1. UVOD

Poslednjih decenija bilo je više različitih pokušaja da se prevaziđu otvoreni problemi u kvantnoj teoriji i fizici visokih energija, odnosno na malim prostorno-vremenskim rastojanjima. Jedan od njih je primena p-adičnih brojeva i adela u konstrukciji fizičkih modela, što je i tema ove disertacije. U vezi sa tim značajna je Volovićeva hipoteza izneta 1987. godine [1] o nearhimedovskoj strukturi prostor-vremena na Plankovoj skali. Važno je napomenuti da je u ovom radu (koji se obično navodi kao prvi iz primene p-adičnih brojeva u fizici visokih energija) osim te hipoteze Volović izneo i pretpostavku o invarijantnosti fundamentalnih fizičkih zakona u odnosu na izmenu polja brojeva $\mathbb{Q}_p$ i $\mathbb{R}$.

Koje su to činjenice koje upućuju na neobične osobine prostora i vremena na Plankovoj skali? Kad se govori o Plankovim veličinama (prostornoj i vremenskoj distanci, masi i odgovarajućoj energiji) onda treba prvo pojasniti kako se dolazi do ovih veličina i kakav smisao one imaju. Naime, kada je Plank u fiziku uveo konstantu h, vrlo brzo je zaključio da to može da implicira fundamentalno novu skalu za dužinu. On je nju dobio [2] koristeći tri konstante iz tri oblasti fizike: gravitacionu konstantu G iz teorije gravitacije, brzinu svetlosti u vakuumu c iz specijalne teorije relativnosti i h iz kvantne teorije. Izraz za Plankovu dužinu

$$l_{pl} = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} \approx 10^{-35} m$$

se naravno može dobiti i na druge načine [3,4,5], a ne samo dimenzionom analizom kako je to Plank uradio.

Do kakvih se to problema dolazi na Plankovoj skali? Da vidimo prvo kako se u principu vrše merenja. Ukoliko na primer želimo da izmerimo dužinu nekog predmeta, mi uzimamo neku usvojenu jedinicu mere manju od dužine koju merimo, "stavljamo" je potreban broj puta duž predmeta i svakako ćemo pre ili kasnije doći u situaciju da smo uspeli da "premerimo" predmet, odnosno da se prilikom poslednjeg "stavljanja" izabrane jedinice pored predmeta desilo da je ona "štrčala". U matematici je ovo iskazano dobro poznatom Arhimedovom aksiomom o izmerljivosti, preciznije $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $b < a$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tako da je $|nb| > a$. Može se reći da je ovo aksioma na kojoj se baziraju sva merenja koja se vrše u našem "arhimedovskom" svetu i što je takođe važno, izgledalo je da se merenja mogu vršiti sa proizvoljnom tačnošću.

U čemu je onda problem, odnosno zašto uopšte razvijati neke nove teorije nad poljima brojeva koja imaju nearhimedovsku strukturu? Naime, jedan od rezultata kvantne gravitacije je upravo činjenica da je principijelna greška u merenju rastojanja veća ili jednaka Plankovoj dužini [4,5]. Dakle precizno merenje rastojanja manjih od ove veličine, se vrši sa greškom koja je veća rastojanju koje se meri. Ovo znači da za takva rastojanja ne postoji dovoljno dobar etalon pomoću koga merimo a on ne postoji zbog toga što je osobina prostora takva da ne važi Arhimedova aksioma Euklidove geometrije. Prostor sa takvim osobinama se naziva nearhimedovskim ili ultrametričkim. Pošto usvojenoj geometriji odgovara određeno polje brojeva (Euklidovoj i Rimanovoj geometriji odgovara polje realnih brojeva), treba očekivati da u slučaju nearhimedovske geometrije primenjujemo polje brojeva kome odgovara nearhimedovska geometrija. Upravo takvo je polje p-adičnih brojeva $\mathbb{Q}_p$. I pošto polju brojeva odgovara određena geometrija, a geometriji odgovarajuća fizika i obrnuto, onda se može pisati da važi sledeća ekvivalencija [6]

Teorija brojeva $\Leftrightarrow$ Fizika

Kao što je već napomenuto, od 1987. godine [1,7] p-adični brojevi se primenjuju u konstrukciji fizičkih modela u fizici visokih energija, a prvi značajni rezultati su postignuti u teoriji struna [1,7,8,9]. Pokazano je da se pod određenim uslovima amplituda za realne strune može predstaviti preko proizvoda svih p-adičnih amplituda kojih ima beskonačno mnogo. Prednost ovakvog zapisa je u tome što su p-adične amplitude mnogo prostije od realnih.

Ovaj rezultat je predstavljao podsticaj za dalju primenu p-adičnih brojeva pri čemu je najviše uspeha postignuto u zasnivanju p-adične kvantne mehanike [10-13]. Obzirom da se pokazuje da je $\mathbb{Q}_p$ totalno nepovezano polje brojeva, nije moguće pogodno definisati analogon Šredingerove jednačine pa samim tim otpada i takav način formulacije p-adične kvantne mehanike. Razlog je u tome što je nemoguće na pogodan način definisati generatore infinitezimalnih vremenskih i prostornih translacija. Pokazalo se međutim da je moguće primeniti Vejlovu kvantizaciju [14] sa operatorima konačnih (globalnih) transformacija [9,12].

Kvantna mehanika nad poljem $\mathbb{Q}_p$, prema Vladimirovu i Voloviću [9], je trojka

$$(L_2(\mathbb{Q}_p), W_p(z_p), U_p(t_p)),$$

gde je $L_2(\mathbb{Q}_p)$ Hilbertov prostor kompleksnih kvadratno-integrabilnih funkcija na $\mathbb{Q}_p$ u odnosu na meru Hara, z_p je tačka p-adičnog klasičnog faznog prostora, $W_p(z_p)$ unitarna reprezentacija Hajzenberg-Vejlove grupe na $L_2(\mathbb{Q}_p)$, odnosno reprezentacija kanonskih komutacionih relacija, t_p je p-adično vreme i $U_p(t_p)$ je unitarna reprezentaija evolucionog operatora na $L_2(\mathbb{Q}_p)$.

Do sada je u p-adičnoj kvantnoj mehanici proučeno nekoliko najprostijih jednodimenzionalnih sistema: slobodna čestica [10], harmonijski oscilator [10], čestica u konstantnom polju [15], harmonijski oscilator sa vremenski zavisnom frekvencijom [16], slobodna relativistička čestica [17-20].

Pokazalo se da se, u okviru p-adične kvantne mehanike i njene adelične unifikacije sa standardnom, sa uspehom mogu tretirati i minisuperprostorni kosmološki modeli [21-25]. U ovim radovima su minsuperprostorni modeli tretirani slično Hartl-Houkingovom prilazu [26] generalizacijom Fejnmanovog metoda integracije po putanjama na p-adične metrike. U standardnom Hartl-Houkingovom prilazu se talasna funkcija prostorno zatvorene vasione dobija Fejnmanovom integracijom po istorijama pri čemu dejstvo zavisi od gravitacionog polja i polja materije. Talasna funkcija vasione praktično odgovara prelazu iz "ničega" u 3-dimenzionalnu hiperpovrš, dok se integracija vrši po svim "istorijama", tj. po svim kompaktnim 4-metrikama koje povezuju ova dva stanja 3-prostora [27-29]. Prema [21,23] standardna Fejnmanova integracija po kompaktnim metrikama se proširuje na sve p-adične kompaktne metrike. Ovakvom pristupu određivanja talasne funkcije vasione je posvećena magistarska teza [30].

Jedan od najznačajnijih problema p-adične fizike je njena interpretacija kao i njena veza sa standardnom fizikom, odnosno fizikom nad realnim poljem brojeva. Ispostavilo se da je uspešno rešavanje drugog problema dovelo do rešenja prvog i da je dalo neke neočekivane rezultate.

Tridesetih godina ovog veka, realni i p-adični brojevi su povezani uvođenjem beskonačnih nizova brojeva koji se nazivaju adelima [31], što je bio putokaz ka povezivanju i ujedinjenju standardne i p-adične fizike [8,10]. Na osnovu toga je Dragović [32,33] formulisao adeličnu kvantnu mehaniku, odnosno kvantnu mehaniku nad adelima kao trojku

$$(L_2(\mathcal{A}), W(z), U(t)),$$

gde je $\mathcal{A}$ aditivna grupa adela, z tačka klasičnog adeličnog faznog prostora, t adelično vreme, $L_2(\mathcal{A})$ Hilbertov prostor nad $\mathcal{A}$, $W(z)$ unitarna reprezentacija Hajzenberg-Vejlove grupe na $L_2(\mathcal{A})$ a $U(t)$ unitarna reprezentacija evolucionog operatora na $L_2(\mathcal{A})$. U tim radovima je detaljno proučen adelični harmonijski oscilator. U skladu sa predlogom za zasnivanje adelične kvantne mehanike, adelična talasna funkcija predstavlja određeni proizvod standardne i talasnih funkcija nad svim p-adičnim prostorima. Ispostavlja se da je jedan od potrebnih uslova adeličnosti nekog modela postojanje p-adične talasne funkcije osnovnog stanja u vidu karakteristične funkcije $\Omega(|x|_p)$ nad celim p-adičnim brojevima.

U referenci [30] je formalizam adelične kvantne mehanike primenjen na izračunavanje talasne funkcije vasione za neke konkretne minisuperprostorne modele u već pomenutom Hartl-Houkingovom prilazu. Pokazalo se da je moguće konstruisati adeličnu talasnu funkciju samo za modele tipa de Siterovog, dok u slučaju primene formalizma na neke druge modele nije bilo moguće dobiti adeličnu talasnu funkciju. Ovaj problem, kao i činjenica da je minisuperprostorna kvantna kosmologija ustvari kvantna mehanika u minisuperprostoru, su doveli do ideje da odgovarajuće kvantne modele treba razmatrati u okviru adelične kvantne mehanike i u okviru nje ispitati uslove njihove adeličnosti. Ovakav pristup se pokazao kao veoma uspešan [34] i upravo je njegovom razvoju i primeni posvećena ova disertacija.

U drugoj glavi disertacije je dat kratak pregled p-adičnih brojeva i adela i analize nad njima. Treća glava sadrži osnove kvantne kosmologije u minisuperprostoru, dok je četvrta posvećena zasnivanju p-adične i adelične kvantne mehanike. U petoj su razmatrani određeni minisuperprostorni kosmološki modeli u različitom broju dimenzija primenom formalizma razvijenog u glavi 4.

Obzirom da je primenjivan Fejnmanov prilaz kvantovanju preko integrala po trajektorijama, u toku ispitivanja minisuperprostornih modela pojavila se potreba za dobijanjem opšteg izraza za jezgro operatora evolucije za sisteme sa kvadratičnim dejstvom. U slučaju jednodimenzionalnih sistema ovaj izraz je već bio izračunat [15,35-38], dok su u glavi 4 prezentovani originalni rezultati do kojih se došlo tokom izrade ove disertacije, a koji se odnose na dobijanje analognog izraza u dve i tri dimenzije.

Vredi napomenuti da je u toku razvoja p-adične kvantne mehanike otkrivena i neočekivana veza p-adične analize sa q-analizom i kvantnim grupama i na taj način sa nekomutativnom geometrijom, koja predstavlja perspektivan pravac daljih istraživanja [39].

U zaključku je izneta interpretacija rezultata p-adične kvantne mehanike u okviru adeličnog prilaza.

2. p-ADIČNA I ADELIČNA MATEMATIKA

U uvodu je bilo dosta reči o fizičkoj motivaciji za korišćenje p-adičnih brojeva. Treba istaći da osim nje postoji i dobra matematička podloga sadržana u teoremi Ostrovskog [10,40]:

Norme $|\cdot|_\infty$ i $|\cdot|_p$, p=prost broj, su jedine netrivijalne*[1] *i neekvivalentne*[2] *norme nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Dakle p-adična norma je jedina moguća netrivijalna norma osim standardne apsolutne vrednosti $|\cdot|_\infty$. Pa ako primena realnih brojeva nije dovoljna za opisivanje fizičke realnosti, onda je jedina preostala mogućnost da se iskoristi polje p-adičnih brojeva[3] $\mathbb{Q}_p$, jer

---

[1] Trivijalna norma nad poljem racionalnih brojeva je norma za koju važi $|x| = 1$ za $x \neq 0$ i $|x| = 0$ za $x = 0$.

[2] Dve norme $|\cdot|_\alpha$ i $|\cdot|_\beta$ su ekvivalentne na nekom polju onda i samo onda ako postoji takav pozitivan broj c, tako da je $|x|_\alpha = |x|_\beta^c$, za svako x iz datog polja brojeva na kome su definisane pomenute dve norme.

[3] Ovde valja napomenuti da su p-adični brojevi u matematici poznati već oko 100 godina, jer ih je krajem prošlog veka uveo nemački matematičar Kurt Hensel. Primena u fizici visokih energija je mnogo svežijeg datuma, naime u uvodu pomenuti rad Volovića *Number theory as the ultimate physical theory* je napisan 1987. godine. I pre ovog rada je bilo pokušaja primene p-adičnih brojeva u fizici ali su oni bili uglavnom rudimentarni i bez značajnijih rezultata.

drugih mogućnosti prema navedenoj teoremi i nema.

Da vidimo sada kako se uvodi polje p-adičnih brojeva i koje su njegove glavne osobine. Većina rezultata u ovoj glavi će biti data bez dokaza, obzirom da već postoje dva magistarska rada [16,30] i jedna doktorska disertacija [15] iz ove oblasti na našem jeziku. Za rigorozniju i potpuniju matematičku sliku treba konsultovati knjige [31,40,41,42,43], monografije [10,44] kao i pregledni članak [45].

2.1 Polje p-adičnih brojeva

Neka je p neki prost broj, $p = 2, 3, 5, \cdots, 137, \cdots$. Bilo koji racionalan broj $x \neq 0$, se jednoznačno može zapisati u obliku

$$x = \pm\ p^{\gamma} \frac{a}{b}, \tag{2.1}$$

gde je $\gamma \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ je prsten celih racionalnih brojeva) a a i b su prirodni brojevi koji nisu deljivi sa p i nemaju zajednički delitelj. p-Adična norma $|x|_p$ racionalnog broja $x \in \mathbb{Q}$ (2.1) je

$$|x|_p = p^{-\gamma}, \;\; x \neq 0, \quad |0|_p = 0. \tag{2.2}$$

Kompletiranje polja $\mathbb{Q}$ u odnosu na normu[4] $|\cdot|_p$, dovodi do polja p-adičnih brojeva $\mathbb{Q}_p$. Svaki p-adičan broj x se može predstaviti u kanonskoj formi

$$x = p^{\gamma}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \ldots) \tag{2.3}$$

gde je $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, $x_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $j = 0, 1, \ldots$.

[4]Po analogiji sa poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$, koje se dobija popunjavanjem polja $\mathbb{Q}$ graničnim vrednostima Košijevih nizova u odnosu na standardnu normu $|\cdot| = |\cdot|_\infty$, polje $\mathbb{Q}_p$ se dobija popunjavanjem polja racionalnih brojeva graničnim vrednostima Košijevih nizova u odnosu na normu $|\cdot|_p$:

$$\mathbb{R} \stackrel{|\cdot|_\infty}{\leftarrow} \mathbb{Q} \stackrel{|\cdot|_p}{\rightarrow} \mathbb{Q}_p.$$

Norma $|\cdot|_p$ ima sledeće osobine[5]:

$$
\begin{aligned}
&1)\ |x|_p \geq 0, \quad |x|_p = 0 \text{ akko je } x = 0,\\
&2)\ |xy|_p = |x|_p |y|_p, \qquad (2.4)\\
&3)\ |x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).
\end{aligned}
$$

U skladu sa osobinom 3) (koja se naziva strogom nejednakošću trougla) norma $|\cdot|_p$ je takozvana nearhimedovska[6] norma a prostor $\mathbb{Q}_p$ je ultrametrički prostor. Metrika na polju $\mathbb{Q}_p$ se definiše kao $d_p(x,y) = |x-y|_p$. Metrički prostor $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ je lokalno kompaktan, kompletan i separabilan [10,41].

Krug $B_\gamma(a)$ sa centrom u tački $a \in \mathbb{Q}_p$, radijusa p^γ, je skup tačaka

$$B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \quad |x-a|_p \leq p^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}\}. \qquad (2.5)$$

Kružnica $S_\gamma(a)$, sa centrom u tački a, radijusa p^γ, je skup tačaka

$$S_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \quad |x-a|_p = p^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}\}. \qquad (2.6)$$

Može se pokazati da važe sledeći iskazi:

$$B_\gamma(a) = \bigcup_{\gamma' \leq \gamma} S_{\gamma'}(a), \qquad (2.7)$$

$$S_\gamma(a) = B_\gamma(a) \backslash B_{\gamma-1}(a), \quad B_\gamma(a) \subset B_{\gamma'}(a), \quad \gamma < \gamma', \qquad (2.8)$$

$$\bigcap_\gamma B_\gamma(a) = \{a\}, \quad \bigcup_\gamma B_\gamma(a) = \bigcup_\gamma S_\gamma(a) = \mathbb{Q}_p. \qquad (2.9)$$

Geometrija prostora $\mathbb{Q}_p$ je vrlo neobična: svi trouglovi su jednakokraki, svaka tačka kruga je ujedno i njegov centar, krugovi nemaju granicu (rub), krug određenog radijusa je konačna unija krugova manjeg radijusa, ako dva kruga imaju zajedničku tačku onda se

[5] Valja napomenuti da za $|x|_p \neq |y|_p$ u 3) važi znak jednakosti dok za $p = 2$ i $x = y$ je $|x+y|_2 \leq |2x|_2$.

[6] Upravo iz osobine 3) sledi da je norma definisana sa (2.2) nearhimedovska, naime važi za svako $n \in \mathbb{N}$ da je $|nx|_p \leq |x|_p$.

jedan od njih sadrži u drugom, krug je otvoreni kompakt. Prostor $\mathbb{Q}_p$ je istovremeno i otvoren i zatvoren skup.

2.2 Neke kompleksnoznačne funkcije na polju $\mathbb{Q}_p$

Važna funkcija na polju $\mathbb{Q}_p$ je aditivni karakter $\chi(x)$, koji je neprekidna kompleksnoznačna funkcija sa osobinama

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y), \quad |\chi(x)|_\infty = 1, \;\; x, y \in \mathbb{Q}_p. \tag{2.10}$$

Može se pokazati [10] da bilo koji aditivni karakter na polju $\mathbb{Q}_p$ ima oblik

$$\chi_p(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p), \tag{2.11}$$

gde je $\{x\}_p$ razlomljeni deo p-adičnog broja x, to jest

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0, & \text{za } \gamma \geq 0 \text{ ili } x = 0, \\ p^\gamma(x_0 + x_1 p + \ldots + x_{|\gamma|-1}p^{|\gamma|-1}), & \text{za } \gamma < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Napomenimo da je aditivni karakter polja realnih brojeva

$$\chi_\infty(x) = \exp(-2\pi i x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Multiplikativni karakter polja $\mathbb{Q}_p$ je neprekidna, kompleksnoznačna funkcija $\pi(x)$ zadana na $\mathbb{Q}_p^*$, ($\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \backslash \{0\}$) koja ispunjava uslove

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \;\; x, y \in \mathbb{Q}_p^*. \tag{2.14}$$

Još jedna važna funkcija na polju $\mathbb{Q}_p$, funkcija $\lambda_p(a) : \mathbb{Q}_p^* \mapsto \mathbb{C}$ definisana je na sledeći način

$$p \neq 2, \;\; \lambda_p(a) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \gamma(a) \;\; \text{parno u razvoju (2.3)} \\ \left(\frac{a_0}{p}\right), & \text{ako je } \gamma(a) \;\; \text{neparno i} \;\; p \equiv 1(\text{mod} 4) \\ i\left(\frac{a_0}{p}\right), & \text{ako je } \gamma(a) \;\; \text{neparno i} \;\; p \equiv 3(\text{mod} 4), \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\lambda_2(a) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}[1+(-1)^{a_1} i], & \text{za } \gamma(a) \quad \text{parno}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[1+i] i^{a_1}(-1)^{a_2}, & \text{za } \gamma(a) \quad \text{neparno}, \end{cases} \tag{2.16}$$

gde je $\left(\frac{a_0}{p}\right)$ Ležandrov simbol.

Ova funkcija ima sledeće osobine:

$$|\lambda_p(a)|_\infty = 1, \quad \lambda_p(a)\lambda_p(-a) = 1, \quad \lambda_p(ac^2) = \lambda_p(a), \quad a, c \in \mathbb{Q}_p^*, \tag{2.17}$$

$$\lambda_p(a)\lambda_p(b) = \lambda_p(a+b)\lambda_p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), \quad a, b, a+b \in \mathbb{Q}_p^*. \tag{2.18}$$

Valja napomenuti, da se može pokazati da važe sledeće formule koje se nazivaju adeličnim:

$$|x|_\infty \prod_p |x|_p = 1, \;\; x \in \mathbb{Q}^*, \tag{2.19}$$

$$\chi_\infty(x) \prod_p \chi_p(x) = 1, \;\; x \in \mathbb{Q}, \tag{2.20}$$

$$\lambda_\infty(x) \prod_p \lambda_p(x) = 1, \;\; \lambda_\infty(x) = \exp(-i\pi/4 \;\; \mathrm{sgn} x), \;\; x \in \mathbb{Q}^*. \tag{2.21}$$

2.3 Analitičke funkcije na polju $\mathbb{Q}_p$

Neka je $\mathcal{O}$ otvoren skup u $\mathbb{Q}_p$. Funkcija $f : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{Q}_p$ je analitička[7] na $\mathcal{O}$ [45] ako za svaku tačku $a \in \mathcal{O}$ postoji $\gamma \in \mathbb{Z}$ tako da je na krugu $B_\gamma(a)$ ona reprezentovana konvergentnim stepenim redom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k. \tag{2.22}$$

[7] Analitičke funkcije imaju niz uobičajenih osobina [10], na primer, one obrazuju prsten u odnosu na obične operacije sabiranja i množenja. Ipak postoje i razlike: na primer, superpozicija analitičkih funkcija ne mora da bude analitička funkcija.

Radijus konvergencije $r = r(f)$ ovog reda je

$$r = p^{\sigma}, \quad \sigma = -\frac{1}{\ln p}\overline{\lim}_{k\mapsto\infty}\frac{1}{k}\ln|f_k|_p. \tag{2.23}$$

Red (2.22) kojim je definisana analitička funkcija konvergira, ako i samo ako red

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|_p^{\gamma k} \tag{2.24}$$

konvergira, i onda ga je moguće diferencirati i integraliti član po član beskonačan broj puta na $B_\gamma(a)$ [45],

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k(x-a)^{k-n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.25}$$

odakle se dobija

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{2.26}$$

Pri svakom diferenciranju reda (2.22), radijus konvergencije može jedino da se poveća p puta, dok se pri integraciji može smanjiti p puta[8].

Funkcije e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg}x$ su analitičke i definisane su sledećim redovima[9]

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}, \quad x \in G_p, \tag{2.27}$$

$$\ln x = \ln[1-(1-x)], \quad x \in J_p; \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k, \ x \in G_p, \tag{2.28}$$

[8] Kao što se vidi ove osobine se unekoliko razlikuju od osobina analitičkih funkcija nad $\mathbb{R}$.

[9] Napomenimo da broj $e = 2,718\ldots$ (Neperov broj) ne pripada polju $\mathbb{Q}_p$, odnosno oznaku e^x treba shvatiti kao simbol koji označava razvoj, analogan razvoju e^x u realnom slučaju.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in G_p, \tag{2.29}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in G_p, \tag{2.30}$$

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in G_p, \tag{2.31}$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1}, \quad x \in G_p, \tag{2.32}$$

$$\mathrm{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in G_p, \tag{2.33}$$

i za njih važe sledeće relacije:

$$(e^x)' = e^x, \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad x, y \in G_p, \tag{2.34}$$

$$|e^x|_p = 1, \quad |e^x - 1|_p = |x|_p, \quad x, y \in G_p, \tag{2.35}$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad x, y \in G_p, \tag{2.36}$$

$$|\ln(1+x)|_p = |x|_p \quad x \in G_p, \tag{2.37}$$

$$\ln e^x = x, \quad x \in G_p, \quad e^{\ln x} = x, \quad x \in J_p. \tag{2.38}$$

Skupovi G_p i J_p su definisani kao

$$G_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq |2p|_p\}$$

$$J_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ 1 - x \in G_p\}$$

i čine aditivnu odnosno multiplikativnu grupu.

Funkcija e^x predstavlja analitički difeomorfizam aditivne grupe G_p na multiplikativnu grupu J_p. Inverzno preslikavanje se realizuje funkcijom $\ln x$.

Sve formule standardne trigonometrije važe i ovde[10]. Njihov dokaz sledi iz formalne relacije

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in G_p, \tag{2.39}$$

[10]Važno je napomenuti da, bez obzira na istovetnost izraza (2.29)-(2.33) u realnom i p-adičnom slučaju, trigonometrijske funkcije na $\mathbb{Q}_p$ nisu periodične.

gde je simbol e^{ix} definisan redom pod uslovom $i^2 = -1$. Specijalno važi

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad x \in G_p. \tag{2.40}$$

$$e^{\theta x} = \cos x + \theta \sin x, \quad x \in G_p, \quad \theta^2 = -1, \ \theta \in \mathbb{Q}_p \tag{2.41}$$

(ovo poslednje je moguće jedino za $p \equiv 1(\text{mod}4)$).

Funkcije $\sin x$ i $\text{tg}x$ realizuju analitički izomorfizam grupe G_p na G_p, dok je inverzno preslikavanje predstavljeno funkcijama $\arcsin x$ i $\text{arctg}x$.

2.4 Mera Hara na $\mathbb{Q}_p$

Pošto je polje $\mathbb{Q}_p$ lokalno kompaktna komutativna grupa u odnosu na sabiranje, na njemu se može definisati mera Hara dx, koja je invarijantna[11] u odnosu na translaciju

$$d(x+a) = dx, \ \ a \in \mathbb{Q}_p; \quad d(ax) = |a|_p dx, \ \ a \in \mathbb{Q}_p^*. \tag{2.42}$$

Funkcija $f(x) \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ je *integrabilna* na $\mathbb{Q}_p$, ako postoji

$$\lim_{N\to\infty} \int_{B_N} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{N} \int_{S_\gamma} f(x)dx. \tag{2.43}$$

Ova granična vrednost se naziva integral funkcije f na $\mathbb{Q}_p$ i označava sa

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \int_{S_\gamma} f(x)dx. \tag{2.44}$$

Kako izgleda smena promenljivih govori sledeća teorema: *Neka je $x(y)$ analitički difeomorfizam na otvoreno-zatvorenom skupu*

[11] Ova mera je jednoznačna do na faktor a normira se zahtevom da je na skupu celih p-adičnih brojeva jednaka jedinici, $\mu(\mathbb{Z}_p) = \int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$. Inače skup $\mathbb{Z}_p$ je analogon jediničnog intervala u realnom slučaju.

$D' \subset \mathbb{Q}_p$, i neka je $x'(y) \neq 0$, $y \in D'$, tada za svaku funkciju $f \in L^1(D)$ važi formula

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(x(y))|x'(y)|_p dy. \tag{2.45}$$

Na osnovu ovih osobina može se pokazati da važi

$$\int_{B_\gamma} dx = p^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}, \tag{2.46}$$

$$\int_{S_\gamma} dx = p^\gamma \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{2.47}$$

U prvom integralu je dovoljno uvesti smenu $x = p^{-\gamma}y$, dok zadnja jednakost proističe iz relacije $S_\gamma = B_\gamma \backslash B_{\gamma-1}$.

Integrali od karaktera $\chi_p(\xi x)$ imaju sledeće vrednosti

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x)dx = \begin{cases} p^\gamma, & |\xi|_p \leq p^{-\gamma}, \\ 0, & |\xi|_p \geq p^{-\gamma+1}, \end{cases} \tag{2.48}$$

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\xi x)dx = \begin{cases} p^\gamma(1-\frac{1}{p}), & |\xi|_p \leq p^{-\gamma}, \\ -p^{\gamma-1}, & |\xi|_p = p^{-\gamma+1}, \\ 0, & |\xi|_p \geq p^{-\gamma+2}, \end{cases} \tag{2.49}$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)dx = 0, \quad \xi \neq 0. \tag{2.50}$$

Takođe se mogu računati integrali sa fiksiranim ciframa u izrazu (2.3) koji predstavlja p-adičan broj x

$$\int_{S_\gamma, x_0=k_0, x_1=k_1, \ldots, x_l=k_l} dx = p^{\gamma-l-1}, \tag{2.51}$$

$\gamma \in \mathbb{Z}$, $k_j \in \{0, 1, ..., p-1\}$, $k_0 \neq 0$, $l = 0, 1, ...$

2.5 Gausovi integrali na $\mathbb{Q}_p$

Integrali koji kao podintegralnu funkciju sadrže

$$\chi_p(\alpha x^2 + \beta x), \quad \alpha \neq 0 \tag{2.52}$$

nazivaju se Gausovim integralima. Interesantno je videti kakvo rešenje ovi integrali imaju kada su oblasti integracije: kružnica S_γ, krug B_γ i ceo prostor $\mathbb{Q}_p$.

- Gausovi integrali po kružnicama

Za $|4\alpha|_p \geq p^{2-2\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$

$$\int_{S_\gamma} \chi_p\left(\alpha x^2 + \beta x\right) dx = \begin{cases} \lambda_p(\alpha)|2\alpha|_p^{-1/2} \chi_p\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), & \left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p = p^\gamma, \\ 0, & \left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p \neq p^\gamma. \end{cases} \tag{2.53}$$

Za $p \neq 2$, $|\alpha|_p = p^{1-2\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\alpha x^2 + \beta x) dx = \begin{cases} |\alpha|_p^{-\frac{1}{2}} \left[\lambda_p(\alpha)\chi_p\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right], & |\beta|_p \leq \frac{1}{p^{\gamma-1}}, \\ 0, & |\beta|_p \geq \frac{1}{p^{\gamma-2}}. \end{cases} \tag{2.54}$$

- Gausovi integrali po krugovima

Za $p \neq 2$, $\gamma \in \mathbb{Z}$

$$\int_{B_\gamma} \chi_p\left(\alpha x^2 + \beta x\right) dx = \begin{cases} p^\gamma \Omega(p^\gamma |\beta|_p), & |\alpha|_p p^{2\gamma} \leq 1, \\ \frac{\lambda_p(\alpha)}{|2\alpha|_p^{1/2}} \chi_p\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \Omega\left(p^{-\gamma}\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p\right), & |\alpha|_p p^{2\gamma} > 1. \end{cases} \tag{2.55}$$

Za $p = 2$, $\gamma \in \mathbb{Z}$

$$\int_{B_\gamma} \chi_2\left(\alpha x^2 + \beta x\right) dx = \begin{cases} 2^\gamma \Omega(2^\gamma |\beta|_2), & |\alpha|_2 2^{2\gamma} \leq 1, \\ \frac{\lambda_2(\alpha)}{|2\alpha|_2^{1/2}} \chi_2\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \delta(|\beta|_2 - 2^{1-\gamma}), & |\alpha|_2 2^{2\gamma} = 2, \\ \frac{\lambda_2(\alpha)}{|2\alpha|_2^{1/2}} \chi_2\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \Omega(2^\gamma |\beta|_2), & |\alpha|_2 2^{2\gamma} = 4, \\ \frac{\lambda_2(\alpha)}{|2\alpha|_2^{1/2}} \chi_2\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \Omega\left(2^{-\gamma}\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_2\right), & |\alpha|_2 2^{2\gamma} \geq 8, \end{cases} \tag{2.56}$$

gde je

$$\delta(|\beta|_p - p^\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{ako je} \quad |\beta|_p = p^\gamma, \\ 0, & \text{ako je} \quad |\beta|_p \neq p^\gamma, \end{cases} \tag{2.57}$$

dok je Ω funkcija definisana sa

$$\Omega(|x|_p) = \begin{cases} 1, & \text{ako je} \quad |x|_p \leq 1, \\ 0, & \text{ako je} \quad |x|_p > 1, \end{cases} \tag{2.58}$$

Konačno, Gausov integral po celom $\mathbb{Q}_p$ je

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p\left(\alpha x^2 + \beta x\right) dx = \lambda_p(\alpha)|2\alpha|_p^{-1/2} \chi_p\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \quad \alpha \neq 0. \tag{2.59}$$

2.6 n-Dimenzionalni prostor $\mathbb{Q}_p^n$

Prostor $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \times \ldots \times \mathbb{Q}_p$ (n puta) sadrži tačke $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{Q}_p$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sa normom [45]

$$|x|_p = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p. \tag{2.60}$$

Ovako definisana norma, ima karakteristike (2.4) tako da je prostor $\mathbb{Q}_p^n$ ultrametrički. Na n-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{Q}_p^n$, može se uvesti skalarni proizvod

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p^n \tag{2.61}$$

koji zadovoljava nejednakost

$$|(x, y)|_p \leq |x|_p |y|_p, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p^n. \tag{2.62}$$

Mera Hara na $\mathbb{Q}_p^n$ je $d^n x = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ i za nju važi

$$d^n(x + a) = d^n x, \;\; a \in \mathbb{Q}_p^n, \quad d^n(Ax) = |\det A|_p d^n x, \tag{2.63}$$

gde je $x \mapsto Ax$ linearni izomorfizam $\mathbb{Q}_p^n$ na $\mathbb{Q}_p^n$ ($\det A \neq 0$).

Na prostoru $\mathbb{Q}_p^n$ važi analogon Fubinijeve teoreme o izmeni redosleda integracije kao i odgovarajuća teorema o smeni promenljivih u višestrukom integralu [10].

2.7 Adeli

Kad se dobiju rezultati za neki p-adični model, onda se nužno postavlja pitanje kako uspostaviti vezu između tih rezultata i rezultata za taj isti model tretiran kao standardni, odnosno u okviru polja realnih brojeva $\mathbb{R}$. Kao najpogodniji okvir za objedinjavanje standardnih i p-adičnih modela je korišćenje analize nad adelima [31].

Beskonačni nizovi brojeva oblika

$$a = (a_\infty, a_2, a_3, \dots, a_p, \dots), \tag{2.64}$$

u kome je $a_\infty \in \mathbb{R}$ realan broj, a $a_p \in \mathbb{Q}_p$, su p-adični brojevi, pri čemu važi $a_p \in \mathbb{Z}_p$ za sve osim za konačno mnogo prostih brojeva p, nazivaju se *adelima*. Neka je skup svih adela označen sa $\mathcal{A}$. Ako se operacije sabiranja i množenja definišu tako da se one vrše po komponentama, tj.

$$a + b = (a_\infty, a_2, a_3, \dots, a_p, \dots) + (b_\infty, b_2, b_3, \dots, b_p, \dots)$$

$$= (a_\infty + b_\infty, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_p + b_p, \dots), \tag{2.65}$$

$$ab = (a_\infty b_\infty, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots, a_p b_p, \dots), \quad a, b \in \mathcal{A}, \tag{2.66}$$

skup svih adela $\mathcal{A}$ čini prsten. Aditivna grupa ovog prstena se naziva grupom adela i označava sa $\mathcal{A}^+$. Ukoliko se u nizu (2.64) svi elementi zamene jednim istim racionalnim brojem $r \in \mathbb{Q}$, onda se dobija glavni adel

$$r = (r, r, r, \dots, r, \dots,). \tag{2.67}$$

Na prstenu $\mathcal{A}$ se može uvesti beskonačan proizvod normi

$$|a| = |a_\infty|_\infty \prod_{p=2,3,\dots} |a_p|_p = \prod_{v=\infty,2,3,\dots} |a_v|_v. \tag{2.68}$$

Aditivni karakter nad $\mathcal{A}$ se definiše kao beskonačni proizvod[12]

$$\chi(x) = \prod_v \chi_v(x_v) = \exp(-2\pi i x_\infty) \prod_p \exp(2\pi i \{x_p\}_p), \qquad (2.69)$$

gde je $x \in \mathcal{A}$, a $\{x_p\}$ je razlomljeni deo p-adičnog broja definisan relacijom (2.12). Treba napomenuti da je samo konačan broj faktora u ovom proizvodu različit od jedinice, jer su svi karakteri $\chi_p(x_p)$, za $x_p \in \mathbb{Z}_p$, jednaki jedinici, pri čemu je skup celih p-adičnih brojeva definisan kao $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$.

Pošto je aditivna grupa adela $\mathcal{A}^+$ lokalno kompaktna, na njoj je moguće uvesti translaciono invarijantnu meru Hara da, koja se, u skladu sa napomenom u fusnoti 10, normira zahtevom

$$\int_{\mathbb{F}} da = 1, \quad da = da_\infty da_2 da_3 \ldots da_p \ldots, \qquad (2.70)$$

gde je $\mathbb{F}$ kompaktan skup adela a, sa osobinom $0 \leq |a_\infty|_\infty \leq 1$, $0 \leq |a_p|_p \leq 1$.

2.8 Adelični prostor

Neka je M konačan skup prostih brojeva i neka je $\mathcal{A}(M) = \mathbb{Q}_\infty \times \prod_{p \in M} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin M} \mathbb{Z}_p$. Tada se skup adela $\mathcal{A}$ može predstaviti kao

$$\mathcal{A} = \bigcup_M \mathcal{A}(M). \qquad (2.71)$$

Skup $\mathcal{A}$ postaje topološki prostor ako se na njemu uvede takozvana adelična topologija čiju bazu čine otvoreni skupovi oblika

$$\mathcal{O}_\infty \times \prod_{p \in M} \mathcal{O}_p \times \prod_{p \notin M} \mathbb{Z}_p, \qquad (2.72)$$

gde su $\mathcal{O}_\infty$ i $\mathcal{O}_p$ bilo koji otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}_p$, respektivno. U odnosu na ovako uvedenu topologiju skup $\mathcal{A}$ je lokalno kompaktan topološki prostor. Svaka komponenta adeličnog prostora (realna i p-adična) je prostor indukovan standardnom, odnosno p-adičnom normom, respektivno.

[12] Radi se o preslikavanju $\chi(x) : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{C}$ koje je zadato ovom relacijom.

3. KOSMOLOŠKI MODELI U STANDARDNOJ KVANTNOJ KOSMOLOGIJI

Zasnivanje kvantne kosmologije je u uskoj vezi sa kvantovanjem gravitacije, odnosno opšte teorije relativnosti. Opšta teorija relativnosti (OTR), iako kompletna klasična teorija[13] još uvek nije na zadovoljavajući način kvantovana. To možda i nije iznenađenje, obzirom da OTR predstavlja teoriju prostor-vremena, zbog čega bi kvantizacija OTR zapravo značila kvantizaciju prostor-vremena, dok se kvantovanje ostalih interakcija svodi na kvantovanje odgovarajućih polja koja postoje u tom prostor-vremenu.

U osnovi postoje dva prilaza kvantovanju gravitacionog polja: kanonski prilaz[14] i prilaz preko integrala po trajektorijama[15]. Oba

---

[13] Daje i jednačine polja i jednačine kretanja tela u tom polju.

[14] Jednačinu koja je danas poznata kao Uiler-de Uitova i koja predstavlja osnovu kanonskog formalizma, prvi je dobio Brajs de Uit 1967. godine i publikovao je u radu *"Quantum theory of gravity. I. The canonical theory"*, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967). Interesatno je napomenuti da ju je nazvao Ajnštajn-Šredingerovom jednačinom i da je tek kasnije dobila ime pod kojim je danas poznata.

[15] Za godinu kada je prvi put počeo da se primenjuje ovaj prilaz, može se uzeti 1957. godina kada je Čarls Mizner objavio rad *"Feynman*

će biti u globalu predstavljena u ovoj glavi pri čemu će mnogo veća pažnja biti posvećena kvantovanju preko integrala po trajektorijama zbog mogućnosti p-adične generalizacije.

3.1 Hamiltonova formulacija opšte teorije relativnosti

3.1.1 3+1 dekompozicija

U Hamiltonovoj (kanonskoj) formulaciji opšte teorije relativnosti, prvi korak je predstavljanje 4-dimenzionalne prostorno-vremenske mnogostrukosti M, koja opisuje vasionu, preko unije prostornih hiperpovrši Σ_t, indeksiranih globalnim vremenom t. To znači da je 4-dimenzionalna metrika predstavljena sa [29]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\omega^0 \otimes \omega^0 + h_{ij} \omega^i \otimes \omega^j, \tag{3.1}$$

gde je

$$\omega^0 = N dt, \;\; \omega^i = dx^i + N^i dt. \tag{3.2}$$

Veličina $N(t, x^k)$ se naziva "laps funkcija" i ona predstavlja meru razlike između koordinatnog vremena t i sopstvenog vremena τ. Na krivima normalnim na hiperpovršima Σ_t, normala zapisana preko ovih koordinata je $n_\alpha = (-N, 0, 0, 0)$. Veličina $N^i(t, x^k)$ se naziva "šift vektor" i on određuje pomeranje hiperpovrši $\Sigma_{t+\Delta t}$ u odnosu na Σ_t pri prelazu sa t na Δt, za male vremenske intervale Δt. I konačno $h_{ij}(t, x^k)$ je unutrašnja metrika (prva fundamentalna forma) indukovana 4-metrikom $g_{\mu\nu}$ na prostornoj hiperpovrši. Metrički tenzor $g_{\mu\nu}$, u ovakvoj dekompoziciji prostor-vremena, je dat sa

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -N^2 + N^k N_k & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Polazeći od 3-metrike h_{ij} može da se konstruiše tenzor unutrašnje krivine ${}^{(3)}R^i_{jkl}(h)$, koji opisuje kako je hiperpovrš zakrivljena

---

quantization of general relativity", *Rev. Mod. Phys.* **29**, 497 (1957).

prema unutra. Može se definisati i spoljašnja krivina, odnosno druga fundamentalna forma, koja opisuje kako je hiperpovrš Σ_t zakrivljena u odnosu na 4-mnogostrukost u koju je umetnuta. Spoljašnja krivina je data sa

$$K_{ij} = -n_{i;j} = -\Gamma^0_{ij} n_0 = \frac{1}{2N}\left(N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t}\right), \tag{3.4}$$

gde tačka-zarez označava kovarijantno diferenciranje u odnosu na 4-metriku $g_{\mu\nu}$, a vertikalna crta označava kovarijantno diferenciranje u odnosu na 3-metriku[16] h_{ij}.

Za dato "listanje" mnogostrukosti M hiperpovršima Σ_t, uvek je moguće da se izaberu Gausove (normalne) koordinate, u kojima je [2]

$$ds^2 = -dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j. \tag{3.5}$$

3.1.2 Dejstvo

Dejstvo koje se koristi u kvantnoj kosmologiji je uobičajeno Ajnštajn-Hilbertovo dejstvo kome se još u zavisnosti od kosmološkog modela dodaje mogući kosmološki član Λ i (ili) polja materije

$$S[g_{\mu\nu}, \Phi] = \frac{1}{16\pi G}\left(\int_M d^4x \sqrt{-g}({}^{(4)}R - 2\Lambda) + 2\int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} K\right) + S_m, \tag{3.6}$$

gde je $K = K^i{}_i$, trag tenzora spoljašnje krivine. Za polje materije se obično uzima skalarno polje Φ sa potencijalom $V(\Phi)$, to jest

$$S_m = -\frac{1}{2}\int_M d^4x \sqrt{-g} \quad [g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + V(\Phi)]. \tag{3.7}$$

[16] $N_{i|j} = N_{i,j} - \Gamma^k_{ij} N_k$. Podrazumeva se da važi Ajnštajnova konvencija o sumiranju po ponovljenim indeksima pri čemu grčki indeksi uzimaju vrednosti $0, 1, 2, 3$ a latinski $1, 2, 3$.

Za dalju primenu je korisno zapisati ove relacije za dejstvo u 3+1 dekompoziciji. Može da se pokaže [2,29] da je

$$^{(4)}R =^{(3)} R - 2R_{nn} + K^2 - K^{ij}K_{ij}, \tag{3.8}$$

gde je $^{(3)}R$ Ričijev skalar unutrašnje 3-geometrije, a

$$R_{nn} = R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = -K^{ij}K_{ij} + K^2 + (n^\alpha K + a^\alpha)_{;\alpha}, \tag{3.9}$$

($a^\alpha = n^\beta n^\alpha_{;\beta}$). Imajući sve ovo u vidu, za dejstvo se može napisati izraz

$$S[g_{\mu\nu}, \Phi] = \int dt L$$

$$= \frac{1}{16\pi G}\int\limits_M dt d^3x N\sqrt{h}(K_{ij}K^{ij} - K^2 +^{(3)} R - 2\Lambda) + S_m. \tag{3.10}$$

Sada, kao i u Hamiltonovoj formulaciji teorije polja, treba definisati impulse kanonski konjugovane odgovarajućim koordinatama:

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{h}_{ij}} = -\frac{\sqrt{h}}{16\pi G}(K^{ij} - h^{ij}K), \tag{3.11}$$

$$\pi_\Phi \equiv \frac{\delta L}{\delta\dot{\Phi}} = \frac{\sqrt{h}}{N}(\dot{\Phi} - N^i\Phi_{,i}), \tag{3.12}$$

$$\pi^0 \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{N}} = 0, \tag{3.13}$$

$$\pi^i \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{N}_i} = 0. \tag{3.14}$$

Pošto su impulsi konjugovani N i N_i jednaki nuli, ovo su takozvane primarne veze u Dirakovoj terminologiji. Ukoliko se za osnovne promenljive iskoriste N, N^i, h_{ij}, Φ i njima konjugovani impulsi, za Hamiltonijan se dobija

$$H = \int d^3x \left(\pi^0\dot{N} + \pi^i\dot{N}_i + N\mathcal{H} + N_i\mathcal{H}^i\right),$$

($\mathcal{H}$-gustina Hamiltonijana), dok je dejstvo (3.10)

$$S = \int dt d^3x \left(\pi^0 \dot{N} + \pi^i \dot{N}_i - N\mathcal{H} - N_i \mathcal{H}^i \right). \tag{3.15}$$

Ako se ovaj izraz varira u odnosu na π^{ij} i π_Φ, dobijaju se relacije (3.11) i (3.12) koje ih zapravo i definišu. Laps i šift funkcije se sada ponašaju kao Lagranževi množitelji. Variranje dejstva u odnosu na laps funkciju N daje Hamiltonovo ograničenje

$$\mathcal{H} = 0, \tag{3.16}$$

dok variranje dejstva po šift vektoru dovodi do impulsnog ograničenja teorije[17]

$$\mathcal{H}_i = 0. \tag{3.17}$$

3.2 Kvantizacija

3.2.1 Superprostor

Pre nego što se pristupi kvantizaciji gravitacije, treba uvesti odgovarajući konfiguracioni prostor na kome će kvantna dinamika biti definisana.

Prostor svih Rimanovih 3-metrika i konfiguracija polja materije na prostornim hiperpovršima Σ_t

$$\mathrm{Riem}(\Sigma) \equiv \{h_{ij}, \Phi(x) | x \in \Sigma\}, \tag{3.18}$$

je beskonačno dimenzionalni prostor. Ukoliko se iz njega odbace konfiguracije koje su međusobno povezane difeomorfizmima (unutrašnja geometrija je ista), dolazi se do superprostora koji je definisan kao

$$\mathrm{Riem}(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma), \tag{3.19}$$

[17] Može se pokazati da su ova ograničenja zapravo (00) i ($0i$) komponente Ajnštajnovih jednačina. U Dirakovoj terminologiji ovo su sekundarne veze.

gde indeks nula označava da se razmatraju jedino oni difeomorfizmi koji su povezani sa identitetom. Takav beskonačno dimenzioni prostor je konfiguracioni prostor kvantne kosmologije.

3.2.2 Kanonska kvantizacija

Talasna funkcija vasione $\Psi[h_{ij}, \Phi]$ je funkcional na superprostoru. Za razliku od kvantno-mehaničke talasne funkcije, talasna funkcija vasione ne zavisi eksplicitno od vremena. To je u vezi sa time što je opšta teorija relativnosti "parametrizovana" teorija[18]. Vreme je zapravo implicitno sadržano u dinamičkim promenljivima h_{ij} i Φ.

U skladu sa Dirakovom kvantizacionom procedurom, kanonski impulsi se zamenjuju odgovarajućim operatorima ($\hbar = 1$)

$$\pi^{ij} \to -i\frac{\delta}{\delta h_{ij}}, \pi_\phi \to -i\frac{\delta}{\delta \Phi}, \pi^0 \to -i\frac{\delta}{\delta N}, \pi^i \to -i\frac{\delta}{\delta N_i}, \qquad (3.20)$$

i zahteva se da se talasna funkcija Ψ anihilira operatorskom verzijom ograničenja. Iz primarnih veza (3.13) i (3.14) se dobija

$$\hat{\pi}\Psi = -i\frac{\delta\Psi}{\delta N} = 0, \;\; \hat{\pi}^i\Psi = -i\frac{\delta\Psi}{\delta N_i} = 0, \qquad (3.21)$$

odakle se vidi da je talasna funkcija Ψ nezavisna od N i N^i. Iz impulsnog ograničenja sledi [27]

$$\widehat{\mathcal{H}}^i\Psi = 0, \qquad (3.22)$$

odakle se može zaključiti da je talasna funkcija ista[19] za sve konfiguracije $\{h_{ij}(x), \Phi(x)\}$ koje su povezane koordinatnom transformacijom na prostornoj hiperpovrši Σ_t.

[18] Zapravo Ajnštajn-Hilbertovo dejstvo, iz koga proističe dinamika opšte teorije relativnosti, je invarijantno u odnosu na reparametrizaciju vremena.

[19] Ovo je u skladu sa faktorizacijom difeomorfizama u definiciji superprostora. Relacija $\hat{\mathcal{H}}^i\Psi = 0$ je zapravo kvantnomehanički izraz invarijantnosti teorije u odnosu na trodimenzione difeomorfizme.

I konačno, može se pokazati da iz Hamiltonovog ograničenja[20] teorije sledi Uiler-de Uitova jednačina[21]

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = \left(-G_{ijkl}\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\frac{\delta}{\delta h_{kl}} - \sqrt{h}({}^{(3)}R - 2\Lambda) + \frac{1}{16\pi G}\hat{\mathcal{H}}_{matter}\right)\Psi = 0, \tag{3.23}$$

gde je

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}\sqrt{h}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}) \tag{3.24}$$

de Uitova metrika.

3.2.3 Kvantizacija preko integrala po trajektorijama

Jedna od alternativa[22] kanonskoj kvantizaciji je kvantizacija preko integrala po trajektorijama. Primena ovog načina kvantizacije u kvantnoj gravitaciji i kosmologiji je počela pre skoro četrdeset godina [46].

Polazna osnova je ideja da je amplituda prelaska sa stanja opisanog metrikom h'_{ij}, poljem materije Φ' na inicijalnoj hiperpovrši Σ', u drugo stanje h''_{ij}, sa poljem materije Φ'', na finalnoj hiperpovrši Σ'', definisana funkcionalnim integralom od e^{iS} preko svih 4-geometrija $g_{\mu\nu}$ i konfiguracija polja materije Φ, koje su moguće između inicijalne i finalne konfiguracije [29]

$$\langle h''_{ij}, \Phi'', \Sigma'' | h'_{ij}, \Phi', \Sigma' \rangle = \int \mathcal{D}g\mathcal{D}\Phi e^{iS[g_{\mu\nu},\Phi]}. \tag{3.25}$$

Za realne lorencovske metrike $g_{\mu\nu}$ i realna polja materije Φ, dejstvo $S[g, \Phi]$ je realno, što znači da integral po trajektorijama osciluje i ne konvergira. Zbog toga se u izrazu (3.25) vrši rotacija vremenske

[20] Uiler-de Uitova jednačina je povezana sa reparametrizacionom invarijantnošću teorije.

[21] Ovo nije jedna jednačina, već postoji zapravo po jedna jednačina u svakoj tački $x \in \Sigma$. To su hiperboličke funkcionalne jednačine drugog reda.

[22] Dok je u okviru standardne kvantne kosmologije prilaz preko integrala po trajektorijama samo alternativa kanonskoj kvantizaciji, u p-adičnoj i adeličnoj kosmologiji to je za sada jedina mogućnost.

ose, uvođenjem smene $t = -i\tau$, pri čemu dejstvo prelazi u euklidsko $I = -iS$ a amplituda prelaska je data sa

$$\langle h''_{ij}, \Phi'', \Sigma'' | h'_{ij}, \Phi', \Sigma' \rangle = \int \mathcal{D}g\mathcal{D}\Phi e^{-I[g_{\mu\nu},\Phi]}. \tag{3.26}$$

Za razliku od dejstava koja se sreću u drugim teorijama polja[23], gravitaciono dejstvo nije pozitivno definitno, i zbog toga integral po trajektorijama ne konvergira ukoliko se ograničimo samo na realne Euklidske metrike. Da bi integral konvergirao moraju se uzeti u obzir i kompleksne metrike u integralu (3.26). Međutim kako u superprostoru ne postoji jednoznačna kontura integracije, rezultati integraljenja po trajektorijama krucijalno zavise od izbora konture.

3.3 Minisuperprostor

Rad sa beskonačno mnogo dimenzija kompletnog superprostora u praksi je nemoguć. Poželjno je dakle ograničiti broj dimenzija superprostora na neki konačan broj. Takav model vasione se onda zove minisuperprostorni model. Opravdanje za ograničenje broja stepeni slobode je sadržano u činjenici da je vasiona na velikoj skali homogena, a onda u zavisnosti od modela se koristi pretpostavka o izotropiji ili anizotropiji prostor-vremena.

Ukoliko se radi o homogenom i izotropnom modelu (a to znači da je $N = N(t)$ i da je šift vektor N_i jednak nuli), metrika 4-prostora (3.1) postaje

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(q^\alpha(t))dx^i dx^j, \tag{3.27}$$

pri čemu je 3-metrika homogena i opisana konačnim brojem funkcija vremena, $q_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \cdots, n$. Umesto da se piše Uiler-de Uitova

[23] Euklidsko dejstvo za skalarna polja ili polja Jang-Milsa je pozitivno definitno, što znači da integral po trajektorijama konvergira. Za fermionska polja dejstvo nije pozitivno definitno, ali to ne predstavlja problem pošto se ona razmatraju kao antikomutirajući operatori, pa odgovarajući integral po trajektorijama konvergira.

jednačina za svaku tačku prostorne hiperpovrši Σ, u ovom slučaju se dobija samo jedna jednačina. Najčešće se za 3-metriku uzima Fridman-Robertson-Uokerova metrika

$$h_{ij}(q^{\alpha}(t))dx^i dx^j = a^2(t)d\Omega_3^2$$

$$= a^2(t)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \qquad (3.28)$$

($d\Omega_3^2$ je metrika jedinične 3-sfere S^3). Za kosmološki model sa skalarnim poljem i ovakvom metrikom, minisuperprostor ima dve koordinate, $\{a, \Phi\}$, odnosno skalirajući faktor metrike a i skalarno polje Φ.

Osim izotropnih, često se razmatraju i anizotropni modeli. Oni se dele na Kantovski-Saks (*Kantowski-Sachs*) i Bijanki (*Bianchi*) modele.

Kantovski-Saks modeli imaju 3-metriku oblika

$$h_{ij}dx^i dx^j = a^2(t)dr^2 + b^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (3.29)$$

što znači da, ukoliko se razmatraju i polja materije, minisuperpostor ima koordinate $\{a, b, \Phi\}$. Odavde se vidi da prostorni deo metrike ima topologiju $S^1 \times S^2$.

Bijanki modeli su najopštiji homogeni kosmološki modeli sa 3-dimenzionalnom grupom izometrija[24]. 3-metrike svakog od ovih modela se mogu predstaviti u obliku

$$h_{ij}dx^i dx^j = h_{ij}(t)\omega^i \otimes \omega^j, \qquad (3.30)$$

[24] Ta grupa izometrija je u 1-1 korespondeniciji sa 3-dimenzionalnim Lijevim algebrama, koje je još 1897. godine klasifikovao Bijanki. Postoji devet različitih 3-dimenzionalnih Lijevih algebri i prema tome devet tipova Bijankijevih kosmologija.

gde su ω^i invarijantne 1-forme asocirane grupi izometrije. Najprostiji primer iz ove grupe modela je Bijanki I model[25]. U tom slučaju može se uzeti da je $\omega^1 = dx, \omega^2 = dy$ i $\omega^3 = dz$, tako da je 3-metrika

$$h_{ij}dx^i dx^j = a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2, \tag{3.31}$$

a minisuperpostorne koordinate su $\{a, b, c, \Phi\}$.

3.4 Minisuperprostorni propagator

Kada su metrike oblika (3.27), funkcionalna integracija po mnogostrukosti se svodi na funkcionalnu integraciju po 3-metrici i jednu običnu integraciju po "laps" funkciji [27]. Ukoliko se za granične uslove za minisuperprostorne koordinate uzme $q^\alpha(t'') = q^{\alpha\prime\prime}$ i $q^\alpha(t') = q^{\alpha\prime}$, integral u (3.26) u kalibraciji $\dot{N} = 0$, postaje minisuperprostorni propagator, i u tom slučaju važi

$$\langle q^{\alpha\prime\prime} | q^{\alpha\prime} \rangle = \int dN \mathcal{K}(q^{\alpha\prime\prime}, N | q^{\alpha\prime}, 0), \tag{3.32}$$

gde je

$$\mathcal{K}(q^{\alpha\prime\prime}, N | q^{\alpha\prime}, 0) = \int \mathcal{D}q^\alpha e^{-I[q^\alpha]} \tag{3.33}$$

uobičajeni (euklidski) kvantno-mehanički propagator između fiksiranih vrednosti $q^{\alpha\prime}$ i $q^{\alpha\prime\prime}$.

Kako je pokazano u [47] za minisuperprostorne modele sa kvadratičnim dejstvom, propagator (3.33) je (obzirom da je tada integral po trajektorijama egzaktno rešiv) dat izrazom

$$\mathcal{K}(q^{\alpha\prime\prime}, N | q^{\alpha\prime}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\det \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial q^{\alpha\prime\prime} \partial q^{\alpha\prime}} \right)^{1/2} e^{-\bar{I}(q^{\alpha\prime\prime}, N | q^{\alpha\prime}, 0)}, \tag{3.34}$$

gde je $\bar{I}(q^{\alpha\prime\prime}, N | q^{\alpha\prime}, 0)$, klasično euklidsko dejstvo za rešenja klasičnih jednačina kretanja za q^α, uz granične uslove $q^\alpha(0) = q^{\alpha\prime}$, $q^\alpha(1) = q^{\alpha\prime\prime}$.

[25] On odgovara Lijevoj grupi $\mathbb{R}^3$.

Kao što je već napomenuto, minisuperprostorni propagator se dobija jednom standardnom integracijom po laps funkciji N

$$\langle q^{\alpha\prime\prime}|q^{\alpha\prime}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dN\left(-\det\frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial q^{\alpha\prime\prime}\partial q^{\alpha\prime}}\right)^{1/2} e^{-\bar{I}(q^{\alpha\prime\prime},N|q^{\alpha\prime},0)}, \tag{3.35}$$

i zavisi od izbora kompleksne konture integracije.

3.5 Minisuperprostorni modeli

Posle rada Hartla i Houkinga [26] iz 1983. godine, u kome je uveden odgovarajući granični uslov za minisuperprostorni integral po trajektorijama, objavljeno je jako puno radova u kojima su proučavani razni vidovi minsuperprostornih modela.

U ovom poglavlju će biti prezentovani neki od njih uz napomenu da se radi o modelima koji imaju kvadratično dejstvo po svim koordinatama, dakle egzaktno su rešivi odgovarajući integrali po trajektorijama. Jedan od najinstruktivnijih modela je svakako de Siterov model vasione.

3.5.1 de Siterov model

U de Siterovom modelu, metrika je Robertson-Uokerovog tipa

$$ds^2 = \sigma^2\left(-N^2(t)dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2\right), \;\; \sigma = \frac{2G}{3\pi} \tag{3.36}$$

dakle opisana jednim skalirajućim faktorom a, dok je dejstvo standardno Ajnštajn-Hilbertovo (3.6) bez polja materije. Ukoliko se pođe od ovakve metrike i izračuna hamiltonijan videće se da on nije kvadratičan. Međutim pokazuje se da u pogledu izbora laps funkcije postoji sloboda [47] u njenom skaliranju, tako da zapravo može da se koristi metrika [48,49]

$$ds^2 = \left(\frac{N^2(\tau)}{q(\tau)}d\tau^2 + q(\tau)d\Omega_3^2\right), \;\; q(\tau) > 0, \tag{3.37}$$

gde je već uvedeno imaginarno vreme $\tau = it$. Uvođenje faktora q, koji deli kvadrat laps funkcije u izrazu za metriku modela, uprošćava znatno algebru i dovodi do kvadratičnog hamiltonijana odnosno lagranžijana. Euklidsko Ajnštajn-Hilbertovo dejstvo za ovako izabranu metriku je

$$I[q(\tau)] = \frac{1}{2}\int_{\tau'}^{\tau''} d\tau N\left[-\frac{\dot{q}^2}{4N^2} + \lambda q - 1\right], \tag{3.38}$$

gde je $\lambda = \frac{\Lambda\sigma^2}{3}$.

Za granične uslove $q(T) = q''$, $q(0) = q'$, $T = N(\tau'' - \tau')$, rešenje klasične jednačine kretanja je

$$\bar{q}(\tau) = -\lambda\tau^2 + \left(\frac{q'' - q'}{T} + \lambda T\right)\tau + q', \tag{3.39}$$

tako da su euklidsko klasično dejstvo, kvantno-mehanički propagator i minisuperprostorni propagator:

$$\bar{I}(q'', T; q', 0) = \frac{\lambda^2 T^3}{24} + \left(\frac{\lambda(q'' + q')}{4} - \frac{1}{2}\right)T - \frac{(q'' - q')^2}{8T}, \tag{3.40}$$

$$\mathcal{K}(q'', N|q', 0) = \int \mathcal{D}q e^{-I[q]} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{T^{1/2}}e^{-\bar{I}(q'',T;q',0)}, \tag{3.41}$$

$$\langle q''|q'\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int \frac{dT}{T^{1/2}}e^{-\bar{I}(q'',T;q',0)}. \tag{3.42}$$

Ne upuštajući se u analizu izbora kontura integracije prilikom integraljenja u izrazu (3.42) (koja je detaljno prezentovana u referenci [49]) navedimo samo neke od dobijenih Hartl-Houkingovih talasnih funkcija ovog modela[26]

$$\Psi(q) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}}Ai(z), \tag{3.43}$$

$$\Psi(q) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\left(Ai(z) + Bi(z)\right), \tag{3.44}$$

[26] Formalno Hartl-Houkingove talasne funkcije se dobijaju izračunavanjem integrala u izrazu (3.42) uz izbor $q' = 0$ i $q'' = q$.

$$\Psi(q) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\left(Ai(z) + iBi(z)\right), \tag{3.45}$$

gde su sa $Ai(z)$ i $Bi(z)$ označene Ajrijeve funkcije [50,51] argumenta $z = \frac{1-\lambda q}{(2\lambda)^{2/3}}$.

3.5.2 de Siterov model u dve prostorne dimenzije

Osim de Siterovog modela u 3 prostorne i jednoj vremenskoj dimenziji može se razmatrati i analogan model u 2 prostorne i jednoj vremenskoj dimenziji tipa de Siterovog, dakle sa dejstvom (3.6) u kome figuriše kosmološka konstanta i bez polja materije.

Njegova euklidska metrika je [52]

$$ds^2 = \sigma^2\left(N^2 d\tau^2 + a^2(\tau)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right), \tag{3.46}$$

dok je dejstvo

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 d\tau\left(-\frac{\dot{a}^2}{N} - N + N\lambda a^2\right). \tag{3.47}$$

Ojler-Lagranževa jednačina kretanja uz granične uslove $a(0) = a'$, $a(1) = a''$ dovodi do klasičnog dejstva

$$\bar{I}(a'', N; a', 0) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[N\sqrt{\lambda} + \lambda\left(\frac{a'^2 + a''^2}{\operatorname{tg} N\sqrt{\lambda}} - \frac{2a'a''}{\sin N\sqrt{\lambda}}\right)\right], \tag{3.48}$$

dok je propagator

$$\mathcal{K}(a'', N|a', 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{(\lambda^{-1/2}\sin N\sqrt{\lambda})^{1/2}}e^{-\bar{I}(a'',N;a',0)}. \tag{3.49}$$

Hartl-Houkingova talasna funkcija za ovakav minisuperprostorni model je [51]

$$\Psi(a) = i\lambda^{1/4}\frac{e^{-i2\pi J}e^{-\pi^2/(2\lambda)^{1/2}}}{1 - e^{-\pi^2/\lambda^{1/2}}}\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{c}_j\lambda^{j/2}, \tag{3.50}$$

gde je sa J označen imaginarni deo klasičnog dejstva uzet u sedlastim tačkama [52].

3.5.3 Model sa skalarnim poljem

Za razliku od prethodna dva tipa, praktično, de Siterovog modela, u radu [53] je razmatran model sa homogenim skalarnim poljem u kome je gravitacioni deo dejstva Ajnštajn-Hilbertov bez kosmološke konstantne. Za metriku se uzima homogena i izotropna euklidska metrika tipa

$$ds^2 = \sigma^2 \left(N^2(\tau) \frac{d\tau^2}{a^2(\tau)} + a^2(\tau) d\Omega_3^2 \right). \tag{3.51}$$

Za polje materije je uzeto minimalno kuplovano homogeno skalarno polje Φ, sa potencijalom $\widetilde{V}(\Phi)$, čije je euklidsko dejstvo (uporediti sa (3.7))

$$I_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \quad [g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \widetilde{V}(\Phi)]. \tag{3.52}$$

Posle integraljenja po prostornim koordinatama u izrazu za gravitaciono dejstvo, uz smene

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2\sigma^2}} \phi(\tau), \quad \widetilde{V}(\Phi) = \frac{1}{2\pi^2\sigma^4} V(\phi), \tag{3.53}$$

ukupno dejstvo je dato izrazom

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 d\tau N \left(-\frac{a^2 \dot{a}^2}{N^2} + \frac{a^4 \dot{\phi}^2}{N^2} + a^2 V(\phi) - 1 \right). \tag{3.54}$$

Ako se uvede smena $x = a^2 \mathrm{ch}\,(2\phi)$, $y = a^2 \mathrm{sh}\,(2\phi)$, koja preslikava dvodimenzionalni minisuperprostor (a, ϕ) u prostor sa koordinatama (x, y), izraz za dejstvo se uprošćava i postaje

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 d\tau N \left(\frac{1}{4N} (-\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + f(x, y) - 1 \right), \tag{3.55}$$

gde je $f(x, y) = a^2 V(\phi)$. Za funkciju f oblika $f(x, y) = \alpha x + \beta y$, dejstvo je

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 d\tau N \left(\frac{1}{4N} (-\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \alpha x + \beta y - 1 \right). \tag{3.56}$$

Rešavajući Ojler-Lagranževe jednačine kretanja uz granične uslove $x(0) = x'$, $y(0) = y'$, $x(1) = x''$ i $y(1) = y''$, dolazi se do sledećeg klasičnog dejstva

$$\bar{I}(x'', y'', N; x', y', 0) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{24} N^3 + \frac{1}{4}\left[\alpha(x'' + x') + \beta(y'' + y') - 2\right] N + \frac{-(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{8N}. \quad (3.57)$$

Ukoliko se primeni izraz (3.34) za rešavanje odgovarajućeg funkcionalnog integrala, minisuperprostorni propagator se može dobiti integracijom po laps funkciji N u sledećem izrazu

$$\langle x'', y'' | x', y' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dN}{4N} e^{-\bar{I}(x'', y'', N; x', y', 0)} = \int dN \mathcal{K}(x'', y'', N | x', y', 0), \quad (3.58)$$

gde je $\mathcal{K}(x'', y'', N | x', y', 0)$ kvatnomehanički propagator (3.33).

Hartl-Houkingove talasne funkcije su, kao što je već napomenuto definisane izrazom

$$\Psi(a, \phi) = \langle x'' = a^2 \operatorname{ch}(2\phi), y'' = a^2 \operatorname{sh}(2\phi) | x' = 0, y' = 0 \rangle. \quad (3.59)$$

Bez detalja prilično dugih izvođenja koja se mogu naći u radu [53] daćemo rezultate za Hartl-Houkingovu talasnu funkciju. Za eksponencijalni potencijal ($\alpha = \beta$), u oblasti u kojoj važi $a^4(\alpha a^2 e^{2\phi} - 2) \gg 1$, talasna funkcija je oblika

$$\Psi(a, \phi) \sim e^{iJ} + e^{-iJ}, \quad (3.60)$$

gde je $J = a^2 \left(\frac{\alpha a^2 e^{2\phi} - 2}{8}\right)^{1/2}$ imaginarni deo klasičnog euklidskog dejstva u dominantnoj sedlastoj tački [53].

Za potencijal tipa $\operatorname{ch}(2\phi)$ (dobija se za $\beta = 0$), talasna funkcija je takođe oblika (3.60), pri čemu je imaginarni deo dejstva dat izrazom

$$J \approx \frac{\sqrt{\alpha}}{3} a^3 \operatorname{ch}^3 \phi. \quad (3.61)$$

3.5.4 Modeli tipa dva oscilatora

U radovima [54,55] je pokazano da postoje tri minisuperprostorna modela čija se dejstva mogu određenim smenama svesti na dejstvo za dva oscilatora identičnih frekvencija od kojih jedan ima negativnu energiju. To su sledeći modeli: Fridmanov model sa konformno kuplovanim skalarnim poljem, Fridmanov model sa minimalno kuplovanim skalarnim poljem i Kantovski-Saks model.

a) *Izotropni Fridmanov model sa konformno kuplovanim bezmasenim poljem*

Metrika ovog modela je standardna Fridmanova metrika

$$ds^2 = \sigma^2 \left[-\widetilde{N}^2(t)dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2(t) \right] \tag{3.62}$$

pri čemu se za gravitacioni deo dejstva uzima Ajnštajn-Hilbertovo dejstvo (3.6) dok je polje materije bezmaseno i konformno kuplovano sa gravitacijom [26]

$$S_m = -\frac{1}{2} \int\limits_M d^4x\sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + \frac{1}{6}R\Phi^2 \right]. \tag{3.63}$$

Ukoliko se šift funkcija skalira kao $\widetilde{N} = aN$, uz smenu $\phi = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}\Phi$ ($\sigma^2 = \frac{2G}{3\pi}$), prethodni izraz posle integracije po prostornim koordinatama daje

$$S_m = \frac{1}{2} \int dtNa^2 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - \phi^2 \right) \tag{3.64}$$

što smenom $\phi = \frac{b}{a}$ dovodi do

$$S_m = \frac{1}{2} \int dtN \left(\frac{\dot{b}^2}{N^2} - b^2 \right). \tag{3.65}$$

Ukupno dejstvo je onda oblika

$$S = \frac{1}{2} \int dtN \left(\frac{-\dot{a}^2 + \dot{b}^2}{N^2} + a^2 - b^2 \right). \tag{3.66}$$

b) Bezmaseno minimalno kuplovano skalarno polje

Metrika ovog modela, kao i gravitacioni deo dejstva su isti kao i za prethodni model. Za polje materije se međutim uzima izraz

$$S_m = -\frac{1}{2}\int\limits_M d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi. \tag{3.67}$$

Ukoliko se u dejstvo

$$S = \frac{1}{2}\int dt\left[-\frac{a\dot{a}^2}{\widetilde{N}} + \widetilde{N}a + \frac{a^3\dot{\phi}^2}{\widetilde{N}}\right] \tag{3.68}$$

uvede skaliranje $\widetilde{N} = aN$ (uz $\phi = \sqrt{\frac{4}{3}G\pi\Phi}$), kao i smena $x = a\,\mathrm{ch}\,\phi$, $y = a\,\mathrm{sh}\,\phi$, $a^2 = x^2 - y^2$, dobija se

$$S = \frac{1}{2}\int dt\left[-\frac{\dot{x}^2}{N} + \frac{\dot{y}^2}{N} - Ny^2 + Nx^2\right]. \tag{3.69}$$

c) Vakuumski Kantovski-Saks model

Ovaj model je prvi od razmatranih koji spada u anizotropne modele. Njegova metrika je

$$ds^2 = \frac{G}{2\pi}\left[-\widetilde{N}^2(t)dt^2 + a^2(t)d\chi^2 + b^2(t)d\Omega_2^2(t)\right], \qquad \chi\in(0,2\pi). \tag{3.70}$$

gde su a i b dva skalirajuća faktora metrike a $d\Omega_2^2$ je metrika kompaktne orijentabilne 2-mnogostrukosti sa konstantom krivine jednakom $2k$. Za $k=1$ model se zove Kantovski-Saks model[27], a za dejstvo se dobija

$$S = \frac{1}{2}\int dt\left[\widetilde{N}a - \frac{a\dot{b}^2}{\widetilde{N}} - \frac{2\dot{a}\dot{b}b}{\widetilde{N}}\right], \tag{3.71}$$

[27] Za k=0 dobija se lokalno rotaciono simetrični Bijanki I model, a za $k=-1$ lokalno rotaciono simetrični Bijanki III model [56].

odakle smenama $a = \frac{x-y}{x+y}$, $b = \frac{1}{2}(x+y)^2$, $\widetilde{N} = (x+y)^2 N$ opet dobijamo dejstvo

$$S = \frac{1}{2}\int dt \left[-\frac{\dot{x}^2}{N} + \frac{\dot{y}^2}{N} + Nx^2 - Ny^2 \right]. \tag{3.72}$$

Dobijeni rezultati za dejstvo pokazuju da se sva tri modela mogu simultano tretirati kao sistem od dva oscilatora od kojih jedan ima negativnu energiju

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 dtN \left[-\frac{\dot{x}^2}{N^2} + \frac{\dot{y}^2}{N^2} + x^2 - y^2 \right]. \tag{3.73}$$

Rešavanjem klasičnih jednačina kretanja

$$\ddot{x} + Nx = 0, \;\; \ddot{y} + Ny = 0, \tag{3.74}$$

uz granične uslove $x(0) = x', y(0) = y', x(1) = x'', y(1) = y''$, za klasično (lorencovsko) dejstvo se dobija

$$\bar{S}(x'', y'', N|x', y', 0) = \frac{y'^2 + y''^2 - x'^2 - x''^2}{2\mathrm{tg}\, N} + \frac{x'x'' - y'y''}{\sin N}, \tag{3.75}$$

dok je odgovarajući minisuperprostorni propagator

$$\mathcal{K}(y'', x'', N|y', x', 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \frac{1}{\sin N} e^{i\bar{S}(x'', y'', N|x', y', 0)}. \tag{3.76}$$

Prema [55] Hartl-Houkingova talasna funkcija ovakvog minisuperprostornog modela ima oblik

$$\Psi(x, y) = P e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}, \tag{3.77}$$

gde se prefaktor P sporo menja u poređenju sa eksponencijalnim faktorom. Minisuperprostorni modeli ovog tipa su razmatrani takođe u referencama [57,58].

3.5.5 Anizotropni Bijanki I model

Anizotropni Bijanki I sa tri skalirajuća faktora je u standardnom slučaju razmatran u radu [59]. Autori su pošli od metrike

$$ds^2 = \sigma^2 \left[\frac{N^2(\tau)}{a^2(\tau)} d\tau^2 + a^2(\tau) dx^2 + b^2(\tau) dy^2 + c^2(\tau) dz^2 \right]. \quad (3.78)$$

Dejstvo sa kosmološkom konstantom bez polja materije je dato izrazom

$$I[a,b,c] = \frac{1}{2} \int_0^1 d\tau \left[-\frac{a}{N} (\dot{a}\dot{b}c + a\dot{b}\dot{c} + \dot{a}b\dot{c}) + Nbc\lambda \right]. \quad (3.79)$$

Da bi se integral po trajektorijama lakše izračunao, minisuperprostorne koordinate (a, b, c) se zamenjuju novim koordinatama (x, y, z) na sledeći način

$$x = \frac{bc + a^2}{2}, \quad y = \frac{bc - a^2}{2}, \quad \dot{z}^2 = a^2 \dot{b}\dot{c}, \quad (3.80)$$

tako da izraz za dejstvo postaje

$$I[x,y,z] = \frac{1}{2} \int_0^1 d\tau \left[-\frac{1}{N} \left(\frac{\dot{x}^2 - \dot{y}^2}{2} + \dot{z}^2 \right) + \lambda N(x+y) \right]. \quad (3.81)$$

Odgovarajuće jednačine kretanja

$$\ddot{x} - \lambda N^2 = 0, \quad \ddot{y} + \lambda N^2 = 0, \quad \ddot{z} = 0, \quad (3.82)$$

uz granične uslove $x(0) = x', y(0) = y', z(0) = z'$, $x(1) = x'', y(1) = y'', z(1) = z''$, imaju rešenja

$$\bar{x}(t) = \frac{N^2\lambda}{2}\tau^2 + \left(x'' - x' - \frac{N^2\lambda}{2} \right) \tau + x',$$

$$\bar{y}(t) = -\frac{N^2\lambda}{2}\tau^2 + \left(y'' - y' + \frac{N^2\lambda}{2} \right) \tau + y',$$

$$\bar{z}(t) = (z'' - z')\tau + z'. \quad (3.83)$$

Odgovarajuće klasično dejstvo je

$$\bar{I}(x'', y'', z'', N; x', y', z', 0) = -\frac{1}{4N}\left[(x''-x')^2-(y''-y')^2+2(z''-z')^2\right]$$
$$+\frac{\lambda N}{4}\left[(x'+x'')+(y'+y'')\right]. \tag{3.84}$$

Prema (3.34) minisuperprostorni propagator Bijanki I modela je

$$\mathcal{K}(x'', y'', z'', N|x', y', z', 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{(4^{1/3}N)^{3/2}}e^{-\bar{I}(x'',y'',z'',N;x',y',z',0)} \tag{3.85}$$

što znači da se talasna funkcija dobija integracijom po N

$$\Psi(x, y, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{4^{1/2}}\int\frac{dN}{N^{3/2}}e^{-\bar{I}(N)}. \tag{3.86}$$

Ukoliko se za granice integracije uzme da laps funkcija ide od $-\infty$ do $+\infty$, ovaj integral divergira. A. Išikava i H. Ueda su u svom radu [59] predložili novi regularizacioni metod koji se sastoji u tome da se uvede kompleksni parametar α a da se talasna funkcija definiše kao

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{4^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dN}{(\alpha N)^{3/2}}e^{-\bar{I}(\alpha N)}, \tag{3.87}$$

gde se parametar α bira na takav način da integracija po N konvergira. Zatim se izvrši integracija po N a posle integracije se uzme da $\alpha \to 1$ i dobija se talasna funkcija. Za ovaj minisuperprostorni model u pomenutom radu je za talasnu funkciju dobijen izraz

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{4^{1/2}}\sqrt{\frac{\pi}{Y}}e^{-2\sqrt{XY}}, \tag{3.88}$$

gde su sa X i Y označeni faktori uz N i $1/N$ u izrazu za dejstvo (3.83) koje izraženo preko njih može da se zapiše kao

$$\bar{I} = XN + \frac{Y}{N}. \tag{3.89}$$

4. p-ADIČNA I ADELIČNA KVANTNA MEHANIKA

Kad je reč o primeni p-adičnih brojeva u fizici, već je jednom napomenuto da su prvi radovi iz oblasti p-adične fizike visokih energija objavljeni 1987. godine. Valja međutim istaći da su još 1968. godine dva matematičara A. F. Mona i F. van der Blij [60] predložili primenu p-adičnih brojeva u fizici. Njihov rezon je bio vrlo prost, a to je da svaka dovoljno "dobra" matematička konstrukcija mora da odgovara nekoj fizičkoj teoriji. Ostalo se međutim samo na predlogu i nije bilo ozbiljnijih istraživanja. Nakon toga su 1972. godine E. Beltrametti i G. Cassineli [61] istraživali model p-adične kvantne mehanike sa stanovišta kvantne logike i došli do zaključka da se ne može definisati odgovarajuća kvantna mehanika (u skladu sa standardnim formalizmom) i zbog toga nisu nastavili dalja istraživanja u tom pravcu. Potonji pokušaj je pokušaj Vladimirova i Volovića iz 1984. godine sa primenom p-adične matematike u teoriji superpolja. Valja napomenuti da su sva ova istraživanja vršena potpuno nezavisno i da su autori radili u vrlo različitim pravcima.

Međutim, veliko interesovanje su izazvali rezultati u primeni p-adičnih brojeva u teoriji struna. Rad Volovića [1] iz 1987. godine je izazvao seriju radova iz p-adične teorije struna. Osnovna ideja Volovića je da zameni uobičajeno realno prostor-vreme $\mathbb{R}^4$ p-adičnim $\mathbb{Q}_p^4$ i da studira strune u takvom prostor-vremenu. Najviše je imao uspeha prilaz po kojem je samo svetska površ (*world-sheet*) strune

p-adična [7,8,9,62].

Dobijen je niz vrlo interesantnih rezultata sa matematičke tačke gledišta. Međutim problem intrepretacije predloženog formalizma nije na zadovoljavajući način razrešen ni do danas.

Iz razloga sistematske izgradnje kvantne teorije sa p-adičnim strunama razmatrana je p-adična kvantna mehanika [9,11,12,13,63].

4.1 p-Adična kvantna mehanika

p-Adična kvantna mehanika predstavlja kvantnu mehaniku definisanu nad poljem $\mathbb{Q}_p$. Osnovni objekat koji se razmatra u kvantnoj mehanici je talasna funkcija i ona je u standardnoj kvantnoj mehanici kompleksna funkcija realnog argumenta, tj. njome se vrši preslikavanje $\psi : \mathbb{Q}_\infty \mapsto \mathbb{C}$. U okviru p-adične kvantne mehanike su razvijana dva prilaza. Jedan koji je direktna generalizacija standardne kvantne mehanike $\psi : \mathbb{Q}_p \mapsto \mathbb{C}$, dok je u drugom talasna funkcija p-adična, to jest $\psi : \mathbb{Q}_p \mapsto \mathbb{Q}_p$.

Ono što prelaz sa standardne kvantne mehanike na p-adičnu čini netrivijalnim jeste činjenica da je polje $\mathbb{Q}_p$ totalno nepovezano. Ukoliko se ima u vidu da postoje dva načina formulisanja p-adiňe kvantne mehanike (jedan sa p-adičnom talasnom funkcijom p-adičnog argumenta, a drugi sa kompleksnom talasnom funkcijom p-adičnog argumenta), treba razmotriti koji je od njih prirodniji ukoliko se želi, u duhu adeličnog prilaza pomenutog u uvodu, eventualno simultano tretiranje standardne kvantne mehanike i p-adičnih. Obzirom da je u standardnoj kvantnoj mehanici talasna funkcija kompleksna dok su argumetni realni, onda se nameće zaključak da treba formulisati p-adičnu kvantnu mehaniku sa kompleksnim talasnim funkcijama.

Razlika između standardne kvantne mehanike i p-adične se može uočiti na primeru komutacionih relacija. Naime, kanonske komutacione relacije u standardnoj kvantnoj mehanici glase

$$[\hat{q}, \hat{k}] = i\hbar. \tag{4.1}$$

U koordinatnoj reprezentaciji operator $\hat{q}$ se realizuje kao operator množenja $\hat{q}\psi(x) = x\psi(x)$, a $\hat{k}$ kao operator diferenciranja $\hat{k}\psi(x) =$

$-i\hbar\frac{d\psi(x)}{dt}$.

Međutim ukoliko bi prosto "preslikali" ovakvu (standardnu) proceduru kvantovanja u $\mathbb{Q}_p$, značilo bi da prilikom delovanja operatora $\hat{q}$ na talasnu funkciju $\psi(x)$ imamo množenje $x \in \mathbb{Q}_p$ sa $\psi \in \mathbb{C}$, što nema smisla (analogno tome ni diferenciranje $d\psi(x)/dx$ nema smisla)[28].

Rešenje ovih problema je pronađeno u korišćenju Vejlove formulacije kvantne mehanike [10] preko operatora konačnih transformacija

$$\hat{U}_q = e^{i\hat{k}q/\hbar}, \quad \hat{V}_k = e^{i\hat{q}k/\hbar}. \tag{4.2}$$

U p-adičnom slučaju[29] Vejlovi operatori deluju u prostoru $L_2(\mathbb{Q}_p)$, kompleksnih, kvadratno integrabilnih u odnosu na meru Hara, funkcija p-adičnog argumenta:

$$U_q\psi(x) = \psi(x+q), \;\; \psi(x) \in L_2(\mathbb{Q}_p),$$

$$V_k\psi(x) = \chi_p(kx)\psi(x), \;\; (h=1), \tag{4.3}$$

dok je komutaciona relacija (4.1) generalisana na sledeći način

$$U_qV_k = \chi_p(-kx)V_kU_q. \tag{4.4}$$

[28] Ovde valja istaći da su učinjena dva ozbiljna pokušaja da se razvije p-adični diferencijalni pristup, koji bi bio analogon Šredingerovoj formulaciji standardne kvantne mehanike. Jedan je baziran na pseudodiferencijalnom operatoru Vladimirova [64], a drugi predstavlja razvoj Dragovićeve ideje [65,66] preko nešto izmenjenog zapisa operatora konačnih transformacija (4.2).

[29] Na $L_2(\mathbb{R})$ delovanje ovih operatora je definisano sa

$$U_q\psi(x) = \psi(x+q), \;\; V_k\psi(x) = e^{ikx/\hbar}\psi(x),$$

dok komutaciona relacija poprima oblik

$$V_kU_q = e^{ikx/\hbar}U_qV_k.$$

Nepovezanost polja p-adičnih brojeva predstavlja prepreku[30] i prilikom definisanja dinamike u p-adičnoj kvantnoj mehanici. Ovde valja istaći da se, kao i u standardnoj kvantnoj mehanici, p-adična kvantna dinamika može dobiti generalizacijom klasične p-adične dinamike zadane delovanjem p-adične matrice klasične evolucije $T(t)$ [10,67] u odgovarajućem p-adičnom faznom prostoru[31]

$$T(t)\begin{pmatrix} q(0) \\ k(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q(0) \\ k(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

pri čemu matrice klasične evolucije za autonomne sisteme čine jednoparametarsku grupu

$$T(t')T(t'') = T(t'+t''). \tag{4.6}$$

Zadavanje kvantne p-adične dinamike preko operatora evolucije na standardan način

$$U(t)\psi(0) = \psi(t), \tag{4.7}$$

pri čemu bi operator evolucije bio izražen preko hamiltonijana

$$U(t) = e^{-\frac{2\pi i}{h}Ht}, \tag{4.8}$$

gde je $H(k,q)$ p-adični hamiltonijan, je osuđeno na neuspeh. Razlog za to je da hamiltonijan kao generator vremenskih translacija u p-adičnom slučaju nema smisla (isto važi i za operator impulsa kao generatora prostornih translacija zato što uzastopna primena infinitezimalnih transformacija nikada neće dati konačnu transformaciju).

Evolucioni operator za sada se jedino može zadati u integralnom obliku kao

$$U(t)\psi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}_t(x,y)\psi(y)dy. \tag{4.9}$$

[30] Kao što je nemoguće definisati nad $\mathbb{Q}_p$ impuls kao generator infinitezimalnih prostornih translacija, tako i kvantni hamiltonijan kao generator vremenskih translacija nema smisla.

[31] Sve veličine koje se pojavljuju: $q = q(t), k = k(t)$ kao i hamiltonijan $H(k,q)$ (koji treba konstruisati da bi se preko hamiltonovih jednačina dobile konačne jednačine kretanja) tretiramo kao analitičke funkcije u $\mathbb{Q}_p$.

U ovom izrazu je $\mathcal{K}_t(x,y)$ jezgro operatora evolucije $U(t)$, odnosno kvantno-mehanički propagator, koji je definisan Fejnmanovim funkcionalnim integralom

$$\mathcal{K}_t(x,y) = \int \chi_p\left(-\int_0^t L(\dot{q},q)dt\right)\prod_t dq(t), \tag{4.10}$$

pri čemu se intregracija vrši po klasičnim p-adičnim trajektorijama sa graničnim uslovima $q(0)=x,\;\; q(t)=y$, dok je $L(\dot{q},q)\in\mathbb{Q}_p$ p-adični lagranžijan, a integral od njega po vremenu je p-adično dejstvo[32] $S(t)$.

Operator evolucije zadovoljava grupno svojstvo $U(t')U(t'') = U(t'+t'')$, koje izraženo preko jezgra[33] glasi

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}_{t'}(x,y)\mathcal{K}_{t''}(y,z)dy = \mathcal{K}_{t'+t''}(x,z). \tag{4.11}$$

Na taj način dinamika p-adičnih kvantnih sistema se svodi na rešavanje svojstvenog problema operatora evolucije

$$U(t)\psi_{\alpha\beta}(x) = \chi_p(E_\alpha t)\psi_{\alpha\beta}(x), \tag{4.12}$$

pri čemu je E_α p-adična energija a indeksi α i β označavaju energijske nivoe i njihovu degeneraciju, respektivno.

U suštini, p-adična kvantna mehanika je zadata trojkom

$$(L_2(\mathbb{Q}_p), W(z), U(t)) \tag{4.13}$$

pri čemu je $L_2(\mathbb{Q}_p)$ Hilbertov prostor kompleksnih kvadratno integrabilnih fukcija nad poljem p-adičnih brojeva, $W(z)$ unitarna reprezentacija Hajzenberg-Vejlove grupe, a $U(t)$ je unitarna reprezentacija evolucionog operatora na $L_2(\mathbb{Q}_p)$.

---

[32]Integral $\int_0^t L(\dot{q},q)dt = S(t)$ treba shvatiti kao operaciju inverznu operaciji diferenciranja.
[33]Valja podvući da t' i t'' moraju da pripadaju oblasti konvergencije analitičkih funkcija koje ulaze u jezgro operatora evolucije.

4.2 Fejnmanovi funkcionalni integrali i standardna kvantna mehanika

Fizičari su familijarni sa standardnim formulacijama kvantne mehanike, koju su razvili manje-više istovremeno Šredinger, Hajzenberg i drugi dvadesetih godina ovog veka, za koje je pokazano da su ekvivalentne.

Dirak je 1933. godine primetio da bi dejstvo (smatrajući Lagranževu formulaciju fundamentalnijom od Hamiltonove), koje inače igra centralnu ulogu u klasičnoj mehanici, trebalo da ima važnu ulogu i u kvantnoj mehanici. On je razmišljajući kako da se "popravi" ta situacija došao do zaključka da je kvantno-mehanički propagator proporcionalan veličini $\exp(iS/\hbar)$, gde je S dejstvo izračunato duž klasičnog puta [68].

Fejnman je 1942. godine dalje razvio ovu Dirakovu ideju, i uspeo da zasnuje treću formulaciju kvantne mehanike, baziranu na činjenici da propagator može da se napiše kao suma preko svih mogućih puteva[34] (ne samo klasičnog) između inicijalne i finalne tačke sistema [69,70]. Svaka putanja prema Fejnmanu daje doprinos propagatoru proporcionalan $\exp(iS/\hbar)$. I dok je Dirak razmatrao jedino klasičan put, Fejnman je pokazao da svi putevi doprinose propagatoru, u smislu da kvantna čestica "ide" svim putevima, pri čemu se amplitude pojedinih puteva sabiraju u skladu sa uobičajenim kvantno-mehaničkim pravilima za sabiranje amplituda

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \sum_{(x',t') \to (x'',t'')} e^{\frac{i}{\hbar} S}. \tag{4.14}$$

U okviru standardne kvantne mehanike ovaj prilaz nije dao neke dramatično nove rezultate (bar kad se radi o kvantnoj mehanici jedne čestice) pa zato i nije sadržan u uobičajenom univerzitetskom kursu kvantne mehanike. Naime ispostavlja se da sve što može da se izračuna preko integrala po trajektorijama, može da se dobije i

[34] Interesantno je napomenuti da Fejnmanov rad u kome je izneo osnovne postavke njegove formulacije kvantne mehanike nije bio prihvaćen za publikovanje u časopisu Physical Review.

pomoću Šredingerove jednačine ili pak preko operatorskog formalizma, i to obično prostije i brže. Osim nesumnjivog uspeha ovog formalizma u kvantnoj teoriji polja, ima dosta indicija da on može dosta da doprinese boljem razumevanju i zasnivanju kvantne mehanike[35].

Integral po trajektorijama ima prostu intuitivnu interpretaciju: Integracija po svim putevima odgovara sumiranju po svim "istorijama" koje sistem može da ima. Eksponencijalni deo u izrazu (4.14) je kvantni analogon Bolcmanovog faktora $e^{-E/(k_B T)}$ (k_B je Bolcmanova konstanta) u statističkoj mehanici pri čemu je umesto eksponencijalne verovatnoće, svakoj mogućoj istoriji pridružen čisto fazni faktor [71]. Sumiranje u izrazu (4.14) se vrši po svim putevim (istorijama) u konfiguracionom prostoru sa fiksiranom početnom i krajnjom tačkom.

Prema tome, može se uzeti da je jezgro evolucionog operatora $\mathcal{K}(x'', t''; x', t')$, koje odgovara amplitudi verovatnoće za kvantnu česticu koja se kreće iz prostorno-vremenske tačke (x', t') u tačku (x'', t''), zadato integralom po trajektorijama

$$\mathcal{K}(x'', t''; x', t') = \int_{(x',t')}^{(x'',t'')} \chi_\infty \left(-\frac{1}{h} S[q] \right) \mathcal{D}q. \tag{4.15}$$

U ovom izrazu je $S[q] = \int_{t'}^{t''} L(q, \dot{q}, t) dt$ dejstvo a $x'' = q(t'')$ i $x' = q(t')$, dok je sa $\chi_\infty(x)$ označen aditivni karakter nad poljem realnih brojeva definisan relacijom (2.13). Integral u (4.15) treba shvatiti kao simbol[36] koji podrazumeva da se kvantna čestica može kretati između x' i x'' koristeći neprebrojivo mnogo putanja koje povezuju ove dve tačke. Ovo znači da integral po trajektorijama predstavlja

[35] Kao prvo, Fejnmanov prilaz kvantnoj mehanici, "obezbeđuje" intuitivno razumevanje ove teorije, naime svako ko razume Jungov eksperiment iz optike, razumeće obavezno osnovne ideje koje su u osnovi integrala po trajektorijama. Kao drugo, ispostavilo se da klasičan limes kvantne mehanike može da se najbolje razume preko integrala po trajektorijama.

[36] U praktičnim izračunavanjima integral po trajektorijama je granična vrednost običnog višestrukog integrala koji se dobija deljenjem vremenskog intervala $t'' - t'$ na N jednakih podintervala kada N teži beskonačnosti.

kontinualno sumiranje amplitude $\chi_\infty\left(-\frac{1}{h}S[q]\right)$ po svim putanjama $q(t)$ koje spajaju x' i x''.

Jezgro, definisano sa (4.15) mora da zadovoljava sledeća tri opšta uslova [70]

$$\mathcal{K}(x'',t'';x',t') = \int_{\mathbb{Q}_\infty} \mathcal{K}(x'',t'';x,t)\mathcal{K}(x,t;x',t')dx, \tag{4.16}$$

$$\int_{\mathbb{Q}_\infty} \mathcal{K}^*(x'',t'';x',t')\mathcal{K}(z,t'';x',t')dx' = \delta(x''-z), \tag{4.17}$$

$$\mathcal{K}(x'',t;x',t) = \delta(x''-x'). \tag{4.18}$$

Dalja istraživanja u oblasti integrala po trajektorijama, pokazala su 1951. godine [72] da, za sisteme sa kvadratičnim klasičnim dejstvom $\bar{S}(x'',t'';x',t')$ u odnosu na početnu i krajnju tačku putanje x' i x'', jezgro evolucionog operatora ima oblik

$$\mathcal{K}(x'',t'';x',t') = \left(\frac{i}{h}\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial x'}\right)^{1/2}\chi_\infty\left(-\frac{1}{h}\bar{S}(x'',t'';x',t')\right), \tag{4.19}$$

ukoliko se čestica kreće u jednoj dimenziji, odnosno

$$\mathcal{K}(x'',y'',t'';x',y',t')$$

$$= \frac{1}{ih}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial x'} & \frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial y'} \\ \frac{\partial^2\bar{S}}{\partial y''\partial x'} & \frac{\partial^2\bar{S}}{\partial y''\partial y'} \end{vmatrix}^{1/2}\chi_\infty\left(-\frac{1}{h}\bar{S}(x'',y'',t'';x',y',t')\right), \tag{4.20}$$

ukoliko se čestica kreće u dve dimenzije.

Važan korak u izvođenju ovih izraza osim osobina (4.16-4.18) je takozvana Fejnmanova teorema [70,73,74] prema kojoj integral po trajektorijama, za sisteme sa kvadratičnim dejstvom u proizvoljnom broju dimenzija, je proizvod dva faktora

$$\mathcal{K}(\vec{r}'',t'';\vec{r}',t') = N(t'',t')\chi_\infty\left(-\frac{1}{h}\bar{S}(\vec{r}'',t'';\vec{r}',t')\right), \tag{4.21}$$

od kojih prvi $N(t'',t')$, ne zavisi ni od početne ni od krajnje tačke.

4.3 Fejnmanovi funkcionalni integrali i p-adična kvantna mehanika

Već je u prethodnom poglavlju napomenuto da u p-adičnoj kvantnoj mehanici ne postoji dinamička diferencijalna jednačina, koja bi igrala ulogu Šredingerove jednačine iz standardne kvantne mehanike, pa se kvantna dinamika zadaje preko jezgra operatora evolucije (4.9). Zato je od interesa razmotriti dobijanje jednog opšteg izraza za oblik ovog jezgra kao što je to slučaj u standardnoj kvantnoj mehanici ((4.19) i (4.20)). U referencama [35,37,75] Đorđević i Dragović su pokazali da, ukoliko se pođe od pretpostavke da je za jednodimenzionalan sistem sa kvadratičnim dejstvom, p-adično jezgro operatora evolucije oblika[37]

$$\mathcal{K}_p(x'',t'';x',t') = N_p(t'',t')\chi_p\left(-\bar{S}(x'',t'';x',t')\right), \tag{4.22}$$

koristeći osobine (4.16-4.18) (koje važe i u p-adičnom slučaju), za rešenje p-adičnog integrala po trajektorijama tipa (4.15) se dobija

$$\mathcal{K}_p(x'',t'';x',t')$$
$$= \lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial x'}\right)\left|\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial x'}\right|_p^{1/2}\chi_p\left(-\bar{S}(x'',t'';x',t')\right). \tag{4.23}$$

Postavilo se logično pitanje da li se ovaj rezultat može generalizovati na proizvoljan broj dimenzije, odnosno da li se može dobiti formula koja bi bila na primer p-adični analogon formule (4.20). Sistemi sa kvadratičnim dejstvom, odnosno lagranžijanom, u arbitrarnom broju dimenzija prostora su posebno značajni iz dva razloga. Prvi je što su oni u Fejnmanovom formalizmu egzaktno rešivi, a drugi što kao takvi predstavljaju putokaz za rešavanje nekvadratičnih sistema u semiklasičnoj aproksimaciji. Razmotrićemo dakle dvodimenzionalne sisteme sa lagranžijanom $L(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t)$, kvadratičnim po $q_1,q_2,\dot{q}_1,\ \dot{q}_2$, odnosno sa klasičnim dejstvom $\bar{S}(x'',y'',t'';x',y',t')$, kvadratičnim po početnim odnosno krajnjim tačkama putanja x',y', x'' i y''. Cilj je dakle da se dobije rešenje integrala po trajektorijama

$$\mathcal{K}_p(x'',y'',t'';x',y',t')$$

[37] U daljem radu će za vrednost Plankove konstante biti uzimano $h=1$, kao što je već učinjeno u trećoj glavi.

$$= \int_{(x',y',t')}^{(x'',y'',t'')} \chi_p \left(- \int_{t'}^{t''} L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) dt \right) \mathcal{D}q_1 \mathcal{D}q_2, \qquad (4.24)$$

pri čemu bi to rešenje trebalo da ima oblik

$$\mathcal{K}_p(x'', y'', t''; x', y', t') = N_p(t'', t') \chi_p \left(-\bar{S}(x'', y'', t''; x', y', t') \right). \qquad (4.25)$$

Analitička rešenja p-adičnih Ojler-Lagranževih jednačina (imaju istu formu kao i standardne) daju klasičnu p-adičnu trajektoriju $\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)$, dok je odgovarajuće klasično dejstvo

$$S[\bar{q}_1, \bar{q}_2] = \bar{S}(x'', y'', t''; x', y', t') = \int_{t'}^{t''} L(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dot{\bar{q}}_1, \dot{\bar{q}}_2, t) dt, \quad (4.26)$$

uz

$$x'' = \bar{q}_1(t''), \;\; y'' = \bar{q}_2(t''), \;\; x' = \bar{q}_1(t'), \;\; y' = \bar{q}_2(t'). \qquad (4.27)$$

Moguća kvantna putanja $q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t)$ se dobija variranjem klasične p-adične trajektorije kao $q_1(t) = \bar{q}_1(t) + h_1(t), q_2(t) = \bar{q}_2(t) + h_2(t)$, uz uslove $h_1(t'') = h_2(t'') = h_1(t') = h_2(t') = 0$.

Obzirom da je klasična putanja odredjena uslovom da je prva varijacija dejstva duž nje jednaka nuli, kvadratična dejstva se mogu predstaviti razvojem

$$S[q_1, q_2] = S[\bar{q}_1 + h_1, \bar{q}_2 + h_2]$$

$$= S[\bar{q}_1, \bar{q}_2] + \frac{1}{2!} \delta^2 S[\bar{q}_1, \bar{q}_2] = S[\bar{q}_1, \bar{q}_2]$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t'}^{t''} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \dot{h}_1 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} + \dot{h}_2 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \right)^{(2)} L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) dt. \qquad (4.28)$$

Zamenjujući ovaj razvoj za dejstvo u izraz (4.24) kao i $\mathcal{D}q_1$ i $\mathcal{D}q_2$ sa $\mathcal{D}h_1$ i $\mathcal{D}h_2$, jezgro operatora evolucije se može zapisati u obliku

$$\mathcal{K}_p(x'', y'', t''; x', y', t') = \chi_p \left(-S[\bar{q}_1, \bar{q}_2] \right)$$

$$\times \int_{(0,t')}^{(0,t'')} \chi_p \left(-\frac{1}{2} \int_{t'}^{t''} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \dot{h}_1 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} + \dot{h}_2 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \right)^{(2)} L dt \right) \mathcal{D}h_1 \mathcal{D}h_2, \tag{4.29}$$

odakle se vidi da integral po trajektorijama h_1 i h_2 u ovom izrazu ne zavisi od početne i krajnje tačke[38]. Uporedjivanjem ovog izraza i izraza (4.25) vidi se da je normalizacioni faktor zapravo jednak integralu po trajektorijama u (4.29). Direktno izračunavanje integrala je takođe moguće, međutim ispostavlja se da je za dobijanje normalizacionog faktora jednostavnije iskoristiti dvodimenzionalni analogon uslova unitarnosti (4.17)

$$\int_{\mathbb{Q}_\infty} \int_{\mathbb{Q}_\infty} \mathcal{K}^*(x'', y'', t''; x', y', t') \mathcal{K}(u, v, t''; x', y', t') dx' dy'$$
$$= \delta(x'' - u)\delta(y'' - v), \tag{4.30}$$

za jezgro operatora evolucije prema kome je

$$|N_p(t'', t')|_\infty^2 \int_{\mathbb{Q}_p^2} \chi_p \left[S(x'', y'', t''; x', y', t') - S(u, v, t''; x', y', t') \right] dx' dy'$$
$$= \delta_p(x'' - u)\delta_p(y'' - v). \tag{4.31}$$

Kako je razvoj kvadratičnog klasičnog dejstva u dve dimenzije

$$S(x'', y'', t''; x', y', t') = \bar{S}(0, 0, t''; 0, 0, t')$$
$$+ \left(x'' \frac{\partial}{\partial x''} + x' \frac{\partial}{\partial x'} + y'' \frac{\partial}{\partial y''} + y' \frac{\partial}{\partial y'} \right) \bar{S}(0, 0, t''; 0, 0, t')$$
$$+ \frac{1}{2!} \left(x'' \frac{\partial}{\partial x''} + x' \frac{\partial}{\partial x'} + y'' \frac{\partial}{\partial y''} + y' \frac{\partial}{\partial y'} \right)^{(2)} \bar{S}(0, 0, t''; 0, 0, t'), \tag{4.32}$$

[38] Pošto se slična procedura može sprovesti u proizvoljnom broju dimenzija, znači da se ovakav iskaz, koji se u standardnoj kvantnoj mehanici naziva Fejnmanova teorema, može generalizovati i na p-adične integrale po putanjama.

razlika dejstava pod karakterom (4.31) se svodi na

$$S(x'',y'',t'';x',y',t')-S(u,v,t'';x',y',t')=(x''-u)\frac{\partial\bar{S}}{\partial u}+(y''-v)\frac{\partial\bar{S}}{\partial v}$$

$$+\frac{1}{2}[(x'')^2-u^2]\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial u^2}+\frac{1}{2}[(y'')^2-v^2]\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial v^2}+(x''y''-uv)\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial y''}$$

$$+\left[(x''-u)\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial x'}+(y''-v)\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial y'}\right]x'$$

$$+\left[(x''-u)\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial y'}+(y''-v)\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial y''\partial y'}\right]y'. \tag{4.33}$$

Nakon integracije po x' i y' dobija se

$$|N_p(t'',t')|_\infty^2\chi_p\left((x''-u)\frac{\partial\bar{S}}{\partial u}+(y''-v)\frac{\partial\bar{S}}{\partial v}\right)$$

$$\times\chi_p\left(\frac{1}{2}[(x'')^2-u^2]\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial u^2}+\frac{1}{2}[(y'')^2-v^2]\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial v^2}\right)$$

$$\chi_p\left((x''y''-uv)\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial y''}\right)$$

$$\times\delta_p\left((x''-u)\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial x'}+(y''-v)\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial y''\partial x'}\right)$$

$$\delta_p\left((x''-u)\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial y'}+(y''-v)\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial y''\partial y'}\right)$$

$$=\delta_p(x''-u)\delta_p(y''-v). \tag{4.34}$$

Za karaktere u ovom izrazu (obzirom da se množe δ_p funkcijama) se može uzeti da su jednaki jedinici, a za δ_p funkcije (obzirom da one pravi smisao imaju ukoliko se uzimaju da stoje pod integralom i deluju na neku funkciju) koje stoje sa leve strane se može (očiglednim smenama) pokazati sledeći niz jednakosti

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\int_{\mathbb{Q}_p}f(x,y)\delta_p(ax+by)\delta_p(cx+dy)dxdy$$

$$= \frac{1}{|a|_p}\int_{\mathbb{Q}_p}\int_{\mathbb{Q}_p} f\left(\frac{z-by}{a}, y\right)\delta_p(z)\delta_p\left(c\frac{z-by}{a}+dy\right)dzdy$$

$$= \frac{1}{|a|_p}\int_{\mathbb{Q}_p} f\left(-\frac{b}{a}y, y\right)\delta_p\left(-\frac{bc}{a}y+dy\right)dy$$

$$= \frac{1}{|a|_p}\int f\left(-\frac{b}{a}\frac{a}{ad-bc}t, \frac{a}{ad-bc}t\right)\delta_p(t)\frac{|a|_p}{|ad-bc|_p}dt$$

$$= \frac{1}{|ad-bc|_p}f(0,0), \tag{4.35}$$

što je adekvatno delovanju $\delta_p(x)\delta_p(y)$ na funkciju $f(x,y)$.

Iz svega ovoga sledi da je

$$|N_p(t'',t')|_\infty = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x''\partial x'} & \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x''\partial y'} \\ \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial y''\partial x'} & \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial y''\partial y'} \end{vmatrix}_p^{1/2}. \tag{4.36}$$

Na ovom mestu vredi napomenuti da za trodimenzioni sistem važi

$$|N_p(t'',t')|_\infty = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x''\partial x'} & \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x''\partial y'} & \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x''\partial z'} \\ \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial y''\partial x'} & \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial y''\partial y'} & \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial y''\partial z'} \\ \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial z''\partial x'} & \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial z''\partial y'} & \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial z''\partial z'} \end{vmatrix}_p^{1/2} \tag{4.37}$$

(dokaz je potpuno analogan ali zbog glomaznosti nije naveden). Za kompletno određivanje faktora $N_p(t'',t')$, obzirom da on može da se zapiše kao

$$N_p(t'',t') = |N_p(t'',t')|_\infty A_p(t'',t'), \tag{4.38}$$

potrebno je poznavati i njegovu fazu $A_p(t'',t')$. Faza $A_p(t'',t')$ je kompleksna funkcija od t'' i $t' \in \mathbb{Q}_p$ sa osobinom $|A_p(t'',t')|_\infty = 1$. U slučaju nekuplovanih promenljivih q_1 i q_2, lagranžijan sistema (kvadratičan po promenljivima) može da se napiše u vidu razvoja

$$L(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t)$$

$$= L_0 + \frac{\partial L_0}{\partial q_1}q_1 + \frac{\partial L_0}{\partial q_2}q_2 + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_1^2}q_1^2 + \frac{\partial^2 L_0}{\partial q_1 \partial \dot{q}_1}q_1\dot{q}_1$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{q}_1^2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_2^2}q_2^2 + \frac{\partial^2 L_0}{\partial q_2 \partial \dot{q}_2}q_2\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{q}_2^2}\dot{q}_2^2 \tag{4.39}$$

(indeks 0 označava da se razvoj vrši oko nule). Iz ovakvog izraza za lagranžijan slede jednačine kretanja:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{q}_1^2}\dot{q}_1\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_1 \partial \dot{q}_1}\right)q_1-\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_1^2}q_1=\frac{\partial L_0}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_1}\right),$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{q}_2^2}\dot{q}_2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_2 \partial \dot{q}_2}\right)q_2-\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_2^2}q_2=\frac{\partial L_0}{\partial q_2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_2}\right), \tag{4.40}$$

koje imaju opšte rešenje oblika

$$\bar{q}_1 = x(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + X(t),$$
$$\bar{q}_2 = y(t) = C_3 f_3(t) + C_4 f_4(t) + Y(t), \tag{4.41}$$

gde su C_1, C_2, C_3 i C_4 konstante, $f_1(t)$ i $f_2(t)$ partikularna rešenja homogenog dela prve jednačine $f_3(t)$ i $f_4(t)$ partikularna rešenja homogenog dela druge jednačine, a $X(t)$ i $Y(t)$ su partikularna rešenja nehomogenih jednačina (4.41). Konstante $C_i, i = 1,2,3,4$ se odredjuju iz uslova $x' = x(t')$, $x'' = x(t'')$, $y' = y(t')$, $y'' = y(t'')$. Ukoliko se za $f_1(t)$ uzme proizvoljno partikularno rešenje homogenog dela prve diferencijalne jednačine, onda je automatski time određeno i drugo partikularno rešenje relacijom

$$f_2(t) = f_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0(\tau)}{\partial \dot{q}_1^2}f_1^2(\tau)}, \tag{4.42}$$

(t_0 je proizvoljna donja granica integrala) odakle je lako pokazati da je Vronskijan za ta dva rešenja

$$W[f_1(t), f_2(t)] = 2\left(\frac{\partial^2 L_0(t)}{\partial \dot{q}_1^2}\right)^{-1}. \tag{4.43}$$

Potpuno je analogna situacija i sa drugom diferencijalnom jednačinom, dakle kad se jednom izabere $f_3(t)$, onda su drugo partikularno rešenje i Vronskijan:

$$f_4(t) = f_3(t)\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0(\tau)}{\partial \dot{q}_2^2}f_3^2(\tau)}, \tag{4.44}$$

$$W[f_3(t), f_4(t)] = 2\left(\frac{\partial^2 L_0(t)}{\partial \dot{q}_2^2}\right)^{-1}. \tag{4.45}$$

Partikularna rešenja diferencijalnih jednačina (4.40) su

$$X(t) = f_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{f_1^2(\tau)\frac{\partial^2 L_0(\tau)}{\partial \dot{q}^2}} \int_{t_0}^{\tau}\left[\frac{\partial L_0(\tau')}{\partial q} - \frac{d}{d\tau'}\left(\frac{\partial L_0(\tau')}{\partial \dot{q}}\right)\right] f_1(\tau')d\tau',$$

$$X(t) = f_3(t)\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{f_3^2(\tau)\frac{\partial^2 L_0(\tau)}{\partial \dot{q}^2}} \int_{t_0}^{\tau}\left[\frac{\partial L_0(\tau')}{\partial q} - \frac{d}{d\tau'}\left(\frac{\partial L_0(\tau')}{\partial \dot{q}}\right)\right] f_3(\tau')d\tau'. \tag{4.46}$$

Ukoliko se imaju u vidu jednačine kretanja (4.40) lagranžijan se može zapisati na sledeći način

$$\begin{aligned} L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, q_1, q_2, t) = {} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{q}_1^2}\dot{q}_1 q_1\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_1 \partial \dot{q}_1} q_1^2\right) \\ & + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{q}_2^2}\dot{q}_2 q_2\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_2 \partial \dot{q}_2} q_2^2\right) \\ & + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_1} q_1\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial L_0}{\partial q_1} q_1\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_2} q_2\right) \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial L_0}{\partial q_2} q_2\right] + L_0, \end{aligned} \tag{4.47}$$

tako da je klasično dejstvo jednako

$$\begin{aligned} \bar{S}(x'', y'', t''; x', y', t') = {} & \int_{t'}^{t''} L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t)dt \\ = {} & \frac{1}{2}\left[x\dot{x}\frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{q}_1^2} + x^2\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_1 \partial \dot{q}_1}\right]_{t'}^{t''} + \frac{1}{2}\left[y\dot{y}\frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{q}_2^2} + y^2\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_2 \partial \dot{q}_2}\right]_{t'}^{t''} \\ & + S_{lin}(x'', y'', t''; x', y', t') \end{aligned} \tag{4.48}$$

(gde sabirak S_{lin}, na linearan način zavisi od x'', y'', x' i y'), odnosno

$$\bar{S}(x'', y'', t''; x', y', t')$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_1 \partial q_1} + \frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{f_1' \dot{f}_2'' - f_2' \dot{f}_1''}{\Delta_x(t'', t')}\right] x''^2$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{f_1''\dot{f}_2'-f_2''\dot{f}_1'}{\Delta_x(t'',t')}-\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_1\partial q_1}\right]x'^2$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{f_2''\dot{f}_1''-f_1''\dot{f}_2''}{\Delta_x(t'',t')}-\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{f_1'\dot{f}_2'-f_2'\dot{f}_1'}{\Delta_x(t'',t')}\right]x''x'$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_2\partial q_2}+\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_2^2}\frac{f_3'\dot{f}_4''-f_4'\dot{f}_3''}{\Delta_y(t'',t')}\right]y''^2$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_2^2}\frac{f_3''\dot{f}_4'-f_4''\dot{f}_3'}{\Delta_y(t'',t')}-\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_2\partial q_2}\right]y'^2$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_2^2}\frac{f_4''\dot{f}_3''-f_3''\dot{f}_4''}{\Delta_y(t'',t')}-\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_2^2}\frac{f_3'\dot{f}_4'-f_4'\dot{f}_3'}{\Delta_y(t'',t')}\right]y''y'+S_{lin}. \tag{4.49}$$

Veličine $\Delta_x(t'',t')$ i $\Delta_y(t'',t')$ koje se pojavljuju u ovom izrazu se definisane kao

$$\Delta_x(t'',t')=f_2''f_1'-f_1''f_2',\quad \Delta_y(t'',t')=f_4''f_3'-f_3''f_4'. \tag{4.50}$$

Iz jednačine (4.49) proističu sledeće važne relacije za izvode klasičnog dejstva po x'', y'', x' i y':

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x''^2}=\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_1\partial q_1}+\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{f_1'\dot{f}_2''-f_2'\dot{f}_1''}{\Delta_x(t'',t')}, \tag{4.51}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x'^2}=\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{f_1''\dot{f}_2'-f_2''\dot{f}_1'}{\Delta_x(t'',t')}-\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_1\partial q_1}, \tag{4.52}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x''\partial x'}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{f_2''\dot{f}_1''-f_1''\dot{f}_2''}{\Delta_x(t'',t')}-\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{f_1'\dot{f}_2'-f_2'\dot{f}_1'}{\Delta_x(t'',t')}\right]$$

$$=-\frac{2}{\Delta_x(t'',t')}, \tag{4.53}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial y''^2}=\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_2\partial q_2}+\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_2^2}\frac{f_3'\dot{f}_4''-f_4'\dot{f}_3''}{\Delta_y(t'',t')}, \tag{4.54}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_2^2}\frac{f_3''\dot{f}_4'-f_4''\dot{f}_3'}{\Delta_y(t'',t')}-\frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_2\partial q_2}, \tag{4.55}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial y'' \partial y'} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 L_0(t'')}{\partial \dot{q}_2^2}\frac{f_4'' \dot{f}_3'' - f_3'' \dot{f}_4''}{\Delta_y(t'',t')} - \frac{\partial^2 L_0(t')}{\partial \dot{q}_2^2}\frac{f_3' \dot{f}_4' - f_4' \dot{f}_3'}{\Delta_y(t'',t')}\right]$$
$$= -\frac{2}{\Delta_y(t'',t')}. \tag{4.56}$$

Pišući faktor koji stoji ispred karaktera u izrazu za jezgro (4.25) u obliku (4.38) i vršeći integraciju

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\int_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}_p(x'',y'',t'';x,y,t)\mathcal{K}_p(x,y,t;x',y',t')dxdy$$
$$= \mathcal{K}_p(x'',y'',t'';x',y',t') \tag{4.57}$$

vidi se da mora da važi jednakost

$$A_p(t'',t)A_p(t,t')\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}_0(t'',t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}_0(t,t')}{\partial x^2}\right)$$
$$\times\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}_0(t'',t)}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}_0(t,t')}{\partial y^2}\right) = A_p(t'',t'). \tag{4.58}$$

Prema relacijama (4.51), (4.52), (4.54) i (4.55) se dobija da je

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}_0(t'',t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}_0(t,t')}{\partial x^2} = -\frac{\Delta_x(t'',t')}{\Delta_x(t'',t)\Delta_x(t,t')},$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}_0(t'',t)}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}_0(t,t')}{\partial y^2} = -\frac{\Delta_y(t'',t')}{\Delta_y(t'',t)\Delta_y(t,t')}. \tag{4.59}$$

Ukoliko pretpostavimo da je $A_p(t'',t')$ proizvod dva faktora oblika

$$A_p(t'',t') = \lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}(t'',t')}{\partial x'' \partial x'}\right)\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}(t'',t')}{\partial y'' \partial y'}\right), \tag{4.60}$$

relacija (4.58) se može faktorisati na dve

$$\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}(t'',t)}{\partial x'' \partial x}\right)\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}(t,t')}{\partial x \partial x'}\right)\lambda_p\left(-\frac{\Delta_x(t'',t')}{\Delta_x(t'',t)\Delta_x(t,t')}\right)$$
$$= \lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{S}(t'',t')}{\partial x'' \partial x'}\right), \tag{4.61}$$

$$\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{S}(t'',t)}{\partial y''\partial y}\right)\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{S}(t,t')}{\partial y\partial y'}\right)\lambda_p\left(-\frac{\Delta_y(t'',t')}{\Delta_y(t'',t)\Delta_y(t,t')}\right)$$
$$=\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{S}(t'',t')}{\partial y''\partial y'}\right). \qquad (4.62)$$

Sada treba proveriti da li je pretpostavka za oblik $A_p(t'',t')$ definisana relacijom (4.60) dobra, to jest da li zaista važi znak jednakosti u poslednje dve relacije. Zbog toga što obe imaju isti oblik dovoljno je proveriti samo jednu. Imajući u vidu izraz za mešoviti parcijalni izvod klasičnog dejstva (4.53) leva strana relacije (4.61) postaje

$$\lambda_p\left(\frac{1}{f_2''f_1-f_1''f_2}\right)\lambda_p\left(\frac{1}{f_2f_1'-f_1f_2'}\right)$$
$$\times\lambda_p\left(-\frac{f_2''f_1'-f_1''f_2'}{(f_2''f_1-f_1''f_2)(f_2f_1'-f_1f_2')}\right). \qquad (4.63)$$

Rešenja jednačina kretanja su analitičke funkcije, dakle predstavljene su u obliku konvergentnih redova[39]

$$f_1(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots, \qquad (4.64)$$

$$f_2(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+\ldots. \qquad (4.65)$$

Odavde se sada lako pokazuje da važi

$$f_2''f_1'=(b_0+b_1t''+b_2t''^2+\ldots)(a_0+a_1t'+a_2t'^2+\ldots)$$
$$=a_0b_0+a_1b_0t'+a_0b_1t''+a_2b_0t'^2+b_1a_1t''t'+b_2a_0t''^2+\cdots \qquad (4.66)$$

i

$$f_1''f_2'=(a_0+a_1t''+a_2t''^2+\ldots)(b_0+b_1t'+b_2t'^2+\ldots)$$
$$=a_0b_0+a_1b_0t''+a_0b_1t'+a_0b_2t'^2+a_1b_1t''t'+a_2b_0t''^2+\cdots \qquad (4.67)$$

odakle sledi

$$f_2''f_1'-f_1''f_2'=(b_0a_1-a_0b_1)t'+(b_1a_0-a_1b_0)t''$$
$$+(b_0a_2-a_0b_2)t'^2+(b_2a_0-a_2b_0)t''^2+\cdots$$

[39] Razvoji su urađeni do drugog reda zbog slučaja $p=2$.

$$= (b_1a_0 - a_1b_0)(t'' - t') + (b_2a_0 - a_2b_0)(t''^2 - t'^2) + \cdots, \qquad (4.68)$$

kao i analogne relacije

$$f_2''f_1 - f_1f_2'' = (b_1a_0 - a_1b_0)(t'' - t) + (b_2a_0 - a_2b_0)(t''^2 - t^2) + \cdots, \qquad (4.69)$$

$$f_2f_1' - f_1f_2' = (b_1a_0 - a_1b_0)(t - t') + (b_2a_0 - a_2b_0)(t^2 - t'^2) + \cdots. \qquad (4.70)$$

Ako sada ove izraze zamenimo u izraz (4.63) na osnovu osobina λ_p funkcije (2.17) i (2.18) se lako pokazuje da važi

$$\lambda_p\left(\frac{1}{f_2''f_1 - f_1''f_2}\right)\lambda_p\left(\frac{1}{f_2f_1' - f_1f_2'}\right)$$

$$\times\lambda_p\left(-\frac{f_2''f_1' - f_1''f_2'}{(f_2''f_1 - f_1''f_2)(f_2f_1' - f_1f_2')}\right)$$

$$= \lambda_p\left(\frac{1}{(b_1a_0 - a_1b_0)(t'' - t') + (b_2a_0 - a_2b_0)(t''^2 - t'^2)}\right) \qquad (4.71)$$

što upravo i jeste jednako $\lambda_p\left(\frac{1}{\Delta_x(t'',t')}\right)$, odnosno $\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{S}(t'',t')}{\partial x''\partial x'}\right)$.

Konačno jezgro operatora evolucije u p-adičnoj kvantnoj mehanici, za sistem sa dve nekuplovane promenljive, je dato relacijom

$$\mathcal{K}_p(x'',y'',t'';x',y',t') = \lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{S}(t'',t')}{\partial x''\partial x'}\right)\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{S}(t'',t')}{\partial y''\partial y'}\right)$$

$$\times\left|\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x''\partial x'}\right|_p^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial y''\partial y'}\right|_p^{\frac{1}{2}}\chi_p\left(-\bar{S}(x'',y'',t'';x',y',t')\right). \qquad (4.72)$$

4.4 Adelična kvantna mehanika

Nakon uspešnog formulisanja p-adične kvantne mehanike, postavilo se pitanje njene veze sa standardnom kvantnom mehanikom. Ideja da bi one mogle biti u nekakvoj vezi, svoj začetak ima u tome što su već postojale veze p-adičnih i realnih veličina u obliku adelnih formula (pogledati relacije (2.19), (2.20) i (2.21)). Još jedan od razloga su problemi oko interpretacije rezultata p-adične kvantne mehanike u okviru same p-adične teorije. Ispostavilo se da je uspešno formulisanje adelične kvantne mehanike, odnosno kvantne mehanike nad adelima dalo neka vrlo značajna predviđanja o strukturi prostor-vremena [32,33].

I kao što je formulisanje klasične mehanike nad poljem $\mathbb{Q}_p$ bio samo međukorak ka zasnivanju p-adične kvantne mehanike, tako se prvo mora definisati klasična adelična mehanika. U glavi 1 je već definisan adelični prostor. Evolucija fazne tačke u adeličnom faznom prostoru $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ zadaje se adeličnom matricom klasične evolucije T u obliku:

$$T(t) \begin{pmatrix} q(0) \\ k(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ k(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix}, \tag{4.73}$$

gde je t adelično vreme $t = (t_\infty, t_2, \ldots, t_p, \ldots)$, $q(t)$ i $k(t)$ su adelična koordinata i impuls a $T = (T_\infty, T_2, \ldots, T_p, \ldots)$ predstavlja beskonačan niz 2×2 matrica, pri čemu svaka matrica T_v, $v = \infty, 2, 3, \ldots, p, \ldots$, deluje u odgovarajućem faznom prostoru. Za elemente T_{mn} p-adičnih matrica važi $|T_{mn}|_p \leq 1$, za sve osim za konačno mnogo prostih brojeva.

Ovde treba naglasiti da je adeličan klasičan dinamički sistem, takav sistem čije klasično kretanje se posmatra u topološkom prostoru $\mathcal{A}$, definisanom u 2.7. Zbog toga sve veličine koje zadaju jedan takav sistem moraju biti adelizirane, na primer hamiltonijan $H = (H_\infty, H_2, \ldots, H_p, \ldots)$ je adel ($H_v = H_v(k_v, q_v, t_v)$, $v = \infty, 2, \cdots,$), to jest važi da je $|H_p|_p \leq 1$ za skoro svako p.

Zbog nepovezanosti polja p-adičnih brojeva Vejlova kvantizacija se pokazala kao jedini način predstavljanja komutacionih relacija. Što se tiče standardne kvantne mehanike, i u okviru nje mi možemo primeniti Vejlovu kvantizaciju. Na tom jeziku standardna kvantna mehanika se može zadati kao trojka

$$(L_2(\mathbb{Q}_\infty), W_\infty(z_\infty), U_\infty(t_\infty)), \tag{4.74}$$

gde je $L_2(\mathbb{Q}_\infty)$ standardni Hilbertov prostor, z_∞ tačka realnog klasičnog faznog prostora, $W_\infty(z_\infty)$ unitarna reprezentacija Hajzenberg-Vejlove grupe na $L_2(\mathbb{Q}_\infty)$ i $U_\infty(t_\infty)$ unitarna reprezentaija evolucionog operatora na $L_2(\mathbb{Q}_\infty)$.

Prema [32,33], za sisteme čija se klasična dinamika može predstaviti sa (4.73), adelična kvantna mehanika se definiše kao trojka

$$(L_2(\mathcal{A}), W(z), U(t)), \tag{4.75}$$

gde je $\mathcal{A}$ aditivna grupa adela, z fazna tačka klasičnog adeličnog faznog prostora, t adelično vreme, $L_2(\mathcal{A})$ Hilbertov prostor nad $\mathcal{A}$, $W(z)$ unitarna reprezentacija Hajzenberg-Vejlove grupe na $L_2(\mathcal{A})$ a $U(t)$ unitarna reprezentacija evolucionog operatora na $L_2(\mathcal{A})$.

Po analogiji sa zadavanjem dinamike u p-adičnoj kvantnoj mehanici, adelična kvantna dinamika se zadaje delovanjem adeličnog operatora $U(t)$ na adeličnu talasnu funkciju

$$U(t'',t')\psi(x) = \prod_v U_v(t''_v,t'_v)\psi^{(v)}(x_v)$$

$$= \prod_v \int_{\mathbb{Q}_v} \mathcal{K}_v(x_v,t''_v,y_v,t'_v)\psi^{(v)}(y_v)dy_v, \tag{4.76}$$

pri čemu operator $U(t)$ i njegovo jezgro $\mathcal{K}$ zadovoljavaju standardne grupne relacije

$$U(t')U(t'') = U(t'+t''), \tag{4.77}$$

$$\int_{\mathcal{A}} \mathcal{K}_{t'}(x,y)\mathcal{K}_{t''}(y,z)dy = \mathcal{K}_{t'+t''}(x,z). \tag{4.78}$$

Treba naglasiti da ovaj izraz ne predstavlja prost proizvod izraza (4.10) i odgovarajućeg izraza za realan slučaj (4.16), koji bi podrazumevao integraciju nad celim $\mathbb{Q}_p$ za svako p. Takav proizvod ne bio bio u duhu adeličnog prilaza. Adelična integracija [76] znači da gornja relacija praktično sadrži samo konačno mnogo faktora različitih od

$$\mathcal{K}^{(p)}_{t'+t''}(x,y) = \int_{|z|_p\leq 1} \mathcal{K}^{(p)}_{t'}(x,z)\mathcal{K}^{(p)}_{t''}(z,y)dz. \tag{4.79}$$

Svojstveni problem adeličnog operatora evolucije[40] je

$$U(t)\psi_{\alpha\beta}(x) = \chi(E_\alpha t)\psi_{\alpha\beta}(x), \tag{4.80}$$

[40] Svojstveni problem operatora evolucije na određeni način zamenjuje svojstveni problem hamiltonijana iz standardne kvantne mehanike.

gde je $\psi_{\alpha\beta}(x)$ adelična svojstvena funkcija operatora evolucije, $E_\alpha = (E_\infty, E_2, \ldots, E_p, \ldots)$ adelična energija, $\alpha = (\alpha_\infty, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots)$ i $\beta = (\beta_\infty, \beta_2, \ldots, \beta_p, \ldots)$ su adelični indeksi koji označavaju energetske nivoe i njihovu degeneraciju.

Svojstveni problem je rešen ako znamo sve svojstvene vrednosti $\chi(E_\alpha t)$ i svojstvene funkcije $\psi_{\alpha\beta}(x)$. Adelična svojstvena stanja $\psi_{\alpha\beta}(x)$ su beskonačni proizvodi svojstvenih stanja iz odgovarajućih standardnih i p-adičnih modela

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \psi^{(\infty)}_{\alpha_\infty \beta_\infty}(x_\infty) \prod_{p \in M} \psi^{(p)}_{\alpha_p \beta_p}(x_p) \prod_{p \notin M} \Omega(|x_p|_p), \tag{4.81}$$

gde je M konačan skup prostih brojeva. Ovaj izraz znači da svaka adelična svojstvena funkcija sadrži samo konačno mnogo p-adičnih svojstvenih funkcija različitih od vakuumskog stanja $\Omega(|x_p|_p)$, što ujedno predstavlja i potreban uslov za adelizaciju fizičkog modela odnosno talasne funkcije koja mu se pripisuje[41].

Prema svemu izloženom standardna kvantna mehanika se može posmatrati kao aproksimacija jedne sveobuhvatnije, adelične teorije, na rastojanjima koja su veoma velika u odnosu na Plankovu dužinu. Da bi polazeći od adelične predikcije dobili standardnu, moramo kvadrat modula adelične talasne funkcije da integralimo po svim p-adičnim komponentama adeličnog prostora. Imajući u vidu da je $\int_{|x_p|_p \le 1} dx = 1$ i $\int_{\mathbb{Q}_p} |\psi_p(x_p, t_p|^2_\infty dx_p = 1$, dobija se [15]

$$\int_{\mathcal{A}\setminus\mathbb{Q}_\infty} |\psi(x,t)|^2_\infty dx = |\psi_\infty(x_\infty, t_\infty)|^2_\infty dx_\infty \prod_{p\in M} \int_{\mathbb{Q}_p} |\psi_p(x_p, t_p|^2_\infty dx_p$$
$$\times \prod_{p \notin M} \int_{\mathbb{Z}_p} \Omega(|x_p|_p dx_p = |\psi_\infty(x_\infty, t_\infty)|^2_\infty dx_\infty. \tag{4.82}$$

[41] Zato je nalaženje vakuumskih stanja od prvorazrednog značaja u konstruisanju svih adeličnih modela.

5. KOSMOLOŠKI MODELI U p-ADIČNOJ I ADELIČNOJ KVANTNOJ MEHANICI

Na početku četvrte glave već je navedeno kako se istorijski došlo do p-adične kvantne mehanike. Jednom kad je ona bila formulisana u potrazi za primenama došlo se i do kvantne kosmologije gde je postojao izvestan broj modela koji je obećavao da se nad njima može sprovesti uspešan p-adičan tretman. Takođe je izgledalo i da se sa manje ili više truda mogu svi adelizirati. Međutim, kao što to obično biva, posle određenih rezultata došlo je i do problema.

Već je rečeno da fizička osnova za ideju o invarijantnosti fundamentalnih fizičih zakona u odnosu na izmenu polja brojeva proističe iz jednog rezultata kvantne gravitacije u vezi sa ograničenjem na tačnost merenja. Na osnovu kvantne gravitacije se razvila i odgovarajuća kvantna kosmologija. Reči "kvantna" i "kosmologija", izgledaju možda inheretno nekompatibilne. Razlog je što kad se kaže "kosmologija", onda se obično smatra da se u okviru nje razmatra struktura vasione na velikoj skali, dok su kvantni fenomeni vezani za osobine i ponašanje materije na malim rastojanjima. Međutim, ukoliko teorija vrućeg velikog praska korektno opisuje vasionu, onda je ona u samom početku morala biti neverovatno malih dimenzija i stoga je morala da prođe kroz epohu u toku koje je jedini korektan način opisivanja njenih osobina i ponašanja vezan za primenu kvantne mehanike na vasionu kao celinu.

U standardnoj Kopenhagenskoj interpretaciji kvantne mehanike uvek imamo "klasičan" svet u koji je uronjen "kvantni" svet. Imamo zapravo makroskopskog posmatrača (opisanog klasičnom fizikom) koji vrši merenja nad kvantnim sistemom. Ukoliko se celi univerzum tretira kao kvantni sistem, što je intencija kvantne kosmologije, onda ne možemo definisati posmatrača, što sa druge strane znači da u ovakoj interpretaciji kvantna mehanika počinje da gubi smisao. Ipak ukoliko je kvantna mehanika univerzalna teorija, onda neizbežno mora da postoji neka forma "kvantne kosmologije" makar za najmanja pojmljiva vremena, Plankovo vreme $t_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,4 \times 10^{-44} s$, (ovo vreme je u vezi sa Plankovom energijom od $10^{19} GeV$, odnosno Plankovom dužinom $l_{pl} = 1,6 \times 10^{-35} m$). Na toj skali, gde je Komptonova talasna dužina čestice reda njenog gravitacionog (Švarcšildovog) radijusa, klasičan koncept prostor-vremena gubi smisao. Na današnjem nivou razvoja fizike se još uvek ne može reći da je kvantna kosmologija dobro zasnovana, međutim njen razvoj takođe pomaže razvoju kvantne mehanike. Pomaže ga u smislu da nas navodi na razmišljanja da li je naše današnje razumevanje kvantne fizike adekvatno za opisivanje vrlo ranih trenutaka u razvoju vasione, kao i na ideje o njenoj eventualnoj reviziji na nekom nivou iniciranoj rezultatima kvantne kosmologije.

5.1 p-Adična i adelična kvantna kosmologija

Jedan od najperspektivnijih pravaca u primeni p-adične kvantne mehanike je svakako primena u kvantnoj kosmologiji. Prvi korak u tom pravcu učinjen je u referenci [21] dok su kasniji radovi [22-25,77] posvećeni zasnivanju p-adične i adelične kvantne kosmologije bazirane na generalizaciji Hartl-Houkingovog prilaza (odnosno odgovarajućeg graničnog uslova za funkcionalni integral) u standardnoj kvantnoj kosmologiji i izračunavanju odgovarajuće p-adične talasne funkcije vasione za neke minisuperprostorne modele. U ovom prilazu, posle funkcionalne integracije, dobija se p-adični minisuperprostorni propagator, a do talasne funkcije dolazi se jednom običnom integracijom po parametru koji igra ulogu vremena. U radu [22] pokazano je da se za razmatrane jednodimenzionalne modele za p-adičnu Hartl-Houkingovu talasnu funkciju dobija kao rezultat Ω funkcija, koja ima smisao vakuumskog stanja.

p-Adična i adelična kvantna kosmologija, po svojoj suštini, predstavljaju primenu p-adične, odnosno adelične kvantne mehanike na vasionu kao celinu. Obzirom na ranije navedene osobine polja p-adičnih brojeva za sada je jedino moguća p-adična i adelična generalizacija standardne kvantne kosmologije zasnovane na integralima po trajektorijama, koja je opisana u glavi 3.

Izraz (3.25) generalizovan na polje $\mathbb{Q}_p$ ima oblik

$$\langle h''_{ij}, \phi'', \Sigma'' | h'_{ij}, \phi', \Sigma' \rangle_p = \int \mathcal{D}(g_{\mu\nu})_p \mathcal{D}(\Phi)_p \chi_p(-S_p[g_{\mu\nu}, \Phi]), \quad (5.1)$$

dok je p-adični minisuperprostorni propagator

$$\langle q^{\alpha\prime\prime} | q^{\alpha\prime} \rangle_p = \int dN \mathcal{K}_p(q^{\alpha\prime\prime}, N; q^{\alpha\prime}, 0), \quad (5.2)$$

sa jezgrom

$$\mathcal{K}_p(q^{\alpha\prime\prime}, N; q^{\alpha\prime}, 0) = \int \mathcal{D}q^\alpha \chi_p(-S_p[q^\alpha]). \quad (5.3)$$

Kako se talasna funkcija vasione u standardnoj kvantnoj kosmologiji može zapisati kao

$$\Psi_\infty[h_{ij}] = \int \mathcal{D}(g_{\mu\nu})_\infty \mathcal{D}(\Phi)_\infty \chi_\infty(-S_\infty[g_{\mu\nu}, \Phi]), \quad (5.4)$$

adeličnu talasnu funkciju vasione zadajemo u vidu beskonačnog proizvoda [23]

$$\Psi[h_{ij}] = \int \mathcal{D}(g_{\mu\nu})_\infty \mathcal{D}(\Phi)_\infty \chi_\infty(-S_\infty[g_{\mu\nu}, \Phi])$$

$$\times \prod_p \int \mathcal{D}(g_{\mu\nu})_p \mathcal{D}(\Phi)_p \chi_p(-S_\infty[g_{\mu\nu}, \Phi])$$

$$= \prod_v \int \mathcal{D}(g_{\mu\nu})_v \mathcal{D}(\Phi)_v \chi_v(-S_v[g_{\mu\nu}, \Phi]). \tag{5.5}$$

Imajući to u vidu, nužan uslov za konstrukciju adeličnog modela je egzistencija p-adičnog vakuumskog stanja $\Omega(|q^\alpha|_p)$, koje zadovoljava

$$\int_{|q^{\alpha\prime}|_p \leq 1} \mathcal{K}_p(q^{\alpha\prime\prime}, N; q^{\alpha\prime}, 0) dq^{\alpha\prime} = \Omega(|q^{\alpha\prime\prime}|_p), \tag{5.6}$$

za sve osim možda za konačno mnogo prostih brojeva p.

5.2 Talasna funkcija vasione u generalizovanom Hartl-Houkingovom prilazu

p-Adična i adelična generalizacija talasne funkcije vasione se može izvršiti na dva načina. Jedan se bazira na p-adičnom i adeličnom uopštenju Hartl-Houkingovog predloga za granični uslov u funkcionalnom integralu (5.5), a drugi na razmatranju kosmoloških modela u okviru p-adične i adelične kvantne mehanike pri čemu se ustvari ispituju uslovi za egizistenciju svojstvenih stanja operatora evolucije razmatranih modela.

Hartl-Houkingov granični uslov za određivanje p-adične talasne funkcije vasione je primenjivan u referencama [22,23,24,30,77, 78] i dao je očekivane[42] rezultate samo za neke modele. U okviru ovog graničnog uslova p-adične Hartl-Houkingove talasne funkcije su rešenja integrala

$$\Psi_p^{HH}(q^\alpha) = \int_{|N|_p \leq 1} dN \mathcal{K}_p(q^\alpha, N; 0, 0), \tag{5.7}$$

pri čemu se integracija vrši po oblasti u kojoj je p-adično "vreme" po normi manje ili jednako jedinici, zbog toga što mereno p-adično vreme ne može biti veće od plankovskog.

[42] "Očekivani" rezultat je, kao što je već više puta navedeno, da su sve p-adične talasne funkcije, sem možda konačno mnogo, jednake Ω-funkciji.

5.2.1 p-Adični i adelični de Siterov model

de Siterov minisuperprostorni model u kvantnoj kosmologiji ima isti značaj kao i model linearnog harmonijskog oscilatora u kvantnoj mehanici. Dakle, to je najprostiji, netrivijalan, egzaktno rešiv model. U ovom modelu je dejstvo Ajnštajn-Hilbertovo (3.6) sa kosmološkom konstantom i bez polja materije, a metrika je Fridman-Robertson-Uokerovog tipa (3.36). Polazna metrika se skaliranjem laps funkcije[43] može zapisati u obliku

$$ds^2 = \sigma^2 \left(-\frac{N^2(t)}{q(t)} dt^2 + q(t) d\Omega_3^2 \right), \tag{5.8}$$

gde je $\sigma^2 = \frac{2G}{3\pi}$ a $q(t)$ je skalirajući faktor metrike. Odgovarajuće adelično (lorencovsko) dejstvo ima oblik

$$S_v[q] = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt N \left(-\frac{\dot{q}^2}{4N^2} - \lambda q + 1 \right), \tag{5.9}$$

gde je $\lambda = \frac{\Lambda \sigma^2}{3}$. Rešenje klasične jednačine kretanja

$$\ddot{q} = 2\lambda \tag{5.10}$$

u kalibraciji $N = 1$ i uz granične uslove $q(0) = q'$ i $q(T) = q''$, $(T = t'' - t')$ je

$$\bar{q}(t) = \lambda t^2 + (\frac{q'' - q'}{T} - \lambda T)t + q', \quad q(t) \in \mathcal{A}, \tag{5.11}$$

---

[43] Naime, u referenci [79] je pokazano da laps funkcija koja se pojavljuje u metrici omogućuje skaliranje koje može dejstvo datog modela da dovede na egzaktno rešiv oblik. Ovo skaliranje se svodi na zamenu laps funkcije N funkcijom $F(q^\alpha)\widetilde{N}$, gde je $\widetilde{N}$ nova laps funkcija. Funkcija $F(q^\alpha)$ je funkcija minisuperprostornih koordinata q^α izabrana tako da je dejstvo kvadratično po minisuperprostornim koordinatama. Ekstremum novog dejstva koje se dobija na taj način (sa odogovarajućim specificiranjem graničnih uslova u varijacionom principu) se poklapa sa ekstremumom "starog" dejstva a klasična teorija je potpuno ekvivalentna. Napomenimo još da je minisuperprostorni propagator za model sa ovakvim dejstvom razmatran u referenci [80] u okviru standardne kvantne kosmologije.

odakle je klasično dejstvo

$$\bar{S}_v(q'', T; q', 0) = \frac{\lambda^2 T^3}{24} - [\lambda(q' + q'') - 2]\frac{T}{4} - \frac{(q'' - q')^2}{8T}. \quad (5.12)$$

Pošto je klasično dejstvo kvadratično u odnosu na q'' i q', adelični kvantno-mehanički propagator ima oblik [35,77,80]

$$\mathcal{K}_v(q'', T; q', 0) = \frac{\lambda_v(-8T)}{|4T|_v^{1/2}} \chi_v(-\bar{S}_v(q'', T|q', 0)). \quad (5.13)$$

Talasne funkcije ovog modela u okviru standardne kosmologije[44] su dobijene u ref. [49] i to su talasne funkcije (3.43-45), dok je p-adična prezentovana u [77]. Inače p-adična Hartl-Houkingova talasna funkcija se dobija rešavanjem integrala

$$\Psi_p^{HH}(q, \lambda) = \int_{|T|_p \leq 1} dT \frac{\lambda_p(-8T)}{|4T|_p^{1/2}} \chi_p \left(-\frac{\lambda^2 T^3}{24} + (\lambda q - 2)\frac{T}{4} + \frac{q^2}{8T} \right), \quad (5.14)$$

iz koga direktnom integracijom sledi da je, za $p \neq 2$, i za racionalne vrednosti kosmološke konstante $\lambda = 2^2 \cdot 3 \cdot l$, $l \in \mathbb{Z}$

$$\Psi_p^{HH}(q, \lambda) = \Omega(|q|_p) = \begin{cases} 1, \text{za } |q|_p \leq 1, \\ 0, \text{za } |q|_p > 1. \end{cases} \quad (5.15)$$

Drugim rečima p-adična talasna funkcija je zapravo karakteristična funkcija jediničnog kruga, odnosno argument talasne funkcije q može uzimati samo vrednosti celih p-adičnih brojeva. Za $p = 2$ je dobijeno da je za $|q|_2 = 1$ i $|q|_2 < 1$, $\Psi_2^{HH}(q, \lambda) = -1$, odnosno $\Psi_2^{HH}(q, \lambda) = 1$, respektivno, dok je za $|q|_2 > 1$, $\Psi_2^{HH}(q, \lambda) = 0$.

[44]Standardnih talasnih funkcija ima više (kao što je to već napomenuto u glavi 3) zbog nejednoznačnog izbora konture integracije u kompleksnoj ravni.

5.2.2 p-Adični i adelični de Siterov model u dve prostorne i jednoj vremenskoj dimenziji

Ovaj model je u realnom slučaju razmatran u članku [52]. Glavni rezultati su prezentovani u odeljku 3.5.2 ove disertacije. Metrika modela

$$ds^2 = \sigma^2 \left(-N^2(t)dt^2 + a^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right), \quad \sigma = G, \qquad (5.16)$$

generiše lorencovsko dejstvo

$$S_v[a] = \frac{1}{2}\int_0^1 dt N a^2(t)\left(-\frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{1}{a^2} - \lambda\right), \quad \lambda = \Lambda\sigma^2. \qquad (5.17)$$

Klasična jednačina kretanja

$$\ddot{a} - N^2 a\lambda = 0 \qquad (5.18)$$

ima za granične uslove $a(0) = a'$, $a(1) = a''$ rešenje

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{2\mathrm{sh}\,(N\sqrt{\lambda})}\left((a'' - a'e^{-N\sqrt{\lambda}})e^{N\sqrt{\lambda}t} + (a'e^{N\sqrt{\lambda}} - a'')e^{-N\sqrt{\lambda}t}\right). \qquad (5.19)$$

Odavde je adelično klasično dejstvo

$$\bar{S}_v(a'', N; a', 0) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[N\sqrt{\lambda} + \lambda\left(\frac{2a'a''}{\mathrm{sh}\,(N\sqrt{\lambda})} - \frac{a'^2 + a''^2}{\mathrm{th}\,(N\sqrt{\lambda})}\right)\right], \qquad (5.20)$$

dok je propagator

$$\mathcal{K}_v(a'', N|a', 0) = \frac{\lambda_v(-2\mathrm{sh}N)}{\left|\lambda^{-1/2}\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})\right|_v^{1/2}}\chi_v(-\bar{S}_v(a'', N|a', 0)), \qquad (5.21)$$

tako da je odgovarajuća p-adična Hartl-Houkingova talasna funkcija rešenje integrala

$$\Psi_p^{HH}(a,\lambda) = |\lambda|_p^{1/4}\int_{|N|_p\le 1} dN \frac{\lambda_p(-2N)}{\left|\mathrm{sh}\,(N\sqrt{\lambda})\right|_p^{1/2}}\chi_p\left(-\frac{N}{2} + \frac{\sqrt{\lambda}a^2}{2}\mathrm{cth}\,(N\sqrt{\lambda})\right). \qquad (5.22)$$

Detaljno rešavanje ovog p-adičnog integrala je prezentovano u ref. [22,30], a rezultat je za $p \neq 2$ i $|\lambda|_p \leq p^{-2}$

$$\Psi_p^{HH}(a,\lambda) = \Omega(|a|_p), \tag{5.23}$$

dok je za $p=2$,

$$\Psi_2^{HH}(a,\lambda) = \frac{1}{2}\Omega(|a|_2). \tag{5.24}$$

5.2.3 p-Adični model sa homogenim skalarnim poljem

Lorencovska metrika ovog modela [53] je

$$ds^2 = \sigma^2\left(-N^2(t)\frac{dt^2}{a^2(t)} + a^2(t)d\Omega_3^2\right), \tag{5.25}$$

a p-adično dejstvo

$$S_p[a,\phi] = \frac{1}{2}\int_0^1 dtN\left[-\frac{a^2\dot{a}^2}{N^2} + \frac{a^4\dot{\phi}^2}{N^2} - a^2V(\phi) + 1\right], \tag{5.26}$$

posle smene promenljivih: $x = a^2\mathrm{ch}\,(2\phi)$, $y = a^2\mathrm{sh}\,(2\phi)$ $(|\phi|_p \leq \frac{1}{p})$, postaje

$$S_p[x,y] = \frac{1}{2}\int_0^1 dtN\left[\frac{1}{4N^2}(-\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - f(x,y) + 1\right]. \tag{5.27}$$

Ako se za $f(x,y)$ uzme da je oblika $\alpha x + \beta y$, p-adično dejstvo je

$$S_p[x,y] = \frac{1}{2}\int_0^1 dtN\left[\frac{1}{4N^2}(-\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \alpha x - \beta y + 1\right]. \tag{5.28}$$

Klasične jednačine kretanja

$$\ddot{x} = 2\alpha N^2, \qquad \ddot{y} = -2\beta N^2 \tag{5.29}$$

za granične uslove $x(0) = x', y(0) = y', x(1) = x'', y(1) = y''$, imaju rešenja

$$\bar{x}(t) = \alpha N^2 t^2 + (x'' - x' - \alpha N^2)t + x',$$
$$\bar{y}(t) = -\beta N^2 t^2 + (y'' - y' + \beta N^2)t + y', \tag{5.30}$$

tako da je klasično dejstvo

$$\bar{S}_p(x'', y'', N; x', y', 0) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{24} N^3 + \frac{1}{4}(2 - \alpha(x' + x'') - \beta(y' + y''))N$$
$$+ \frac{-(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{8N}. \tag{5.31}$$

Polazeći od propagatora

$$\mathcal{K}_p(x'', y'', N; x', y', 0) = \frac{1}{|4N|_p} \chi_p(-\bar{S}_p(x'', y'', N; x', y', 0)), \tag{5.32}$$

da bi se dobila p-adična Hartl-Houkingova talasna funkcija treba izračunati integral

$$\Psi_p^{HH}(x, y)$$
$$= \int\limits_{|N|_p \le 1} \frac{dN}{|4N|_p} \chi_p \left(-\frac{\alpha^2 - \beta^2}{24} N^3 - \frac{1}{4}(2 - (\alpha x + \beta y))N + \frac{x^2 - y^2}{8N} \right). \tag{5.33}$$

Za $p \neq 2, 3$ i $|\alpha^2 - \beta^2|_p \le 1$ dobija se da je za $|a|_p = 1$,

$$\Psi_p^{HH}(a, \phi) = 1 - 2p^{-1}, \tag{5.34}$$

dok je za $|a^4|_p = p^{-m} < 1, \ m = 1, 2, ...,$

$$\Psi_p^{HH}(a, \phi) = m(1 - p^{-1}) + 1 - 2p^{-1}. \tag{5.35}$$

Za $|a|_p > 1$, talasna funkcija je jednaka nuli.

Za $p = 2$ ili 3 uz uslove $\alpha = 4 \cdot 3 \cdot l$, i $\beta = 4 \cdot 3 \cdot n$, $l, n \in Z$, za $|a|_p \le 1$, rezultat integracije je

$$\Psi_3^{HH}(a, \phi) = m(1 - p^{-1}) + 1 - 2p^{-1}, \quad m = 0, 1, 2, ..., \tag{5.36}$$

$$\Psi_2^{HH}(a,\phi) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad |a^4|_2 = 1, \\ 2, & \text{za} \quad |a^4|_2 = 2^{-2}, \\ -2+4(k-2), & \text{za} \quad |a^4|_2 = 2^{3-2k}, \end{cases} \tag{5.37}$$

$k = 2, 3, 4, \ldots.$

Za $p = 2, 3$, $|a|_p > 1$, dobijeno je

$$\Psi_2(a,\phi) = \Psi_3(a,\phi) = 0. \tag{5.38}$$

Ukoliko se u ovom modelu uzme da je $\beta = 0$ i $\phi = 0$ dobija se de Siterov model sa $\alpha = \lambda$, zato što je tada $x = a^2$, $y = 0$, dok dejstvo postaje

$$S_p[x] = \frac{1}{2}\int_0^1 dtN\left(-\frac{\dot{x}^2}{4N^2} - \alpha x + 1\right). \tag{5.39}$$

5.3 *p*-Adični i adelični kosmološki modeli

Hartl-Houkingov prilaz ne omogućuje konstrukciju adelične talasne funkcije vasione za sve modele pomenute u prethodnom paragrafu. Naime dok su prvi i drugi model adelični, treći to očito nije, obzirom da njegova p-adična talasna funkcija nikako ne može da se svede na Ω funkciju. Ispitivanja ovih i još nekih modela su doveli do pretpostavke da je razlog tome možda to što Hartl-Houkingov granični uslov nije dovoljno "dobar" za generalizaciju[45] na p-adična brojna polja, odnosno da sam po sebi nije dovoljno generalan u okviru

[45] Ovde valja navesti činjenicu da Hartl-Houkingov granični uslov nije i jedini (poznat je takođe i granični uslov Vilenkija [29]) koji se koristi u standardnoj kvantnoj kosmologiji za određivanje talasne funkcije vasione, pa samim tim ne mora da znači da pokušaj adelizacije nema smisla ukoliko se ne mogu adelizirati svi modeli na ovaj način.

standardne kvantne kosmologije[46].

Prirodno se onda javila ideja da treba pokušati sa tretmanom kosmoloških modela u okviru p-adične i adelične kvantne mehanike, što je u potpunom skladu sa samom definicijom tih oblasti savremene fizike. Prvi pokušaji na ovom planu su učinjeni u referencama [34,81, 82] i dali su dobre rezultate. U okviru ovog tretmana se ustvari ispituju uslovi za egzistenciju osnovnog p-adičnog kvantno-mehaničkog stanja (vakuumskog stanja) i njemu srodnih stanja. Kao što ćemo videti kasnije ovaj prilaz daje dobre rezultate i omogućuje adelizaciju razmatranih modela uz određene uslove koji se nameću za parametre modela. Uslovi za egzistenciju osnovnog stanja se ispituju pomoću formule (5.6).

5.3.1 de Siterov model u p-adičnoj i adeličnoj kvantnoj mehanici

Da vidimo kako se dobijaju uslovi za egzistenciju p-adičnog osnovnog stanja kod de Siterovog modela. Obzirom da je p-adični propagator ovog modela dat izrazom (5.13), jednačina (5.6) za njega glasi

$$\frac{\lambda_p(-8T)}{|4T|_p^{1/2}}\chi_p\left(-\frac{\lambda^2T^3}{24}-\frac{T}{2}+\frac{\lambda q''T}{4}+\frac{q''^2}{8T}\right)$$
$$\times\int\limits_{|q'|_p\le 1}\chi_p\left(\frac{q'^2}{8T}+\left(\frac{\lambda T}{4}-\frac{q''}{4T}\right)q'\right)dq'=\Omega(|q''|_p). \tag{5.40}$$

Njenim rešavanjem prema donjoj grani izraza (2.55) (za $\gamma=0$ i uz uslov $|T|_p<1$), dobija se za $p\neq 2$

$$\chi_p\left(-\frac{\lambda^2T^3}{6}-\frac{T}{2}+\frac{\lambda q''T}{2}\right)\Omega(|\lambda T^2-q''|_p)=\Omega(|q''|_p), \tag{5.41}$$

[46]Proteklih godina smo bili svedoci žive diskusije između Vilenkija i Lindea sa jedne strane, i Houkinga i njegovih saradnika sa druge, o dobrim i lošim stranama ova dva granična uslova. Podaci o ovoj interesantnoj diskusiji u formi saopštenja se mogu naći na web site-u http://xxx.lanl.gov u oblasti hep-th i gr-qc.

dok gornja grana (uslov $|T|_p = 1$) daje

$$\frac{\lambda_p(-8T)}{|4T|_p^{1/2}}\chi_p\left(-\frac{\lambda^2T^3}{24}-\frac{T}{2}+\frac{\lambda q''T}{4}+\frac{q''^2}{8T}\right)$$
$$\times\Omega\left(\left|\frac{\lambda T}{4}-\frac{q''}{4T}\right|\right)=\Omega(|q''|_p). \tag{5.42}$$

U oba izraza važi znak jednakosti ako se uzme da je $\lambda = 4\cdot 3\cdot l,\ \ l \in \mathbb{Z}$, što se poklapa sa uslovom koji je važio kod nalaženja p-adične Hartl-Houkingove talasne funkcije za ovaj model. Za $p = 2$, rešavanjem integrala se dobija da osnovno stanje egzistira za $|\lambda|_p \leq 1$, uz uslov $|T|_p \leq \frac{1}{2}$, tako da se p-adična talasna funkcija osnovnog stanja može zapisati kao

$$\Psi_p(q,T)=\begin{cases}\Omega(|q|_p), & |T|_p\leq 1, \quad \lambda=4\cdot 3\cdot l, l\in\mathbb{Z}\\ \Omega(|q|_2), & |T|_2\leq \frac{1}{2}, \quad \lambda=4\cdot 3\cdot l, l\in\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{5.43}$$

Da vidimo da li postoje svojstvena stanja oblika $\Omega(p^\nu|q|_p), \nu \in \mathbb{Z}$. Uslov koji mora da zadovoljava ovakvo stanje je

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{K}_p(q'',T;q',0)\Omega(p^\nu|q'|_p)dq'=\Omega(p^\nu|q''|_p), \tag{5.44}$$

odnosno,

$$\int_{q'\leq p^{-\nu}}\mathcal{K}_p(q'',T;q',0)dq'=\Omega(p^\nu|q''|_p). \tag{5.45}$$

Integracija po donjoj grani izraza (2.55) za $|T|_p < p^{-2\nu}$ daje

$$\chi_p\left(-\frac{\lambda^2T^3}{6}-\frac{T}{2}+\frac{\lambda q''T}{2}\right)\Omega(p^\nu|\lambda T^2-q''|_p)=\Omega(p^\nu|q''|_p), \tag{5.46}$$

dok se iz gornje grane (uslov $|T|_p = p^{-2\nu}$) dobija

$$\frac{\lambda_p(-8T)}{|4T|_p^{1/2}}\chi_p\left(-\frac{\lambda^2T^3}{24}-\frac{T}{2}+\frac{\lambda q''T}{4}+\frac{q''^2}{8T}\right)$$
$$\times p^{-\nu}\Omega\left(p^\nu\left|\frac{\lambda T}{4}-\frac{q''}{4T}\right|_p\right)=\Omega(p^\nu|q''|_p). \tag{5.47}$$

Analizom ovih relacija se dolazi do zaključka da takve talasne funkcije postoje, odnosno da važi

$$\Psi_p(q,T)=\begin{cases}\Omega(p^\nu|q|_p), & |T|_p \le p^{-2\nu}, |\lambda|_p \le |3|_p^{1/2}p^{3\nu}, \nu=1,2,\dots\\ \Omega(2^\nu|q|_2), & |T|_2 \le 2^{-2\nu}, |\lambda|_2 \le 2^{3\nu-1}, \nu=1,2,3\dots.\end{cases} \tag{5.48}$$

Takođe se može ispitati egzistencija svojstvenih stanja oblika δ funkcije. Za ta stanja delovanje operatora evolucije je prema (4.11) definisano sa

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}(q'',T;q',0)\delta(p^\nu-|q'|_p)dq' = \chi_p(ET)\delta(p^\nu-|q''|_p), \tag{5.49}$$

gde je E odgovarajuća p-adična energija. Pošto ćemo ispitivati uslove za egzistenciju vakuumskog stanja na dalje će biti uzeto da je $E=0$. Prema definiciji δ funkcije (2.57) oblast integracije postaje p-adična kružnica poluprečnika p^ν

$$\frac{\lambda_p(-8T)}{|4T|_p^{1/2}}\chi_p\left(-\frac{\lambda^2T^3}{24}-\frac{T}{2}+\frac{\lambda q''T}{4}+\frac{q''^2}{8T}\right)$$
$$\times \int_{|q'|_p=p^\nu} \chi_p\left(\frac{q'^2}{8T}+\left(\frac{\lambda T}{4}-\frac{q''}{4T}\right)q'\right)dq' = \delta(p^\nu-|q''|_p). \tag{5.50}$$

Koristeći gornju granu integrala (2.53), uz uslov $|\frac{4}{8T}|_p \le p^{2-2\nu}$, odakle sledi da je onda $|2T|_p \le p^{2\nu-2}$ (pri čemu mora da važi[47] $\nu=1,0,-1,-2,\cdots$, za $p\neq 2$, odnosno $\nu=0,-1,-2,\cdots$ za $p=2$), integracijom i sređivanjem na levoj strani formule (5.50) se dobija izraz

$$\chi_p\left(-\frac{\lambda^2T^3}{6}-\frac{T}{2}+\frac{\lambda q''}{2}T\right). \tag{5.51}$$

Da vidimo sada pod kojim su uslovima argumenti dobijenog karaktera manji ili jednaki jedinici. U skladu sa time se dobija sledeći niz relacija

$$\left|\frac{\lambda q''T}{2}\right|_p = |\lambda|_p|T|_p|q''|_p < |\lambda|_p\cdot p^{2\nu-2}\cdot p^\nu \le 1. \tag{5.52}$$

[47] Pošto norma p-adičnog vremena mora da bude manja ili jednaka od jedinice.

Odavde sledi da je ograničenje za kosmološku konstantu $|\lambda|_p \leq p^{2-3\nu}$, odakle je automatski zadovoljeno da je p-adična norma preostala dva sabirka u argumentu karaktera manja ili jednaka jedinici. Naime, sledi da je $|\frac{T}{2}|_p \leq 1$, $|-\frac{\lambda^2 T^3}{6}|_p \leq p^{6\nu-6} < 1$ (navedene nejednakosti važe i za $p=2$). Takođe je lako videti da je prema (2.53), zadovoljen uslov

$$\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p = |\lambda T^2 - q''|_p = |q''|_p. \tag{5.53}$$

Analiza izraza dobijenih integracijom za $p=2$ je potpuno analogna, tako da je vakuumsko stanje tipa δ-funkcije za de Siterov model zadato relacijom

$$\Psi_p(q,T) = \begin{cases} \delta(p^\nu - |q|_p), & |T|_p \leq p^{2\nu-2}, \quad |\lambda|_p \leq p^{2-3\nu} \\ \delta(2^\nu - |q|_2), & |T|_2 \leq 2^{2\nu-1}, \quad |\lambda|_2 \leq 2^{-3\nu} \end{cases}, \tag{5.54}$$

pri čemu za $p \neq 2$ za ν se mogu uzeti jedino vrednosti $\nu = 1, 0, -1, -2, \cdots$, dok za $p=2$ je $\nu = 0, -1, -2, \cdots$.

5.3.2 p-Adični i adelični de Siterov model u dve prostorne i jednoj vremenskoj dimenziji

Obzirom da je klasično dejstvo ovog modela dato izrazom (5.20), jednačina (5.6) za njega u eksplicitnoj formi glasi

$$\lambda_p\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})}\right)\left|\frac{\sqrt{\lambda}}{\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})}\right|_p^{1/2}\chi_p\left(-\frac{N}{2}+\frac{\sqrt{\lambda}}{2\mathrm{th}(N\sqrt{\lambda})}a''^2\right)$$
$$\times\int\limits_{|a'|_p\leq 1}\chi_p\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\mathrm{th}(N\sqrt{\lambda})}a'^2-\frac{\sqrt{\lambda}}{\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})}a''a'\right)da' = \Omega(|a''|_p). \tag{5.55}$$

Koristeći opet donju granu Gausovog integrala (2.55) za $\nu=0$, dobija se

$$\Omega(|a''|_p) = \chi_p\left(-\frac{N}{2}+\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\mathrm{th}(N\sqrt{\lambda})a''^2\right)\Omega(|a''|_p) \tag{5.56}$$

uz uslov $|\frac{\sqrt{\lambda}}{2\mathrm{th}(N\sqrt{\lambda})}|_p > 1$, to jest $|N|_p < 1$. Za $p \neq 2$, leva strana jednačine je jednaka $\Omega(|a''|_p)$ ako važi $|\lambda|_p \leq 1$. Primenjujući takođe gornju granu jednačine (2.55) iz izraza (5.55) dobijamo

$$\lambda_p\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})}\right)\left|\frac{\sqrt{\lambda}}{\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})}\right|_p^{1/2}\chi_p\left(-\frac{N}{2}+\frac{\sqrt{\lambda}a''^2}{2\mathrm{th}(N\sqrt{\lambda})}\right)$$
$$\times\Omega\left(\left|\frac{\sqrt{\lambda}a''}{\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})}\right|_p\right) = \Omega(|a''|_p). \tag{5.57}$$

Ovde važi znak jednakosti ako je $|N|_p \leq 1$. Konačno za p-adična vakuumska stanja se dobijaju svojstvene funkcije

$$\Psi_p(a,N) = \begin{cases} \Omega(|a|_p), & |N|_p \leq 1, \quad |\lambda|_p \leq 1 \\ \Omega(|a|_2), & |N|_2 \leq \frac{1}{4}, \quad |\lambda|_2 \leq 2. \end{cases} \tag{5.58}$$

Takođe se mogu dobiti svojstvena stanja koja sadrže Ω funkciju oblika $\Omega(p^\nu|a|_p)$

$$\Psi_p(a,N) = \begin{cases} \Omega(p^\nu|a|_p), & |N|_p \leq p^{-2\nu}, \quad |\lambda|_p \leq p^{4\nu} \\ \Omega(2^\nu|a|_2), & |N|_2 \leq 2^{-2-2\nu}, \quad |\lambda|_2 \leq 2^{1+4\nu}, \end{cases} \tag{5.59}$$

gde je $\nu = 1, 2, \ldots$.

Egzistencija vakuumskih svojstvenih stanja oblika δ funkcije se ispituje na osnovu izraza analognog izrazu (5.49) za de Siterov model

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{K}(a'',N;a',0)\delta(p^\nu-|a'|_p)da' = \chi_p(EN)\delta(p^\nu-|a''|_p), \tag{5.60}$$

za $E=0$, odnosno rešavanjem integrala

$$\lambda_p\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})}\right)\left|\frac{\sqrt{\lambda}}{\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})}\right|_p^{1/2}\chi_p\left(-\frac{N}{2}+\frac{\sqrt{\lambda}}{2\mathrm{th}(N\sqrt{\lambda})}a''^2\right)$$
$$\times\int_{|a'|_p=p^\nu}\chi_p\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\mathrm{th}(N\sqrt{\lambda})}a'^2-\frac{\sqrt{\lambda}}{\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})}a''a'\right)da' = \delta(p^\nu-|a''|_p). \tag{5.61}$$

Posle integracije, na levoj strani se dobija izraz

$$\chi_p\left(-\frac{N}{2}+\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\mathrm{th}(N\sqrt{\lambda})a''^2\right). \tag{5.62}$$

Prema (2.53) je $|4\alpha|_p = |\frac{2}{N}|_p \geq p^{2-2\nu}$, odakle se dobija da je norma p-adičnog vremena $|\frac{N}{2}|_p \leq p^{2\nu-2}$, $\nu = 1, 0, -1, \cdots$. Norma argumenta karaktera u izrazu (5.62) je

$$\left|\frac{\sqrt{\lambda}\mathrm{th}(N\sqrt{\lambda})a''^2}{2}\right|_p = p^{4\nu-2}|\lambda|_p \leq 1, \;\Leftrightarrow\; |\lambda|_p \leq p^{2-4\nu}. \tag{5.63}$$

Prema gornjoj grani izraza (2.53) p-adična norma odnosa $\frac{\beta}{2\alpha}$ je jednaka p^ν i za ovaj model iznosi

$$\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p = \left|\frac{-\frac{\sqrt{\lambda}}{\mathrm{sh}(N\sqrt{\lambda})}a''}{2\frac{\sqrt{\lambda}}{2\mathrm{th}(N\sqrt{\lambda})}}\right|_p = |a''|_p. \tag{5.64}$$

Može se pokazati da navedeni uslovi odgovaraju i radijusu konvergencije reda kojim je definisana analitička funkcija $\mathrm{th}\, x$, naime

$$|N\sqrt{\lambda}|_p \leq |N|_p|\lambda|_p^{1/2} \leq p^{2\nu-2}\cdot p^{1-2\nu} = p^{-1}, \forall\nu. \tag{5.65}$$

Za $p = 2$ prema izrazu (5.62) se dobija uslov $|N|_2 \leq 2^{2\nu-3}$, za $\nu = 1, 0, -1, -2, \cdots$, pri čemu se kao i u slučaju $p \neq 2$ ostaje u domenu konvergencije analitičkih funkcija[48] koje figurišu u izrazu za klasično dejstvo ovog modela (5.20).

Dakle za ovaj minisuperprostorni model postoji vakuumsko stanje

$$\Psi_p(a,N) = \begin{cases} \delta(p^\nu - |a|_p), & |N|_p \leq p^{2\nu-2}, \quad |\lambda|_p \leq p^{2-4\nu}, \\ \delta(2^\nu - |a|_2), & |N|_2 \leq 2^{2\nu-3}, \quad |\lambda|_2 \leq 2^{-4\nu}, \end{cases} \tag{5.66}$$

za $\nu = 1, 0, -1, -2, \ldots$.

[48] Naime, sada važi $|N\sqrt{\lambda}|_2 \leq 2^{2\nu-3}2^{-2\nu} = 2^{-3}$, dok je radijus konvergencije za $p = 2$ jednak 2^{-2}.

5.3.3 *p*-Adični i adelični model sa homogenim skalarnim poljem

Vakuumsko stanje za ovaj dvodimenzionalni minisuperprostorni model ima oblik $\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p)$, tako da jednačina (5.6) za ispitivanje njegove egzistencije glasi

$$\int\limits_{|x'|_p\leq 1}\int\limits_{|y'|_p\leq 1}\mathcal{K}_p(x'',y'',N;x',y',0)dx'dy' = \Omega(|x''|_p)\Omega(|y''|_p), \tag{5.67}$$

odnosno,

$$\frac{1}{|4N|_p}\chi_p\left(-\frac{\alpha^2-\beta^2}{24}N^3-\frac{N}{2}+\frac{\alpha x''N}{4}+\frac{\beta y''N}{4}+\frac{x''^2}{8N}-\frac{y''^2}{8N}\right)$$
$$\times\int\limits_{|x'|_p\leq 1}\chi_p\left(\frac{x'^2}{8N}+(\frac{\alpha N}{4}-\frac{x''}{4N})x'\right)dx'$$
$$\times\int\limits_{|y'|_p\leq 1}\chi_p\left(-\frac{y'^2}{8N}+(\frac{\beta N}{4}+\frac{y''}{4N})y'\right)dy' = \Omega(|x''|_p)\Omega(|y''|_p). \tag{5.68}$$

Integracijom po donjoj (za $|N|_p < 1$), odnosno gornjoj (za $|N|_p = 1$, i $p\neq 2$) grani izraza (2.55) se dobija

$$\chi_p\left(-\frac{\alpha^2-\beta^2}{6}N^3-\frac{N}{2}+\frac{\alpha N}{2}x''+\frac{\beta N}{2}y''+\right)$$
$$\times\Omega(|\alpha N^2-x''|_p)\Omega(|\beta N^2+y''|) = \Omega(|x''|_p)\Omega(|y''|_p), \tag{5.69}$$
$$\frac{1}{|4N|_p}\chi_p\left(-\frac{\alpha^2-\beta^2}{24}N^3-\frac{N}{2}+\frac{\alpha x''N}{4}+\frac{\beta y''N}{4}+\frac{x''^2}{8N}-\frac{y''^2}{8N}\right)$$
$$\times\Omega\left(\left|\frac{\alpha N}{4}-\frac{x''}{4N}\right|_p\right)\Omega\left(\left|\frac{\beta N}{4}+\frac{y''}{4N}\right|_p\right) = \Omega(|x''|_p)\Omega(|y''|_p), \tag{5.70}$$

odakle je lako zaključiti da ovakva talasna funkcija za $p\neq 2$ egzistira ukoliko važi da je $|\alpha|_p\leq 1$, $|\beta|_p\leq 1$ i naravno $|N|_p\leq 1$, što je već sadržano u uslovima koji su važili prilikom integracije. Ovakav zaključak za $p=3$ treba još dopuniti uslovima da je $\alpha = 4\cdot 3\cdot l_1$ i $\beta = 4\cdot 3\cdot l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ (slično kao što je bio slučaj kod de Siterovog modela u tri prostorne i jednoj vremenskoj dimenziji).

Za $p=2$ analiza je malo duža ali konačno daje da i tada egzistira vakuumsko stanje tipa $\Omega(|x|_2)\Omega(|y|_2)$ uz iste uslove za parametre modela α i β. Osim toga, norma laps funkcije je u ovom slučaju $|N|_2 \leq \frac{1}{2}$.

Konačno, najprostije vakuumsko stanje ovog modela ima oblik

$$\Psi_p(x,y,N) = \begin{cases} \Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p), & |N|_p \leq 1, \\ \Omega(|x|_2)\Omega(|y|_2), & |N|_2 \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{5.71}$$

uz već naveden uslov $\alpha = 4\cdot 3\cdot l_1$, $\beta = 4\cdot 3\cdot l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$.

Za ispitivanje egzistencije stanja oblika $\Omega(p^\nu|x|_p)\Omega(p^\mu|y|_p)$ gde su μ i ν celi brojevi, relevantni integral je dvostruki

$$\int_{|x'|_p\leq p^{-\nu}} \int_{|y'|_p\leq p^{-\mu}} \mathcal{K}_p(x'',y'',N;x',y',0)dx'dy' =$$

$$= \Omega(p^\nu|x''|_p)\Omega(p^\mu|y''|_p). \tag{5.72}$$

Integracija po, na primer, donjoj grani izraza (2.55) daje

$$\chi_p\left(-\frac{\alpha^2-\beta^2}{6}N^3 - \frac{N}{2} + \frac{\alpha N}{2}x'' + \frac{\beta N}{2}y'' +\right)$$

$$\times\Omega(p^\nu|\alpha N^2 - x''|_p)\Omega(p^\mu|\beta N^2 + y''|) = \Omega(p^\nu|x''|_p)\Omega(p^\mu|y''|_p). \tag{5.73}$$

Analizom ovog i analognih izraza (za integraciju po gornjoj grani i potom za $p=2$) se dobija za svojstvena stanja (za $|N|_p \leq p^{-2\nu}, |N|_p \leq p^{-2\mu}$)

$$\Psi_p(x,y,N) = \begin{cases} \Omega(p^\nu|x|_p)\Omega(p^\mu|y|_p), |\alpha|_p \leq |3|_p^{1/2}p^{3\nu}, |\beta|_p \leq |3|_p^{1/2}p^{3\mu}, \\ \Omega(2^\nu|x|_2)\Omega(2^\mu|y|_2), |\alpha|_2 \leq 2^{3\nu-1}, |\beta|_2 \leq 2^{3\mu-1}, \end{cases} \tag{5.74}$$

gde je $\nu, \mu = 1, 2, 3, \ldots$, dakle nije više ceo skup celih brojeva. Takođe vredi napomenuti da ovi uslovi važe i za $p=3$.

Interesantno je ispitati egzistenciju svojstvenih stanja koja sadrže δ funkciju kod ovog modela. U ovom slučaju, obzirom da je minisuperprostor dvodimenzionalan, odgovarajuća svojstvena jednačina je

$$\int_{\mathbb{Q}_p} dx' \int_{\mathbb{Q}_p} dy' \mathcal{K}_p(x'', y'', N; x', y', 0)\delta(p^\nu - |x'|_p)\delta(p^\nu - |y'|_p)$$

$$= \chi_p(EN)\delta(p^\nu - |x''|_p)\delta(p^\nu - |y''|_p). \tag{5.75}$$

Posle rešavanja odgovarajućeg integrala (uzimajući da je $E = 0$, odnosno da imamo osnovno stanje) na levoj strani ovog izraza dobija se

$$\chi_p\left(-\frac{\alpha^2-\beta^2}{6}N^3 - \frac{N}{2} + \frac{\alpha N x''}{2} + \frac{\beta N y''}{2}\right) \tag{5.76}$$

uz uslove $|2N|_p \leq p^{2\nu-2}$, $|2N|_p \leq p^{2\mu-2}$, $\nu, \mu = 1, 0, -1, -2, \cdots$.

Pošto karakter u izrazu (5.76) treba da bude jednak jedinici, sledi da za, na primer, treći sabirak u njegovom argumentu treba da važi

$$\left|\frac{\alpha N x''}{2}\right|_p \leq |\alpha|_p p^{3\nu-2} \leq 1, \tag{5.77}$$

odakle sledi da za vrednosti parametra α mora da važi ograničenje

$$|\alpha|_p \leq p^{2-3\nu}, \tag{5.78}$$

i analogno za drugi parametar

$$|\beta|_p \leq p^{2-3\mu}, \tag{5.79}$$

pri čemu ν i μ uzimaju vrednosti iz skupa $\{0, -1, -2, \cdots\}$.

Za $p = 2$, nije teško pokazati da su analogni uslovi

$$|\alpha|_2 \leq 2^{-3\nu}, \quad |\beta|_2 \leq 2^{-3\mu}. \tag{5.80}$$

Konačno tražena talasna funkcija može da se zapiše kao

$$\Psi_p(x, y, N)$$

$$= \begin{cases} \delta(p^{\nu} - |x|_p)\delta(p^{\mu} - |y|_p), |N|_p \leq p^{2\nu,\mu-2}, |\alpha, \beta|_p \leq p^{2-3\nu,\mu}, \\ \delta(2^{\nu} - |x|_2)\delta(2^{\mu} - |y|_2), |N|_2 \leq 2^{2\nu,\mu-1}, |\alpha, \beta|_2 \leq 2^{-3\nu,\mu}, \end{cases} \tag{5.81}$$

za $\nu, \mu = 0, -1, -2, \ldots$.

5.3.4 p-Adični i adelični dvodimenzionalni modeli tipa oscilatora

U poglavlju 3.5.4 je već napomenuto da postoji grupa od tri modela čije se dejstvo posle određenih smena svodi na dejstvo za dva harmonijska oscilatora od kojih jedan ima negativnu energiju. Da razmotrimo sada ove modele sa p-adičnog i adeličnog aspekta.

p-Adično dejstvo je zadato izrazom

$$S_p = \frac{1}{2}\int_0^1 dtN\left[-\frac{\dot{x}^2}{N^2} + \frac{\dot{y}^2}{N^2} + x^2 - y^2\right]. \tag{5.82}$$

Rešavanjem p-adičnih klasičnih jednačina kretanja

$$\ddot{x} + Nx = 0, \quad \ddot{y} + Ny = 0, \tag{5.83}$$

za granične uslove $x(0) = x', y(0) = y', x(1) = x'', y(1) = y''$, zamenom dobijenog partikularnog rešenja u izraz (5.82) i integraljenjem za p-adično klasično dejstvo se dobija

$$\bar{S}_p(x'', y'', N; x', y', 0) = \frac{y'^2 + y''^2 - x'^2 - x''^2}{2\mathrm{tg}N} + \frac{x'x'' - y'y''}{\sin N}, \tag{5.84}$$

dok je odgovarajući propagator

$$\mathcal{K}_p(x'', y'', N; x', y', 0) = \frac{1}{|N|_p}\chi_p\left(\frac{x'^2 + x''^2 - y'^2 - y''^2}{2\mathrm{tg}N} + \frac{y'y'' - x'x''}{\sin N}\right). \tag{5.85}$$

Linearni harmonijski oscilator spada u dobro proučene sisteme kako sa realnog tako i sa p-adičnog stanovišta. Tako se relativno lako pokazuje da u oblasti definisanosti analitičkih funkcija $\sin N$ i $\mathrm{tg}N$, $G_p = \{N \in \mathbb{Q}_p : |N|_p \leq |2p|_p\}$, postoji vakuumsko stanje $\Omega(|x|_p)$ $\Omega(|y|_p)$ [32,33], kao i stanja $\Omega(p^{\nu}|x|_p)$ $\Omega(p^{\nu}|y|_p)$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

I za ovakav minisuperprostorni model egzistira vakuumsko stanje, tipa proizvoda dve δ funkcije. Nakon odgovarajuće integracije (integral je tipa (5.75) sa jezgrom datim izrazom (5.85))se dobija

$$\chi_p\left(-\frac{\mathrm{tg}N}{2}x''^2\right)\chi_p\left(-\frac{\mathrm{tg}N}{2}y''^2\right), \tag{5.86}$$

pri čemu treba imati u vidu da za $p\neq 2$ važi $|N|_p\leq p^{2\nu-2}$, $\nu=1,0,-1,-2,\ldots$, dok je za $p=2$, $|N|_2\leq 2^{2\nu-3}$.

Direktnom proverom se vidi da za $p\neq 2$ važi

$$\left|-\frac{\mathrm{tg}N}{2}x''^2\right|_p\leq p^{2\nu-2}\cdot p^{2\nu}=p^{4\nu-2}\leq 1,\ \ \text{za}\ \ \nu=0,-1,-2,\cdots, \tag{5.87}$$

što nas istovremeno ostavlja u domenu konvergencije analitičke funkcije $\mathrm{tg}N$.

Za $p=2$ se dobija analogan niz nejednakosti

$$\left|-\frac{\mathrm{tg}N}{2}x''^2\right|_2\leq 2\cdot 2^{2\nu-3}\cdot 2^{2\nu}=2^{4\nu-2}\leq 1,\ \ \text{za}\ \ \nu=0,-1,-2,\cdots. \tag{5.88}$$

Konačno p-adično vakuumsko stanje tipa δ funkcija se može pisati kao

$$\Psi_p(x,y,N)=\begin{cases}\delta(p^\nu-|x|_p)\delta(p^\mu-|y|_p),\ |N|_p\leq p^{2\nu-2},\\ \delta(2^\nu-|x|_2)\delta(2^\mu-|y|_2),\ |N|_2\leq 2^{2\nu-3},\end{cases} \tag{5.89}$$

za $\nu=0,-1,-2,\ldots$.

5.3.5 p-Adični i adelični Bijanki I model ($k=0$)

Za ovaj model lorencovska metrika je

$$ds^2=\sigma^2\left[-\frac{N^2(t)}{a^2(t)}dt^2+a^2(t)dx^2+b^2(t)dy^2+c^2(t)dz^2\right] \tag{5.90}$$

tako da je korespondentno dejstvo

$$S_p[a,b,c]=\frac{1}{2}\int_0^1 dt\left[-\frac{a}{N}(\dot{a}\dot{b}c+a\dot{b}\dot{c}+\dot{a}b\dot{c})-Nbc\lambda\right]. \tag{5.91}$$

Nakon istih smena (3.80) kao i u standardnom slučaju, ovaj izraz prelazi u

$$S_p[x,y,z] = \frac{1}{2}\int_0^1 dt\left[-\frac{1}{N}\left(\frac{\dot{x}^2-\dot{y}^2}{2}+\dot{z}^2\right)-\lambda N(x+y)\right]. \quad (5.92)$$

Odgovarajuće jednačine kretanja

$$\ddot{x}+\lambda N^2 = 0, \quad \ddot{y}-\lambda N^2 = 0, \quad \ddot{z} = 0, \quad (5.93)$$

imaju, uz granične uslove $x(0) = x', y(0) = y', z(0) = z', \ x(1) = x'', y(1) = y'', z(1) = z''$, rešenja

$$\bar{x}(t) = -\frac{N^2\lambda}{2}t^2 + \left(x''-x'+\frac{N^2\lambda}{2}\right)t + x',$$

$$\bar{y}(t) = \frac{N^2\lambda}{2}t^2 + \left(y''-y'-\frac{N^2\lambda}{2}\right)t + y',$$

$$\bar{z}(t) = (z''-z')t + z'. \quad (5.94)$$

Na osnovu ovoga su klasično dejstvo

$$\bar{S}_p(x'',y'',z'',N;x',y',z',0)$$

$$= -\frac{1}{4N}\left[(x''-x')^2-(y''-y')^2+2(z''-z')^2\right]$$

$$-\frac{\lambda N}{4}\left[(x'+x'')+(y'+y'')\right], \quad (5.95)$$

i propagator

$$\mathcal{K}_p(x'',y'',z'',N;x',y',z')$$

$$= \frac{\lambda_p(-2N)}{\left|4^{1/3}N\right|_p^{3/2}}\chi_p\left(-\bar{S}(x'',y'',z'',N;x',y',z',0)\right). \quad (5.96)$$

Jednačina za određivanje uslova za egzistenciju vakuumskog stanja oblika $\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p)\Omega(|z|_p)$ je

$$\int_{|x'|_p\le 1}\int_{|y'|_p\le 1}\int_{|z'|_p\le 1}\mathcal{K}_p(x'',y'',z'',N;x',y',z',0)dx'dy'dz'$$

$$= \Omega(|x''|_p)\Omega(|y''|_p)\Omega(|z''|_p), \tag{5.97}$$

a nakon izvršene integracije se dobija

$$\chi_p\left(\frac{\lambda N}{2}(x''+y'')\right)\Omega\left(\left|\frac{\lambda N^2}{2}-x''\right|_p\right)\Omega\left(\left|\frac{\lambda N^2}{2}+y''\right|_p\right)\Omega(|z''|_p)$$

$$= \Omega(|x''|_p)\Omega(|y''|_p)\Omega(|z''|_p). \tag{5.98}$$

Za $p \neq 2$ iz uslova koji važe prilikom integracije (2.55) se dobija da mora da važi $|N|_p \leq 1$. U tom slučaju je istovremeno zadovoljeno da je karakter u (5.98) jednak jedinici, ukoliko je $|\lambda|_p \leq 1$, jer tada važi sledeći niz nejednakosti:

$$\left|\frac{\lambda N}{2}x''\right|_p \leq |\lambda|_p|x''|_p \leq |\lambda|_p \leq 1, \tag{5.99}$$

i analogno za drugi sabirak $\frac{\lambda N}{2}y''$. Za $p = 2$, imamo dva uslova za normu laps funkcije i to

$$|N|_2 \leq \frac{1}{2}, \;\; \text{i} \;\; |N|_2 \leq \frac{1}{4}, \tag{5.100}$$

pri čemu mora da se uzme njihov presek $|N|_2 \leq \frac{1}{4}$, a odatle se za normu kosmološke konstante dobija $|\lambda|_2 \leq 2$. Ovo znači da za ovaj model postoji p-adična talasna funkcije vakuumskog stanja tipa

$$\Psi_p(x,y,z,N) = \begin{cases} \Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p)\Omega(|z|_p), & |N|_p \leq 1, \quad |\lambda|_p \leq 1, \\ \Omega(|x|_2)\Omega(|y|_2)\Omega(|z|_2), & |N|_2 \leq \frac{1}{2}, \quad |\lambda|_2 \leq 2. \end{cases} \tag{5.101}$$

Za talasne funkcije tipa $\Omega(p^{\nu_1}|x|_p)\Omega(p^{\nu_2}|y|_p)\Omega(p^{\nu_3}|z|_p)$, treba analizirati rezultat integracije u izrazu

$$\int\limits_{|x'|_p\leq p^{-\nu_1}}\int\limits_{|y'|_p\leq p^{-\nu_2}}\int\limits_{|z'|_p\leq p^{-\nu_3}}\mathcal{K}_p(x'',y'',z'',N;x',y',z',0)dx'dy'dz'$$

$$= \Omega(p^{\nu_1}|x''|_p)\Omega(p^{\nu_2}|y''|_p)\Omega(p^{\nu_3}|z''|_p), \tag{5.102}$$

što prema, na primer, donjoj grani (2.55) daje

$$\chi_p\left(\frac{\lambda N}{2}(x''+y'')\right)\Omega\left(p^{\nu_1}\left|\frac{\lambda N^2}{2}-x''\right|_p\right)\Omega\left(p^{\nu_2}\left|\frac{\lambda N^2}{2}+y''\right|_p\right)$$

$$\times\Omega(p^{\nu_3}|z''|_p)=\Omega(p^{\nu_1}|x''|_p)\Omega(p^{\nu_2}|y''|_p)\Omega(p^{\nu_3}|z''|_p). \qquad (5.103)$$

Analizom ovog izraza i izraza koji se dobija integracijom po gornjoj grani u (2.55), za p-adične talasne funkcije navedenog tipa sledi

$$\Psi_p(x,y,z,N)$$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{3}\Omega(p^{\nu_i}|x|_p), & |N|_p\le p^{-2\nu_i},\quad |\lambda|_p\le p^{3\nu_1},p^{3\nu_2},\\ \prod_{i=1}^{3}\Omega(2^{\nu_i}|x|_2), & |N|_2\le 2^{-2\nu_{1,2}-1},2^{-2\nu_3-2},\end{cases} \qquad (5.104)$$

pri čemu za $p=2$ za kosmološku konstantu važi ograničenje $|\lambda|_2\le 2^{3\nu_{1,2}+1}$, a u izrazu (5.104) celi brojevi ν_1,ν_2 i ν_3 uzimaju vrednosti iz skupa[49] $\{0,1,2,3,\ldots\}$.

Izraz za ispitivanje egzistencije p-adičnih vakuumskih talasnih funkcija tipa δ funkcije je

$$\int_{\mathbb{Q}_p^3}dx'dy'dz'\mathcal{K}_p(x'',y'',z'',N;x',y',z',0)\delta(p^{\nu_1}-|x'|_p)\delta(p^{\nu_2}-|y'|_p)$$

$$\times\delta(p^{\nu_3}-|z'|_p)=\delta(p^{\nu_1}-|x''|_p)\delta(p^{\nu_2}-|y''|_p)\delta(p^{\nu_3}-|z''|_p), \quad (5.105)$$

a rezultat navedene integracije je

$$\chi_p\left(\frac{\lambda N}{2}(x''+y'')\right). \qquad (5.106)$$

Bez navođenja detalja analize, koja je analogna do sada vršenim, za ovakva stanja se dobija

$$\Psi_p(x,y,z,N)$$

[49] Napomenimo da u izrazu za normu kosmološke konstante ne figuriše ν_3 iz razloga što u izrazu za dejstvo (5.95) se kosmološka konstanta pojavljuje u kombinaciji jedino sa promenljivima x i y.

$$= \begin{cases} \delta(p^{\nu_1} - |x''|_p)\delta(p^{\nu_2} - |y''|_p)\delta(p^{\nu_3} - |z''|_p), |\lambda|_p \leq p^{2-3\nu_{1,2}} \\ \delta(2^{\nu_1} - |x''|_2)\delta(2^{\nu_2} - |y''|_2)\delta(2^{\nu_3} - |z''|_2), |\lambda|_2 \leq 2^{2-3\nu_i}. \end{cases} \tag{5.107}$$

Uslovi za laps funkciju su sledeći: za $p \neq 2$, $|N|_p \leq p^{2\nu_{1,2,3}-2}$, dok je za $p = 2$, $|N|_2 \leq 2^{2\nu_i - 3}$, za $\nu_i = 1, 0, -1, -2, \cdots$.

5.3.6 Zaključne napomene

Za sve razmatrane standardne modele konstruisani su odgovarajući p-adični modeli, obzirom da je pokazana egzistencija p-adičnih talasnih funkcija osnovnog stanja sledećih vidova

$$\Psi_p(q^1, \ldots, q^n) = \prod_p \prod_{\alpha=1}^{n} \Omega(|q^\alpha|_p), \tag{5.108}$$

$$\Psi_p(q^1, \ldots, q^n) = \prod_p \prod_{\alpha=1}^{n} \Omega(p^\nu |q^\alpha|_p), \tag{5.109}$$

$$\Psi_p(q^1, \ldots, q^n) = \prod_p \prod_{\alpha=1}^{n} \delta(p^\nu - |q^\alpha|_p). \tag{5.110}$$

To automatski znači da su svi modeli istovremeno i adelični, jer za svaki može da se napiše svojstvena adelična talasna funkcija oblika

$$\Psi(q^1, ..., q^n) = \prod_{\alpha=1}^{n} \psi_\infty(q_\infty^\alpha) \prod_{p \in M} \prod_{\alpha=1}^{n} \Psi_p(q_p^\alpha) \prod_{p \notin M} \prod_{\alpha=1}^{n} \Omega(|q^\alpha|_p), \tag{5.111}$$

gde je $\psi_\infty(q_\infty^\alpha)$ talasna funkcija vasione u standardnoj kvantnoj kosmologiji a $\Psi_p(q_p^\alpha)$ je reprezentovana izrazima (5.109-110).

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu, koji na određeni način predstavlja proširenje i nadgradnju moje magistarske teze [30], takođe urađene pod mentorstvom profesora Dragovića, razmatrana je p-adična i adelična generalizacija kvantnih kosmoloških modela. Dok je u magistarskoj tezi talasna funkcija vasione za određene minisuperprostorne modele[50] (sa kvadratičnim dejstvom) računata p-adičnom i adeličnom generalizacijom Hartl-Houkingovog predloga uz odgovarajući granični uslov za integral po "istorijama", u disertaciji su modeli tretirani u okviru p-adične i adelične kvantne mehanike.

U uvodu je navedena fizička motivacija za uvođenje p-adičnih brojeva i adela u kvantnu teoriju, dok je u narednoj glavi dat sažet prikaz osnovnog matematičkog aparata koji se potom koristi.

U trećoj glavi je dat kratak prikaz kanonskog prilaza kvantnoj kosmologiji i puno detaljniji prikaz fejnmanovskog prilaza baziranog na primeni integrala po trajektorijama (istorijama) sistema. Ovaj prilaz uz aplikaciju na određene minisuperprostorne modele, je dat zato što za sada jedino on omogućuje p-adičnu i adeličnu generalizaciju.

Naime, osnovu kanonskog prilaza predstavlja Uiler-de Uitova

[50]Konfiguracioni prostor kvantne kosmologije (superprostor) je beskonačnodimenzionalan i u njemu je bilo kakav praktičan proračun nemoguć. Zato se uvodi minisuperprostor koji ima konačan broj stepeni slobode.

jednačina koja je šredingerovskog tipa (sam njen tvorac de Uit ju je nazvao Ajnštajn-Šredingerovom jednačinom). Kada se vrši generalizacija pojmova iz standardne fizike (nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}\equiv\mathbb{Q}_\infty$ na p-adična polja brojeva, $\mathbb{Q}_p, p = 2, 3, 5, \cdots$), mora se imati u vidu da su ta polja brojeva totalno nepovezana (iz razloga ultrametričnosti polja $\mathbb{Q}_p$), pa diferencijalni pristup ne izgleda moguć. Takođe treba imati u vidu da prostorno-vremenske koordinate pripadaju $\mathbb{Q}_p$, a talasna funkcija polju kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, dakle različitim poljima brojeva. Zbog toga je integralni pristup kvantovanju za sada jedini moguć i zato je poslednjih godina velika pažnja posvećena razvijanju ovog prilaza u okviru p-adične i adelične kvantne mehanike. Prvi veliki uspeh na ovom polju predstavlja rezultat G. Đorđevića i Dragovića koji su pokazali da se u p-adičnom slučaju jezgro operatora evolucije (zadato Fejnmanovim integralom po putanjama) za jednodimenzionalne sisteme sa kvadratičnim dejstvom, može egzaktno izračunati i da ima formalno isti oblik[51] kao i u realnom slučaju. Prirodno se pojavilo pitanje rešavanja odgovarajućeg integrala po putanjama u više dimenzija. U ovom radu je postojala i praktična potreba za time jer je za neke od razmatranih kosmoloških modela minisuperprostor višedimenzionalan.

U četvrtoj glavi je pokazano da u p-adičnoj kvantnoj mehanici važi Fejnmanova teorema i dobijen je p-adičan analogon Van Vlek-Moreti determinante.

U petoj glavi su u okviru razvijenog formalizma p-adične i adelične kvantne mehanike tretirani sledeći minisuperprostorni modeli: de Siterov model u tri prostorne i jednoj vremenskoj dimenziji, model istog tipa u dve prostorne i jednoj vremenskoj dimenziji, model sa homogenim skalarnim poljem, grupa modela tipa dva oscilatora i Bijanki I model sa tri skalirajuća faktora.

Budući da je minisuperprostorna kvantna kosmologija zapravo kvantna mehanika u minisuperprostoru ovi modeli su razmatrani upravo u okviru p-adične i adelične kvantne mehanike. Preciznije, ispitivani su uslovi za egzistenciju p-adičnih stanja sledećih tipova: $\Omega(|x|_p)$, $\Omega(p^\nu|x|_p)$, $\delta(p^\nu - |x|_p)$, $\nu \in \mathbb{Z}$ i analognih stanja u dve i tri dimenzije. Detaljnom analizom svih pet modela dobijeni su uslovi koji treba da važe za njihove parametre da bi ovakva p-adična stanja egzistirala.

[51] Ali sa netrivijalno različitim fizičkim implikacijama.

Interpretacija rezultata p-adične kvantne mehanike je prilično problematično pitanje, ukoliko želimo da je vršimo unutar same te teorije. Međutim, ujedinjenje i istovremeno razmatranje p-adične i standardne kvantne mehanike u okviru formalizma adelične kvantne mehanike, formulisane uglavnom od strane B. Dragovića [32,33], se pokazalo kao veoma dobar način koji je istovremeno ponudio i interpretaciju rezultata.

Na ovom mestu se moramo podsetiti činjenice da rezultati svih merenja pripadaju skupu racionalnih brojeva. To automatski znači da upravo u tom skupu treba vršiti interpretaciju teorijskih proračuna.

Napomenimo da je u ovom radu za sve modele pokazana egzistencija adelične talasne funkcije oblika

$$\Psi(q^1, ..., q^n) = \prod_{\alpha=1}^{n} \Psi_\infty(q_\infty^\alpha) \prod_p \prod_{\alpha=1}^{n} \Omega(|q_p^\alpha|_p). \tag{6.1}$$

Kao što je već rečeno, ako želimo da probamo da "osetimo" fizički smisao rezultata adelične kvantne mehanike moramo da iz polja $\mathbb{Q}_p$ i $\mathbb{Q}_\infty$ izdvojimo polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ kao zajedničko za sve $\mathbb{Q}_p$ i $\mathbb{Q}_\infty$. Dakle, uzećemo da su minisuperprostorne koordinate q^α racionalni brojevi. Kvadrat modula adelične talasne funkcije

$$\left|\Psi(q^1, ..., q^n)\right|_\infty^2 = \prod_{\alpha=1}^{n} |\Psi_\infty(q^\alpha)|_\infty^2 \prod_p \prod_{\alpha=1}^{n} \Omega(|q^\alpha|_p), \tag{6.2}$$

$(\Omega^2(|x|_p) = \Omega(|x|_p))$ predstavlja gustinu verovatnoće da za dati model određena vrednost minisuperprostorne koordinate bude realizovana.

Kako skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ može da se prikaže kao $\mathbb{Z} \bigcup(\mathbb{Q} \setminus\mathbb{Z})$ i budući da je $|q^\alpha|_p \leq 1$ za $q^\alpha \in \mathbb{Z}$ i $|q^\alpha|_p > 1$ za $q^\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ izraz (6.2), obzirom na definiciju Ω funkcije (2.58), poprima oblik

$$\left|\Psi(q^1, ..., q^n)\right|_\infty^2 = \begin{cases} \prod_{\alpha=1}^{n} |\Psi_\infty(q^\alpha)|_\infty^2, & \text{za } q^\alpha \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{za } q^\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{6.3}$$

Podsetimo se da je do sada uglavnom korišćen sistem jedinica u kojem je $h = G = c = 1$. Ukoliko se ne koristi takav sistem jedinica, već se zadrže pomenute konstante u odgovarajućim izrazima, može da se pokaže [21,26] da se Plankova dužina $l_{pl} = \sqrt{hG/c^3}$, prirodno pojavljuje u izrazima za kvantno-mehaničke propagatore minisuperprostornih modela u obliku $\chi_p(-\frac{\bar{S}}{l_{pl}^2})$ (u jednačinama (5.13), (5.21), (5.32), (5.85) i (5.96)). Takođe se u tom slučaju dobija da je, na primer p-adična talasna funkcija de Siterovog modela (5.43), oblika $\psi_p(q) = \Omega(|\frac{q}{l_{pl}}|_p)$, što navodi na ideju da se skalirajući faktor ovog (i ostalih) modela prirodno izražava u jedinicama l_{pl}. Ukoliko je skalirajući faktor de Siterovog modela q jednak celobrojnom umnošku Plankove dužine, odnosno $q = m \cdot l_{pl}$, $m \in \mathbb{Z}$, tada je $\left|\frac{q}{l_{pl}}\right|_p = |m|_p \leq 1$, odakle sledi da je p-adična talasna funkcija, ukoliko je sistem u vakuumskom stanju $\Omega(|\frac{q}{l_{pl}}|_p)$, jednaka jedinici. Ukoliko je $q \neq m \cdot l_{pl}$, onda će odgovarajuća p-adična norma biti veća od jedinice a talasna funkcija je tada jednaka nuli.

Ovakav zaključak je u skladu sa formulom (6.3), uz napomenu da je u njoj već uzeto da je veličina q izražena u jedinicama $l_{pl} = 1$. Dakle, može se još jednom istaći da su rastojanja u ranoj vasioni jednaka celobrojnom umnošku Plankove dužine jer je verovatnoća egzistencije takve vasione jednaka $|\psi_\infty(q)|_\infty^2$, dok je u suprotnom slučaju verovatnoća jednaka nuli, što znači da u tom slučaju iz adeličnog prilaza sledi da unutar l_{pl} nema ničeg. Ovakva diskusija naravno važi u slučaju da je u p-adičnom sektoru, vasiona u vakuumskom stanju $\Omega(|q|_p)$, odnosno u stanju predstavljenom formulom (5.108) u slučaju kada minisuperprostor ima više stepena slobode. Ukoliko se u adeličnom stanju pojave i stanja (5.109) i (5.110) onda se oštrina diskretnosti narušava. Dakle, diskretnost zavisi od p-adičnog kvantnog stanja u kome se vasiona nalazi.

Iz svega iznetog do sada, može se zaključiti da su adelični modeli Vasione veoma prirodni jer se sva dozvoljena polja brojeva (prema teoremi Ostrovskog) tretiraju potpuno ravnopravno. Dakle u ovom prilazu se pretpostavlja da je Vasiona adelična i primenjuje se odgovarajuća procedura, koja sledi iz adelične kvantne mehanike, za određivanje uslova za egzistenciju njene talasne funkcije. Kao rezultat se dobija predikcija da su minisuperprostorne koordinate (koje su u vezi sa prostor-vremenom), za sistem koji se nalazi u p-adičnom vakuumskom stanju, diskretne na Plankovoj skali, što znači da su velike "realne" distance praktično kontinualne i mogu da se opišu samo realnim brojevima. Ukoliko se sistem ne nalazi u vakuumskom stanju već u nekom mešanom stanju, oštra diskretnost iščezava i prostor demonstrira uobičajene osobine neprekidnosti.

Napomenimo još jednom da se veza p-adičnih i realnih brojeva, i kao posledica, veza p-adične i standardne fizike, najbolje uočava u okviru adeličnog pristupa. Njihovo ravnopravno tretiranje pomoću integralnog pristupa u okviru adelične kvantne mehanike nužno dovodi do diskretne strukture na Plankovoj prostorno-vremenskoj skali [17].