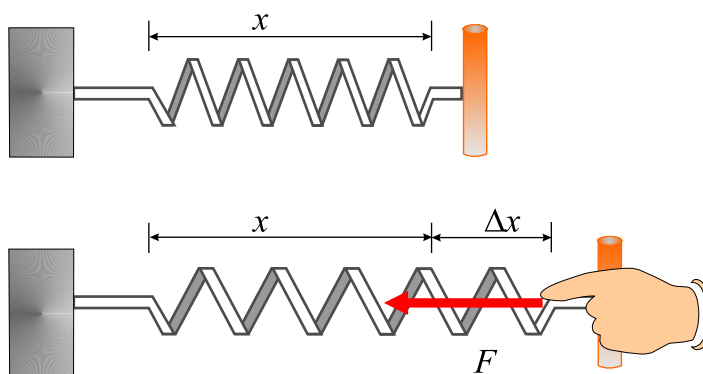
²Na primer, raketni motori proizvode veoma veliku silu koja gura svemirski brod na više. Sa druge strane, gravitaciona sila kojom Zemlja deluje na komarca je veoma mala.

da predstavimo situacije kada postoji više od jedne sile. Ako dvoje ljudi gura trećeg (slika 3.1) on će osetiti ukupnu silu u pravcu i smeru prikazanom na slici. Drugim rečima, sile su vektori, odnosno određene se intenzitetom, pravcem i smerom, a kada više njih deluje na telo, da bi dobili ukupnu silu koja na njega deluje, moramo da ih sabiramo po pravilima za sabiranje vektora.



Slika 3.1: Sila je vektor. Ukupna sila je jednaka vektorskom zbiru svih sila koje deluju na telo.

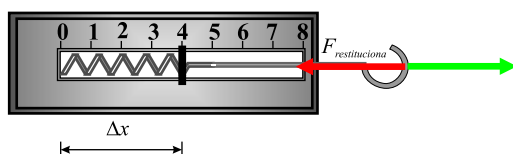
Kada je reč o kvantifikovanju, odnosno merenju, sile koja deluju na neko telo, potrebno je uvesti standard sile.³ Jedna mogućnost je da to uradimo na osnovu istezanja elastične opruge, jer se pri tome u njoj javlja sila koja ima težnju da je vrati u relaksirano stanje. Ta sila se naziva *restituciona* i upravo je nju zgodno uzeti za definisanje standarda sile (slika 3.2). Intenzitet



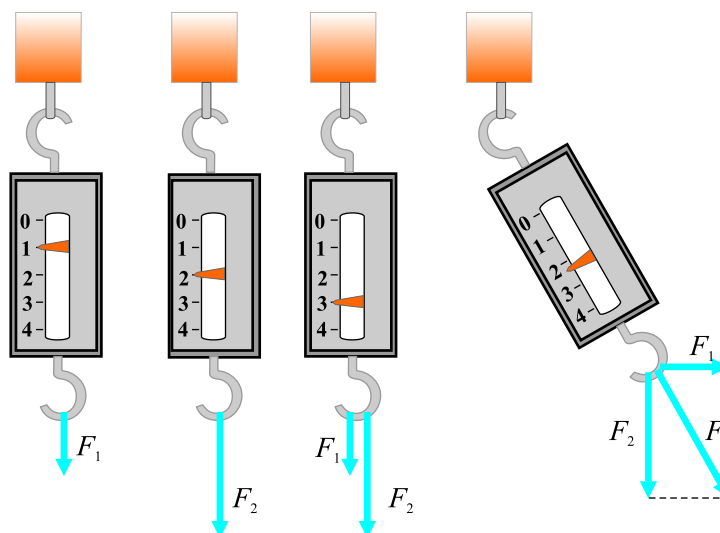
Slika 3.2: Opruga ima dužinu x kada je neistegnuta. Kada se istegne za Δx , u njoj se javi restituciona sila proporcionalna izduženju.

³Ovo je slično činjenici da pri merenju rastojanja koristimo određene standarde sa kojima upoređujemo rastojanje koje želimo da izmerimo.

svih ostalih sila će u tom slučaju da bude celobrojni umnožak standardne jedinice za silu.⁴ Instrument za merenje sile konstruisan na ovaj način, pod nazivom dinamometar, je prikazan na slici 3.3.⁵ Sila F koju merimo se okači za kukicu i razvuče oprugu tako da se u njoj javi restituciona sila jednaka sili F i proporcionalna istezanju opruge Δx . Sila na ovoj slici ima intenzitet 4 jedinice sile.



Slika 3.3: Instrument koji koristi oprugu za merenje sile.



Slika 3.4: Prikaz provere vektorske prirode sile.

Na slici 3.4 je prikazano demonstriranje vektorske prirode sile. Sila F_1 je istegla dinamometar za jednu jedinicu sile, dok je sila F_2 to učinila za dve jedinice. Ako ove dve sile deluju duž istog pravca i smera, zajedno će istegnuti dinamometar za za zbir istezanja u prvom i drugom slučaju, odnosno

⁴Ovo naravno nije jedini način da se dodje do standardne sile. Druga mogućnost bi bila recimo magnetna sila koja se javlja između dve žice kroz koje protiče električna struja.

⁵Dinamometar meri sile tako što ih, kao što smo videli, upoređuje sa restitucionom silom koja se javlja pri razvlačenju opruge.

za 3 jedinice sile. Kada F_1 deluje horizontalno a F_2 na dole, dinamometar biva istegnut za $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ jedinica sile, jer na njega deluje sila $\vec{F}$ koja je vektorski zbir sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

3.2 Njutnovi zakoni

3.2.1 Prvi Njutnov zakon. Masa.

Svakodnevno iskustvo nam govori da će tela ostati u stanju mirovanja ukoliko se ne deluje nečim na njih, kao i da će tela koja se kreću nakon nekog vremena da se zaustave. Tvrdjenje I Njutnovog zakona kretanja je, medjutim, nešto drugačije: **Tela ostaju u stanju mirovanja ili uniformnog kretanja, sve dok na njih ne deluje neka spoljašnja sila.**⁶

Ovo tvrdjenje je samo na prvi pogled u kontradikciji sa našim iskustvom jer, kada se telo koje se kreće usporava, ono to čini upravo pod dejstvom jedne posebne vrste spoljašnjih sila *sile trenja*.⁷ Drugim rečima, uzrok promene stanja kretanja tela je uvek neka spoljašnja sila.

Da bi ilustrovali ovo tvrdjenje razmotrimo nekoliko situacija. Pretpostavimo da posmatramo klizanje tela niz strmu ravan kojoj možemo na neki način da menjamo tip podloge koji se nalazi na strmini. Ukoliko tamo postavimo šmirgl papir telo koje bi krenulo da klizi niz ravan bi se brzo zaustavilo. Ako umesto šmirgle stavimo neku glatku podlogu, telo će se kretati brže niz nju. Ako bi imali na raspolaganju neku idealno glatku površinu izmedju koje i tela ne bi bilo nikakvog trenja, telo koje bi kliznulo niz takvu ravan bi se, nakon dolaska na horizontalan deo podloge, nastavilo da beskonačno kreće ukoliko bi i podloga na horizontalnom delu bila od istog materijala.

Kao što se vidi iz napred iznete formulacije, I Njutnov zakon ima veoma opšti karakter i primenljiv je na sve, od tela koja kllize niz strmine, preko satelita koji se kreću po orbitama oko Zemlje pa do krvi koju srce pumpa u krvotok. Eksperimenti pokazuju da, bilo koja promena u brzini tela ima veze sa delovanjem neke sile.⁸ Interesantno je napomenuti da, iako je Galilej prvi dosao na ideju sličnu Njutnovoj formulaciji prvog zakona, Njutn je prvi

⁶Moguć je slučaj da na telo deluje više nenultih sila koje imaju takve pravce i smerove da im se delovanja medjusobno ponište. Takva situacija, budući da je rezultujuća sila jednaka nuli, prema pravilu za sabiranje vektora je jednaka situaciji u kojoj na telo ne deluje ni jedna sila.

⁷O ovim silama će na kraju poglavlja biti još reči.

⁸Podsetimo se da je brzina vektorska veličina, pa kada govorimo o njenoj promeni pod time ćemo podrazumevati izmenu u intenzitetu, pravcu ili smeru.

koje je to proverio. Značaj Njutna je međutim u tome što nije stao tu veće je postavio fundamentalno pitanje: šta je to što utiče na promenu stanja kretanja?

Masa

Osobina tela ostaju u stanju mirovanja ili ravnomernog kretanja se naziva inercnost, pa se u skladu sa tim I Njutnov zakon zove **zakon inercije**. Svakodnevno iskustvo nam kazuje da su neka tela inertnija od drugih, pa je tako teže pomeriti stenu nego košarkašku loptu. Kao mera inertnosti je uvedena fizička veličina koja se naziva **masa** i koja je u povezana sa količinom materije u telu. Sa druge strane, količina materije je povezana sa brojem atoma i molekula različitog tipa koji se nalaze u telu. Iz tog razloga masa je veličina koja neće zavisiti od toga gde se nalazi telo već samo od toga od čega se ono sastoji.⁹ Kako je u realnosti, nepraktično brojati molekule i identifikovati njihove vrste, masa se određuje upoređivanjem sa standardnom jedinice mase, odnosno kilogramom.

3.2.2 II Njutnov zakon kretanja. Pojam sistema.

I Njutnov zakon utvrđuje uzročno-posledičnu vezu između sile i promena u stanju kretanja. Međutim na osnovu njega nije moguće utvrditi kolika je ta promena. Pre nego što dodjemo do eksplicitne forme ovog zakona, razmotrimo neke detalje vezane za uticaj sile na stanje kretanja nekog tela.

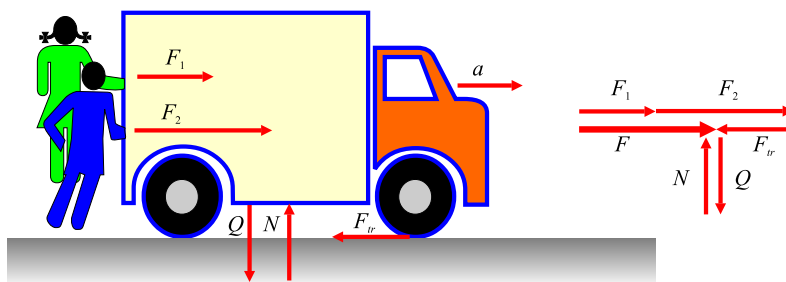
Zapitajmo se kao prvo, na koji način utvrđujemo da je došlo do promene u stanju kretanja? Odgovor bi bio da to vidimo na osnovu promene u brzini kretanja tela. Promena u brzini automatski znači da imamo ubrzano kretanje. Dakle, ako I Njutnov zakon kaže da spoljašnja sila izaziva promenu u stanju kretanja, zaključujemo da u stvari *sila dovodi do pojave ubrzanja*.

Automatski se nameće i drugo pitanje. Šta podrazumevamo pod pojmom **spoljašnja sila**? Intuitivan odgovor je da je spoljašnja sila ona koja deluje spolja na posmatrani sistem.

Na slici 3.5, posmatrani sistem je kamion sa svime što se nalazi u njemu. Dve sile kojima deluju deca koja ga guraju su očigledno spoljašnje sile. Unutrašnje sile bi bile sile koje deluju između delova samog sistema-kamiona. Kretanje sistema, prema I Njutnovom zakonu, izazivaju jedino spoljašnje sile.¹⁰ U tom smislu definisanje sistema prethodi određivanju karaktera

⁹Drugim rečima masa svakog tela će imati istu vrednost na Zemlji, Mesecu, ili bilo gde u vasioni.

¹⁰Kao što će biti pokazano, unutrašnje sile se poništavaju.



Slika 3.5: Dva deteta guraju kamion po ravnom putu. Strelice reprezentuju sve spoljašnje sile koje deluju na sistem - kamion. Težina sistema Q i reakcija podloge N su prikazane radi kompletnosti iako su jednakog intenziteta, pravca a suprotnih smerova, pa se poništavaju. F_{tr} je sila trenja koja se suprotstavlja kretanju kamiona tako da je ukupna sila $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{tr}$. Ako bi kamion gurale odrasle osobe, sile kojima bi delovali na njega bile bi veće pa samimi tim i ubrzanje.

sila. U nekim slučajevima je izbor sistema očigledan i jednoznačan dok u nekim slučajevima treba u tome pokazati određenu veštinu.¹¹

Na osnovu dosadašnje analize je jasno da je ubrzanje sistema proporcionalno ukupnoj sili $\vec{F}$ koja deluje na njega.¹² Ovo je činjenica koja je eksperimentalno proverljiva i ilustrovanja je na slici 3.5. Na ovoj slici su radi kompletnosti prikazane i vertikalne sile, ali pošto po vertikali nema kretanja, na osnovu I Njutnovog zakona sledi da su one jednakih pravaca i intenziteta a suprotnog smera, odnosno da se poništavaju.¹³ Na drugom delu ove slike je prikazano kako se, sve spoljašnje sile, koje deluju na posmatrani sistem, sabiraju. Iskaz da je ubrzanje sistema proporcionalno ukupnoj sili koja deluje na sistem se zapisuje kao

$$\vec{a} \propto \vec{F},$$

gde je $\propto$ označeno "proporcionalan", a sa $\vec{F}$ ukupna sila koja deluje na sistem. Drugim rečima *ubrzanje sistema je direktno proporcionalno ukupnoj sili koja deluje na njega*.¹⁴

¹¹Dobar izbor sistema olakšava njegovu dinamičku analizu i opisivanje njegovog kretanja.

¹²Ukupna sila je, kao što je već istaknuto, vektorski zbir svih sila koje deluje na posmatrani sistem. Ona se često naziva rezultujućom silom, odnosno, rezultantom.

¹³Vertikalne sile su težina sistema Q i reakcija podloge na kojoj se on nalazi N .

¹⁴Neuračunavanje unutrašnjih sila značajno uprošćava razmatranje kretanja sistema,

Relativno je lako pokazati da je ubrzanje obrnuto proporcionalno masi sistema. Drugim rečima, što je veća masa sistema, to je on inertniji, odnosno manje podložan izmeni brzine, pa tako spoljašnja sila izaziva manje ubrzanje. Tako će deca na slici 3.5, delujući istom silom manje ubrzati kamion čija je masa više od tone, nego na primer dečiji automobil čija je masa nekoliko desetina kilograma. Ova proporcionalnost se zapisuje kao

$$a \propto \frac{1}{m}$$

gde je sa m označena masa sistema. Eksperimenti upravo pokazuju da je ubrzanje obrnuto proporcionalno masi a direktno proporcionalno sili. Takodje se pokazuje da ubrzanje zavisi samo od ove dve veličine a kombinacija ove dve proporcije predstavlja II Njutnov zakon **Ubrzanje sistema je direktno proporcionalno, i istog je pravca i smera kao ukupna sila koja deluje na sistem, a obrnuto je proporcionalno njegovoj masi**, ili u formi jednačine

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (3.1)$$

Ovaj izraz se često piše u obliku

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (3.2)$$

i interpretira na sledeći način: proizvod mase tela i njegovog ubrzanja, jednak je rezultujućoj sili koja deluje na njega.

Jedinica sile

Jednačina (3.2) može da se iskoristi za izražavanje jedinice sile preko tri osnovne jedinice (mase, dužine i vremena). SI jedinica za silu je **Njutn** (skraćenica N) i ona predstavlja silu koja telu mase 1 kg menja brzinu za 1 m/s svake sekunde. Na osnovu relacije $F = ma$ se dobija

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

3.2.3 III Njutnov zakon. Simetrija.

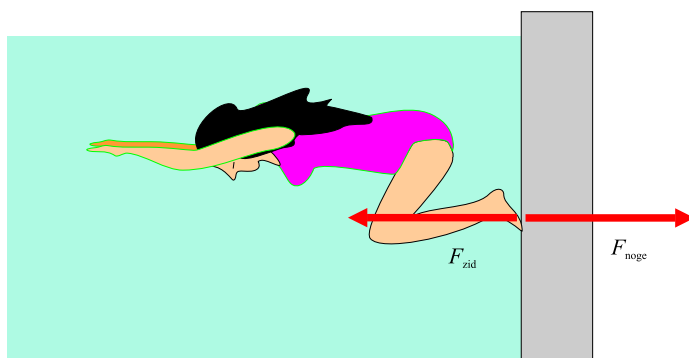
Ako pritisnete prstom čošak ove knjige, knjiga će delovati na prst i napraviće ulegnuće na njemu. Ako pritisnete jače, ulegnuće će biti veće. To je prosta

jer to znači da na primer u slučaju prikazanom na slici 3.5 ne treba uzimati u obzir mnogobrojne unutrašnje sile između bilo koja dva dela sistema, na primer sile mišića vozača kamiona, bezbroj sila između atoma tela koja čine sistem, ...

demonstracija **III Njutnovog zakona**: Pri interakciji dva tela, sila kojom prvo telo deluje na drugo, jednaka je po intenzitetu i pravcu a suprotnog je smera od sile kojom drugo telo deluje na prvo.

Ovaj zakon ukazuje na odredjenu *simetriju* u prirodi: sile se uvek javljaju u parovima, kada jedno telo deluje na drugo nekom silom, to obavezno izaziva silu kojom to drugo telo deluje na njega.

U analizi ovog zakona zgodno je krenuti od proučavanja kretanja ljudi. Posmatrajmo plivača koji se nogama odbacuje o zid bazena (slika 3.6) i na taj način se ubrzava u suprotnom smeru od smera sile kojom deluje na zid. Jasno je da u ovom slučaju zid suda deluje silom, jednakog intenziteta a suprotnog smera, na plivača. To što su ove dve sile istog pravca i intenziteta



Slika 3.6: Kada plivač deluje silom F_2 na zid bazena, ubrzava se u suprotnom smeru. To znači da na njega deluje sila reakcije zida bazena koja je jednakog intenziteta i pravca ali suprotnog smera. Sistem koji posmatramo je plivač. Na slici nisu prikazane gravitaciona sila i sila potiska koje se u ovom slučaju poništavaju.

a suprotnog smera moglo bi da nas navede na pogrešan zaključak da se poništavaju (prema pravilu za sabiranje vektora), međutim to se ne dešava. Razlog je u tome što ove dve sile deluju na *dva različita sistema*. Ako posmatramo plivača kao sistem, spoljašnja sila je sila F_{zid} kojom zid deluje na njega i usled čijeg delovanja se on doživljava promene u kretanju. Plivač se pri tome kreće u smeru delovanja ove sile. Sa druge strane noge plivača deluju na zid, a ne na posmatrani sistem, silom F_{noge} . Na taj način ova sila ne deluje na sistem (plivača) i ne utiče na njegovo kretanje.¹⁵

¹⁵Svuda oko nas možemo naći primere III Njutnovog zakona. Automobil koji se ubrzava u odnosu na put to postiže tako što preko točkova deluje na put silom suprotnog smera od onoga u kojem će se kretati. Reakcija puta je sila koja se, prema III Njutnovom za-

P r i m e r. Odrastao čovek i dete stoje licem u lice na ledenoj površini po kojoj mogu da se kreću bez trenja. Uhvate se za ruke i odgurnu jedan od drugoga. Ko od njih se kreće većom brzinom i zašto?

3.3 Težina, trenje, zatezanje i ostale vrste sila

Uobičajeno je da se sile grupišu u nekoliko kategorija koje imaju imena koja su u vezi sa izvorima sila, načinima prenošenja njihovog delovanja,

3.3.1 Težina i gravitaciona sila

Kada ispustimo neko telo, ono ubrzava ka centru Zemlje. Prema II Njutnovom zakonu, za ubrzavanje tela je odgovorna rezultanta spoljašnjih sila koje deluju na njega. Ukoliko je otpor vazduha zanemarljiv, jedina sila koja deluje na telo je¹⁶ **gravitaciona sila**, koja se u tom slučaju naziva **Zemljina teža** i obično označava sa Q . Kao što je napomenuto, još Galilej je pokazao da, u odsustvu otpora vazduha, sva tela padaju sa istim ubrzanjem g . Prema II Njutnovom zakonu, veza spoljašnje sile, mase i ubrzanja je

$$F = ma.$$

Kako je telo u slobodnom padu, jedina spoljašnja sila je gravitaciona, odnosno Zemljina teža, pa je $F = Q$, dok je ubrzanje u tom slučaju gravitaciono, $a = g$, pa je

$$Q = mg. \quad (3.3)$$

Ova jednačina dakle opisuje intenzitet sile Zemljine teže (odnosno intenzitet gravitacione sile) koja deluje na telo mase m . Pošto je, na malim visinama iznad površine Zemlje, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, intenzitet sile Zemljine teže kojom Zemlja deluje na telo mase 1 kg

$$Q = mg = (1,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) = 9,8 \text{ N}.$$

Sila kojom telo, usled Zemljine teže, deluje na nepokretni oslonac na kojem stoji ili zateže konac o koji je obešeno, naziva se **težina tela**.

konu, javlja i koja izaziva ubrzanje sistema-automobila. Rakete se kreću napred izbacujući unazad gas velikom brzinom. Do tog kretanja dolazi tako što raketa, u komori za sagoravanje, deluje na gas silom u smeru u nazad. Iz tog razloga gas deluje na raketu silom suprotnog smera (reaktivnom silom) i tera je da se ubrzava prema napred. Helikopteri guraju vazduh na dole pa se usled toga pojavljuje sila koja ih podiže u vis.

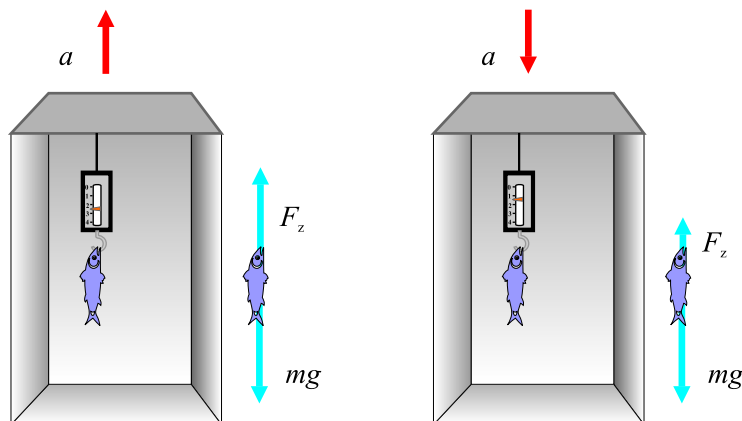
¹⁶Da bi ovo tvrdjenje bilo tačno potrebno je zanemariti još i činjenicu da je Zemlja sistem koji rotira usled čega se u njemu javljaju i neke dodatne sile.

Kako se ubrzanje Zemljine teže g menja duž površine Zemlje,¹⁷ težina tela nije unutrašnja karakteristika tela jer varira od mesta do mesta na kome se određuje. Težina tela drastično varira kada napustimo Zemlju. Na Mesecu je na primer, ubrzanje gravitacije $1,67 \text{ m/s}^2$ pa će telo mase 1 kg na Mesecu biti teško $1,67 \text{ N}$, dok je na Suncu 275 m/s^2 .

Na osnovu iznetog se uočava da su, *masa* i *težina*, iako povezane, veoma različite fizičke veličine. Masa je u vezi sa količinom materije u telu i u domenu klasične fizike se ne menja, dok težina tela zavisi od toga gde se vrši njeno merenje.¹⁸

Merenje težine ribe u liftu

Pretpostavimo da treba da izmerimo težinu ribe, mase m , na pijačnoj vagici sa elastičnom oprugom koja je okačena na plafon lifta. Izvršićemo tri merenja. Prvo u liftu koji se ne kreće, drugo u slučaju kada se lift ubrzano podiže na više i treće kada se lift kreće ubrzano na dole. Šta će pokazivati vagica u ova tri slučaja?



Slika 3.7: Prividna i stvarna težina. Kada se lift ubrzava na više dinamometar pokazuje veću vrednost od prave težine, a kada se ubrzava na dole, manju.

Spoljašnje sile koje deluju na ribu su gravitaciona sila $\vec{F}_g = m\vec{g}$, i sila zatezanja opruge u dinamomentru $\vec{F}_z$. Prema III Njutnovom zakonu vrednost

¹⁷Vrednost ove konstante na polovima iznosi $9,83 \text{ N/m}^2$ dok je na ekvatoru $9,78 \text{ N/m}^2$. Vrednost koja se obično uzima kao prosečna $9,81 \text{ N/m}^2$ je vrednost koja je izmerena na 45° geografske širine.

¹⁸Ova dva termina se često mešaju u svakodnevnoj komunikaciji.

sile zatezanja pokazuje skala dinamometra.

U slučaju kada lift miruje, ili se kreće uniformno i pravolinijski, riba ne trpi nikakvo ubrzanje, i važi $\sum F_y = F_z - mg = 0$, odakle je $F_z = mg$, odnosno dinamometar pokazuje težinu ribe (gde je pretpostavljeno da je y osa usmerena na više).

Ako se lift kreće na više sa ubrzanjem a , primena II Njutnovog zakona daje

$$\sum F_y = F_z - mg = ma$$

odakle je $F_z = mg + ma$, što znači da opruga dinamometra doživljava veće istezanje jer je $a > 0$. U slučaju da se lift kreće na dole nekim ubrzanjem, dinamometar će pokazivati manju vrednost jer će u tom slučaju biti $a < 0$.

Neka je na primer težina ribe 40 N, a ubrzanje usmereno na gore iznosi $a = +2,00 \text{ m/s}^2$, na skali dinamometra će biti pokazano

$$F_z = mg + ma = mg \left(\frac{a}{g} + 1 \right) = (40 \text{ N}) \left(\frac{2,00 \text{ m/s}^2}{9,80 \text{ m/s}^2} + 1 \right) = 48,2 \text{ N}.$$

U sličaju kada se lift kreće na dole ubrzanjem jednakog intenziteta, ali suprotnog smere ($a = -2,00 \text{ m/s}^2$), dinamometar će pokazivati

$$F_z = mg + ma = mg \left(\frac{a}{g} + 1 \right) = (40 \text{ N}) \left(\frac{-2,00 \text{ m/s}^2}{9,80 \text{ m/s}^2} + 1 \right) = 31,8 \text{ N}.$$

Ako se pak prekine kabl koji drži lift, on će početi da pada slobodno, što znači da će mu ubrzanje biti usmereno na dole i da će imati vrednost ubrzanja Zemljine teže $a = -9,80 \text{ m/s}^2$. Direktan proračun pokazuje da će na dinamometru biti izmerena nulta težina tela, što znači da će riba biti u bestežinskom stanju.

3.3.2 Trenje

Sile koje se javljaju pri relativnom kretanju tela koja se dodiruju, ili delova istog tela, se zovu *silama trenja*. Sile koje se javljaju pri dodriu različitih tela nazivaju se silama *spoljašnjeg trenja*. Te sile postoje i kada se tela koja se dodiruju nepokretna jedna u odnosu na drugo. Sile pak izazvane pomicanjem jednog dela istog tela u odnosu drugi, nazivaju se silama *unutrašnjeg trenja*.¹⁹

Jedna od prostijih osobina trenja je da je ono paralelno kontaktnoj površi između sistema. Takodje zavisi i od toga da li postoji kretanje između sistema.

¹⁹Ove sile se javljaju kod fluida, odnosno tečnosti i gasova.

Pojam trenje se odnosi dakle na silu koja deluje izmedju sistema (ili delova istog sistema) u kontaktu i čiji je smer suprotan kretanju. Iako je reč o fenomenu sa kojim se svakodnevno srećemo, suština procesa je veoma komplikovana i on još uvek nije objašnjen na zadovoljavajuć način.

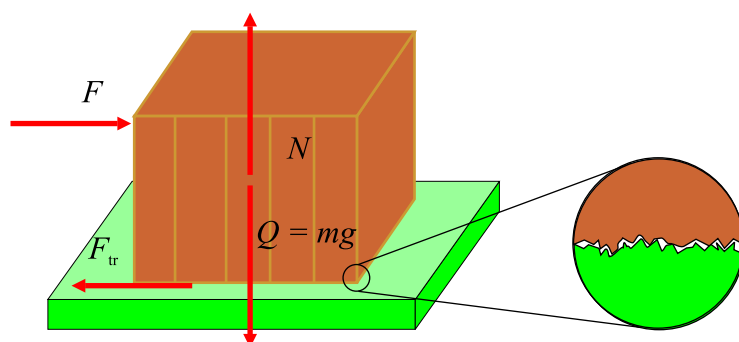
Ukoliko su dva sistema u kontaktu i kreću se jedan u odnosu na drugog, trenje izedju njih se zove **kinematičko trenje**. Na primer, usled postojanja trenja, hokejaški pak se usporava pri kretanju na ledu. Kada telo miruje, izmedju njega i podloge deluje **statičko trenje**. Statičko trenje je veće od kinematičkog a u to se možemo ubediti vršeći sledeću analizu.

Zamislamo, na primer, da pokušavamo da guranjem pomerimo veoma masivan sanduk koji se nalazi na nekoj podlozi. Ukoliko je reč o sanduku velike mase lako može da se desi da uopšte nećemo uspeti da ga pomerimo. To znači da postoji statičko trenje, izmedju sanduka i poda, koje je suprotno usmereno od smera u kome smo mi delovali silom. Ukoliko gurnemo dovoljno jako sanduk, on će se pokrenuti, a pokazuje se da je za njegovo dalje održavanje u stanju kretanja potrebno delovati silom koja je manja od sile kojom smo ga pokrenuli.

Dalja analiza trenja koje se javlja izmedju sanduka i podloge bi mogla da se izvrši na sledeći način. Ako povećamo masu sanduka, tako što ćemo na primer staviti na njega još jedan sanduk, sila kojom treba da delujemo na njega da bi se kretao mora da bude proporcionalno veća. Ukoliko pak prospemo malo ulja na pod, izmedju sanduka i njega, puno lakše ćemo ga dovesti u stanje kretanja nego kada je podloga bila suva.

Slika 3.8 u načelu prikazuje kako nastaje trenje na dodirnoj površini dva sistema, odnosno tela. Uvećamo li na neki način deo površina tela i podloge videćemo da one nisu glatke već da su pune mikroprepreka koje treba savladati. Kada poguramo telo da ide po podlozi, mi ćemo ga ili dovoljno jako gurati da preskoči te mikroprepreke ili će ih pak pri kretanju polomiti. Što su većom silom dodirne površine priljubljene jedna uz drugu (ovo se postiže povećanjem mase tela) potrebna je veća sila da pokrene telo. U nastanku fenomena trenja značajnu ulogu igraju i adhezivne sile izmedju molekula²⁰ na površini jednog i drugog tela. Na osnovu toga se zapravo objašnjava činjenica da veličina sile trenja zavisi od vrste supstanci koje se nalaze u kontaktu. Kada jednom telo dovedemo u stanje kretanja, smanjuje se broj tačaka u kojima se dodiruju površine (analogno tome manji broj molekula interaguje adhezivnim silama), pa je i sila koja je potrebna za održavanje kretanja manja od one koja je bila potrebna da se telo pokrene.

²⁰ Adhezija je pojava privlačenja izmedju molekula različite vrste. Pojam kohezija se odnosi pak na privlačenje molekula iste vrste.



Slika 3.8: Sila trenja F , se uvek suprotstavlja kretanju ili pokušaju kretanja između tela i podloge (između dva sistema). Trenje nastaje usled neravnina površi u kontaktu (uvećani prikaz). Da bi telo počelo da se kreće neravnine moraju da prodju jedne preko drugih i u toku tog procesa neke bivaju polomljenje. Suština pojave trenja je u postojanju međumolekularnih sila.

Za male brzine kretanja tela, sila trenja je nezavisna od brzine.

Kada je reč o pravcu i smeru sile trenja već je više puta istaknuto da je ona uvek suprotno usmerena od smera kretanja. Intenzitet ove sile međjutim zavisi od toga da li je reč o statičkom ili kinematičkom trenju.

Kada nema međusobnog kretanja sistema (tela i podloge), intenzitet sile **statičkog trenja** je

$$F_s \leq \mu_s N, \quad (3.4)$$

gde je μ_s **koeficijent statičkog trenja**, a N je intenzitet normalne sile reakcije kojom podloga deluje na telo.²¹ Simbol $\leq$ znači *manje ili jednako*, čime je ukazano na to da je maksimalna vrednost sile statičkog trenja $\mu_s N$. Sila statičkog trenja je dakle sila koja se suprotstavlja kretanju tela i koja raste sa porastom sile koja pokušava da ga pokrene, do svoje maksimalne vrednosti. U momentu kada primenjena, spoljašnja, sila dostigne maksimalnu vrednost sile statičkog trenja, telo dolazi u stanje kretanje, odnosno počinje da klizi po podlozi.

Intenzitet sile kinematičkog trenja F_k je

$$F_k = \mu_k N, \quad (3.5)$$

gde je μ_k **koeficijent kinematičkog trenja**. U tabeli je dat pregled vrednosti koeficijenata trenja²² za neke interesantne kombinacije dodirnih

²¹Ova sila je po intenzitetu jednaka težini tela $Q = mg$ i suprotnog je smera.

²²Iz definicije oba koeficijenta sledi da je reč o bezdimenzionalnim veličinama.

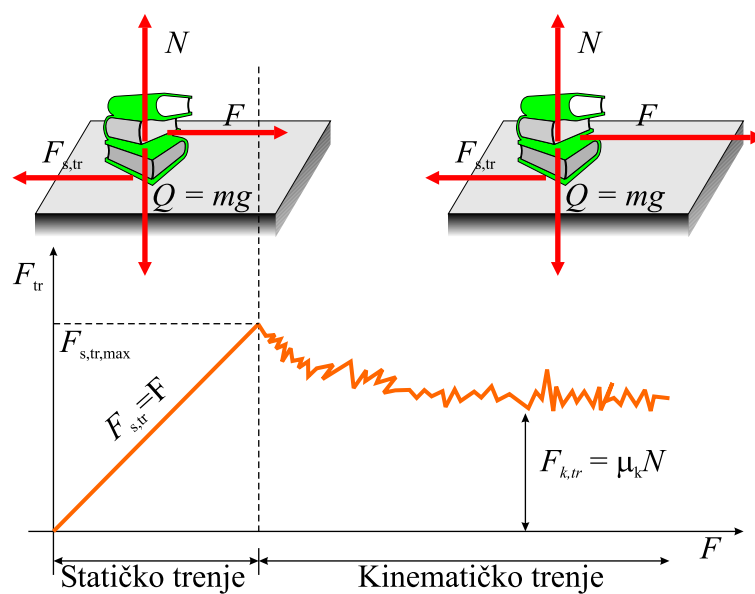
površina tela. Uočimo da je koeficijent statičkog trenja manji od koeficijenta kinematičkog trenja.

Sistem	μ_s	μ_k
Čelik i suvi čelik	0,6	0,3
Čelik i nauljeni čelik	0,05	0,03
Drvo i drvo	0,25-0,5	0,2-0,3
Teflon i čelik	0,04	0,04
Staklo i staklo	0,94	0,4
Guma i asfalt	1,0	0,8
Voskareno drvo i vlažan sneg	0,14	0,1
Voskareno drvo i suv sneg	-	0,04
Led i led	0,1	0,03
Čelik i led	0,4	0,02

Tabela 3.1: Koeficijenti statičkog i kinematičkog trenja

Jednačine (3.4) i (3.5) definišu zavisnost izmedju sile trenja, vrste materijala koji su u kontaktu (koeficijenti trenja) preko površina i reakcije podloge N . Pravac sile trenja je paralelan dodirnoj površini izmedju tela i normalan je na reakciju podloge N . Ako na primer pokušavamo da guranjem pomerimo čelični sef mase 100 kg koji se nalazi na drvenom podu, reakcija podloge je jednaka njegovoj težini $Q = mg = (100 \text{ kg})(9,80) \text{ m/s}^2 = 980 \text{ N}$, i usmerena je pod pravim uglom u odnosu na podlogu. Kako je koeficijent statičkog trenja 0,5, da bi pomerili sef, moramo da na njega delujemo silom paralelnom podu, koja je veća od $F_s = \mu_s N = 0,5 \times 980 \text{ N} = 490 \text{ N}$. Jednom kada smo uspeli da ga pokrenemo, trenje postaje manje jer je koeficijent trenja 0,3, pa će sila potrebna za održavanje njegovog kretanja konstantnom brzinom biti samo 294 N ($F_k = \mu_k N = 0,3 \times 980 \text{ N}$). Ukoliko je pod namazan uljem oba koeficijenta postaju značajno manja.

Koeficijenti trenja su skoro nezavisni od veličine dodirne površine sa podlogom. Da bi razumeli ovaj efekat, treba prvo napraviti razliku izmedju *prividne* i *stvarne* dodirne površine izmedju tela i podloge. U stvari, povećanje prividne dodirene površine (bez izmene bilo čega drugog) ne uvećava veličinu stvarne dodirne površine.



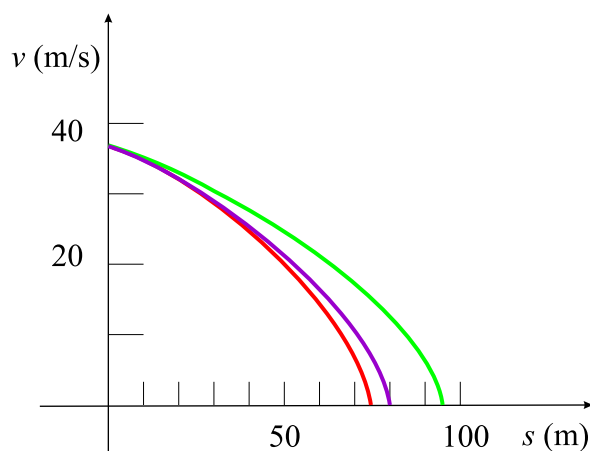
Slika 3.9: Smer sile trenja izmedju knjiga i stola je suprotan smeru sile kojom vučemo knjige po njemu. Kada intenzitet primenjene sile postane veći od maksimalne vrednosti sile statičkog trenja ($\mu_s N$), knjige počinju da klize. Maksimalna vrednost sile statičkog trenja je veća od sile kinematičkog trenja.

Antilock Braking Systems (ABS) kod automobila

Ako se točak automobila okreće a ne klizi po površini puta, maksimalna sila trenja kojom put deluje na gumu je sila statičkog trenja $\mu_s N$. Razlog je u sledećem. Delovi guma koji su u kontaktu sa podlogom, se ne klizaju po njoj. Ukoliko bi počele da se klizaju, jasno je da bi sila trenja bila $\mu_k N$. Ova analiza pokazuje da se kraći put do zaustavljanja automobila postiže ako se točkovi pri zaustavljanju ne klizaju već ako nastave da se i dalje okreću.²³

Na žalost, u situacijama kada treba zaustaviti što pre automobil, vozači instinktivno pritisnu pedal kočnice najjače što mogu, blokirajući na taj način točkove. Točkovi prestaju da se okreću, sila trenja između podloge i njih prestaje da bude statička i postaje kinematička, a pošto je ona manja, automobilu je potrebno duže vreme da se zaustavi.

Da bi rešili taj problem, inženjeri su morali da razviju takozvani Antilock Braking Systems (ABS) koji za vema kratko oslobadja kočnice kada se točkovi, usled jakog pritiska na pedal za kočenje, tek što nisu zaustavili. Ovaj sistem, na taj način obezbeđuje, pri kočenju, kontrolisajući kontakt između točka i podloge, zbog čega je put koji automobil prelazi do zaustavljanja značajno manji od onoga koji bi prešao kada bi se točkovi klizali.



Slika 3.10: Grafik koji pokazuje za datu brzinu, u momentu početka kočenja, dužine zaustavnih puteva, vozača amatera koji nema ABS na kolima, amatera sa ABS i profesionalnog vozača.

²³U slučaju zaustavljanja bez klizanja se takodje zadržava i kontrola nad automobilom koja se, sasvim jasno, u većoj ili manjoj meri gubi ako on počinje da klizi.

Precizna merenja su pokazala da, prosečan vozač, ukoliko ima kola sa ABS-om, uspeva da automobili zaustavi, skoro kao profesionalni vozač (slika 3.10).

Namena ovog sistema je da pomogne prosečnom vozaču (koji u situacijama kada mora da brzo zaustavi automobil pritiska kočnicu iz sve snage), da prilikom kočenja zadrži kontrolu nad automobilom i da minimizira zaustavni put.

Dobre i loše strane trenja

Trenje je prisutno svuda oko nas, negde je štetno a negde korisno, čak i neophodno.

Da nema trenja, čiva bića ne bi mogla da se kreću. Tako na primer, čovek pri hodu radom mišića naizmenično podiže i pomera napred po jednu nogu. To je moguće samo ako ona druga noga za to vreme stoji na podlozi, a ona će stajati jer između nje i podloge postoji stila statičkog trenja koja ne dozvoljava nozi da isklizne. Iz svakodnevnog iskustva je poznato da lakše hodamo po suvom asfaltu nego po ledu jer je koeficijent trenja asfalta znatno veći od koeficijenta trenja leda.

I automobili, bicikli i vozovi, mogu da se kreću samo ako postoji trenje između njihovih točkova i podloge po kojoj se kotrljaju. Automobilske gume nisu glatke već reljefne da bi sila trenja bila veća, zimi, kada su kolovozi zaledjeni, sami točkovi ne mogu da se kotrljaju, pa se na njih stavljaju lanci za sneg da bi se povećalo trenje.

Zahvaljujući trenju možemo da držimo razne predmete u rukama. Bez trenja oni bi iskliznuli iz ruku kao što nam iz nje veoma lako isklizne mokar sapun.

U nekim situacijama je trenje nepoželjno, zbog njega se troši obuća, automobilske gume, istupe se noževi, sekire, turpije, habaju se delovi mašina. Da bi se smanjilo trenje u mašinama i drugim mehanizmima koristi se podmazivanje,²⁴ ili se trenje klizanja zamenjuje trenjem kotrljanja (korišćenje kotrljajućih ležaja) gde god je moguće.

Trenje kotrljanja je znatno slabije od trenja klizanja: mnogo je lakše da pomerimo po podu nameštaj koji ima točkice nego onaj bez njih, lakše je kotrljati nego vući bure, balvan, vozila bi se teško kretala da nisu na točkovima, ...

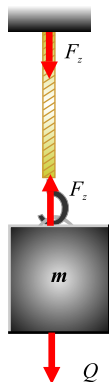
²⁴Trenje između čvrstog tela i tečnosti je mnogo manje nego trenje između dva čvrsta tela.

3.3.3 Sila zatezanja

Sila zatezanja je sila reakcije kojom zategnute žice (i slični tela kao što su sajle, konopci ...) deluje na telo koje je izazvalo njihovo zatezanje.

Pravac sile zatezanja je uvek duž zategnute žice, a smer je od tela koje je izazvalo zatezanje. U slučaju da je telo okačeno o žicu u polju Zemljine teže (slika 3.11), gravitaciona sila koja deluje na dole izaziva zatezanje a kao reakcija se u žici javlja sila zatezanja koja deluje na telo u suprotnom smeru od sile gravitacije (usled ovoga je rezultujuća sila) je suprotnog smera.

Svako elastično telo oblika žice, kabla, konopca ili lanca, može da se iskoristi za pokretanje za njega prikačenog tela jedino ukoliko se silom deluje paralelno duž njih. Sila koja se pri tome prenosi na telo se zove *sila zatezanja*. Ukoliko na primer držimo konopac o koji je okačeno telo mase m , sila zatezanja je jednaka po intenzitetu težini tela.

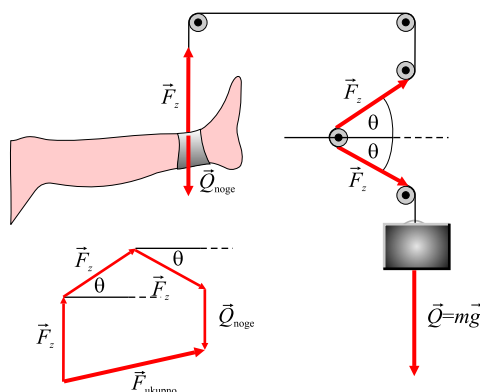


Slika 3.11: Sila zatezanja u konopcu o koji je okačen teg.

Preko konopca se prenosi sila $\vec{F}_z$ koja je paralelna njemu. Povlačenje konopca izaziva njegovo zatezanje. On deluje silom istog intenziteta i pravca ali suprotnog smera na tačku vešanja i na teg (ako zanemarimo masu konopca). Konopac je pri tome medijum koji prenosi silu između dva tela.

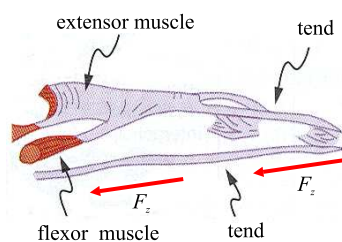
Princip sile zatezanja ima veliku primenu i koristi se za prenos sile kada je neophodna promena pravca njenog delovanja. Na slici 3.12 je prikazan sistem koji se često koristi na ortopedskim klinikama u bolnicama. Taj sistem se sastoji od niza koturova, zanemarljivog trenja, preko kojih su prebačene žice.

Po istom principu funkcionisu prsti (slika 3.13) u kojima tetive prenose silu zatezanja F_z od mišića na druge delove prsta menjajući pravac sile ali ne i intenzitet.



Slika 3.12: Skica jednog od sistema koji se koriste u bolnicama.

Sajla za kočenje kod bicikle prenosi zatezanje F_z od rukohvata kočnice do kočionog mehanizma na točku. Pri tome se, ako se zanemari trenje, pravac sile zatezanja menja ali ne i njen intenzitet.

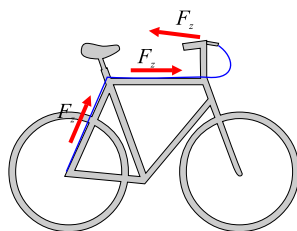


Slika 3.13: Mišići i tetive u prstu.

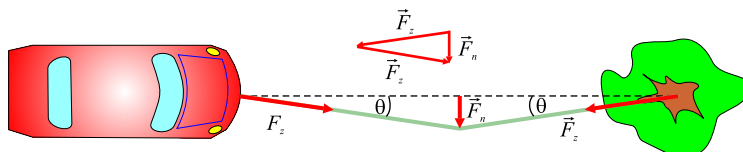
Interesantna je činjenica da delovanjem male sile možemo da izazovemo veliku silu zatezanja u nekom konopcu ili žici tako što ćemo na nju da delujemo u normalnom pravcu. Jedan takav slučaj je prikazan na slici 3.15 gde, relativno mala, poprečna sila $\vec{F}_n$ izaziva silu zatezanja intenziteta $F_z = F_n / (2 \sin \theta)$. Kako je ugao θ veoma mali, sila zatezanja je vrlo velika.

3.4 Osnovne sile u prirodi

Sve poznate fenomene u prirodi možemo da opišemo polazeći od četiri fundamentalne interakcije, odnosno sile. Pažljivija analiza pokazuje da sve sile sa kojima inače imamo svakodnevna iskustva, potiču od samo dve sile, elektromagnetne i gravitacione.



Slika 3.14: Sistem za kočenje kod bicikla.



Slika 3.15: Veoma velika sila zatezanja se može dobiti kada se na sajlu deluje silom koja je normalna na nju.

Šta je sa preostale dve? Zašto se sa njima ne srećemo, odnosno zašto ne osećamo njihovo dejstvo? Biće nam jasnije ako proanaliziramo tabelu u kojoj su pobrojane osnovne karakteristike pomenutih sila.

Sila	Približna relativna jačina	Domet	+/-	Prenosioc
Gravitaciona	10^{-38}	∞	+	Graviton (pretpostavka)
Elektromagnetna	10^{-2}	∞	+/-	Foton (registrovan)
Slaba nuklearna	10^{-13}	$< 10^{-18}$ m	+/-	W^+ , W^- , Z^0 (registrovani)
Jaka nuklearna	1	$< 10^{-15}$ m	+/-	Gluoni (osam)

Tabela 3.2: Karakteristike osnovnih sila (sa $\pm$ je označen privlačan, odnosno odbojni karakter sile).

Kako slaba i jaka nuklearna sila imaju izuzetno mali domet, mi ne osećamo njihovo delovanje direktno iako je ono suštinski važno za postojanje materije. One određuju koje je jezgro stabilno, koje se raspada, i bitne se za oslobađanje energije u određenim nuklearnim reakcijama. Nuklearne sile određuju, ne samo stabilnost jezgara već i egzistenciju mnoštva elemenata

u prirodi. Sastav jezgra takodje diktira broj elektrona u omotaču, a time i hemijske osobine atoma.

Gravitaciona sila je iznenadjujuće slaba i mi je osećamo jedino zbog toga što ona ima samo privlačni karakter. Naime, naša težina je u potpunosti posledica gravitacije, s obzirom na to, da se privlačno delovanje svih delića Zemlje sabere i na taj način da ukupan efekat. Na velikoj skali, u astronomskim sistemima, gravitacija je dominantna sila jer određuje kretanje satelita, planeta, zvezda i galaksija. Ona takodje bitno utiče na osobine prostora i vremena tako što se prostor blizu masivnih tela (kao što je Sunce) zakrivljuje, dok se protok vremena usporava.

Elektromagnetna sila može biti i privlačna i odbojna, i približno se poništava za velika tela koja se sastoje iz mnogo atoma.²⁵ Ukoliko nije jednaka nuli onda ona u potpunosti dominira nad gravitacionim delovanjem. Elektromagnetna sila je kombinacija električne sile (stvorene statičkim naelektrisanjima) i magnetne sile. Te dve sile su razmatrane kao potpuno odvojene do početka 19. veka kada je u ogledima počelo da se nazire da su one samo različite manifestacije jedne iste sile. Ovo je primer klasičnog *ujedinjavanja interakcija*. Slično ovome, trenje, sila zatezanja, i sve druge sile čije delovanje možemo da direktno osetimo (sem gravitacije) su posledice elektromagnetne interakcije atoma i molekula.

Od kako se došlo do zaključka da postoje četiri fundamentalne sile, fizičari se bave ispitivanjem uslova pod kojima bi one bile na neki način povezane.²⁶ Danas se fizičari dosta bave uslovima pod kojima se to dešava.²⁷ Eksperimentalno je potvrđena teorijska pretpostavka da se u uslovima ekstremno visokih gustina i temperatura, kakvi su postojali u ranom univerzumu, elektromagnetna i slaba nuklearna sila ne razlikuju. U tom smislu se one smatraju dvema formama jedne iste sile koja se naziva *elektroslaba*. Na taj način, lista četiri sile se može zapravo svesti na tri. Istraživanje uslova pod kojima bi se one pak ujedinile u jednu se pokazalo kao vema komplek-

²⁵To je posledica činjenice da su atomi, u normalnom stanju, elektroneutralni budući da se sastoje iz jednakog broja pozitivnih naelektrisanja u jezgru i negativnih u omotaču.

²⁶Ova ideja ima svoju osnovu u koracima kojima se došlo do današnjeg koncepta četiri fundamentalne sile. Naime, nekada su zasebno razmatrane optičke pojave od magnetnih i električnih pa se ispostavilo da sve one manifestacija elektromagnetne interakcije. Slično tome je Njutn pokazao da, privlačenje nebeskih tela i interagovanje tela na Zemlji sa njom, mogu da se opišu zakonom univerzalne gravitacije. Odatle i ideja da bi pobrojane osnovne interakcije u prirodi mogle da budu samo razne forme jedne iste interakcije - supersile. Ovim problemom se bezmalo stotinu godina bave najveći umovi fizike, a interesantno je da je poslednje decenije svog života i sam Ajnštajn posvetio ovoj tematici.

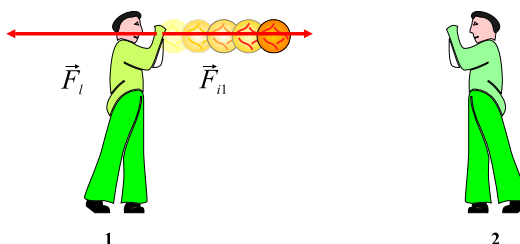
²⁷Teorije koje to opisuju se nazivaju GUT's (Grand Unified Theories) i može se reći da je na tom polju učinjen znatna napredak u poslednjih nekoliko desetina godina.

sno. Najmanji napredak je, možda neočekivano, napravljen u pokušaju da se gravitaciona sila opiše na ujedinjen način sa ostalima.²⁸

3.4.1 Delovanje na daljinu. Koncept polja

Na prvi pogled nam se čini sasvim očiglednim da sve sile deluju "na daljinu". Na to smo se navikli u slučaju gravitacione sile jer, na primer Zemlja i Mesec interaguju bez ikakvog međusobnog kontakta. Videli smo da pojava trenja jeste u stvari manifestacija elektromagnetne interakcije atoma koji naravno ne moraju da budu u međusobnom kontaktu. Prirodno se postavlja pitanje na koji načini i čime se, u tim slučajevima, prenosi interakcija?

Jedan način da odговорimo na ovo pitanje je da zamislimo da postoji **polje sile** koje okružuje telo koje je izvor sile. Drugo telo (obično se naziva probno) se nalazi u tom polju putem koga prvo telo deluje na njega silom. Intenzitet, pravac i smer ove sile zavisi od mesta na kome se nalazi drugo telo i od još nekih veličina. Fizičko **polje** koje smo pomenuli je samo po sebi "nešto" što prenosi interakciju jednog tela na drugo i ono je karakteristika tela koja ga stvara a ne "probnog" tela koje je uneto u ovo polje. Tako je na primer, gravitaciono polje Zemlje funkcija njene mase i rastojanja od njenog centra i nezavisno je od prisustva drugih masivnih tela u njemu.

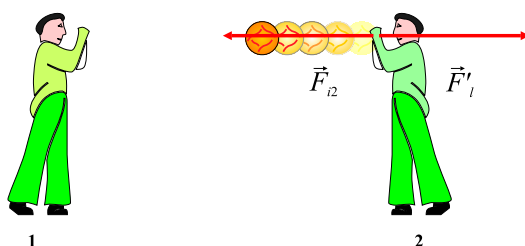


Slika 3.16: Razmena masivnog tela izmedju igrača prouzrokuje odbojnu silu. Osoba koja baca loptu, deluje na nju silom $\vec{F}_{i1}$ usmeravajući je ka drugoj osobi i usled toga oseća silu reakcije $\vec{F}_{l1}$ kojom lopta deluje na nju.

Ovako uveden koncept polja može da se primeni veoma uspešno za rešavanje problema kretanja tela u polju gravitacione i elektromagnetne sile, i to sa veoma velikom preciznošću. Medjutim, ma koliko bio koristan u praksi, on ne daje odgovor na pitanje ko, odnosno šta prenosi interakciju.

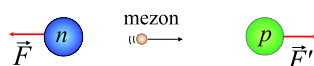
²⁸Razlog je verovatno u tome što preostale interakcije postoje izmedju tela koja egzistiraju u prostoru u datom momentu vremena, odnosno u prostor-vremenu, dok prema modernim shvatanjima gravitaciona sila jeste upravo to prostor vreme čije osobine menjaju masivna tela.

Do odgovora se došlo u napred opisanom procesu formulisanja elektroslabe interakcije, a začetak ove ideje potiče jos iz 1935. godine kada je Hideki Jukava,²⁹ proučavajući jaku nuklearnu silu došao na ideju da se interakcija prenosi neko vrstom čestica. Danas se smatra da se sve interakcije prenose odgovarajućim elementarnim česticama. Vizuelizacija ovih interagovanja je analogna sa makroskopskom situacijom predstavljenom na slici 3.16 gde dva čoveka dobacuju loptu i usled toga osećaju delovanje odbojne sile - iako se međjusobno ne dodiruju.³⁰



Slika 3.17: Osoba koja hvata loptu deluje na nju silom $\vec{F}_{i2}$ da bi je zaustavila i prito oseća silu reakcije $\vec{F}'_i$ kojom lopta deluje na nju u smeru odbijanja od prve osobe.

U tabeli iz prethodnog poglavlja, u kojoj su bile predstavljene četiri interakcije, pobrojane se i čestice prenosioci interakcija pri čemu je notirano da li je dokazano njihovo postojanje ili je pak reč o hipotetičkim česticama. Na ovom mestu može da se notira takodje činjenica da domet sile ima veze sa masom čestice prenosioca interakcija, pa tako sile čiji je domet beskonačan se prenose česticama čija je masa mirovanja jednaka nuli.



Slika 3.18: Razmena mezona izmedju protona i neutrona prenosi interakciju putem jake nuklearne sile $\vec{F}$ i $\vec{F}'$ izmedju njih.

²⁹Hideki Yukawa (1907-1981), japanski fizičar.

³⁰Delovanje privlačnom silom se može vizuelizovati kao razmena masa - osoba 2 vuče loptu iz ruku osobe 1 koja pokušava da je zadrži.

3.5 Statika

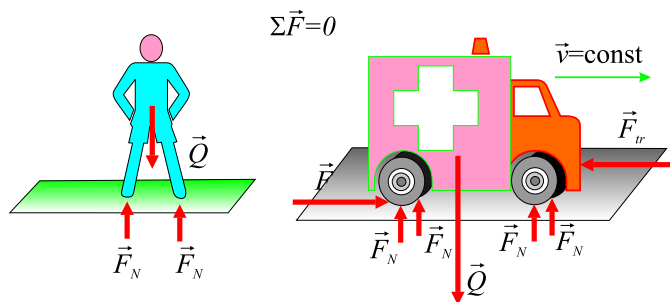
Statika se bavi proučavanjem sila kada je telo u stanju ravnoteže. Telo je u ravnoteži kada se ne ubrzava, a pri tome može mirovati, kretati se ravnomerno pravolinijski (konstantna brzina) ili može da ravnomerno rotira (konstantna ugaona brzina) oko neke ose. Naime, pogrešno je shvatanje da biti u ravnoteži znači mirovati. Mirovanje tela je samo jedna vrsta ravnoteže, ali nije jedina.

3.5.1 Uslovi ravnoteže

Tela su u stanju ravnoteže pri određenim uslovima. Prvi je već ranije pomenut prilikom formulisanja Njutnovih zakona i glasi da je nepohodno da ukupna sila koja deluje na telo bude jednaka nuli

$$\sum \vec{F} = 0. \quad (3.6)$$

Kako je sila vektorska veličina, ovaj uslov znači da sila u svim relevantnim pravcima (x , y i z) mora da bude jednaka nuli.



Slika 3.19: Nepokretna osoba je u stanju statičke, dok je kamion u stanju dinamičke ravnoteže. Primer dvostrane poluge.

U oba slučaja prikazana na slici 3.19, ukupna sila je jednaka nuli ali je reč o dvema vrstama ravnoteže. Jedna se naziva **statičkom** (jer nema kretanja u odnosu na referentni sistem vezan za Zemlju) a druga **dinamičkom** (jer se telo kreće konstantnom brzinom).

Dok uslov za ravnotežu (3.6) proističe iz zahteva da se telo ne kreće ubrzano (translatorno), naredni uslov za ravnotežu je posledica zahteva da telo ne *rotira* ubrzano. Tela koja su u stanju ravnoteže mogu da rotiraju ali tako da se brzina rotacije ne menja sa vremenom.

Da bi bilo jasnije o čemu je reč, razmotrimo otvaranja vrata na sobi, primer sa kojim se svakodnevno srećemo. Poznato je da ćemo što ih jače gurnemo (delujemo većom silom na njih) biti efikasniji u otvaranju. Obično nemamo u vidu da je, osim veličine sile kojom ćemo delovati na vrata, bitna i takozvana napadna tačka koja je na vratima unapred definisana postavljenom kvakom. Kada ne bi bilo kvake i kada bi gurali jednakom silom vrata na različitim udaljenostima od šarki veoma brzo bi ustanovili da je vrata najlakše otvoriti kada na njih delujemo silom što dalje od šarki. Treći bitan faktor je pravac delovanja sile. Najefikasnije je da na vrata delujemo silom koja je pod pravim uglom u odnosu na njih.

Ta tri faktora: intenzitet, pravac i tačka delovanja-napadna tačka (njena udaljenost od šarki odnosno ose oko koje vrata rotiraju) definišu novu fizičku veličinu koja se naziva **moment sile** i označava sa $\vec{M}$. Moment sile je vektorska veličina koja ukazuje na to koliko efikasno sila, kojom delujemo na telo, menja brzinu njegove rotacije.³¹ Jednačina kojom je definisan intenzitet momenta sile je

$$M = rF \sin \theta, \quad (3.7)$$

gde je sa r označena udaljenost napadne tačke sile od ose rotacije, F je intenzitet primenjene sile, a θ je ugao između r i F .

U skladu sa slikom (3.20) se vidi da moment može da se zapiše i kao

$$M = (r \sin \theta)F = r_{\perp}F, \quad (3.8)$$

gde je sa $r_{\perp}$ označeno najkraće rastojanje od pravca delovanja sile do ose rotacije (isprekidana linija na slici 3.20). SI jedinica za moment sile M je N·m. Pravac momenta sile sa slike (3.20) je pod pravim uglom u odnosu na sliku a smer zavisi od toga da li je on takav da rotira telo u smeru suprotnom od kazaljke na časovniku - tada je pozitivan, dok je negativan ukoliko utiče na rotaciju u smeru kazaljke na časovniku.

Na osnovu ovoga, drugi uslov ravnoteže je, da *ukupan moment spoljašnjih sila mora da bude jednak nuli*

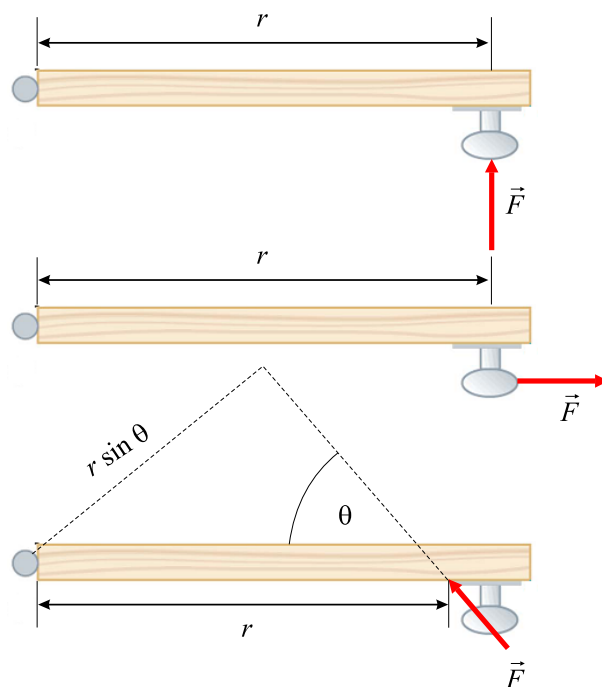
$$\vec{M} = 0. \quad (3.9)$$

Na primer, dva deteta koja balansiraju na klackalici zadovoljavaju oba uslova ravnoteže.³² U slučaju uslova (3.9) ukupan moment sile teže³³ je jednak nuli pošto su jednaki po intenzitetu proizvodi Q_1r_1 i Q_2r_2 a suprotno su usmereni.

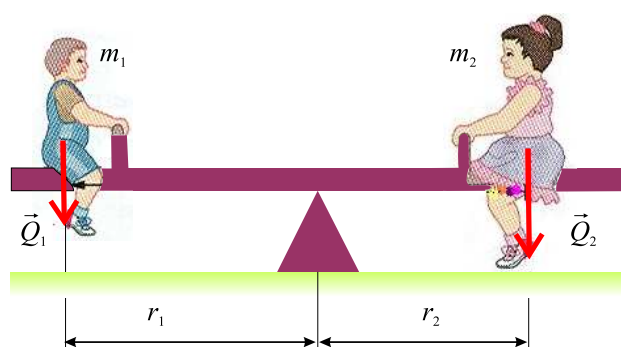
³¹Ova definicija je u potpunoj analogiji sa definicijom sile kao veličine koja iskazuje uticaj na brzinu kojom se telo kreće.

³²Kad je rečo prvom uslovu, njihova težina je uravnotežena reakcijom u osloncu ljujaške.

³³Sila teže je u ovom slučaju spoljašnja sila za posmatrani sistem.



Slika 3.20: Delovanje sile pod različitim uglovima u odnosu na vrata.



Slika 3.21: Ravnoteža na klackalici.

Naravno, i bez ovog računa se zna da, ukoliko želimo ravnotežu, dete manje mase treba da sedi dalje od oslonca klackalice dok ono masivnije treba da bude bliže njemu.

3.5.2 Centar masa. Težište

Realna tela nisu tačkasta pa se i retko mogu razmatrati kao materijalne tačke. Drugim rečima, mora se uzeti u obzir da im je masa raspoređena na neki način po prostoru. Priroda međutim i u tim slučajevima pokazuje jednostavnost koja se ogleda u tome da često kretanje realnih tela može razmatrati polazeći od toga da im je celokupna masa skoncentrisana u jednoj tački, koja se naziva **centar masa** (CM). Centar masa se, po svom smislu, nalazi u tački koja predstavlja središte raspodele masa sistema. Ukoliko je telo pravilnog geometrijskog oblika CM je u njegovom središtu (na primer kod lopte), u suprotnom on je bliži masivnijem delu tela.

Položaj centra masa u trodimenzionalnom sistemu je određen relacijom

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{M}, \quad (3.10)$$

gde je $\vec{r}_{CM}$ vektor koji određuje položaj CM; $\vec{r}_1$ je položaj mase m_1 , ...; a $M = m_1 + m_2 + \dots$ je ukupna masa sistema.

Pojam centra masa se najlakše vizuelizuje na primeru dve mase koje se nalaze na jednom pravcu duž koga ćemo postaviti x osu. U tom slučaju vektor $\vec{r}_{CM}$ ima samo jednu komponentu x_{CM} koja je jednaka

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

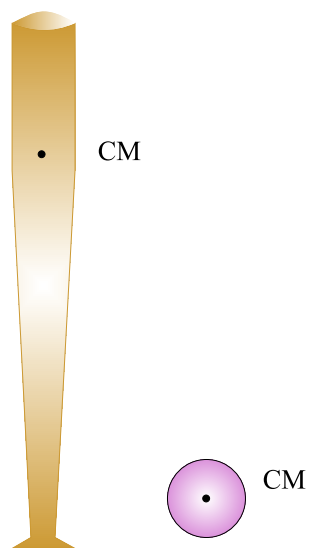
Ako su ova dva tela jednake mase centar masa će biti tačno na sredini³⁴ a ako je jedno od ova dva tela masivnije centar masa će biti bliži njemu.

Kada je reč o delovanju sile Zemljine teže, interesantno je da se njeno delovanje svodi na to da postoji jedna tačka koja se naziva **centar gravitacije ili težište** tela. Položaj težišta za trodimenzionalni sistem je određen relacijom

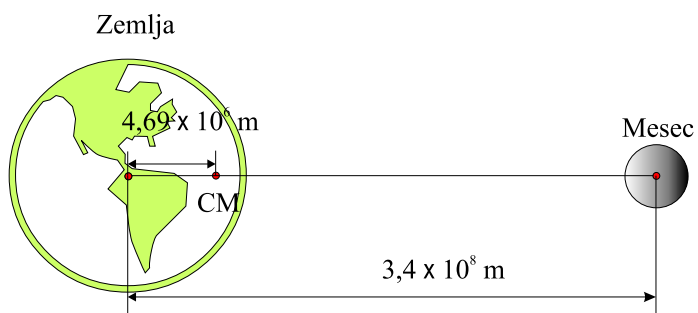
$$\vec{r}_T = \frac{Q_1\vec{r}_1 + Q_2\vec{r}_2 + \dots}{Q} = \frac{m_1g\vec{r}_1 + m_2g\vec{r}_2 + \dots}{m_1g + m_2g + \dots}. \quad (3.11)$$

U većini slučajeva g je isto za svaku masu u prethodnom izrazu, pa se može skratiti, što dovodi do zaključka da se u tom slučaju centar masa i

³⁴Ovo je lako pokazati, u tom slučaju je naime $x_{CM} = (mx_1 + mx_2)/(m + m) = (x_1 + x_2)/2$.



Slika 3.22: Centar masa bejzbol palice i lopte.

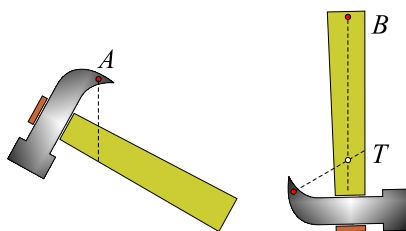


Slika 3.23: Centar mase sistema Zemlja Mesec se nalazi unutar Zemlje zato što je Zemlja 81 puta masivnija od Meseca.

težište poklapaju. Drugim rečima, za telo (ili sistem tela) koje se nalazi u homogenom gravitacionom polju, važi

$$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CG}. \quad (3.12)$$

Interesantno je napomenuti da se položaj težišta datog tela može relativno lako odrediti eksperimentalno.



Slika 3.24: Odredjivanja težišta tela.

Potrebno je okačiti telo da visi slobodno u polju Zemljine teže. Od prve tačke vešanja treba povući vertikalnu liniju koja preseca telo. Nakon toga telo treba okačiti koristeći drugu tačku vešanja i ponovo povući vertikalnu liniju. U preseku ove dve linije nalazi se težište tela T (3.24).

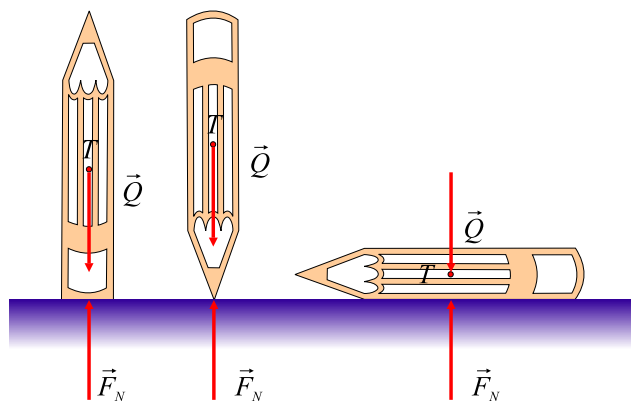
3.5.3 Ravnoteža

Postoje tri tipa ravnoteže: *stabilna*, *labilna* i *indiferentna (neutralna)*, što je prikazano na slici 3.25.

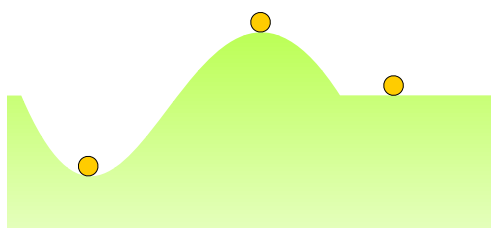
Za sistem se kaže da se nalazi u položaju **stabilne ravnoteže** ako, kada ga malo izvedemo iz ravnoteže, na njega deluje rezultujuća sila ili moment sile, u smeru suprotnom od učinjenog pomeraja. Tipičan primer je lopta koja se nalazi u ovalnom udubljenju (slika 3.26), na koju, kada je izvedemo iz ravnotežnog položaja, deluje takozvana povratna, odnosno restituciona sila koja teži da je vrati u položaj *stabilne ravnoteže*.

Sistem je u položaju **labilne ravnoteže** ako, kada ga malo otklonimo iz tog položaja, na njega počne da deluje resultantna sila ili moment sile, koji imaju *isti* smer kao i pomeraj od ravnoteže. Primer ovog tipa ravnoteže je lopta koja miruje na vrhu brda (slika 3.26). Kada je jednom izvedemo iz položaja ovakve ravnoteže ona nastavlja da se udaljava od njega ubrzavajući se.

Sistem se nalazi u položaju **indiferentne ravnoteže** ukoliko se, pri pomeranju od tog položaja u njemu ne javljaju, niti sile koje bi ga vraćale



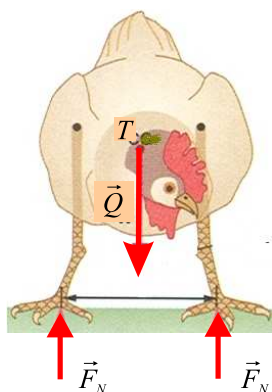
Slika 3.25: Položaji stabilne, labilne i indiferentne ravnoteže.



Slika 3.26: Položaji stabilne, labilne i indiferentne ravnoteže.

ka njemu, niti one koje bi ga dodatno udaljavale od tog položaja. Takav je slučaj sa loptom koja se nalazi na vodoravnoj površini.

Može da se primeti da, ako se telo previše udalji od položaja stabilne, može doći u položaj labilne ravnoteže. Pri ovome ima odredjenih razlika, odnosno neka tela su stabilnija od drugih u položaju (svoje) stabilne ravnoteže. I čovek na slici 3.19 i olovka na prvom delu slike 3.25 su u stabilnoj ravnoteži, ali se odgovarajućim bočnim pomeranjem mogu dovesti u situaciju da postane nestabilna. Kritičan momenat, pri njihovom "naginjanju" delovanjem nekom bočnom silom, nastaje kada se težište više ne nalazi iznad površine oslonca (kod olovke je to čitava njena donja površina kojom naleže na podlogu a kod čoveka je površina koja obuhvata jedno i drugo stopalo i prostor između njih). Kako se kod čoveka težište nalazi iznad oslonca u zglobovima koji se nalaze u kukovima, ova bočna pomeranja tela moraju brzo da budu kompenzovana. To je funkcija centralnog nervnog sistema koja je razvijena još dok kao deca učimo da tela držimo uspravna. Tela kod kojih je težište ispod glavnih oslonaca u kukovima su mnogo stabilnija. Takav je slučaj sa nekim životinjama, na primer kod kokošaka (slika 3.27).

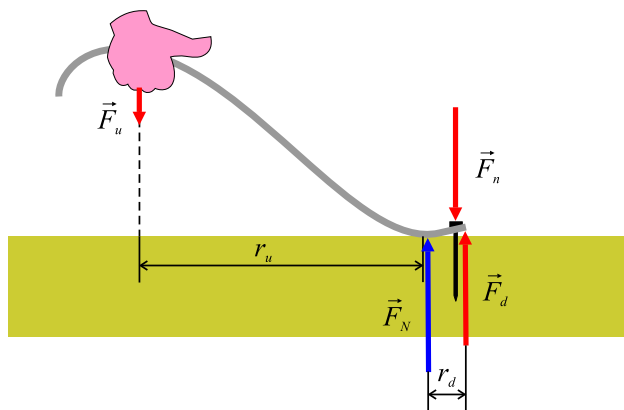


Slika 3.27: Primer dvostrane poluge.

Proste mašine

Proste mašine su uređaji koji koristeći sistem poluga, zupčanika, koturača, klinova i zavrtanja, mogu da znatno uvećaju primenjene sile i momente. U razumevanju funkcionisanja prostih mašina dovoljno je koristiti principe statike jer su, u većini slučajeva, one ili miruju ili se kreću konstantnom brzinom.

Slika 3.28 pokazuje kako princip rada poluge može da se iskoristi za



Slika 3.28: Izvlačenje zakucanih eksera polugom.

izvlačenje eksera.³⁵ Ono što nas zanima pri analizi vadjanja eksera je, koliko puta je dobijena sila F_d , kojom posmatrana poluga deluje na ekser, veća od uložene sile F_u kojom delujemo na kraj poluge koji držimo rukom. Odnos ove dve sile za bilo koju prostu mašinu, se naziva **koeficijentom mehaničke efikasnosti**³⁶

$$M_k = \frac{F_d}{F_u}. \quad (3.13)$$

Primetimo da kod poluge obavezno postoje i momenti sila jer se oko tačke oslonca poluge vrši rotacija. A kada je reč o momentima sila, već smo videli da je rastojanje napadnih tačaka sila od tačke oslonca veoma bitno, te je pogodno veličinu M_k izraziti preko njih. Kao što se vidi sa slike 3.28, postoje tri vertikalne sile koje deluju na polugu, koja u ovom slučaju predstavlja sistem: $\vec{F}_u$, $\vec{F}_n$ i $\vec{F}_N$. $\vec{F}_n$ je sila reakcije kojom glava eksera deluje na sistem (polugu) te je prema tome jednaka po intenzitetu a suprotno usmerena od sile $\vec{F}_d$ kojom poluga deluje na ekser. $\vec{F}_N$ je normalna sila kojom podloga deluje na polugu, ali je njen moment jednak nuli jer deluje u tački oslonca. Ostalo je dakle da, momenti koji potiču od sile $\vec{F}_u$ i $\vec{F}_n$ moraju da budu jednaki da bi bio zadovoljen uslov ravnoteže $\vec{M} = 0$, odnosno treba da važi

$$r_u F_u = r_d F_d$$

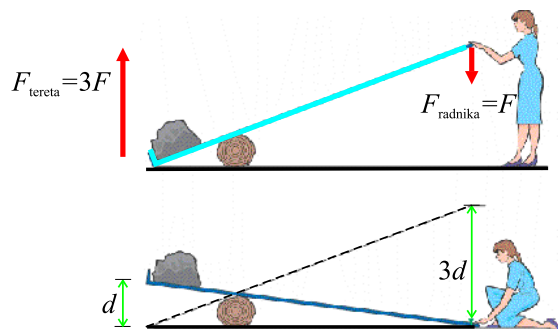
(ovde je uzeto u obzir da važi jednakost intenziteta sila akcije i reakcije $F_n = F_d$). Imajući u vidu odnos sila koji se dobija iz ove relacije, jednačina

³⁵Klackalica je takodje primer primene poluge

³⁶Ovo je definicija takozvanog idelanog koeficijenta mehaničke efikasnosti. U realnosti trenje umanjuje vrednost ovog odnosa.

(3.13) postaje

$$M_k = \frac{r_u}{r_d}. \quad (3.14)$$



Slika 3.29: "Zlatno pravilo mehanike".

Ovo je princip rada dvostrana poluga čija je još jedna primena prikazana na slici 3.29. Jednakost momenata sile radnika $F_{radnik}3d$ i momenta sile tereta $F_{tereta}d$ omogućuje da se delovanjem sile F podigne tri put teži teret.³⁷ Drugim rečima, koeficijent mehaničke efikasnosti, u ovom slučaju, iznosi 3. Zbog velikog praktičnog značaja ovo "pravilo" poluge koje se, kao što smo videli izvodi iz poznavanja momenta sile, se naziva "zlatno pravilo mehanike".

3.5.4 Sile i momenti sila u mišićima i zglobovima

Skeletni mišići, kosti i zglobovi³⁸ su veoma interesantni za primenu *statike* a kao što ćemo videti biće puno iznenadjujućih rezultata. Mišići³⁹ na primer, deluju mnogo većom silom nego što bi mogli i da pretpostavimo. Na čovečje telo delju spoljašnje sile (gravitacione i druge) i unutrašnje sile mišićnih kontrakcija. Iz tog razloga se kosti⁴⁰ ponašaju po zakonima koji važe za

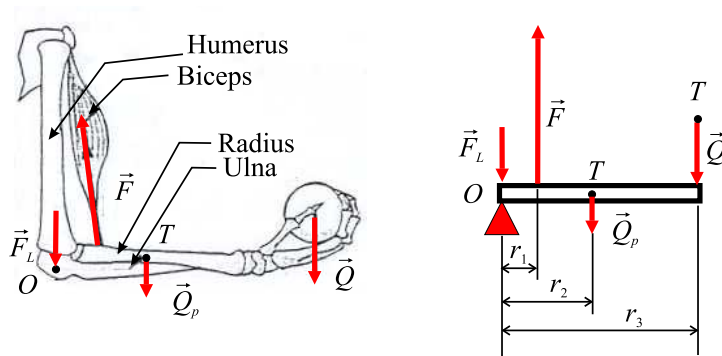
³⁷Doduše na 3 puta manju visinu, ali to je ceh koji mora da se plati da bi moglo da se uz pomoć poluge podigne telo.

³⁸Skeletni mišići, kosti i zglobovi čine lokomotorni sistem čoveka koji omogućuje promenu položaja u prostoru. Pri tome, mišići čine aktivni, a kosti i zglobovi, pasivni deo ovog sistema.

³⁹Mišići se dele na poprečno-prugaste skeletne, poprečno-prugaste srčane i glatke mišićne unutrašnjih organa. Za lokomotorne funkcije su značajni samo poprečno-prugasti skeletni mišići. Ovi mišiću su najčešće vretenastog oblika, pri čemu suženja na krajevima prelaze u tetive koje srastaju za kost i na taj način vezuju mišić za nju.

⁴⁰Kosti se dele na duge, kratke i pljosnate. Duge kosti predstavljaju poluge pomoću kojih se ostvaruju određeni pokreti (na primer butna kost). Svaka duga kost ima *telo* i dva

poluge. Zglobovi⁴¹ povezuju ovakve poluge u sisteme omogućavajući im da vrše rotaciona kretanja.



Slika 3.30: Primer jednostrane poluge.

Na slici 3.30 su prikazane relevantne sile u situaciji kada se u ruci drži neki teret, na primer lopta. U ovom primeru se podlaktica ponaša kao jednostrana poluga koja ima tačku oslonca u lakatnom zglobu. Veličina sile mišića se u ovom slučaju može proceniti na sledeći način. Moment koji kreiraju težina kosti $\vec{Q}_p$, i lopte $\vec{Q}$, u ruci imaju težnju da zarotiraju kost u smeru kazaljke na časovniku dok sila mišića (bicepsa) $\vec{F}$, stvara moment suprotnog smera. Da bi ukupna moment sistema bio jednak nuli, ova dva momenta (budući da su suprotno usmereni) moraju biti jednaka (pri ovome je uzeto u obzir da sila $\vec{F}_L$ deluje u tački oslonca tako da je njen moment

okrajka koji ulaze u sastav zglobova i prošireni su radi smanjenja pritiska i trenja u zglobu. Na kostima postoje ispupčenja za koja se preko tetiva pripajaju mišići. Kratke kosti imaju relativno malu pokretljivost, ali su od značaja za kretanje. Njihovi glavni predstavnici su kičmeni prešljenovi i kratke kosti u sklopu šaka i stopala. Pljosnate kosti imaju uglavnom zaštitnu ulogu (kosti lobanje, karlice, ...) ili služe kao oslonac nekoj drugoj kosti (lopatica koja je oslonac ramene kosti).

⁴¹Zglobovi predstavljaju spoj dve ili više kosti, kod kojih je jedna obično ispupčena (glava kosti), a druga udubljena (čашica). Prema pokretljivosti zglobovi se dele na pokretne, polupokretne (kičmeni pršljenovi) i nepokretne. Pokretni zglobovi se prema karakteru rotacije dele na jednoosne (zglob lakta i kolena), dvoosne (zglob stopala i šake) i troosne (zglob ramena i kuka). Ako se pri kretanju zgloba predju njegove dozvoljene granice slobode dolazi do pojave iščašenja.

sile jednak nuli.)

$$r_2 Q_p + r_3 Q = r_1 F.$$

Sila mišića F je, prema tome,

$$F = \frac{r_2 Q_p + r_3 Q}{r_1}.$$

Iz ove relacije je moguće odrediti njenu brojčanu vrednost ukoliko su poznati ostali podaci. Pretpostavimo da je masa tega koji se nalazi u ruci $m = 4$ kg, masa podlaktice $m_p = 2,5$ kg, a rastojanja $r_1 = 4,0$ cm, $r_2 = 16$ cm i $r_3 = 38$ cm. Sila mišića je sada

$$F = \frac{16,0 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ kg} + 38,0 \text{ cm} \cdot 4,0 \text{ kg}}{4,0 \text{ cm}} 9,80 \text{ cm/s}^2 = 470 \text{ N}.$$

Ukupna težina koju mišići svojim delovanjem, u ovom slučaju, podižu, jednaka je zbiru težine podlaktice i "korisne" težine tela koje se nalazi u ruci $Q + Q_p = 63,7$ N. Upoređujući ovu vrednost sa silom mišića zaključujemo da je ona čak 7,38 puta veća od težine koju podiže.⁴²

Slično bicepsima, većina skeletnih mišića mora da deluje mnogo većom silom na udove tela da bi ih pokretali. Razlog je u tome što je većina mišića spojena sa kostima blizu zglobova, što znači da je, prema izrazima (3.13) i (3.14), koeficijent mehaničke efikasnosti uvek manji od 1.⁴³ Ovo važi za mišiće koji imaju ulogu da saviju udove (takvi su na primer biceps), koji se nazivaju *fleksorima*, kao i za one koji otvaraju udove (tricepsi) koji se nazivaju *ekstenzorima*. Zamišljajući ih kao proste mašine, jasno je da uložena sila mora da bude znatno veća od sile koja se dobija za vršenje neke aktivnosti.

Veoma velike sile se takodje stvaraju u zglobovima. U primeru prikazanom na slici 3.30 sila koja deluje na zglob F_L se može dobiti kao razlika sile bicepsa $F = 470$ N i sila težine podlaktice $Q_p = 24,5$ N i tereta u ruci $Q = 39,2$ N. Ova sila, prema tome, iznosi $F_L = 470 \text{ N} - 63,7 \text{ N} = 406,3 \text{ N}$. Jasno je da su sile u zglobovima i mišićima to veće što je teret koji se podiže dalje od zglobova. Tako, na primer u slučaju tenisa, ovaj efekat se dodatno povećava, jer reket praktično produžavaju polug koju sada čini sistem ruka + reket. Iz tog razloga nije čudno da lakat tenisera često doživi oštećenja kao posledica velikih napora kojima je izložen tokom bavljenja ovim sportom.

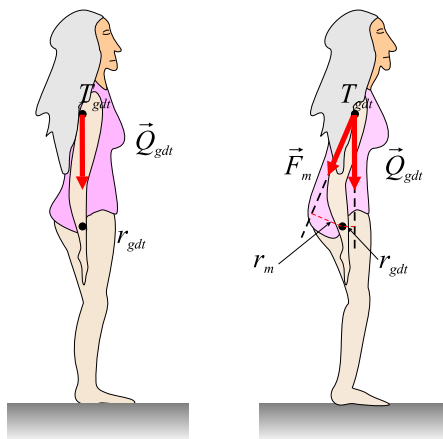
⁴²Do ove brojke se lako dolazi ako se napravi odnos $F/(Q_p + Q)$.

⁴³Drugim rečima, mišići moraju da deluju znatno većom silom da bi proizveli manju koja je dovoljnog intenziteta za obavljanje nekog posla.

Noge funkcionišu na sličan način, pri čemu su kolena mnogo komplikovanija od lakatnih zglobova. Tkiva koja povezuje donje udove, kao što su tetive i hrskavica, kao i zglobovi se često oštećuju velikim silama koje trpe. Ponekad je to posledica slučajnih povreda, ali se kod dizača tegova često dešava da mišići popucaju usled velikih napora kojima su izloženi.

Ledja su složeni od ruku i nogu, sa više mišića i više zglobova-pršljenova na kičmi, pri čemu svi mišići, kao što smo napomenuli, imaju koeficijent mehaničke efikasnosti manji od 1. Iz tog razloga, ledjni mišići moraju da deluju veoma velikim silama koje nose odgovarajući pršljenovi. Kada ove sile postanu prevelike dolazi do oštećenja diskusa koji se nalaze između pršljenova.

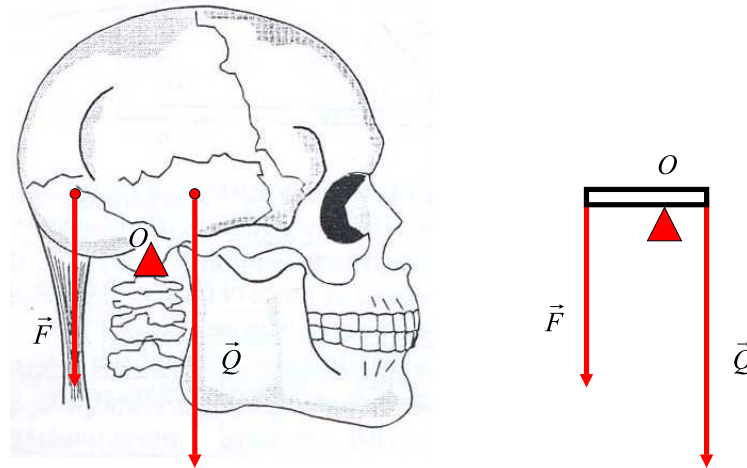
Vilica se razlikuje od dosadašnjih primera. Mišić koji je pokreće (masseter) ima koeficijent mehaničke efikasnosti veći od 1 na mestima gde su kutnjaci, što znači da se na tom mestu vilice može dobiti veoma velika sila.



Slika 3.31: Pravilno i nepravilno držanje tela.

Slika 3.31 pokazuje kako loše držanje tela izaziva naprezanje kičme. Može da se primeti da je kada je stav tela pravilan, težište gornjeg dela tela se nalazi tačno iznad tačke u kukovima oko koje može da se vrši rotacija. Usled toga, težina gornjeg dela tela ne stvara moment u odnosu na rotaciju u kukovima. Jedina sila koja je potrebna za zadržavanje tela u ovom položaju je vertikalna sila u kukovima koja je jednaka težini gornjeg dela tela. Nije potrebno dodatno delovanje mišića jer su kosti čvrste i prenose tu neophodnu silu od podloge prema naviše. To je položaj labilne ravnoteže, ali je sila koja je potrebna da ga vrati u taj položaj, ukoliko se telo malo otkloni od njega, veoma mala. Na drugom delu slike je prikazano telo koje ima loš stav,

težište gornjeg dela tela T_{gdt} se nalazi ispred tačke obrtanja u kukovima. Kao posledica toga, nastaje moment sile koji deluje u smeru kretanja kazaljke na časovniku koji, da bi telo ostalo uspravno, mora da se uravnoteži suprotno usmerenim momentom koji stvaraju mišići donjeg dela ledja. S obzirom na to da je njihov koeficijent korisnosti manji od 1, oni moraju da deluju velikim silama da bi bio postignut potreban efekat.



Slika 3.32: Primer dvostrane poluge.

Primer još jedne vrste poluge, dvostrane poluge, je prikazan na slici 3.32 koja predstavlja glavu u uspravnom položaju. Tačka oslonca je kod spoja glave sa prvim pršljenom. Sila $\vec{F}$ je sila mišića i ima napadnu tačku O na potiljačnoj kosti. Sila $\vec{Q}$ je sila Zemljine teže sa napadnom tačkom u težištu.

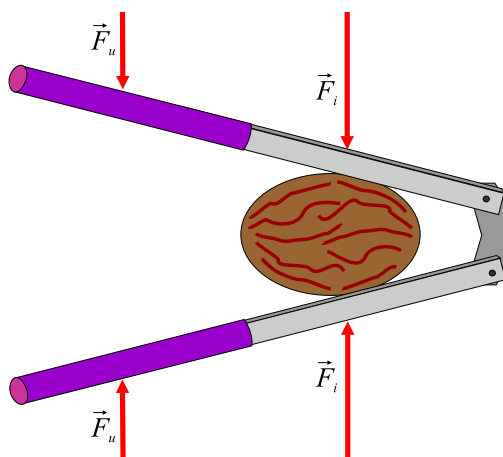
3.6 Zadaci

1. Kolikom silom mišića mora da se deluje da bi se u ruci držao teg težine 50,0 N? Videti sliku

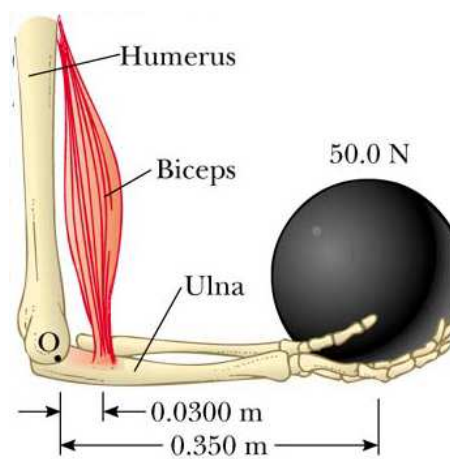
3.7 Rešenja

1. Ako uvedemo oznake: $Q = 50,0 \text{ N}$, $r_1 = 3,00 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $r_2 = 35,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, sila mišića mora da zadovoljava sledeći uslov

$$F \cdot r_1 = Q \cdot r_2$$



Slika 3.33: Princip rada krckalice za orahe.



Slika 3.34: Uz zadatak ...

iz koga se za nju dobija

$$F = \frac{Q \cdot r_2}{r_1} = 583 \text{ N.}$$

