О *P*-АДИЧНОМ (4+*D*)-ДИМЕНЗИОНАЛНОМ КАЛУЦА-КЛАЈН МОДЕЛУ

Г. С. ЂОРЂЕВИЋ, Љ. Д. НЕШИЋ

Одсек за физику, Природно-математички факултет, П. Фах 224, 18001 Ниш, nesiclj@junis.ni.ac.yu

САЖЕТАК

Разматран је (4+*D*)-димензионални Калуца-Клајн квантни космолошки модел са два скалирајућа фактора у оквиру *p*-адичне квантне механике. Један од фактора одговара *D*-димензионалном унутрашњем простору, а други 4-димензионалном универзуму. Овакав модел у оквиру стандардне (над пољем реалних бројева) квантне космологије доводи до динамичке компактификације додатних димензија и до убрзавајућег ширења 4-димензионалног универзума. У раду је конструисан одговарајући *p*-адични модел и показана егзистенција *p*-адичне таласне функције основног стања.

Кључне речи: компактификација, додатне димензије, *p*-адична квантна космологија

1. Увод

На основу једног од резултата квантне гравитације, принципијелна грешка мерења дистанци је већа или једнака Планковој дужини. То наводи на закључак да на веома малим растојањима не важи Архимедова аксиома, односно да простор може поседовати и ултраметричке особине. Како геометрији одговара одређено поље бројева, у случају неархимедове геометрије потребно је користити одговарајуће поље бројева. Вероватно је најбољи избор поље *p*-адичних бројева Q_p. У физици високих енергија, ови бројеви се користе последњих двадесетак година, а прва примена је била у теорији струна [1]. Уследили су затим радови из области квантне механике [2] и квантне космологије [3]. Након успешне примене формализма *p*-адичне квантне механике на низ минисуперпросторних космолошких модела, углавном конструисаних у четири димензије, поставило се питање да ли је могуће проширење на вишедимензионалне квантне космолошке моделе. Покушај формулисања једног таквог модела је укратко приказан у овом раду. За комплетнији увид у резултате *p*-адичне физике и релевантну литературу на енглеском језику препоручујемо референце [4,5], а на српском језику [6,7].

2. *p*-Адични бројеви

p-Адичне бројеве је најлакше разумети ако се пође од појма норме. Добро је познато да свака норма мора да задовољава три услова: ненегативност, хомогеност и да важи неједнакост троугла. Познато је да се комплетирањем поља рационалних бројева Q, у односу на апсолутну вредност, тј. норму $|\cdot|_\infty$, добија поље реалних бројева $R \equiv Q_\infty$. Могуће је увести норму над пољем Q, која задовољава прва два услова а трећи још строже (строга неједнакост троугла), односно

$$\| x + y \| \leq \max(\| x \|, \| y \|). \tag{1}$$

Ову особину (ултраметричност) поседује и *p*-адична норма $|\cdot|_p$. Поље бројева, које се добија комплетирањем поља рационалних бројева у односу на њу, се назива поље *p*-адичних бројева Q_p. Познато је да било који ненулти рационалан број x може да се представи у облику $x = \pm p^\gamma a / b$, где је изложилац рационалан број а a и b су природно бројеви који нису дељиви простим бројем p и немају заједнички делитељ. Његова *p*-адична норма је по дефиницији $|x|_p = p^{-\gamma}$. Једна од најзначајнијих функција која се може увести над пољем Q_p је адитивни карактер $\chi_p(x) = \exp(2\pi i \{x\}_p)$, где је $\{x\}_p$ разломљени део *p*-адичног броја x [4]. Пошто је Q_p локално компактна комутативна група, на њему се може дефинисати мера Хара, што омогућава интеграљење (детаљније видети [4,7]).

3. *p*-Адична кватна механика и космологија

p-Адична квантна механика представља квантну механику дефинисану над пољем Q_p, док је *p*-адична квантна космологија примена *p*-адичне квантне механике на васиону као целину [3]. У оквиру *p*-адичне квантне механике су развијана два прилаза: у једном је таласна функција комплексна функција *p*-адичног аргумента, а у другом *p*-адична функција *p*-адичног аргумента. Уколико се жели симултано (аделично) третирање стандардне квантне механике и свих *p*-адичних, а нарочито коришћење уобичајене физичке (пробабилистичке) интерпретације развијене у стандардној квантној механици, онда предност има прва варијанта *p*-адичне квантне механике. Обзиром на тоталну неповезаност поља Q_p [4], у *p*-адичној квантној механици се динамика обично задаје у интегралном облику, деловањем оператора еволуције $U(t)$ на таласну функцију

$$U(t)\psi(x) = \int_{Q_p} K_t(x,y)\psi(y)dy\,. \tag{2}$$

У овом изразу $K_t(x,y)$ је језгро *p*-адичног оператора еволуције које је дефинисано функционалним интегралом

$$K_t(x,y) = \int \chi_p\left(-\int_0^t L(\dot{q},q)dt\right)\prod_t dq(t)\,, \tag{3}$$

са особинама аналогним онима које има у стандардној квантној механици. Улогу таласне функције основног стања у *p*-адичној квантној механици има карактеристична функција

$$\Omega(|x|_p) = \begin{cases} 1, & \text{ако је} \quad |x|_p \leq 1 \\ 0, & \text{ако је} \quad |x|_p > 1. \end{cases} \tag{4}$$

4. (4+D) космолошки модел над пољем реалних бројева

Стара идеја да је макроскопски четвородимензионални универзум, у коме живимо, продукт вишедимензионалног простор-времена привлачи и даље јако пуно пажње. У таквим моделима компактификација додатних димензија игра кључну улогу и у некима од њих доводи до постојања периода убрзаног ширења васионе [8,9], што је у складу са резултатима актуелних астрономских посматрања. Метрика једног таквог Калуца-Клајн модела са *D*-димензионалним унутрашњим простором може да се запише у облику [10]

$$ds^2 = -\widetilde{N}^2(t)dr^2 + R^2(t)\frac{dr_i dr^i}{(1+\frac{kr^2}{4})^2} + a^2(t)\frac{d\rho_a d\rho^a}{(1+k'\rho^2)^2} \tag{5}$$

где је $\widetilde{N}(t)$ лапс функција, $R(t)$ и $a(t)$ су скалирајући фактори 4-димензионалне васионе и унутрашњег простора, респективно и $k,k'=0,\pm 1$. Одговарајући лагранжијан овог модела (за раван унутрашњи простор) је

$$L = \frac{1}{2\widetilde{N}}Ra^D\dot{R}^2 + \frac{D(D-1)}{12\widetilde{N}}R^3a^{D-2}\dot{a}^2 + \frac{D}{2\widetilde{N}}R^2a^{D-1}\dot{R}\dot{a} - \frac{1}{2}k\widetilde{N}Ra^D + \frac{1}{6}\widetilde{N}\rho_\chi R^3a^D. \tag{6}$$

За затворену васиону испуњену "егзотичним флуидом" једначине стања $p_\chi = (m/3-1)\rho_\chi$, ($p_\chi$ и ρ_χ-притисак и густина енергије флуида; параметар m има вредност између 0 и 2), уз коришћење једначине континуитета,

$$\dot{\rho}_\chi R + 3(p_\chi + \rho_\chi)\dot{R} = 0. \tag{7}$$

се за густину енергије добија

$$\rho_\chi(R) = \rho_\chi(R_0)\left(\frac{R_0}{R}\right)^m, \tag{8}$$

где је R_0 вредност скалирајућег фактора у произвољном почетном тренутку. Уколико космолошку константу дефинишемо као $\Lambda \equiv \rho_\chi(R)$, лагранжијан постаје

$$L = \frac{1}{2\widetilde{N}}Ra^D\dot{R}^2 + \frac{D(D-1)}{12\widetilde{N}}R^3a^{D-2}\dot{a}^2 + \frac{D}{2\widetilde{N}}R^2a^{D-1}\dot{R}\dot{a} - \frac{1}{2}\widetilde{N}Ra^D + \frac{1}{6}\widetilde{N}\Lambda R^3a^D, \tag{9}$$

при чему раст скалирајућег фактора R, према (8) доводи до смањења космолошке константе према изразу $\Lambda(R) = \Lambda(R_0)(R_0/R)^m$. Уколико се узме да је $m=2$, почетни услов за космолошку константу и скалирајући фактор $\Lambda(R_0)R_0^2 = 3$, за лапс функцију (која је у принципу произвољна функција времена) $\widetilde{N}(t) = R^3(t)a^D(t)N(t)$, лагранжијан (9) постаје

$$L = \frac{1}{2N}\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{D(D-1)}{12N}\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{D}{2N}\frac{\dot{R}\dot{a}}{Ra}. \tag{10}$$

Треба приметити да у лагранжијану нема параметара k и Λ, што значи да иако они нису нула у овом моделу, он је еквивалентан равном универзуму са нултим космолошким чланом. Другим речима, нема разлике између 4-димензионалног универзума који изгледа раван и није испуњен флуидом, и затвореног универзума испуњеног егзотичним флуидом.

5. (4+D) модел над пољем *p*-адичних бројева

У оквиру разматрања датог модела над пољем Q_p, поћи чемо од лагранжијана у облику (10), при чему ћемо сматрати да су све величине које се појављују у њему *p*-адичне. Уколико се уведу нове променљиве $X = \ln R$ и $Y = \ln a$, он постаје

$$L = \frac{1}{2N}\dot{X}^2 + \frac{D(D-1)}{12N}\dot{Y}^2 + \frac{D}{2N}\dot{X}\dot{Y} \tag{11}$$

са решењима једначина кретања $X = C_1 t + C_2$, $Y(t) = C_3 t + C_4$. Пошто је класично дејство

$$\overline{S}(X'',Y'',N;X',Y',0) = \frac{1}{2N}(X''-X')^2 + \frac{D(D-1)}{12N}(Y''-Y')^2 + \frac{D}{2N}(X''-X')(Y''-Y'), \tag{12}$$

за језгро *p*-адичног оператора еволуције се добија [11]

$$K_p(X'',Y'',N;X',Y',0)=\lambda_p\left(\frac{D(D+2)}{48N^2}\right)\left|\frac{D(D+2)}{12N^2}\right|_p^{1/2}\chi_p(-\bar{S}(X'',Y'',N;X',Y',0)). \quad (13)$$

Смене $x=X\dfrac{3}{D+3}+Y\dfrac{D}{D+3}$, $y=\dfrac{X-Y}{D+3}$, раздвајају променљиве и чине даљу анализу модела простијом. У новим променљивима класично дејство и језгро оператора еволуције су

$$\bar{S}(x'',y'',N;x',y',0)=\frac{1}{2N}(1+\frac{D(D+5)}{6})(x''-x')^2-\frac{1}{2N}D(D+3)(y''-y')^2, \quad (14)$$

$$K_p(x'',y'',N;x',y',0)=\lambda_p\left(\frac{6+D(D+5)}{12N}\right)\lambda_p\left(-\frac{D(D+3)}{2N}\right)\left|\frac{D(D+3)}{2N^2}\left(1+\frac{D(D+5)}{6}\right)\right|_p^{1/2}\chi_p(-\bar{S}). \quad (15)$$

Показује се да за овај модел постоји *p*-адична таласна функција основног стања облика

$$\psi_p(x,y)=\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p), \quad (16)$$

уз важење услова $|N|_p\le|1+D(D+5)/6|_p$, и $|N|_p\le|D(D+3)|_p$, $p\ne 2$. Враћањем на старе променљиве, таласна функција основног стања је

$$\psi(X,Y)=\Omega\left(\left|\left(1-\frac{D}{D+3}\right)X+\frac{D}{D+3}Y\right|_p\right)\Omega\left(\left|\frac{X-Y}{D-3}\right|_p\right). \quad (17)$$

6. Закључак

Показано је да је могуће конструисати одговарајући *p*-адични (4+D) Калуца-Клајн модел. Даља истраживања ће бити посвећена детаљнијем одређивању услова за егзистенцију основног стања облика Ω-функције као и показивања егзистенције стања облика $\Omega(p^{\nu}|x|_p)\Omega(p^{\mu}|y|_p)$ и облика *p*-адичне делта функције. Могуће је конструисати и одговарајући аделични модел, односно модел који би објединио стандардни и све *p*-адичне моделе [12] и испитати дискретност простор-времена.

7. Литература

[1] I. V. Volovich, *Theor. Math. Phys.* **71** (1987) p. 337
[2] G. S. Djordjevic, B. Dragovich and Lj. Nesic, *Modern Physics Letters* **A14** (1999) p. 317
[3] G. S. Djordjevic, B. Dragovich, Lj. Nesic, I. V. Volovich, *Int. J. Mod. Phys.* **A17** (2002) p.1413
[4] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. I Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore, 1994,
[5] L. Brekke and P. G. O Freund, "p-Adic numbers in physics", *Phys. Rep.* **233** (1993) p. 1
[6] Г. Ђорђевић, Б. Драговић, Љ. Нешић, 10. Конгрес физичара Југославије, Врњачка бања, Србија, 27-29 септембар, 2000, страна 767,
[7] Г. С. Ђорђевић, "О аделичној квантној механици", докторска дисертација, Универзитет у Београду (1999), Љ. Нешић, "Космолошки модели у *p*-адичној и аделичној квантној механици", докторска дисертација, Универзитет у Београду (2001)
[8] P. K. Townsend, M. N. R. Wohlfarth, "Accelerating cosmologies from compactification", hep-th/0303097
[9] S. Campo, P. Salgado, *Classical and Quantum Gravity*, **20** (2003) p. 4009
[10] F. Darabi, *Classical and Quantum Gravity*, **20** (2003) p. 3385
[11] G. S. Djordjevic, B. Dragovich, Lj. Nesic, Int. Conference: FILOMAT 2001, Nis, 26-29 August 2001. *FILOMAT* **15** (2001) p. 323
[12] G. S. Djordjevic, Lj. Nesic, *Adelic (4+D) Kaluza-Klein cosmological model*, in preparation .