

Nauka, matematika i MATHEMATICA u svakoj prilici

dr Marko D. Petković, docent
Prirodno-Matematički fakultet
Univerzitet u Nišu

dexterofnis@gmail.com
www.pmf.ni.ac.rs/dexter

Uvod

- Savremena nauka podrazumeva saradnju naučnika iz različitih oblasti.
- Matematički modeli se intenzivno koriste ne samo u fizici i tehničkim naukama, već i u hemiji, biologiji, sociologiji, ekonomiji itd.
 - Na berzama i u biološkim institutima je sve više matematičara, fizičara i programera.
- Konstrukcija i rešavanje matematičkog modela podrazumeva i određene rutinske operacije.
- Za efikasnu primenu, potreban je alat koji je moćan ali i jednostavan za korišćenje.

Primer (neobičan prsten)

- U posudu sa etil alkoholom kapnemo jednu kap kalijum permanganata (KMnO_4) i posmatramo evoluciju.
- Primećujemo da se formirao tanak prsten ljubičaste boje. Da bi objasnili ovu pojavu posmatramo model u kome supstance medjusobno difunduju i reaguju.

$$\frac{dn_i}{dt} = D \left(\frac{d^2 n_i}{dx^2} + \frac{d^2 n_i}{dy^2} \right) + \dots$$

Difuzija

Reakcija

- Potrebno je:
 - konstituisati metod za rešavanje predhodne jednačine,
 - implementirati ga na računaru
 - prokomentarisati rezultate i izvući zaključke

Šta je MATHEMATICA?



- Programski paket **MATHEMATICA** je jedan od najpopularnijih programskih paketa za simbolička i numerička izračunavanja.
- Iako je prvenstveno konstruisan kao sistem kompjuterske algebre (**CAS, Computer Algebra System**), poseduje mnoge druge mogućnosti.
- Prva verzija je izašla 1988 godine (verzija 1.0). Poslednje verzije su 6.0 iz 2007. i 7.0 iz 2008. godine.
- MATHEMATICA se koristi u mnogim oblastima nauke i tehnike, prvenstveno u matematici, fizici, hemiji, biologiji, elektronici, itd.
- MATHEMATICA je takodje našla primene u obrazovanju. Kursevi, interaktivne demonstracije, itd...

O autoru MATHEMATICA-e

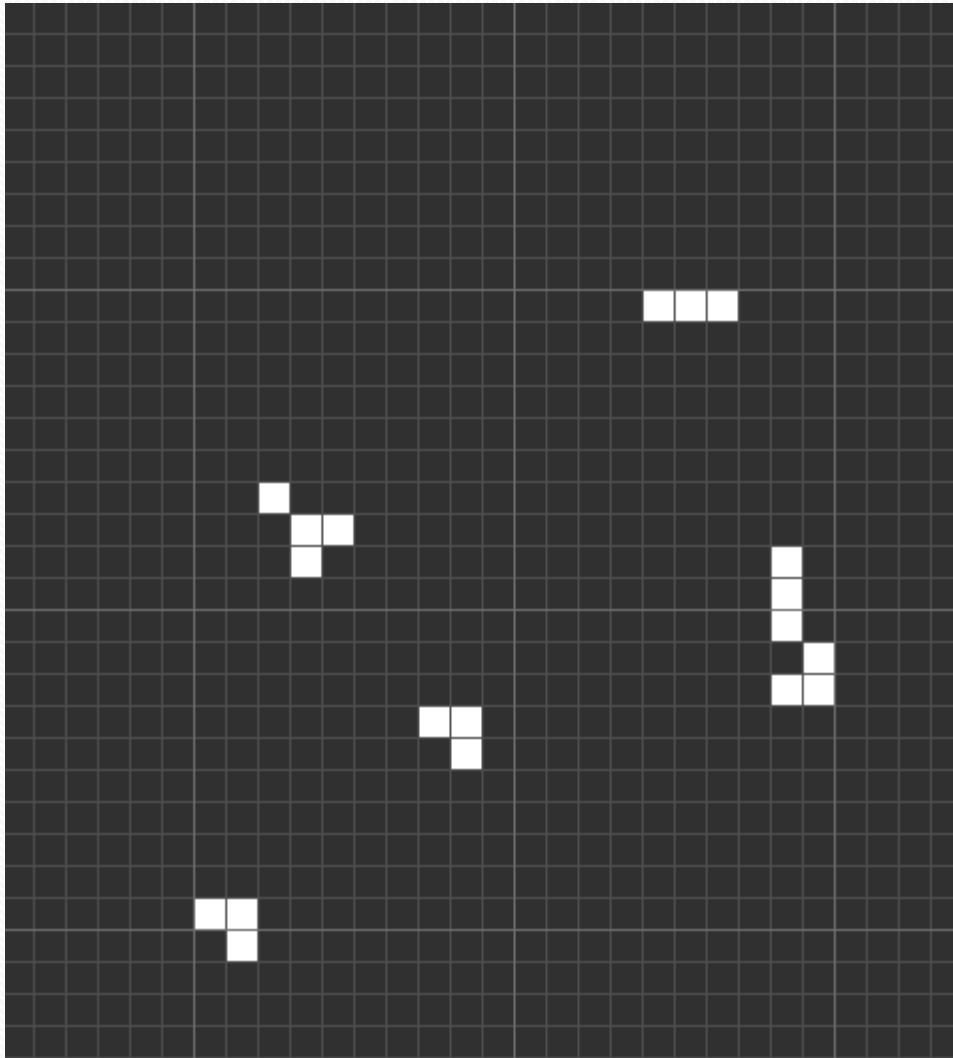
- **Stephen Wolfram** je rođen 1959 godine u Londonu. Školovao se na Itonu, Oxfordu i Caltechu.
- Prvi naučni rad je objavio sa 15 godina a sa 20 je doktorirao iz teorijske fizike.
- U početku se bavio teorijskom fizikom a kasnije celularnim automatima.
 - Baveći se celularnim automatima dolazi do neverovatnih otkrića i potpuno novog pristupa nauci.
 - Osnovna ideja: svi procesi u prirodi, ma kako oni bili složeni, mogu se opisati pomoću diskretnog sistema baziranog na jednostavnim pravilima.
- Započinje izradu MATHEMATICA-e 1979 godine a 1987 osniva kompaniju Wolfram Research koja nastavlja razvoj.
- Autor je knjige *A New Kind of Science*.



Podela celularnih automata

- Skoro svi inicijalni paterni evoluiraju u:
 - **stabilno stanje**. Nema slučajnosti.
 - **stabilno ili oscilatorno stanje**. Slučajnost je prisutna samo na početku evolucije.
 - **haotično stanje**. Sve stabilne strukture se vrlo brzo unište i lokalne promene se propagiraju beskonačno.
 - **Strukture koje medjusobno interaguju na kompleksan i interesantan način**. Stabilne ili oscilujuće strukture se eventualno pojavljuju posle dužeg vremena (čak i za najprostije paterne).
 - Primeri: **Game of Life**, **Wolframovi repeated rule automati**
Predpostavlja se da su skoro svi automati ovog tipa **univerzalni računari**.

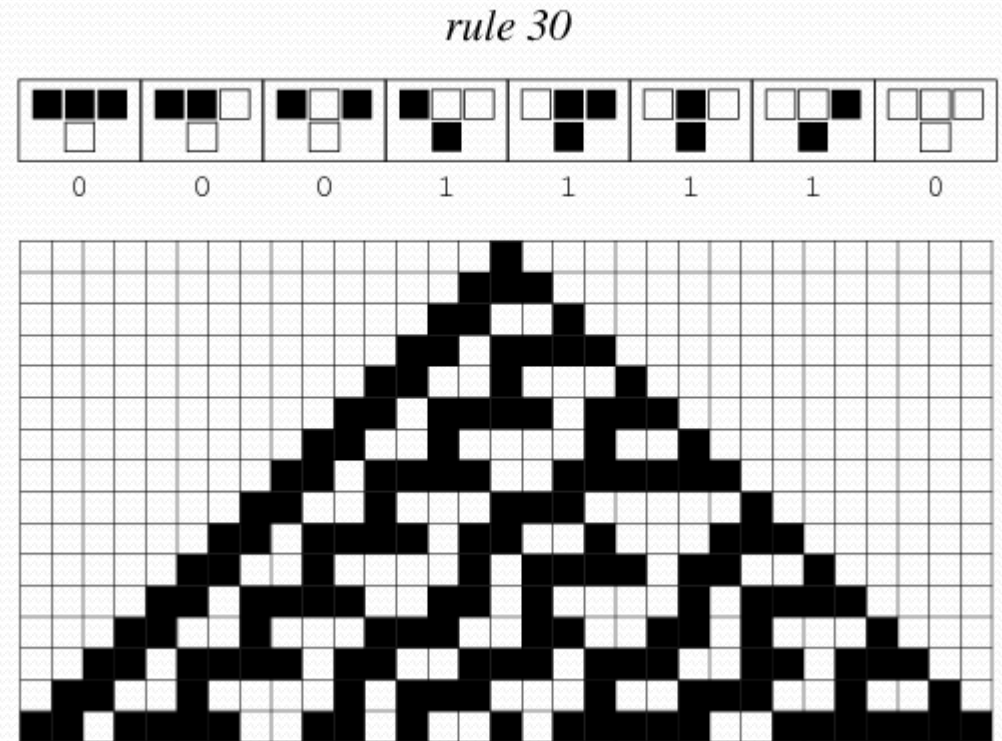
Game of Life



- Jednostavna pravila: 2,3/3.
- Sistem koji je veoma složen!

Wolframovi automati

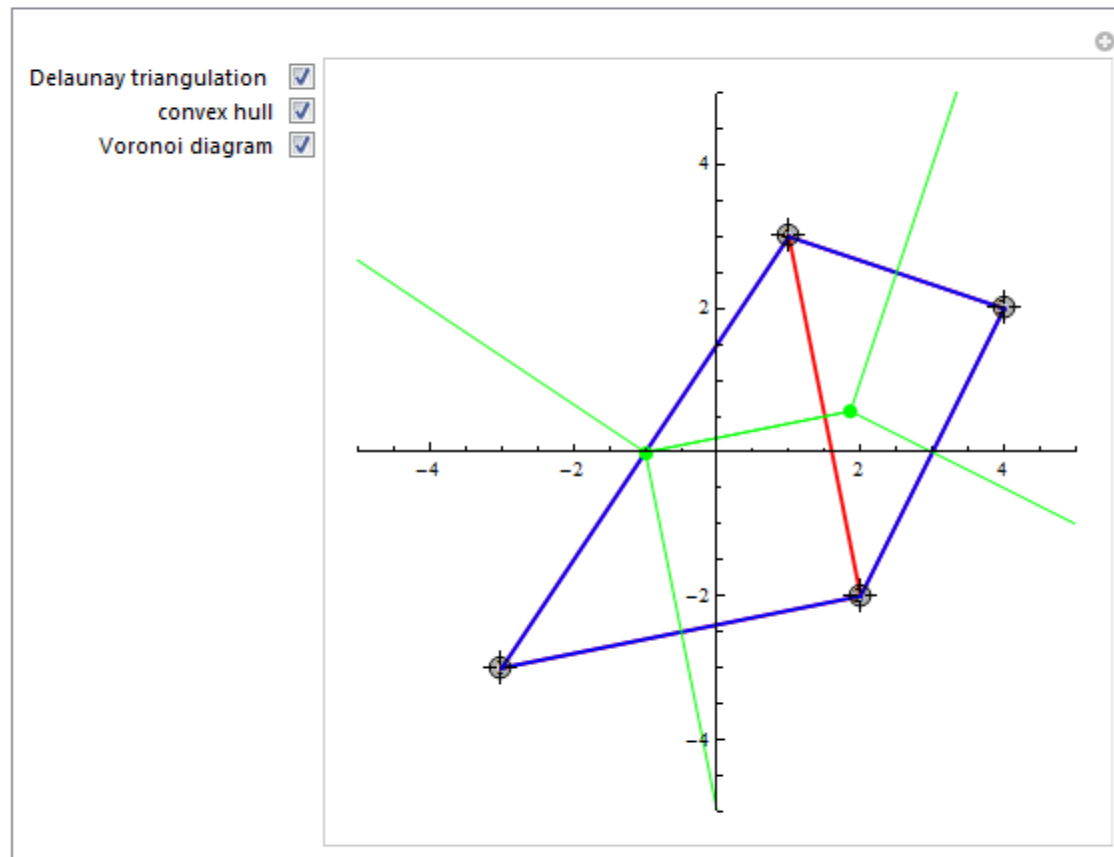
- Svaka ćelija, u narednoj iteraciji, dobija se samo na osnovu te i dve susedne ćelije.
- Pravilo: $30 = (00011110)_2$
- Promenom pravila dobijaju se različiti automati
- Automati sa pravilima 30 i 110 pripadaju klasi 4



Šta sve može MATHEMATICA?

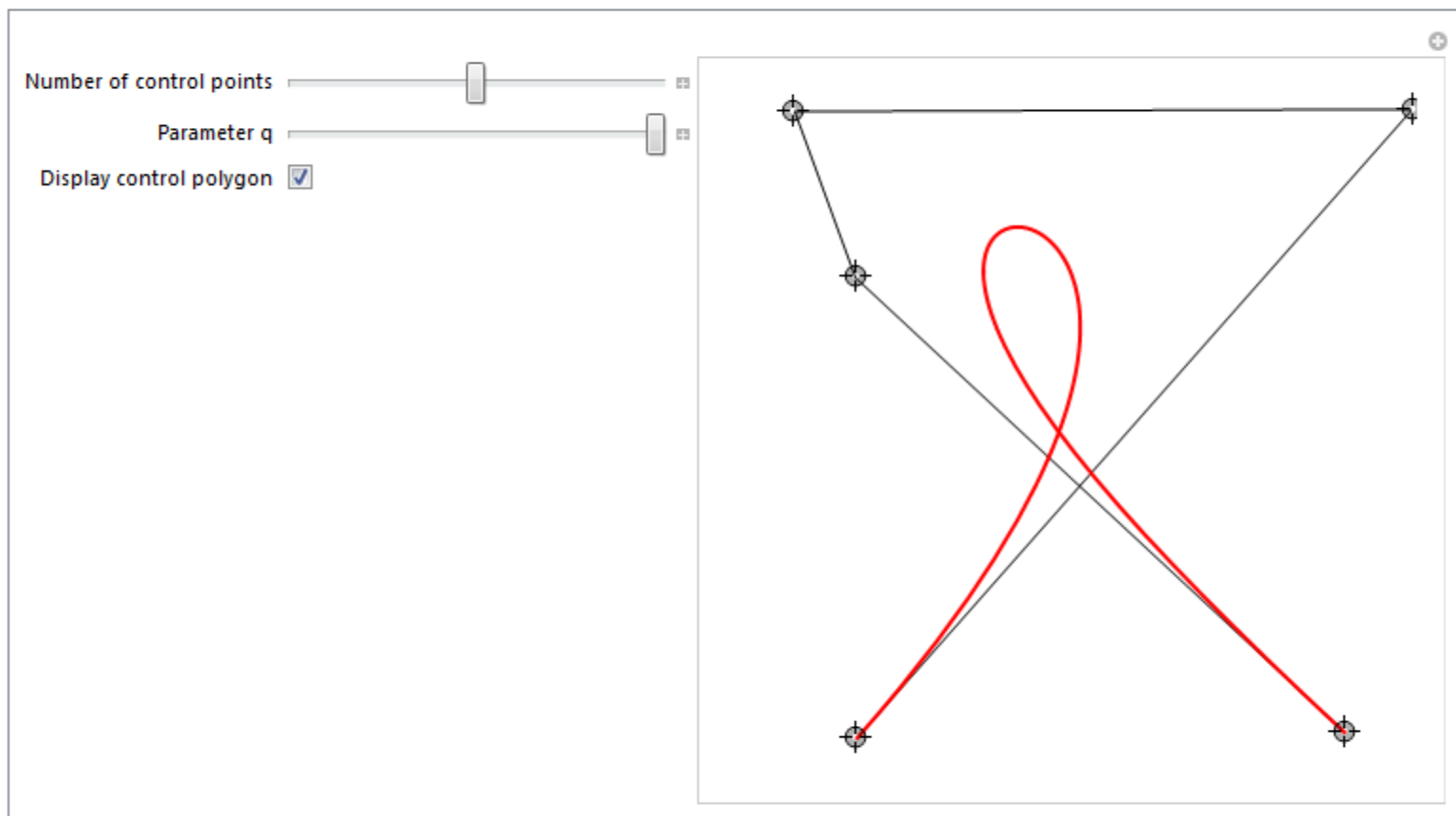
- Da izračuna skoro sve što vam je potrebno (poseduje ogromnu kolekciju ugradjenih funkcija i algoritama).
- Simboličko izračunavanje (rad sa tačnim brojevima, uprošćavanje izraza, simbolička integracija...).
- Numerika proizvoljne preciznosti (MATHEMATICA podržava rad sa realnim brojevima u proizvoljnoj preciznosti).
- Obrada raznih vrsta podataka (Podrška za učitavanje i obradu zvuka, slike...).
- Programiranje i veza sa drugim prog. jezicima (CPP, Java, Delphi...).
- Izrada interaktivnih demonstracija.

Convex Hull and Delaunay Triangulation



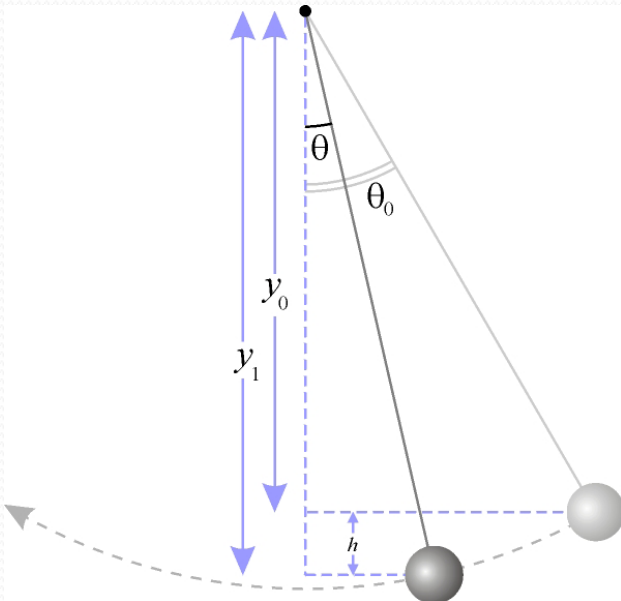
For three or more points, you can see the convex hull (blue), the Delaunay triangulation (red), or the Voronoi diagram (green).

q - Bézier Curves



Visualization of Bézier curve and its generalization in q-calculus. The Bézier curve, introduced by Pierre Bézier is widely used in computer graphics for modelling smooth curves and also in design of planes, sport cars, etc. This concept is generalized in q-calculus obtaining whole family of curves parametrized by the parameter q from unit interval. Original Bézier curve is then obtained by the limit when q goes to 1.

Primena: Matematičko klatno

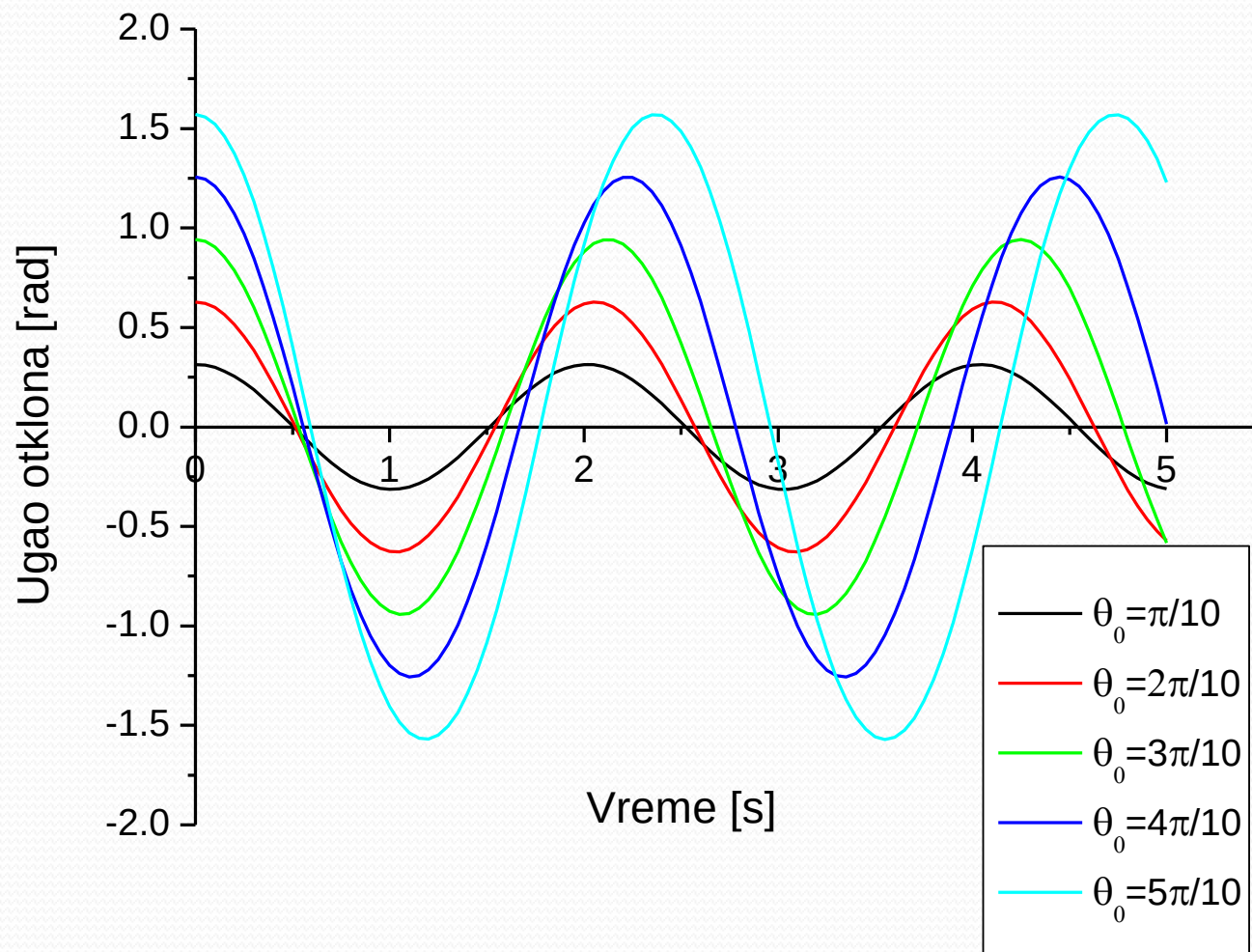


- Telo je obešeno o neistegljivu nit i pušteno da osciluje pod dejstvom gravitacione sile.
- Jednačina kretanja tela i početni uslov su:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

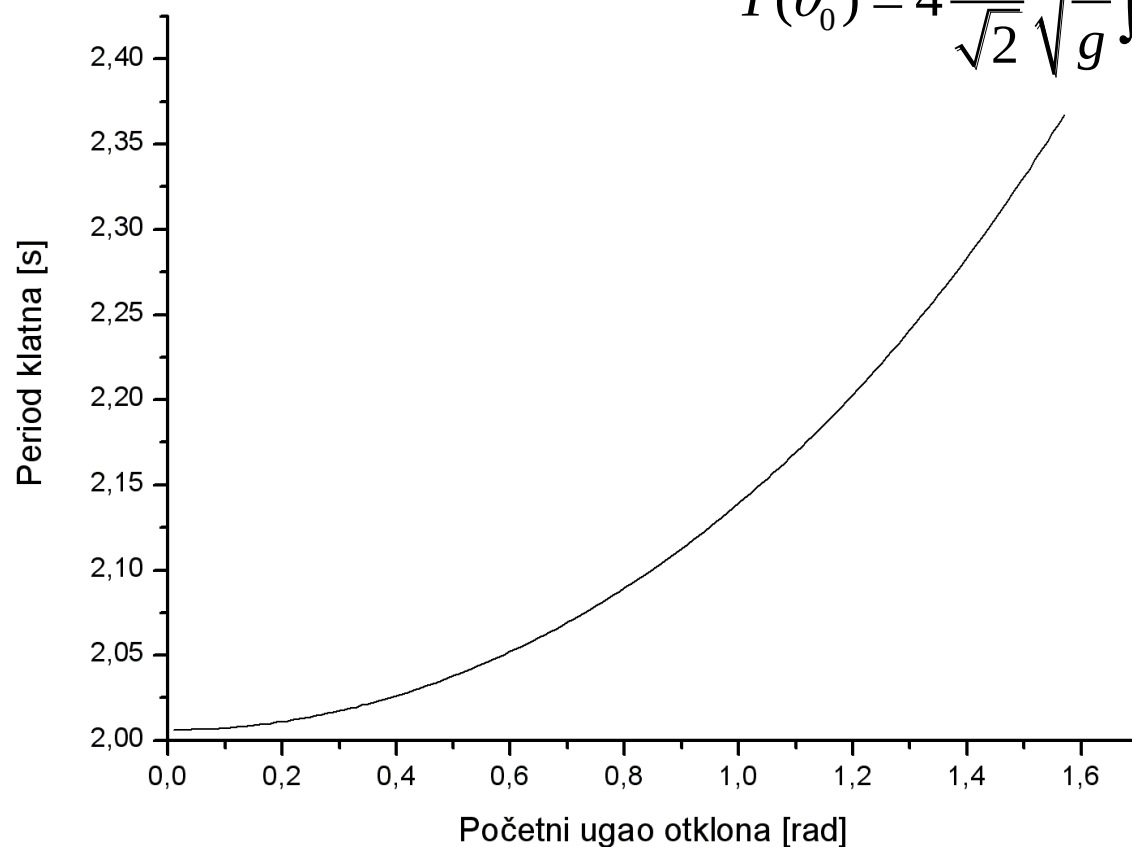
$$\theta(0) = \theta_0, \quad \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

Ugao otklona u funkciji vremena

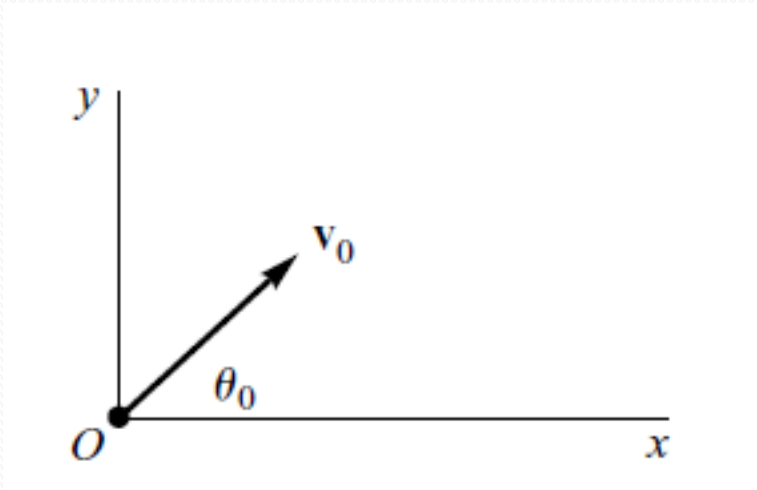


Zavisnost perioda klatna od početnog ugla otklona

$$T(\theta_0) = 4 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta$$



Primena: Kretanje projektila



- Telo se ispaljuje početnom brzinom v_0 i pod uglom θ_0 .
- Tokom kretanja, na telo deluje sila otpora vazduha

$$\vec{F}_{ov} = -mkv \cdot \vec{v}$$

- Jednačine kretanja tela i početni uslovi su:

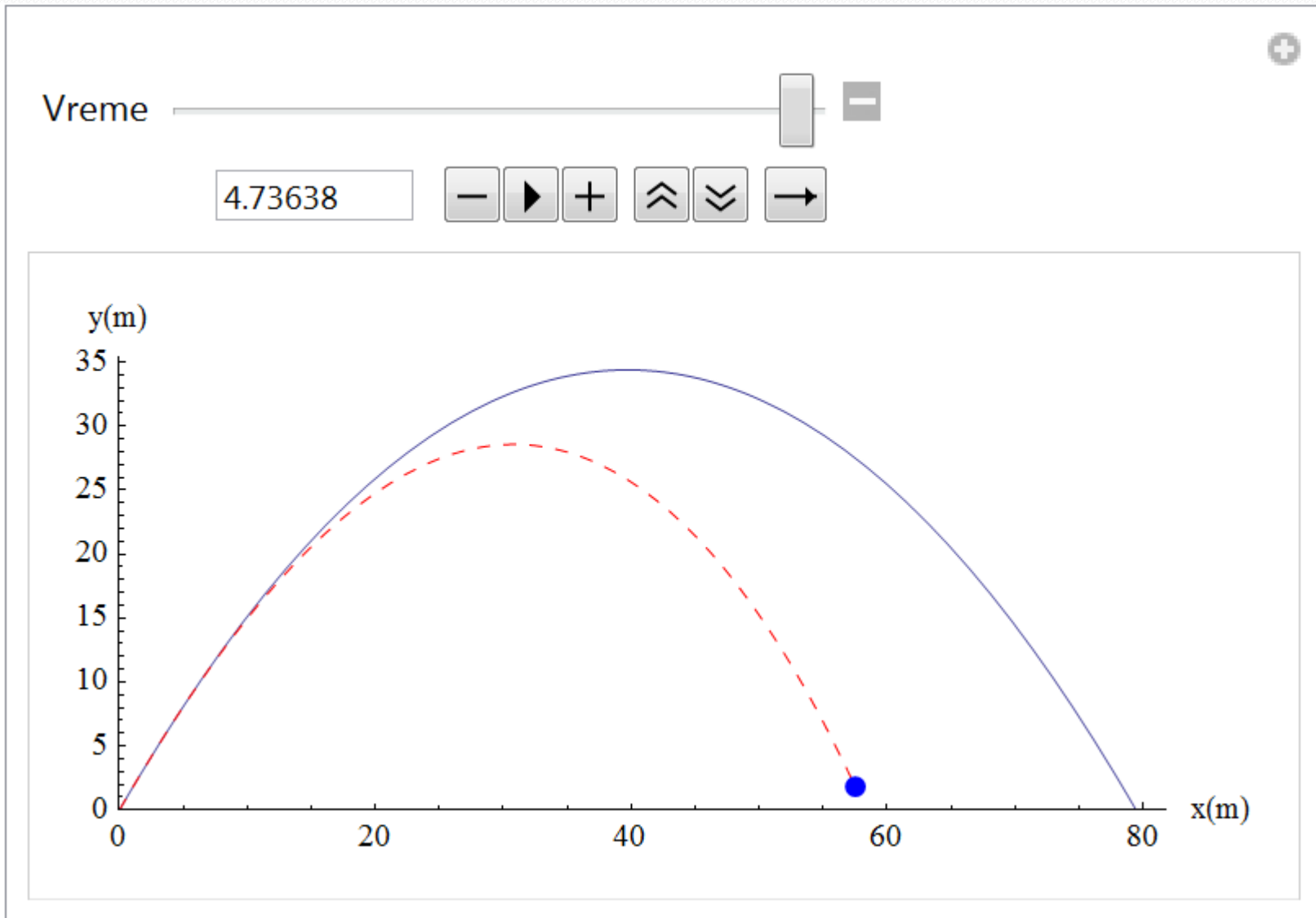
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \left(\frac{dy}{dt}\right) - g$$

$$x(0) = y(0) = 0$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \cos \theta_0$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \sin \theta_0$$

Animacija



Dometa projektila

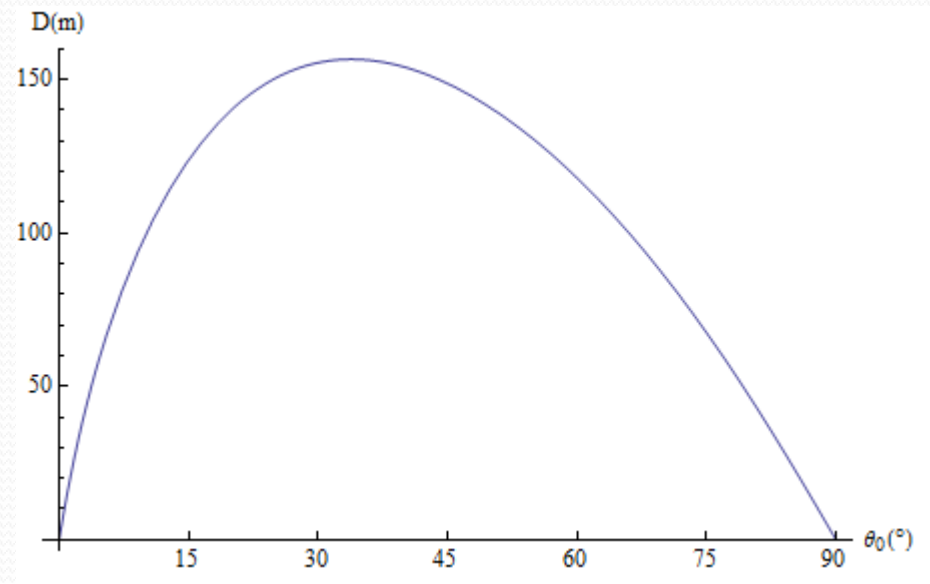
- Ukoliko nema otpora vazduha:

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

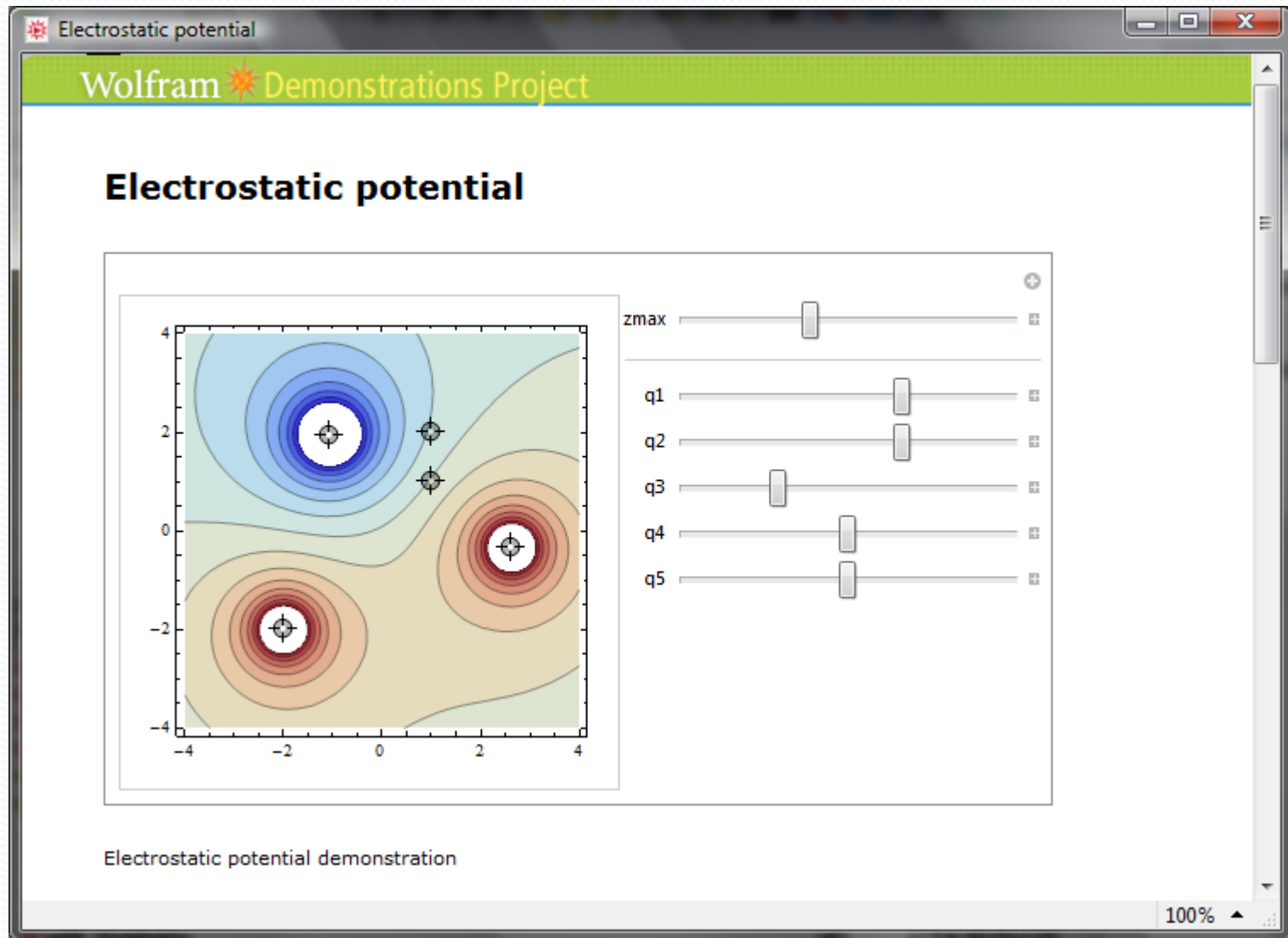
- U suprotnom se računa kao:

$$D = x(t_0), \quad y(t_0) = 0, \quad t_0 > 0$$

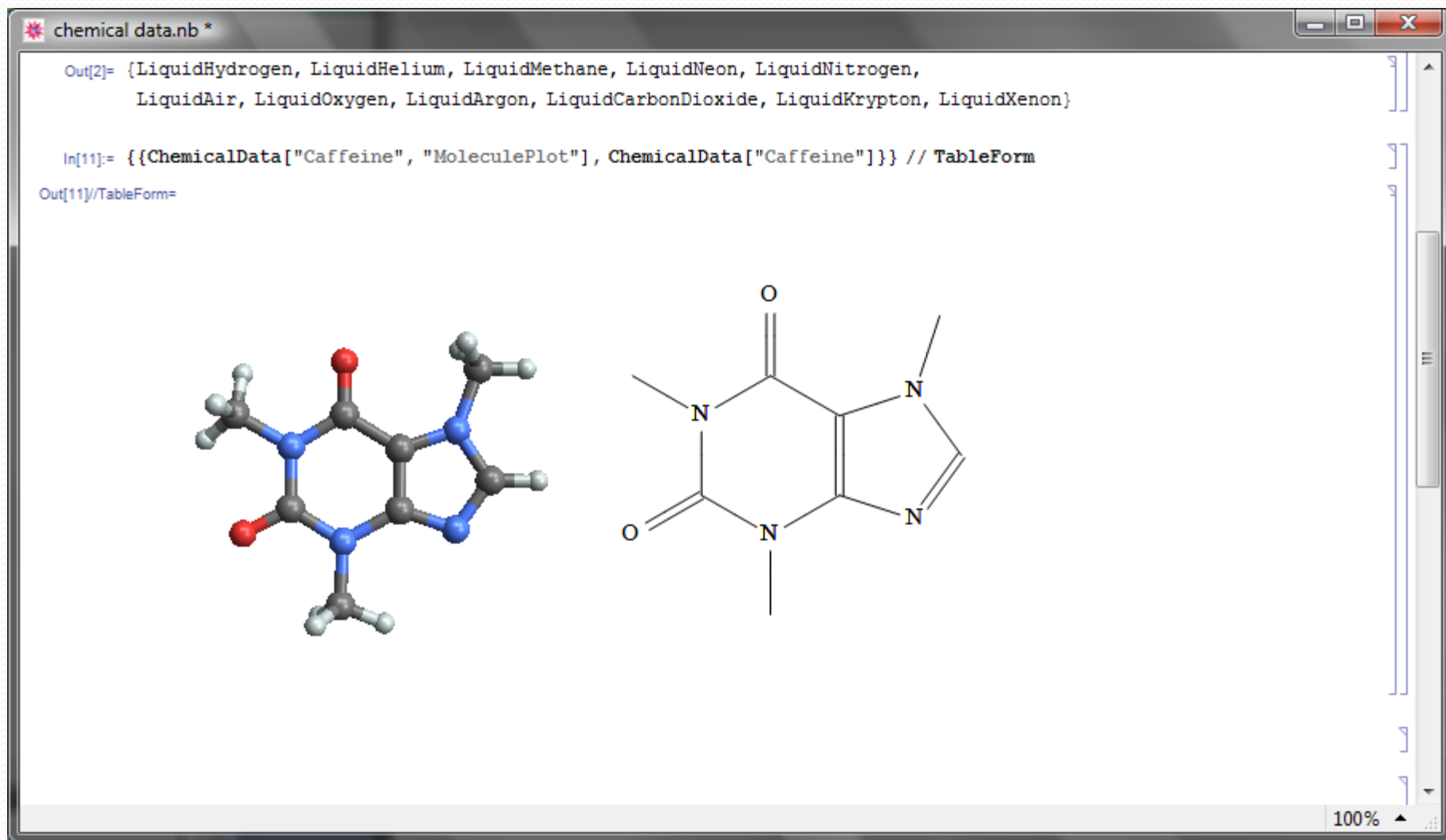
- Primetimo da se maksimalna vrednost dometa dostiže za početni ugao manji od 45°



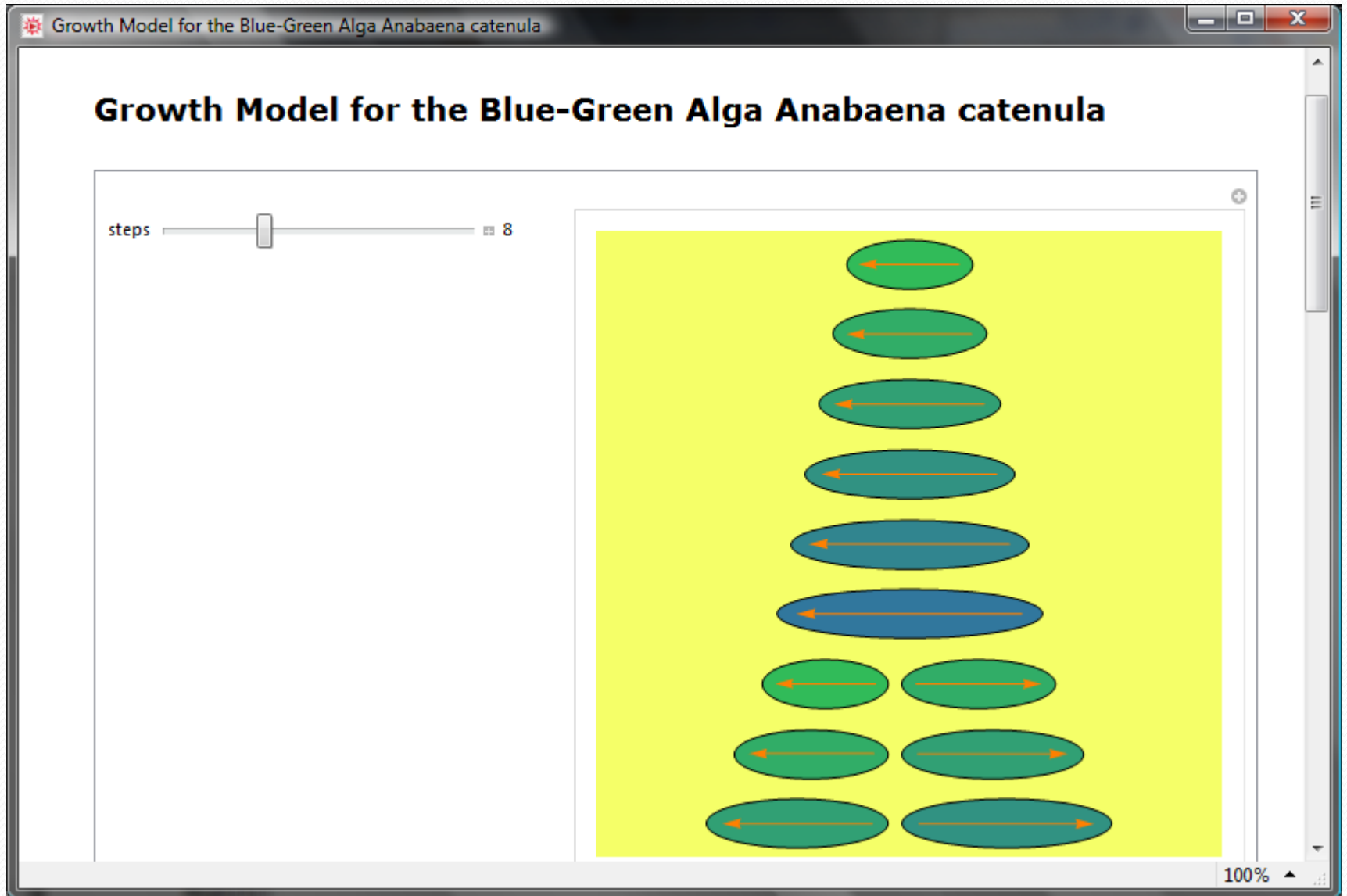
Elektrostatika



Primena u hemiji



Primena u biologiji



A šta to MATHEMATICA ne može...

- Glavni nedostaci MATHEMATICA-e:
 - Znatno je sporija od proceduralnih jezika (C, Delphi,...)
 - Greške u programu se teško ispravljaju.
- Programi slični MATHEMATICA-i su: MATLAB, MAPLE, MUPAD,...
- MATHEMATICA ne može idejno da reši problem.
 - Može obaviti rutinski deo posla, ali do ideje ili matematičkog modela mora doći sam naučnik

Literatura

- N. Krejić, Dj. Herceg, *Matematika i MATHEMATICA*, Prirodno-Matematički fakultet u Novom Sadu, drugo izdanje, 2004.
- P.S. Stanimirović, G.V. Milovanović, *Programski paket MATHEMATICA i primene*, Elektronski Fakultet u Nišu, edicija Monografije, 2002.
- K. Surla, Dj. Herceg, S. Rapajić, *MATHEMATICA za fizičare i hemičare*, Prirodno-Matematički fakultet u Novom Sadu, drugo izdanje, 1998.
- S. Wolfram, *MATHEMATICA Book, Version 5.0*, Wolfram Media and Cambridge University Press, 1999.

Literatura

- J. Gray, *Mastering MATHEMATICA, programming methods and applications*, University of Illinois, 1994.
- P.T. Tam, *A Physicist's Guide to MATHEMATICA*, second edition, Elsevier, 2008.



Hvala na pažnji!