# Glava 7

# Oscilacije

Da li kretanje bove na ustalasalom moru, deteta koje se ljulja, okinute žice na gitari, atoma u kristalnoj rešetci, ima nešto zajedničko? Odgovor je pozitivan, sva pomenuta tela **osciluju**, odnosno kreću se "napred-nazad" izmedju dve tačke. Bez obzira na različitost pomenutih oscilovanje, kod svih, obzirom da brzina kretanja tela nije konstantna, postoje sile koje upravljaju njime. Osim toga, energija se stalno transformiše iz jednog oblika u drugi (kinetička u potencijalnu i obrnuto). Kada na primer deca žele da se ljuljaju moramo da poguramo ljuljašku i dovedemo je u stanje kretanja. Energija atoma u kristalima raste ako se oni zagreju. Žici gitare predajemo energiju kada je okinemo. Ova glava će biti posvećena analizi oscilatornog tipa kretanja[1]

Neke oscilacije ne ostaju izolovane već oko sebe stvaraju talase. Vibriranje žice na gitari kreira zvučne talase na primer. U bazenu možemo da napravimo talase periodičnim udaranjem rukom po vodi. Neki talasi su vidljivi (na vodi) a neki ne (zvučni talasi). Svaki talas medjutim predstavlja poremećaj u sredini koji se od izvora prostire kroz nju i prenosi energiju. Osim ovih talasa postoje talasi koji se javljaju prilikom zemljotresa, elektromagnetni talas (vidljiva svetlost, radio talasi, ...). Svaka subatomska čestica može da se u nekim interakcijama ponaša kao talas.

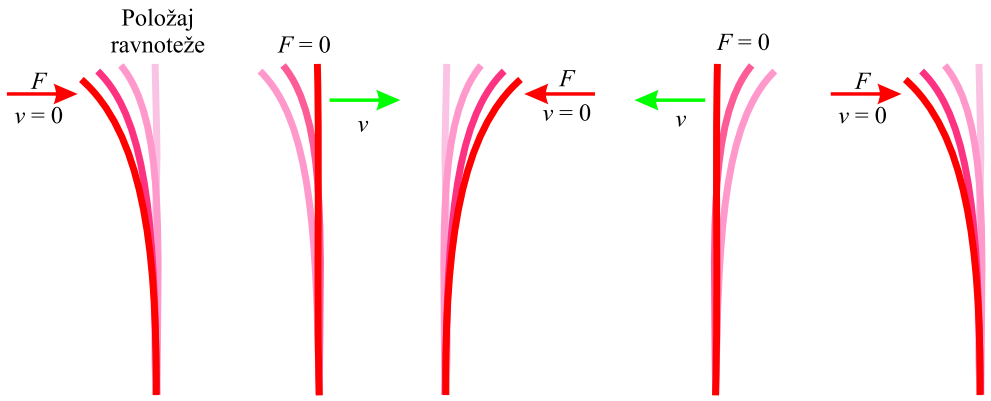
Analiza oscilatornog i talasnog kretanja će pokazati da se mogu opisati

[1]Prilikom posmatranja kretanja tela oko nas, u principu možemo da uočimo dva tipa kretanja. Jedna vrsta bi bilo kretanje prilikom koga se tela pomeraju sa mesta na mesto *bez ponavljanja* prethodnih položaja. Takvo kretanje se naziva *linearnim*. Pojmovi kao što su *predjeni put, vreme, brzina i ubrzanje* su uvedeni na osnovu posmatranja takvog tipa kretanja. Druga vrsta je kretanje koje se ponavlja tako što tela, krećići se "napred-nazad" prolaze kroz ista mesta u prostoru. Takvo kretanje se naziva **oscilatornim**.

uz pomoć nekoliko osovnih principa. Takodje će se pokazati da su talasi fenomeni mnogo više prisutni u svakodnevnom životu nego što bi moglo da nam se učini. Proučavanje oscilacija i talasa ćemo početi analizom tipa sile koja može da izazove najprostija kretanja ovog oblika.

## 7.1 Hukov zakon

Prema I Njutnovom zakonu, telo može da ociluje jedino ukoliko na njega deluje neka sila.[2]




Slika 7.1: Plastični lenjir, pričvršćen na jednom kraju osciluje jer se pod dejstvom povratne sile vraća u ravnotežni položaj.

Razmotrimo kretanje plastičnog lenjira čiji je jedan kraj pričvršćen a drugi smo savili na jednu stranu (slika 7.1). Kao posledica deformacije u lenjiru se javlja sila koja je usmerena ka ravnotežnom položaju. Obzirom na smer ove sile i njenu težnju da telo koje je deformisano vrati u ravnotežni položaj, ona se naziva **restituciona ili povratna sila**. Ukoliko pustimo gornji kraj lenjira, usled postojanja restitucione sile, on će krenuti ka ravnotežnom položaju u kojem lenjir nije deformisan. Iz tog razloga je u njemu restituciona sila jednaka nuli. Medjutim, obzirom da lenjir u ravnotežnom položaju ima odredjeni impuls, on prolazi kroz njega i nastavlja da se kreće na suprotnu stranu, odnosno da se ponovo deformiše. Usled ove deformacije

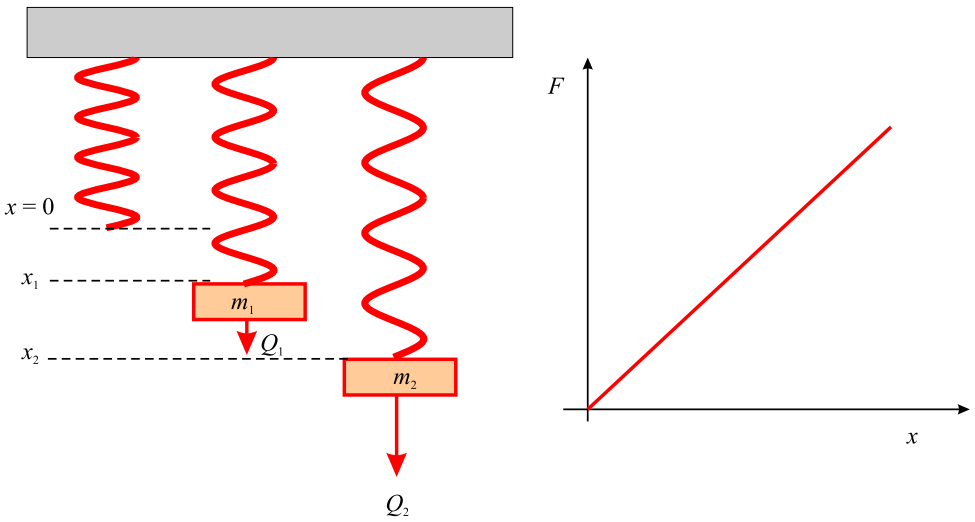
[2]Oscilovanje naime podrazumeva ubrzano kretanje a za to je neophodna sila. Ukoliko ne bi postojala sila koja izaziva takav tip kretanja, telo bi se kretalo po pravoj liniji konstantnom brzinom ili bi pak mirovalo.

se u njemu ponovo javlja restituciona sila koja je usmerena opet ka ravnotežnom položaju. Lenjir dolazi u krajnji desni položaj gde se zaustavlja i kreće pod dejstvom restitucionesile na levo, itd. Proces se nastavlja sve dok sve dok ga sile trenja u potpunosti ne priguše.

Najprostije osilovanje se dešava kada na telo deluje povratna sila koja je direktno proporcionalna veličini otklona tela iz ravnotežnog položaja. Ukoliko su deformacije male, povratna sila je uvek proporcionalna veličini deformacije. Ukoliko se deformacije dešavaju samo duž $x$ ose, veza izmedju projekcije restitucione sile na pravac kretanja, $F$, i veličine deformacije, $x$, je data Hukovim zakonom

$$F = -kx. \tag{7.1}$$

U ovom izrazu veličina $k$ je povezana sa takozvanim Jungovim modulu elastičnosti tela koje je deformisano, i u stvari opisuje koliku silu treba uložiti da bi se ono deformisalo za jedinicu dužine. Ova kostanta predstavlja takozvanu krutost sistema koji se deformiše. Znak minus u izrazu ukazuje na činjenicu da je restituciona sila suprotnog smera od pomeraja tela, odnosno smera deformacije. Grafik 7.2 pokazuje zavisnost intenziteta povratne sile u zavisnosti od




Slika 7.2: Zavisnot intenziteta restitucione sile od istezanja opruge.

deformacije sistema koji se deformiše prema Hukovom zakonu. Na istoj slici je predstavljen jedan takav sistem - opruga koja se isteže tegovima različitih težina. Nagib grafika predstavlja konstantu $k$.

P r i m e r X. Kolika je krutost amortizera automobila ako se on spusti 1,20 cm kada u njega udje osoba mase 80,0 kg?

R e š e nj e. Automobil je bio u ravnotežnom položaju, $x = 0$, pre nego što je opterećen navedenom masom. Ako se spustio za 1,20 cm, to znači da je opruga amortizera doživela pomeraj od $x = -1,20 \times 10^{-2}$ m. Usled opterećenja u opruzi je kreirana restituciona sila $F$ jednaka težini opruge $Q = mg = (80,0 \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2) = 784$ N. Krutost amortizera je prema tome

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{784 \text{ N}}{-1,20 \times 10^{-2} \text{ m}} = 6,53 \times 10^4 \text{ N}.$$

**Energija tela deformisanog po Hukovom zakonu**

Prilikom deformacije tela mora da bude izvršen rad (pri okidanju žice na gitari ili prilikom sabijanja opruge amortizera na kolima). Ukoliko je jedini efekat delovanja sile deformacija, odnosno ukoliko se rad ne troši na savladavanje sile trenja, celokupni rad prelazi u potencijalnu energiju deformisanog tela. Potencijalna energija akumulirana u opruzi je, kao što je ranije naglašeno, u slučaju elastične deformacije za iznos $x$ (prilikom koje važi Hukov zakon),

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2, \tag{7.2}$$

gde je sa $k$ označena krutost.

## 7.2 Period i frekvencija oscilacija

Kada se okine žica gitare, kao rezultat se dobija zvuk koji se čuje relativno dugo vreme, skoro na isti način jer se oscilovanje žice ponavlja. Svaka naredna oscilacija žice traje jednaki vremenski interval kao i ona pre nje. **Periodično kretanje** je ono koje se ponavlja nakon odredjenog intervala. Oscilovanje žice na gitari je primer takvog tipa kretanja.[3] Vreme potrebno da se izvrši jedna puno oscilacija se naziva period i označava sa $T$.

Veličina koja je u bliskoj vezi sa periodom je frekvencija. Na primer, ukoliko u toku meseca studenti polažu ispite dva puta, frekvencija polaganja je dva po mesecu, a period izmedju polaganja je pola meseca. **Frekvencija** $\nu$

[3] U periodična kretanja spada i na primer rotacija Meseca oko Zemlje ali u ovom slučaju nije reč o oscilatornom kretanju.

je definisana kao broj dogadjaja po jedinici vremena. Za periodično kretanje, frekvencija je broj oscilacija u jedinici vremena. Drugim rečima, ako se za vreme $\Delta t$ desilo $N$ oscilacija, frekvencija će biti

$$\nu = \frac{N}{\Delta t}.$$

Kako se za vreme $\Delta t$ desilo $N$ oscilacija, a za svaku je potrebno vreme $T$, mora da važi $\Delta t = NT$, pa će gornji izraz postati $\nu = \frac{N}{NT}$, odakle se za vezu perioda i frekvencije dobija

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{7.3}$$

SI jedinica za frekvenciju je 1/s, odnosno **herc** (Hz): 1 Hz = 1 oscilacija u jednoj sekundi.

P r i m e r X. (a) Jedan aparat za medicinsku dijagnostiku proizvodi ultrazvuk perioda 0,400 $\mu$s. Kolika je frekvencija ovih oscilacija?

(b) Frekvencija srednje note C na tipičnom muzičkom instrumentu iznosi 264 Hz. Koliko vremena je potrebno da se izvrši jedna takva puna oscilacija?

R e š e nj e. (a) Frekvencija ultrazvuka je

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,400 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}} = 2,50 \times 10^{6}\ \mathrm{s}^{-1} = 2,50\ \mathrm{MHz}.$$

Oscilacije ovih frekvencija se nazivaju ultrazvučnim jer su daleko iznad najviše frekvencije koju ljudsko uho može da registruje.

(b) Period tražene oscilacije je

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{264\ \mathrm{Hz}} = 3,79 \times 10^{-3}\ \mathrm{s} = 3,79\ \mathrm{ms}.$$

## 7.3 Prosto harmonijsko kretanje

Oscilovanje sistema koje se odvija pod delovanjem samo sila koje se opisuju Hukovim zakonom su veoma važna iako nisu česta u prirodi. Ovakvo oscilovanje se naziva **prosto harmonijsko kretanje** a telo koje se kreće na takav način je **prosti harmonijski oscilator**. Pošto je jedina sila koja deluje na takav oscilator Hukova (zanemaruje se eventualno prigušenje oscilovanja izazvano silama trenja), harmonijski oscilator osciluje tako da ima jednake otklone-elongacije sa svake strane položaja ravnoteže (slika 7.3). Maksimalna

elongacija od ravnotežnog položaja se naziva **amplituda**. Jedinice za amplitudu i elongaciju su iste, a koje će biti zavisi od tipa oscilovanja. Ukoliko je reč o oscilovanju žice, elongacija i amplutuda se mere u metrima, dok je u slučaju zvučnih oscilacija ove dve veličine imaju jedinice pritiska, itd. Pošto je amplituda maksimalni otklon oscilatora iz ravnotežnog položaja, ona mora biti u vezi sa količinom energije koju poseduje oscilator.

Jedna od interesantnih karakteristika harmonijskog oscilovanja je da su period $T$ i frekvencija $\nu$ nezavisne od amplitude. Tako će, na primer, žica gitare oscilovati sa istom frekvencijom bilo da je okinuta lagano ili jako. Kako je period konstantan, prost harmonijski oscilator može da se upotrebi kao instrument za merenje vremena-sat.

Dva važna faktora mogu da utiču na period prostog harmonijskog oscilatora. Period je, na primer, povezan za krutošću sistema. Sistemi sa većom krutošću, imaju veću vrednost ranije pominjane konstante $k$, što dovodi do manjeg perioda oscilovanja. Na primer, moguće je podešavati krutost tramboline, što je ona veća, brže je oscilovanje, a period je kraći. Period takodje zavisi od mase sistema koji osciluje. Što je sistem masivniji, duži je period oscilovanja. Na primer, masivnija osoba će na trambolini odskakati gore-dole sporije od neke lakše.

Masa $m$ u konstatna $k$ su *jedini* faktori koji utiču na period i frekvenciju prostog harmonijskog oscilovanja. Kao što će kasnije biti pokazano, **period prostog harmonijskog oscilatora** je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{7.4}$$

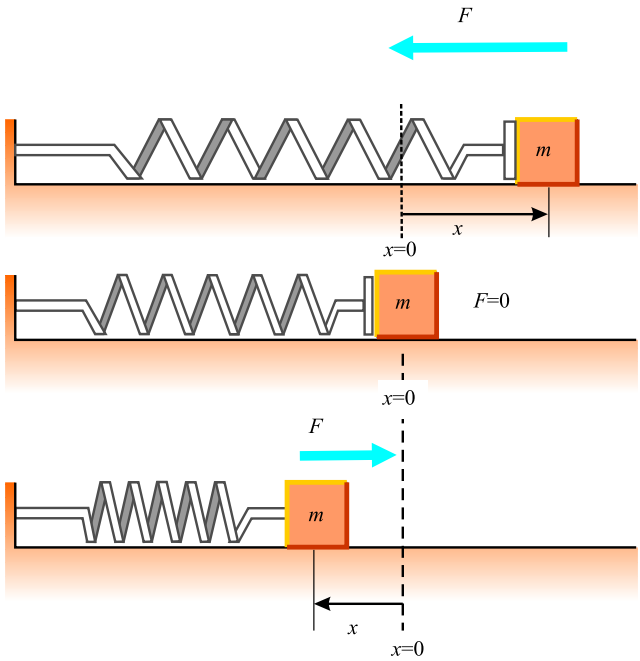
dok je frekvencija

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{7.5}$$

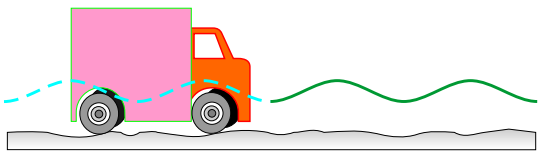
P r i m e r X. Ukoliko amortizeri automobila nisu dovoljno dobri, on će oscilovati pri nailasku na najmanje neravnine (slika 7.4). Odrediti frekvenciju i period tih oscilacija za automobil razmatran u primeru X, ukoliko je njegova masa 900 kg.

R e š e nj e. Frekvencija oscilacija koje vrši automobil je data jednačinom (7.5), pri čemu je krutost amortizera $k = 6,53 \times 10^4$ N/m, pa je

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6,53 \times 10^4 \text{ k/m}}{900 \text{ kg}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{72,6 \text{ s}^{-2}} = 1,36 \text{ s}^{-1} = 1,36 \text{ Hz}.$$




Slika 7.3: Telo mase $m$ koje, zakačeno za oprugu, može da klizi po horizontalnoj podlozi bez trenja.



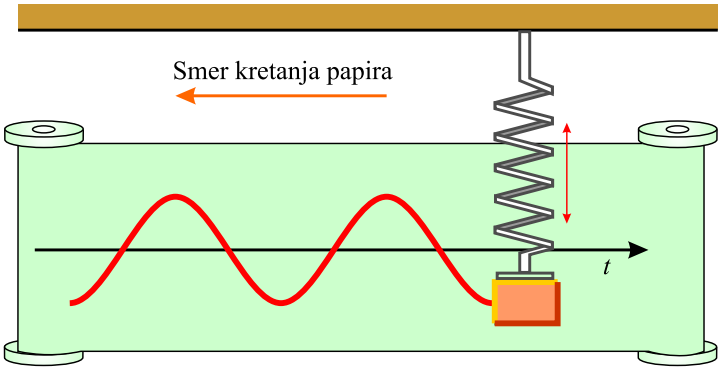
Slika 7.4: Putanja automobila koji tokom vožnje osciluje gore-dole je talasasta linija.

Prema relaciji (7.4), period je

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1,46 \text{ Hz}} = 0,737 \text{ s}.$$

### Veza prostih harmonijskih oscilacija i talasa

Ukoliko bi bio napravljen niz fotografija automobila koji se kreće po neravnom putu, moglo bi da se uoči da svaki njegov deo opisuje prilikom kretanja talasastu liniju (slika 7.4). Slična je situacija sa uredjajem za demonstraciju prostog harmonijskog kretanja prikazanom na slici 7.5. Lako je zaključiti da je u oba slučaja reč o *periodičnim* kretanjima koja prema tome treba da se opisuju *periodičnim* funkcijama. Drugim rečima, obe talasaste linije se mogu opisati sinusnom ili kosinusnom funkcijom.[4]




Slika 7.5: Uredjaj za demonstraciju prostog harmonijskog kretanja. Olovka prikačena za telo koje osciluje ostavlja na pokretnom papiru talasasti trag.

Pomeranje, odnosno elongacija tela koje se ponaša kao prost harmonijski oscilator,[5] se, prema tome, može zapisati na sledeći način

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \tag{7.6}$$

[4]U principu je sve jedno koju ćemo funkciju koristiti za opisivanje oscilatornog kretanja, budući da su i inusna i kosinusna funkcija samo pomerene jedna u odnosu na drugu za $\pi/2$.

[5]Kao što smo videli to je situacija ukoliko na telo deluje sila koja se može opisati Hukovim zakonom.

gde je $t$ vreme a $A$ amplituda kretanja.[6] U $t = 0$ početna pozicija tela je $x_0 = A$, a nakon obavljanja jedne pune osilacije, za koje je potrebno vreme $T$, telo se vraća u početni položaj (za $t = T$ se dobija da je opet $x = A$). Brzina oscilovanje je

$$v = -v_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \tag{7.7}$$

gde je $v_{max} = A\sqrt{k/m}$. U skladu sa time, telo koje vrši prosto harmonijsko oscilovanje ima brzinu jednaku nuli kada dostigne maksimalnu elongaciju, odnosno, kada je $t = 0$, važi $x = A$ i $v = 0$. Znak minus u jednačini za brzinu ukazuje na smer brzine. Odmah nakon početka kretnja brzina je negativna jer se sistem kreće ka ravnoteženom položaju.

Izraz za ubrzanje se može dobiti na osnovu drugog Njutnovog zakona, prema kome je $a = F/m = -kx/m$, pa je ono zadato kosinusnom funkcijom

$$a = -\frac{kA}{m} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \tag{7.8}$$

Na osnovu ove jednačine se vidi da je ubrzanje direktno proporcionalno elongaciji $x$ ali da je suprotno usmereno od nje.

## 7.4 Prosto klatno

Prosto, ili matematičko klatno, je telo male mase, okačeno o neistegljivu žicu (nit) koje osciluje u vertikalnoj ravni u polju Zemljine teže (slika 7.7). Pri tom je veoma bitno da su otkloni klatna iz ravnotežnog položaja veoma mali.

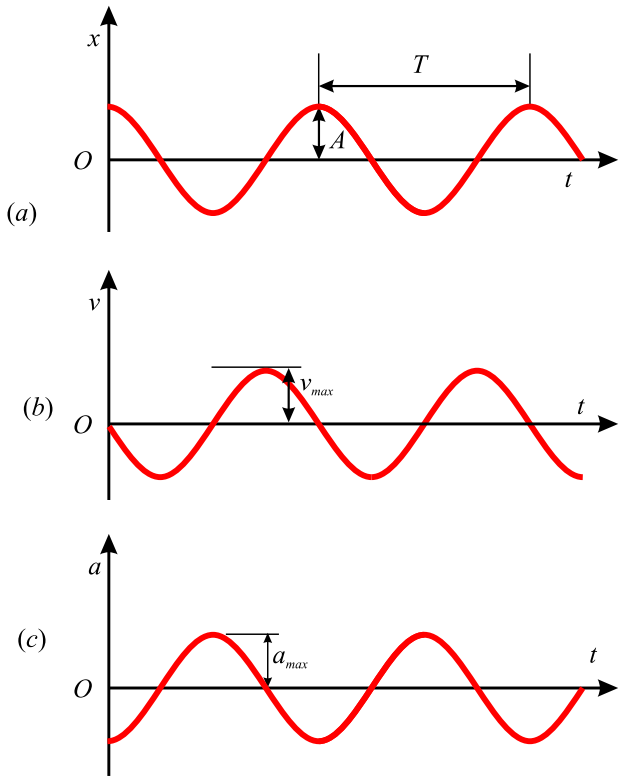
Neka je otklon klatna od ravnotežnog položaja jednak dužini luka $s$. Sa slike se vidi da je sila koja upravlja kretanjem klatna jednaka $-mg \sin\theta$. Naime, težina tela $mg$ se razlaže na dve komponente od kojih je ona duž žice uravnotežena silom zatezanja $F_z$. Na taj način ostaje samo komponenta težine koja deluje duž tangente na putanju. Ukoliko uspemo da pokažemo da je ona proporcionalna rastojanju klatna od ravnotežnog položaja $s$, kretanje klatna će biti prosto harmonijsko.

Za male uglove otklona (manje od $15^{\mathrm{O}}$), je $\sin\theta \approx \theta$,[7] pa je restituciona sila

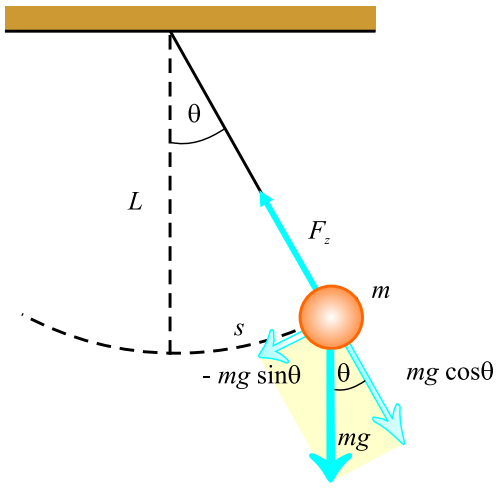
$$F = -mg \sin\theta \approx -mg\theta.$$

[6] Strog matematički dokaz da baš funkcija ovog oblika opisuje prosto harmonijsko oscilovanje zahteva poznavanje elemenata više matematike pa će zato biti izostavljen.

[7] Naime, za ovako male uglove je greška prilikom zamene $\sin\theta$ sa $\theta$ manja od 1%. U to se je lako uveriti ako ugao $\theta$ predstavimo u radijanima a zatim izračunamo vrednost $\sin\theta$.




Slika 7.6: Elongacija, brzina i ubrzanje kod prostog harmonijskog oscilovanja.




Slika 7.7: Kada je ugao otklona $\theta$ dovoljno mali, matematičko klatno se kreće kao prosti harmonijski oscilator oko ravnotežnog položaja $\theta = 0$. Restituciona sila je u ovom slučaju $-mg\sin\theta$.

Pomeraj $s$ je direktno srazmeran uglu otklona $\theta$, jer ako ugao izrazimo u radijanima, dužina luka $s$ je u vezi sa dužinom klatna $L$ kao

$$s = L\theta, \qquad \theta = \frac{s}{L}.$$

Prema tome, za male uglove, izraz za restitucionu silu je

$$F \approx -\frac{mg}{L}s,$$

odnosno ima oblik $F = -kx$, gde je $k = mg/L$ i $x = s$. Zaključujemo da se kretanje matematičkog klatna odvija po zakonima prostog harmonijskog kretanja.

Prema tome, period matematičkog klatna je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}},$$

odnosno

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{7.9}$$

Ovaj rezultat je veoma interesantan, pre svega zbog njegove jednostavnosti. Iz njega se vidi da je jedina veličina koja utiče na dužinu perioda klatna,

pored ubrzanja teže $g$, dužina klatna. Period je potpuno nezavisan od drugih faktora, na primer od mase tela koje je okačeno o nit. Kao i za sve proste harmonijske oscilatore, period klatna je, za male uglove otklona, nezavisan od njegove amplitude. Iz tog razloga je, na primer, satove sa klatnom moguće veoma precizno podesiti.

Primetimo na kraju, da, u slučaju da je dužina klatna poznata, merenjem njegovog perioda, možemo da odredimo ubrzanje Zemljine teže.[8]

## 7.5 Energija prostog harmonijskog oscilatora

Koje sve oblike energije može da ima telo koje prosto harmonijski osciluje? Usled deformacije, prosti harmonijski oscilator poseduje potencijalnu energiju

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$

Kako kod prostog harmonijskog oscilovanja ne postoje disipativne sile, jedina druga vrsta energije je kinetička a zakon održanja energije ima formu $E_k + E_p = const$, odnosno

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const. \tag{7.10}$$

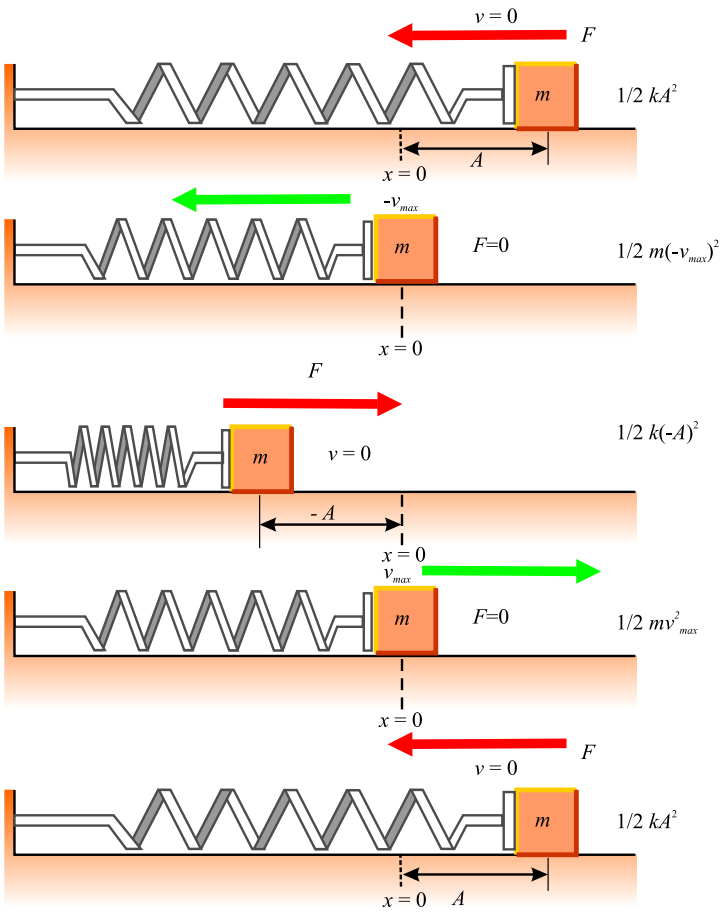
Ovako zapisan izraz koji predstavlja zakon održanja energije ostaje u važnosti za sve tipove prostih harmonijskih oscilatora, uključujući i one gde se kretanje odvija pod dejstvom gravitacione sile.[9]

U slučaju neprigušenih prostih harmonijskih oscilacija, kako telo osciluje tako i kinetička i potencijalna energija prelaze jedna u drugu slika 7.8.

Kretanje prikazano na ovoj slici počinje iz stanja u kojem je sva energija sadržana u istegnutoj opruzi. Kada telo počne da se kreće, elastična potencijalna energija prelazi u kinetičku, tako da je u stanju ravnoteže celokupna energija postala kinetička. Nakon toga, kada telo prodje kroz ravnotežni položaj i počne da sabija oprugu, kinetička energija počinje da prelazi u potencijalnu energiju opruge dok se brzina kretanja smanjuje i postaje nula u

[8]Za detalje odredjivanja ubrzanja Zemljine teže matematičkim klatnom videti "Praktikum eksperimentalnih vežbi iz fizike" istog autora.

[9]Naime, uloga gravitacije je da položaj ravnoteže eventualno pomeri na dole (kod na primer tela koje je okačeno o oprugu). Pomeranje položaja ravnoteže pri tome ne utiče na činjenicu da je restituciona sila $-kx$, gde se $x$ odredjuje u odnosu na ravnotežni položaj, tako daje potencijalna energija i u tom slučaju $1/2kx^2$.




Slika 7.8: Prelazak kinetičke energije u potencijalnu.

suprotnom amplitudnom položaju, nakon čega se u drugoj polovini perioda proces praktično ponavlja ali u obrnutom smeru.

Činjenica da je ukupna mehanička energija oscilatora konstantna može da se iskoristi za odredjivanje brzine oscilatora. Naime, na osnovu toga može da se napiše relacija

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

koja povezuje ukupnu energiju u trenutku kada je brzina osilatora $v$ a elongacija $x$ sa ukupnom energijom kada se on nalazi u amplitudnom položaju. Ako se ovaj izraz reši po brzini dobija se

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}A\sqrt{(1 - \frac{x^2}{A^2})}.$$

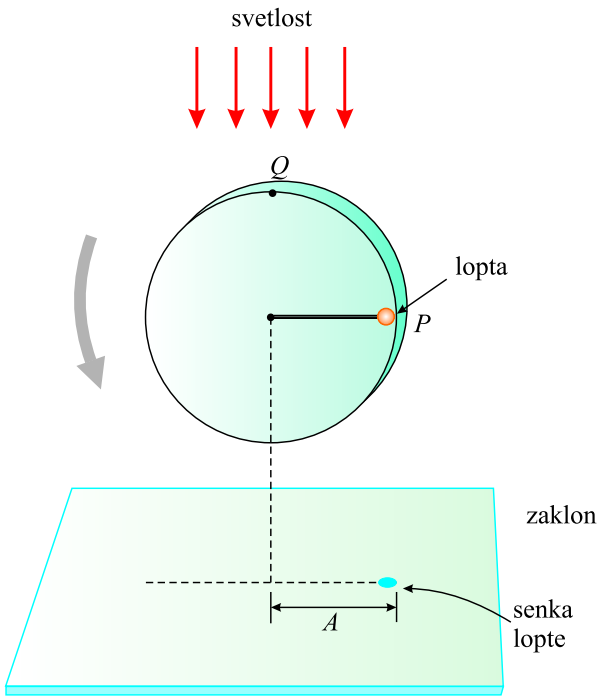
Ovaj izraz može da se zapiše u obliku

$$v = \pm v_{max}\sqrt{(1 - \frac{x^2}{A^2})}, \qquad v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{7.11}$$

Primetimo da maksimalna brzina zavisi od tri faktora. Kao prvo ona je direktno proporcionalna amplutudi oscilovanja, naime, kao što je i trebalo očekivati, što je opruga više bila rastegnuta veća je i maksimalna brzina koju telo ima prilikom prolaska kroz ravnotežni položaj. Maksimalna brzina je takodje veća za sisteme kod kojih je krutost opruge veća, jer je u tom slučaju veća i sila koja se dobija za isto istezanje opruge (maksimalna brzina je proporcionalna kvadratnom korenu iz krutosti $k$). I na kraju, maksimalna brzina je manja za tela većih masa, obzirom na obrnutu proporcionalnost od korena mase tela koje osciluje. To je posledica činjenice da se tela veće mase sporije ubrzavaju datom silom.

## 7.6 Veza sa uniformnim kretanjem po kružnici

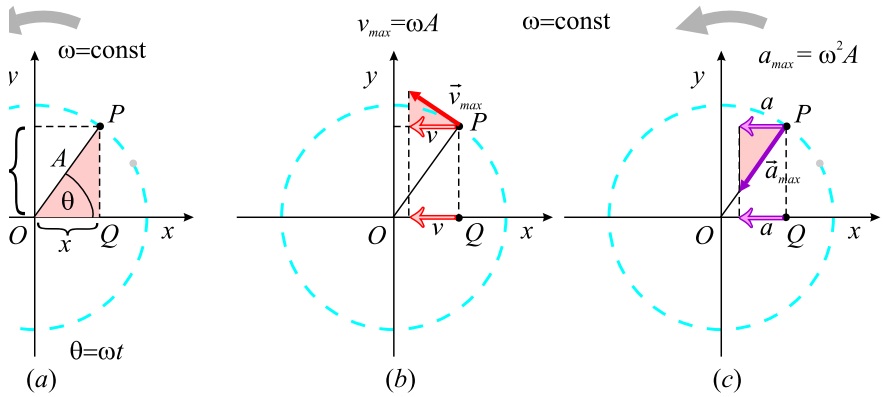
Razni aspekti harmonijskog oscilovanja se mogu bolje razumeti i objasniti ako se proanalizira analogija izmedju njega i uniformnog kretanja po kružnici. Slika 7.9 predstavlja šemu uredjaja koji može da demonstrira ovu vezu. Lopta je zakačena za jedan kružni providni ram poluprečnika $A$, unutar koga može da vrši uniformno kretanje, pri čemu je odozgo osvetljenja tako da prilikom kretanja baca senku na ekran. Očigledno je da će ovom prilikom, ukoliko




Slika 7.9: Eksperiment za pokazivanje veze izmedju uniformnog kretanja po kružnici i harmonijskog oscilovanja.

se lopta kreće uniformno po kružnici-ramu, njena senka da vrši harmonijsko oscilovanje na ekranu.

Tačka $P$ se, obzirom da je reč o uniformnoj rotaciji, kreće po kružnoj putanji (slika 7.10), konstantnom ugaonom brzinom $\omega$. Projekcija kretanja ove tačke na fiksnu osu, kao što smo videli vrši prosto harmonijsko kretanje. U trenutku prikazanom na slici, projekcija je jednaka $x$ i kreće se na levo brzinom $v$. Brzina tačke $P$ pri kretanju po krugu pak iznosi $\vec{v}_{max}$. Projekcija brzine $\vec{v}_{max}$ na $x$-osu je brzina $v$ prostog harmonijskog oscilovanja koje se odvija duž $x$-ose.




Slika 7.10: Uniformno kretanje tačke $P$ po kružnici i oscilatorno kretanje njene projekcije, tačke $Q$.

Da bi pokazali da projekcija tačke $P$ zaista vrši harmonijsko oscilovanje, primetimo da je njena pozicija data izrazom

$$x = A\cos\theta,$$

gde je $\theta = \omega t$, gde je $\omega$ konstantna ugaona brzina a $A$ poluprečnik kružne putanje. Ugaona brzina je jednaka odnosu predjenog ugla i vremena za koje se to desilo. Ukoliko za predjeni ugao uzmemo $2\pi$, vreme za koje se to desilo je period okretanja po kružnoj putanji $T$, pa će prethodni izraz postati

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

što predstavlja izraz koji smo već dobili za opisivanje prostog harmonijskog oscilovanja.

Istaknimo još jednom važne detalje ove geometrijske analogije. Prema njoj se vidi da je vreme potrebno za jedan obrt tačke $P$ po kružnici jednak periodu oscilovanja $T$ linearnog harmonijskog ocilovanja izmedju $x = \pm A$. Pri tome je ugaona brzina $\omega$ jednaka ugaonoj frekvecniji linearnog harmonijskog oscilovanja duž $x$ ose. Poluprečnik kružne putanje jednak je amplitudi oscilovanja.

Kako je relacija koja kod kretanja po kružnici, povezuje linearnu, ugaonu brzinu i poluprečnik putanje $v = r\omega$, čestica koja se kreće po kružnici poluprečnika $A$, ima brzinu $v_{max} = A\omega$. Sa slike 7.10 $(a)$, se vidi da je njena projekcija na $x$ osu $-\omega A \sin(\omega t)$.

Ubrzanje tačke $P$ pri kružnom kretanju, je radijalno i ima intenzitet $v_{max}^2/A = \omega^2 A$. Sa slike 7.10 $(c)$ se može videti da je $x$ komponenta ubrzanja $-\omega^2 A \cos(\omega t)$. Ovo je istovremeno i ubrzanje projektovane tačke $Q$ duž $x$ ose.

## 7.7 Prigušeno harmonijsko kretanje

Žica gitare, nako što je okinuta, posle nekoliko sekundi prestaje da osciluje. Ljuljašku moramo stalno da guramo da se ne bi zaustavila. Na osnovu ovoga bi mogli da izvučemo pogrešan zaključak da nam je cilj da trenje i druge nekonzervativne sile, u svim situacija, učinimo zanemarljivo malim. Ima medjutim situacija gde nam je potrebno upravo obratno. Tako na primer, u slučaju amortizera automobila, cilj nam je da oni izazovu što veće prigušenje oscilacija koje se stvaraju na neravnom putu.

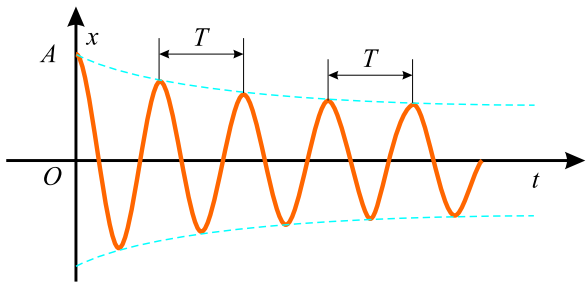
Kod sistema koji osciluju sa malim prigušenjem, period i frekvencija su približno jednaki vrednostima kod prostog harmonijskog oscilovanja, dok samo amplutuda opada sa vremenom (slika 7.11).

Obzirom da postoji prigušenje koje smanjuje amplitudu sa vremenom, to znači da postoje nekonzervativne sile na čije savladavanje se troši mehanička energija sistema. Prema relaciji (4.10), rad nekonzervativnih sila je

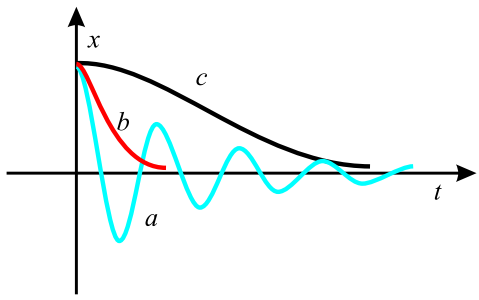
$$A_{nc} = \Delta(E_k + E_p).$$

Za prigušeni harmonijski oscilator, obzirom da se energija tela smanjuje sa vremenom, rad $A_{nc}$ je negativna veličina.

Ukoliko se poveća prigušenje sistema, period i frekvencija će početi da osećaju efekat toga. Za veoma velika prigušenja, sistem čak neće ni oscilovati već će se lagano kretati ka položaju ravnoteže.




Slika 7.11: Grafik elongacije u zavisnosti od vremena kod osilacija sa malim prigušenjem. Amplituda lagano opada, dok su period i frekvencija praktično nepromenljivi.

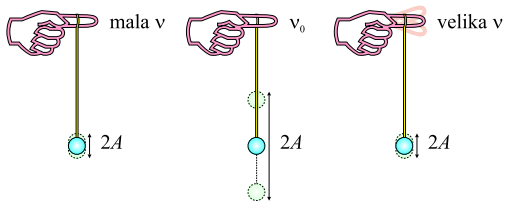



Slika 7.12: $(a)$ Grafik elongacije u zavisnosti od vremena kod osilacija sa malim prigušenjem. $(b)$ Grafik za slučaj kritičnog prigušenja. $(c)$ Grafik kod velikog prigušenja kada kretanje postaje aperiodično.

Na slici 7.12 su pokazane zavisnosti elongacije za slučaj različitih vrednosti prigušenja. Kada želimo da prigušimo oscilacije potpuno, kao na primer u amortizerima automobila, mi u stvari želimo da se sistem vrati što je pre moguće u stanje ravnoteže bez prolaska kroz njega i daljeg oscilovanja. Takva situacija se naziva **kritično prigušenje**. Ovaj tip prigušenja je prikazan linijom ($b$) na slici 7.12. Kada je prigušenje manje od kritičnog, sistem se vraća u stanje ravnoteže brže ali ima dovoljno energije da prodje kroz njega i da izvrši nekoliko oscilacija (linija ($a$) na istoj slici). Ukoliko je prigušenje veće od kritičnog sistem se kreće ka ravnotežnom stanju ali se to dešava sporije nego u slučaju kritičnog prigušenja (linija ($c$) na slici).

## 7.8 Prinudno oscilovanje, rezonancija

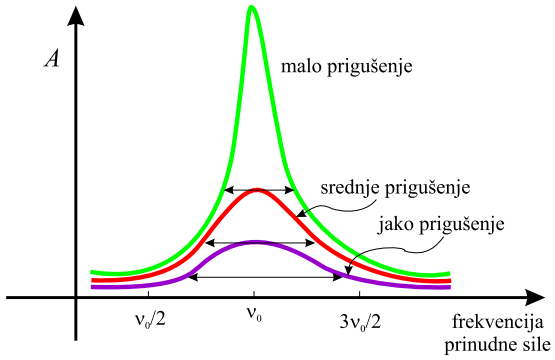
Ukoliko se nalazimo blizu klavira i otpevamo glasno neku notu čućemo kako vibirira žica na klaviru kojoj odgovara ista frekvencija. Ona je izazvana na vibriranje-rezoniranje silom zvučnog talasa koji smo emitovali. To je samo jedan od primera gde prinudna sila primorava sistem da osciluje. Pri tome je veoma bitna kolika je frekvencija prinudne sile. Ispostavlja se naime, da je potrebno da njena frekvencija bude po vrednosti blizu prirodne frekvencije sistema koga želimo da pobudimo na oscilovanje. **Prirodna frekvencija** sistema je frekvencija oscilovanja sistema u slučaju kada nema ni prigušenja a ni prinudne sile.




Slika 7.13: Oscilovanje loptice okačene gumenom trakom o prst.

Na slici 7.13 su prikazane razne situacije oscilovanja loptice okačene gumenom trakom o prst. Pretpostavimo za početak da je loptica okacena o prst koji je u stanju mirovanja i da smo malo rastegli gumu i pustili lopticu da osciluje. Ona će oscilovati njenom prirodnom frekvencijom $\nu_0$ sa malim prigušenjem. Ukolio počnemo da pomeramo prst frekvencijom manjom od $\nu_0$ gore-dole, loptica će pratiti kretanje prsta sa relativno malom amplutidom

(prvi deo slike). Ukoliko počnemo da povećavamo frekvenciju pomeranja prsta, loptica će početi da se kreće sa sve većom i većom amplitudom. Kada se frekvencija oscilovanja prsta poklopi sa frekvencijom prirodnih osiclacija amplutida oscilacija će dostići maksimalnu vrednosti. Ova pojava maksimalnog uvećanja amplitude prinudnih oscilacija sistema pod dejstvom prinudne sile, čija frekvencija je jednaka njegovoj prirodnoj frekvenciji, se naziva **rezonancija**. Za sistem koji na takav način osciluje se kaže da **rezonira**. Ukoliko frekvencija prinudne sile postane veća od rezonatne, odnosno prirodne, amplituda oscilacija postaje sve manja i manja, sve dok oscilacije u potpunosti ne nestanu kada kretanje prsta praktično ne utiče na lopticu.




Slika 7.14: Amplituda oscilatora kao funkcija frekvencije prinudne sile.

Slika 7.14 prikazuje grafik amplitude prigušenog oscilovanja kao funkciju frekvencije prinudne sile. Prikazane su tri krive linije pri čemu svaka odgovara različitim prigušenjima. Sve tri imaju maksimum kada frekvencija prinudne sile postane jednaka prirodnoj frekvenciji harmonijskog oscilatora. Najveći maksimum se javlja u situaciji kada je najmanje prigušenje, s obzirom na to da sila koja izaziva prigušenje u tom slučaju od sistema oduzima najmanju količinu energije.

Treba primetiti da i širina rezonatne krive zavis od prigušenja. Što je manje prigušenje to se rezonanca dešava u užem opsegu frekvencije. To znači da je, ako želimo da nam oscilator koji osciluje pod delovanje prinudne sile, rezonira na odredjenoj frekvenciji, potrebno smanjiti prigušenje na najmanju moguću meru. U praksi se to sreće kod klavira kao i kod žica mnogih drugih muzičkih instrumenata. Nasuprot tome, ukoliko želimo da sistem osciluje sa malim amplitudama, kao amortizeri automobila, potrebno nam je veliko prigušenje. U tom slučaju rezonanciju sistema može da izazove više

frekvencija, odnosno u jednom odredjenom opsegu frekvencija.

Efekti koji se javljaju prilikom prinudnog oscilovanja se koriste u mnogim sistemima. Na primer, kada se na radio aparatu traži stanica, u stvari se menja rezonantna frekvencija odredjenih električnih delova aparata tako da se poklopi sa frekvencijom na kojoj emituje data radio stanica. Što je manje prigušenje u radio aparatu to on ima veću mogućnost da vrši selekciju medju stanicama. Nuklearna magnetna rezonanca (NMR) koja se veoma mnogo koristi kao dijagnostička metoda, zasniva se na činjenici da jezgra atoma (najčešće vodonika) rezoniraju na frekvenciji upadnog mikrotalasnog zračenja. Deca na ljuljaški se kreću kao klatno koje ima maksimalnu amplutudu onda kada prilikom guranja pogodimo njegovu prirodnu frekvenciju. U svim pobrojanim slučajevima efikasnost prenosa energije sa prinudne sile na oscilator je najveća u uslovima rezonance.