Konusni preseci

(drugim rečima: kružnica, elipsa, hiperbola i parabola)

Definicija 0.1 *Algebarska kriva drugog reda u ravni jeste skup tačaka opisan jednačinom oblika:*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

gde je bar jedan od brojeva a_{11}, a_{12} *ili* a_{22} *različit od nule.*

- Matrica $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ se naziva **velika matrica** krive, gde je uzeto $a_{ij} = a_{ji}$.
- Matrica $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ se naziva **mala matrica** krive, gde je uzeto $a_{ij} = a_{ji}$.

Definišu se i sledeći **karakteristični** brojevi:

- $\mathbf{A} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,
- $\mathbf{A_{33}} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- $\mathbf{S} := a_{11} + a_{12}$.

Iako se u odnosu na neki drugi pravougli koordinatni sistem jednačina krive menja i njeni koeficijenti su neki potencijalno drugi brojevi a'_{ij}, važiće:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

tj. $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. Isto važi i za brojeve $\mathbf{A_{33}}$ i $\mathbf{S}$ (preciznije: $\mathbf{A_{33}} = \mathbf{A'_{33}}$ i $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$). Iz tog razloga se za ove brojeve kaže da su **invarijante** krive date jednačinom (1).

U nastavku ćemo podrazumevati da su sve jednačine i koordinate date u odnosu na neki **pravougli** koordinatni sistem.

1 Odredjivanje tipa konusnog preseka

(1) Ako je $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ onda kriva data jednačinom (1) uopšte nije KP (= konusni presek).

(2) Ako je $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ onda:

   1. za $\mathbf{A_{33}} = 0$ kriva je **parabola**
   2. za $\mathbf{A_{33}} < 0$ kriva je **hiperbola**
   3. za $\mathbf{A_{33}} > 0$ kriva je kružnica, elipsa ili prazan skup.

(3) Ako je $\mathbf{A} \neq 0, \mathbf{A_{33}} > 0$ onda:
– Ako su **S** i **A** **istog** znaka kriva je **prazan skup**
– Ako su **S** i **A** **različitog** znaka kriva je **kružnica** ili **elipsa**.

(4) Ako je kriva kružnica onda u odnosu na svaki pravougli koordinatni sistem važi:

$$a_{11} = a_{22}, \; a_{12} = 0.$$

Obrnuto, kakav god da je pravougli koordinatni sistem zadat, ako važi $a_{11} = a_{22}, \; a_{12} = 0$ onda je kriva ili prazan skup ili kružnica.

Za konusne preseke se definišu tzv. **elementi konusnih preseka**: **centar, ose, dijametri, asimptote, asimptotski pravci, polare i tangente** kako sledi.

Primer 1 *Šta predstavlja*

$$\mathcal{K}: \; 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 1 = 0.$$

2 Odnos pravih i konusnih preseka

Definicija 2.1 *Za pravac određen vektorom $\{\alpha, \beta\} \neq \overrightarrow{0}$ se kaže da je* **asimptotski** *ako važi:*

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0,$$

tj. ako:

$$\{\alpha, \beta\} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = [0].$$

Definicija 2.2 *Svaka tačka u odnosu na koju je KP (centralno) simetričan naziva se* **centar** *KP-a.*

Definicija 2.3 *Svaka prava u odnosu na koju je KP (osno) simetričan naziva se* **osa** *KP-a.*

Kružnica, elipsa i hiperbola imaju tačno jedan centar. Prava je osa kružnice AKKO prolazi kroz njen centar. Elipsa i hiperbola imaju tačno dve ose. Te dve ose se seku u tom centru i grade prav ugao. Za parabolu **ne postoji** centar ali postoji tačno jedna osa.

Za kružnicu i elipsu ne postoje asimptotski pravci. Za hiperbolu postoje tačno dva asimptotska pravca. Za parabolu postoji tačno jedan asimptotski pravac i to je upravo pravac njene ose.

Definicija 2.4 *Prave kroz centar KP-a koje su asimptotskog pravca nazivaju se* **asimptote** *KP-a.*

Hiperbola ima tačno dve asimptote (i one odgovaraju onim tačno dva asimptotskim pravcima). Parabola nema asimptote (ali ima jedan asimptotski pravac). Kružnica i elipsa nemaju asimptote (a ni asimptotske pravce).

Svaka prava sa bilo kojim KP-om može da ima 2,1 ili nijednu zajedničku tačku. Svaka prava sa bilo kojom algebarskom krivom drugog reda može da ima 2,1, nijednu zajedničku tačku ili, ako ih ima više od 2, onda cela leži na toj krivoj (i ta kriva je onda: prava, par paralelnih pravih ili par pravih koje se seku u jednoj tački).

Definicija 2.5 *Prava koja sa KP-om ima tačno jednu zajedničku tačku a* **nije** *asimptotskog pravca naziva se* **tangenta** *KP-a.*

U svakoj tački KP-a može da se postavi tačno jedna tangenta. Ako tačka nije na KP-u onda kroz nju prolazi **ili** nijedna tangenta tog KP-a (u tom slučaju se kaže da je ta tačka **unutar** KP-a) **ili** tačno dve tangente (u tom slučaju se kaže da je ta tačka **van** KP-a).

Prave **neasimptotskog** pravca a **koje nisu tangente** KP-a **ili** nemaju zajedničkih tačaka sa KP-om **ili** imaju tačno dve zajedničke tačke sa KP-om.

Asimptote i KP (preciznije: hiperbola) **nemaju** zajedničkih tačaka.

Prave **asimptotskog** pravca a koje **nisu asimptote** imaju tačno jednu zajedničku tačku sa KP-om.

3 Utvrđivanje odnosa prave i KP-a

Neka je data prava

$$(p): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

kroz tačku $\{x_0, y_0\}$ u pravcu vektora $\{a, b\} \neq \overrightarrow{0}$. Zamenom u jednačinu (1) dobija se jednačina oblika:

$$rt^2 + qt + s = 0$$

za neke brojeve $r, q, s \in \mathbb{R}$. Neka je Δ diskriminanta gornjeg polinoma.

- Prava je **tangenta** AKKO $r \neq 0$ i $\Delta = 0$.
- Prava je **asimptotskog pravca** AKKO je $r = 0$.
- Prava je asimptota AKKO $r = 0,\ q = 0,\ s \neq 0$.
- Prava **seče** KP u **dve** (različite) **tačke** AKKO $r \neq 0,\ \Delta > 0$.

Ukoliko se parametarske jednačine prave p zapišu koristeći neku drugu njenu tačku i/ili neki drugi njen vektor pravca, i/ili ukoliko se jednačine prave i KP-a posmatraju u odnosu na neki drugi pravougli koordinatni sistem, dobiće se neka jednačina $r't^2 + q't + s' = 0$ i odgovarajuća diskriminanta Δ', gde (r', q', s') ne mora biti jednako sa (r, q, s), a ni Δ' ne mora biti isti broj kao i Δ. Međutim, **uvek će važiti jedan te isti slučaj** od četiri gore navedenih (tako da se ne može desiti npr. da je prava tangenta gledano iz prve perspektive, a da gledano iz druge ona to nije).

4 Dijametri konusnog preseka

Neka je dat **neasimptotski** pravac vektorom $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Ako je l proizvoljna prava **paralelna sa** $\overrightarrow{v}$ koja seče KP u 2 (različite) tačke A_l i B_l označimo sa M_l središte duži A_lB_l. Postoji (jedinstvena) prava koja sadrži sva takva središta M_l za sve onakve prave $l || \overrightarrow{v}$. Ta prava se naziva **dijametar** *spregnut* (*konjugovan*) *sa pravcem* određenim vektorom $\overrightarrow{v}$.

Napomena Dijametri se definišu **isključivo** kao spegnuti sa nekim **neasimptotskim** pravcem (jer da je onaj $\overrightarrow{v}$ asimptotskog pravca onda ona prava l ili ne bi uopšte imala zajedničkih tačaka sa KP-om – ako je asimptota, ili bi imala tačno jednu zajedničku tačku sa KP-om – ako nije asimptota, pa u svakom slučaju ni za jednu takvu pravu ne bi bilo moguće posmatrti ono središte M_l).
Npomenimo takođe da se dijametar ne poklapa sa skupom svih onih središta M_l, već se taj skup sastoji od samo nekih tačaka tog dijametra.

(1) Za kružnicu i elipsu važi: prava je dijametar AKKO prolazi kroz centar.
Za hiperbolu važi: prava je dijametar AKKO **nije** asimptotskog pravca i prolazi kroz centar.
Za parabolu važi: prava je dijametar AKKO je paralelna sa osom parabole. Dakle svi dijametri parabole su paralelni međusobno i onog jedinstvenog su asimptotskog pravca (ali **spregnuti** su sa **neasimptotskim** pravcima – ne mešati te dve stvari!).

(2) Ako su d_1 i d_2 dva dijametra onda se kaže da je d_1 **spregnut** (ili *konjugovan*) **sa** d_2 ako je d_1 spregnut sa pravcem prave d_2.

Važi: d_1 je konjugovan sa d_2 AKKO je d_2 konjugovan sa d_1 (dakle ovo je *simetrična* relacija). U tom slučaju se kaže da d_1 i d_2 čine **par konjugovanih dijametara**.
Kod parabole uopšte i **ne postoje** dva dijametra od kojih je jedan spregnut sa onim drugim.

Ako su $\{\alpha_1, \beta_1\}$ i $\{\alpha_2, \beta_2\}$ pravci dva konjugovana dijametra onda važi:

$$a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{22}\beta_1\beta_2 = 0$$

(3) Kod kružnice važi: 2 dijametra su konjugovana AKKO su međusobno ortogonalni.

(4) Kod elipse i hiperbole, od svih parova konjugovanih dijametara tačno je jedan par konjugovanih dijametara koji su usto još i međusobno ortogonalni. Taj par su upravo ose (simetrije).

(5) Kod parabole samo je jedan dijametar ortogonalan na pravac sa kojim je spregnut. Taj dijametar je upravo osa parabole.

5 Polare konusnih preseka

Definicija 5.1 *Za par tačaka (A, B) se kaže da je (harmonijski)* **konjugovan** *sa parom tačaka (M, N) ako su A, B, M, N četiri različite kolinearne tačke i ako postoji broj $\lambda(\neq 0)$ tako da važi $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AN} = -\lambda\overrightarrow{NB}$.*

Ovaj poslednji uslov se označava i sa:

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = -\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}}$$

(ovo ovde **nije!** deljenje vektora). Kaže se i da je tačka M konjugovana sa tačkom N u odnosu na par (A, B).
Ako su M, A, B tri različite kolinearne tačke onda: na pravoj MAB postoji tačka koja je konjugovana sa M u odnosu na (A, B) (i tada je ta tačka jedinstvena) AKKO M **nije** središte duži AB.

Neka je data tačka P koja nije na KP-u. Ako je l proizvoljna prava koja prolazi kroz P koja KP seče u 2 (različite) tačke A_l i B_l tako da P nije središte duži A_lB_l, označimo sa Q_l onu tačku prave l koja je konjugovana sa P u odnosu na par (A_l, B_l). Za Q_l se kaže da je (harmonijski) **konjugovana** sa P **u odnosu na** dati KP.

Postoji (jedinstvena) prava koja sadrži sve takve tačke Q_l konjugovane sa P u odnosu na dati KP, za sve onakve prave l. Ta prava se naziva **polara za pol** (ili: *sa polom*) P. Tačka P je (a šta bi drugo bila nego) **pol** te polare.
Napomenimo da polara samo sadrži (kao svoj podskup) skup svih onih tačaka Q_l a ne poklapa se s njim (slična stvar kao i kod dijametara).

6 Nalaženje elemenata konusnih preseka

Ako je jednačina KP-a $\mathcal{K}$ data koeficijentima:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ onda :}$$

(1) Jednačina **tangente** u tački $\{x_0, y_0\}$ sa tog KP-a je:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0$$

(2) Jednačina polare sa polom $P = \{x_0, y_0\}$ je:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0$$

(3) Jednačina **dijametra** konjugovanog sa (neasimptotskim) pravcem određenim vektorom $\{\alpha, \beta\}$ je:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\alpha + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\beta = 0$$

(4) Jednačina **asimptote** u (asimptotskom) pravcu određenom vektorom $\{\alpha, \beta\}$ je:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\alpha + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\beta = 0$$

(5) Tačka $\{x_0, y_0\}$ je **centar** (simetrije) KP-a AKKO zadovoljava:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0 \end{cases}$$

(6) Kod elipse i hiperbole pravac $\{\alpha, \beta\}$ bilo koje od osa zadovoljava:

$$a_{12}\beta^2 + (a_{11} - a_{22})\alpha\beta - a_{12}\alpha^2 = 0 \tag{2}$$

Iz ove jednačine se dobiju pravci osa (kao njena nenula rešenja) a ose su upravo dijametri konjugovani s tim pravcima pa im se jednačine nalaze kao u (3).

Kod parabole rešenja $\{\alpha, \beta\} \neq \overrightarrow{0}$ jednačine (2) daju pravac ose i pravac ortogonalan na nju!

Pravac ose parabole (tj. njen asimptotski pravac) je pravac određen onim od vektora $\{a_{22}, -a_{12}\}$ ili $\{-a_{12}, a_{11}\}$ koji nije $\{0, 0\}$. Zato se osa kod parabole nalazi kao onaj dijametar koji je konjugovan sa pravcem određenim onim vektorom $\{a_{12}, a_{22}\}$ ili $\{a_{11}, a_{12}\}$ koji nije $\{0, 0\}$ (bar jedan od njih nije $\{0, 0\}$ jer bi u suprotnom bilo $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$).

Zadatak 1 *Nađimo ose (ili os***u***, ukoliko je reč o paraboli) krive*

$$(\mathcal{K}) : x^2 - 4xy + 3y^2 + (2/7)y + 2 = 0$$

Rešenje: Velika matrica ove krive je

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1/7 \\ 0 & 1/7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zato je $\mathbf{A} = -99/49 \neq 0$ i $\mathbf{A_{33}} = -1 < 0$ pa je $\mathcal{K}$ hiperbola i ima 2 ose. Jednačina (2) se svodi na $\beta^2 - \alpha\beta - \alpha^2 = 0$. Potražimo njena nenula rešenja.

- *Slučaj* $\alpha = 0$: ovde mora biti $\beta = 0$, pa se ne radi o nenula rešenju.

- *Slučaj* $\alpha \neq 0$: Deljenjem sa α^2 se dobija $(\frac{\beta}{\alpha})^2 - (\frac{\beta}{\alpha}) - 1 = 0$ tj.,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ili} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Dakle za pravce osa možemo uzeti pravce vektora $\overrightarrow{v_1} := \{2, 1+\sqrt{5}\}$ i $\overrightarrow{v_2} := \{2, 1-\sqrt{5}\}$. Osa o_1 u pravcu vektora $\overrightarrow{v_1}$ je (kao dijametar) spregnuta sa pravcem preostale ose o_2, tj. sa pravcem vektora $\overrightarrow{v_2}$ – setimo se da su ose međusobno konjugovani dijametri (koji se još seku i pod pravim uglom):

$$(o_1) : (x + 2y) \cdot 2 + (2x + 3y + 1/7) \cdot (1 - \sqrt{5}) = 0.$$

Analogno se dolazi i do jednačine druge ose:

$$(o_2) : (x + 2y) \cdot 2 + (2x + 3y + 1/7) \cdot (1 + \sqrt{5}) = 0.$$

Zadatak 2 *Kriva* $(\mathcal{K}) : y^2 + 5x - 2y - 9 = 0$ *je parabola (što se preporučuje da sami utvrdite). Pronađimo jednačinu njene ose.*

Rešenje: Imamo $\{a_{12}, a_{22}\} = \{0, 1\}$ i $\{a_{11}, a_{12}\} = \{0, 0\}$ pa je osa parabole $\mathcal{K}$ isto što i dijametar spregnut sa $\{0, 1\}$. Otuda je njena jednačina:

$$(0 \cdot x + 0 \cdot y + 5/2) \cdot 0 + (0 \cdot x + 1 \cdot y - 1) \cdot 1 = 0$$

tj. reč je o pravoj datom sa $y = 1$.

7 Jedna korisna činjenica

(Korisna) **činjenica:** Ako su jednačine asimptota hiperbole:

$$(l_1) : Ax + By + C = 0 \quad \text{i} \quad (l_2) : ax + by + c = 0$$

onda je jednačina te hiperbole:

$$(Ax + By + C)(ax + by + c) = R$$

za neki broj $R \in \mathbb{R}$. Ovo važi u **bilo kom** pravouglom koordinatnom sistemu.