О СИМБОЛУ ПСЕУДОДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ ОПЕРАТОРА НАД ПОЉЕМ *P*-АДИЧНИХ БРОЈЕВА

Д. Д. ДИМИТРИЈЕВИЋ, Г. С. ЂОРЂЕВИЋ, **, Љ. НЕШИЋ**

Институт за Физику ПМФ-а, Ниш, Србија, ddrag@pmf.ni.ac.yu
**Одсек за Физику ПМФ-а, Ниш, Србија, nesiclj@junis.ni.ac.yu*
***Лудвиг-Максимилијан Универзитет, Минхен, Немачка, gorandj@theorie.physik.uni-muenchen.de*

САЖЕТАК

У овом раду су разматрана својства псеудодиференцијалног оператора чији је симбол рационални део *p*-адичног броја. Разматрани оператор показује интересантну и сложену математичку природу. Она је илустрована одговарајућом *p*-адичном Шредингеровом једначином за слободну честицу. Интеграли који као подинтегралну функцију садрже рационални део *p*-адичног броја и комплексну функцију *p*-адичног аргумента конвергирају ако је комплексна функција локално константна. Назначена је и веза између ултраметричких *p*-адичних простора и ултраметричких простора стања у оквиру деформационе квантизације, као и улога псеудодиференцијалних оператора у *p*-адичној и деформационој квантизацији.

Кључне ријечи: псеудодиференцијални оператор, *p*-адична анализа, *p*-адична квантна механика, деформациона квантизација

1. Увод

Резултати физичких мерења увек припадају скупу рационалних бројева: мерна опрема ради са коначном прецизношћу. Комплетирање скупа рационалних бројева у односу на стандардну норму доводи до поља реалних бројева $R = Q_\infty$, а у односу на *p*-адичне норме добијају се поља *p*-адичних бројева Q_p (*p* је прост број) [1]. Поред стандардне норме (апсолутне вредности) и *p*-адичних норми не постоји ни једна друга нетривијална норма над скупом рационалних бројева. Геометрија која се описује *p*-адичним бројевима је неархимедова (ултраметричка). Поред ултраметричности која постоји код сложених система типа: спинских стакала, квази-кристала, неуређених система, највећи интерес за примену *p*-адичних бројева у квантној теорији је претпостављена ултраметричност простор-времена на Планковој скали [1,2]. Уочена ултраметричност простора стања у деформационој квантизацији сугерише интензивнију примену *p*-адичне анализе и псеудодиференцијалних оператора у обема квантизационим процедурама [3,4].

2. *p*-Адична анализа и алгебра

p-Адични број се може записати у канонском облику [1]

$$x = p^{-\gamma(x)} \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^j \,, \quad \gamma(x) \in Z, \quad x_j \in \{0,1,2,...p-1\} \quad x_0 \neq 0. \tag{1}$$

Корисно је увести појмове: *p*-адична норма $|x|_p = p^{\gamma(x)}$, прстен целих *p*-адичних бројева $Z_p = \{x \in Q_p : |x|_p \le 1\}$, *p*-адична кружница $S_\gamma(a) = \{x, a \in Q_p : |x-a|_p = p^\gamma\}$ и *p*-адични диск

$B_\gamma(a)=\{x,a\in Q_p :| x-a|_p \le p^\gamma\}$. p-Адичном нормом је индукована метрика $d_p(x,y)=| x-y|_p$. Рационални део p-адичног броја има облик

$$\{x\}_p=\begin{cases} 0, & x\in Z_p \\ p^{-\gamma(x)}\sum_{j=0}^{\gamma(x)-1} x_j p^j, & x\notin Z_p \end{cases}, \tag{2}$$

са особином $\{-x\}_p=1-\{x\}_p-\Omega(| x|_p)$, где је $\Omega(| x|_p)=1$ за $x\in Z_p$, и $\Omega(| x|_p)=0$ за $x\notin Z_p$. На локално компактној групи Q_p може се увести мера Хара [1]

$$d(x+a)=dx,\quad d(cx)=| c|_p\, dx,\quad x,a,c\in Q_p,\quad \int_{Z_p} dx=1. \tag{3}$$

Иако не постоји добро дефинисан појам диференцирања комплекснозначних функција p-адичног аргумента, интеграљење и Фурије трансформација постоје и могу се користити за конструисање псеудодиференцијалних оператора. Фурије трансформација је базирана на групи адитивних карактера $\chi_p(x)=\exp(2\pi i\{x\}_p)$:

$$F[\psi(x)](\xi)=\tilde\psi(\xi)=\int_{Q_p}\psi(x)\chi_p(\xi x)dx,\qquad F^{-1}[\tilde\psi(\xi)](x)=\psi(x)=\int_{Q_p}\tilde\psi(\xi)\chi_p(-\xi x)d\xi. \tag{4}$$

3. *P*-адична квантна механика

Стандардна квантизација са операторима инфинитезималних транслација у p-адичном случају је немогућа пошто је (Q_p,d_p) тотално неповезан ултраметрички простор. Излаз је пронађен у коришћењу Вејлових оператора коначних трансформација, који аналогно реалном случају делују на начин

$$\hat Q_q\psi(x)=\psi(x+q),\qquad \hat P_k\psi(x)=\chi_p(kx)\psi(x)),\qquad q,k,x\in Q_p. \tag{5}$$

Могуће је увести фамилију унитарних оператора

$$\hat W_p(z)=\chi_p(-\frac{1}{2}qk)\hat Q_q\hat P_k,\quad z\in Q_p\times Q_p, \tag{6}$$

који чине репрезентацију Хајзенберг-Вејлове групе. Динамика система се описује унитарним оператором еволуције $\hat U_p(t)$, односно језгром оператора еволуције $\hat K_p(x,t)$ [5]

$$\hat U_p(t'')\psi_p(x'')=\int_{Q_p}\hat K_p(x'',t'';x',t')\psi_p(x',t')dx',\quad \psi_p(x,t)\in L_2(Q_p). \tag{7}$$

На овај начин p-адична квантна механика је задата преко тројке $\left(L_2(Q_p),\hat W_p(z_p),\hat U_p(t_p)\right)$, где су: $L_2(Q_p)$- Хилбертов простор квадратно интеграбилних комплекснозначних функција p-адичног аргумента, $\hat W_p(Z_p)$- унитарна репрезентација Хајзенберг-Вејлове групе и $\hat U_p(t_p)$- унитарна репрезентација оператора еволуције [1].

4. ПДО са симболом облика $\{x\}_p$

Алтернативни начин заснивања p-адичне квантне механике је увођење псудодиференцијалног оператора (ПДО) и конструисање једначине Шредингеровог типа, чија би решења биле таласне функције $\psi(x,t)$ [6]. Шредингерова једначина конструисана преко псеудодиференцијалног оператора Владимирова (са симболом облика $| x|_p$) [6,7]

$$D^{\alpha}_{VL}\psi(x)=\int_{Q_p}|y|^{\alpha}_{p}\,\tilde{\psi}(y)\chi_p(-yx)dy \tag{8}$$

не поседује фундаментално решење, које постоји у реалном случају. У циљу превазилажења овог, као и неких других проблема у вези са оператором Владимирова, Б. Драговић је предложио да се уведе нови ПДО чији би симбол био рационални део p-адичног броја [8]

$$D^{\alpha}_{x}\psi(x)=\int_{Q_p}\{y\}^{\alpha}_{p}\tilde{\psi}(y)\chi_p(-yx)dy\,. \tag{9}$$

ПДО облика (9) је линеарни оператор

$$D^{\alpha}_{x}\left[c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)\right]=c_1D^{\alpha}_{x}\left[\psi_1(x)\right]+c_2D^{\alpha}_{x}\left[\psi_2(x)\right]. \tag{10}$$

Треба напоменути да важи (уз $h=1$) [9]

$$\{\beta\hat{k}\}^{n}_{p}\psi_p(x)=\int\{\beta k\}^{n}_{p}\chi_p\{-kx\}\tilde{\psi}_p(k)d^{D}k\,, \tag{11}$$

$$\{\alpha_i\hat{x}_i\}_p\{\beta_j\hat{k}_j\}_p-\{\beta_j\hat{k}_j\}_p\{\alpha_i\hat{x}_i\}_p=-\frac{i}{2\pi}\delta_{ij}\{\alpha\beta\}_p\,. \tag{12}$$

Наравно, постоје и друге могућности увођења псеудодиференцијалних оператора [10].

p-Адична једначина Шредингеровог типа за слободну честицу (једнодимензионални случај) конструисана преко ПДО облика (9) даје решења у облику (p-адичних) раванских таласа, са ``дискретним`` енергетским спектром (k -импулс слободне честице) [8]

$$\frac{i}{2\pi}\{\frac{\partial}{\partial t}\}_p\psi(x,t)=\frac{1}{4\pi^2}\{-\frac{\partial}{\partial x}\}^{2}_{p}\psi(x,t)\quad\Rightarrow\quad\{E\}_p\sim\{k\}^{2}_{p}. \tag{13}$$

У циљу примене ПДО у Шредингеровој једначини за сложеније моделе потребно је видети како он ``делује`` на комплекснозначне функције p-адичног аргумента, тј. треба израчунати читав низ интеграла који садрже рационални део p-адичног броја [11,12]. Неки од интеграла, израчунатих недавно, представљени су у овом раду.

Интеграли по S_γ са рационалним делом p-адичног броја као подинтегралном функцијом су под одређеним условима мултипликативно и адитивно ``инваријантни``:

$$\int_{S_\gamma}\{\alpha x\}_p dx=\int_{S_\gamma}\{\beta x\}_p dx=\int_{S_\gamma}\{-x\}_p dx=\int_{S_\gamma}\{x\}_p dx=\frac{1}{2}p^{\gamma}(1-\frac{1}{p})\,,\quad \alpha,\beta\notin Z_p\,,\quad \gamma>0\,, \tag{14}$$

$$\int_{S_\gamma}\{\alpha\pm x\}_p dx=\int_{S_\gamma}\{\beta\pm x\}_p dx=\int_{S_\gamma}\{-x\}_p dx=\int_{S_\gamma}\{x\}_p dx=\frac{1}{2}p^{\gamma}(1-\frac{1}{p})\,,\quad \alpha,\beta\in Z_p\,,\quad \gamma>0\,. \tag{15}$$

Деловање ПДО на производ адитивног карактера и таласне функције је:

$$D_x\left[\chi_p(\alpha_0+\alpha_1x)\psi(x)\right]=\chi_p(\alpha_0+\alpha_1x)D_x\left[\psi(x)\right],\quad \alpha_1\in Z_p,\alpha_0\in Q_p\,. \tag{16}$$

Деловање псеудодиференцијалног оператора (9) на функцију која зависи само од p-адичне норме ($\psi(x)=\psi(|x|_p)$) се може приказати на следећи начин:

$$D_x\left[\psi(|x|_p)\right]=\int_{Q_p}\{y\}_p F[\psi(|x|_p)](y)\chi_p(-yx)dy=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\left((1-\frac{1}{p})\sum_{\gamma=0}^{\infty}p^{-\gamma}\psi(p^{-\gamma-\nu})-p^{-\nu}\psi(p^{1-\nu})\right)A\right], \tag{17}$$

$$A=\Omega(|x|_p)\left(1-\Omega(p^{\nu})\right)\left[\frac{p^{\nu}}{2}(1-\frac{1}{p})\Omega(p^{\nu}|x|_p)+(\frac{1}{\chi_p(-xp^{-\nu})-1}-\frac{|x|_p-1}{2})\delta(p^{\nu}|x|_p-p)\right]$$
$$+\Omega(|x|_p)\left(1-\Omega(p^{\nu})\right)\left(\frac{1}{\chi_p(-xp^{-\nu})-1}-\frac{1}{\chi_p(-xp^{-\nu+1})-1}\right)\left(1-\Omega(p^{\nu-1}|x|_p)\right). \tag{18}$$

5. Закључак

ПДО облика (9) испољава богату математичку структуру. Изнети резултати представљају неопходне кораке у правцу формирања једначине Шредингеровог типа са нетривијалним потенцијалом над пољем Q_p, која би била лишена неких од недостатака уочених код Шредингерове једначине која укључује ПДО Владимирова.

Интеграљење по S_γ (које су развили Д. Димитријевић и Г. Ђорђевић) и B_γ (развио Б. Драговић) доводи (наравно) до идентичних резултата, али је у случајевима сложенијих подинтегралних функција интеграљење по кругу B_γ технички једноставније.

``Стандардно`` уређени ПДО $Op_{Std}(f)$ за симбол f [13]

$$\left(Op_{Std}(f)\psi(x)\right)(q)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\iint\chi_\infty(\frac{kv}{h})f(q,k)\psi(q+v)d^nvd^nk \qquad (19)$$

у деформационој квантизацији, његова сличност са ПДО у *p*-адичној квантној механици и могућност аделичне генерализације Вејл-Мојаловог производа [14] су обећавајући оквир за даља истраживања. То посебно може бити од интереса у оквиру тзв. стриктне квантизације.

Рад је делимично финансиран од стране Министарства за науку и технологије Републике Србије, пројекат број 1643.

6. Литература

[1] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. I. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore, 1994.
[2] A. Khrennikov, *p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics*, Kluwer, 1994.
[3] S. Waldmann, *On the representation theory of deformation quantization*, Contr. to Proc. of "68eme Rencontre entre Physiciens Theoriciens et Mathematiciens" on deformation quantization, Strasbourg 2001, Appeared in G. Halbout: *Deformation Quantization* IRMA Lectures on Mathematics and Theoretical Physics **1**. Walter de Gruyter Verlag, 2002.
[4] G. S. Djordjevic, Lj. Nesic, *Towards adelic noncommutative quantum mechanics*, Proc. of 8th Adriatic Meeting in Dubrovnik, Eds.: J. Trampetic, J. Wess, Springer, Berlin, 2003, p. 25.
[5] V. S. Vladimirov and I. V. Volovich, Commun. Math. Phys. **123**, 1989, p. 659.
[6] V. S. Vladimirov and I. V. Volovich, Lett. Math. Phys. **18**, 1989, p. 43.
[7] A. N. Kochubei, J. Math. Phys., **34**, 1993, p. 3420.
[8] D. D. Dimitrijevic, G. S. Djordjevic and B. Dragovic, *On Shroedinger-tipe equation on p-adic spaces*, Bulgarian Journal of Physics **27**, No 3, 2000, p. 50.
[9] B. Dragovich, *p-Adic an adelic quantum mechanics*, hep-ph/0312046.
[10] S. V. Kozyrev, *p-Adic pseudodifferential operators and p-adic wavelets*, math-ph/0303045.
[11] D. D. Dimitrijevic, G. S. Djordjevic and Lj. Nesic, *Fourier transformation and pseudodifferential operator with rational part*, Proc. BPU5, Vrnjacka Banja, Serbia and Montenegro, 2003, p. 1231.
[12] D. D. Dimitrijevic, G. S. Djordjevic, *Quantum dynamics on nonarchimedean spaces: a pseudodiferential approach*, Proc. of UNESCO Conf. *TH-2002*, Paris, 2002, p. 330.
[13] S. Waldmann, *An introduction to deformation quantization,* to be published by Springer.
[14] G. S. Djordjevic, B. Dragovich, Lj. Nesic, *Adelic quantum mechanics: nonarchimedean and noncommutative aspects*, Proc. of NATO ARW, Kiew, Ukraine, Eds.: S. Duplij, J. Wess, Kluwer. Publ., 2001, p. 401.