Glava 2

LINEARNO PROGRAMIRANJE

2.1 Opšti zadatak linearnog programiranja

Opšti zadatak linaearnog programiranja glasi: Naći ono nenegativno rešenje $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n)$ sistema linearnih jednačina (ograničenja):

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

za koje funkcija cilja (linearna funkcija promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$):

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

dostože maksimalnu (minimalnu) vrednost.

Svako nenegativno rešenje sistema nejednačina nazivamo *dopustivim rešenjem.*

Sa D označavamo skup svih dopustivih rešenja zadatka.

Teorema 2.1.1 *Dati kriterijum optimizacije može da se zameni suprotnim, pri čemu ta zamena ne utiče na optimalno rešenje, tj. ako je za $X^0 \in D$ ispunjeno*

$$F(X^0) = \max_{X \in D} F(X)$$

onda je

$$-F(X^0) = \min_{X \in D}[-F(X)]$$

Za zadatak linearnog programiranja kažemo da je dat u *kanoničkom* obliku ako je sistem ograničenja dat u obliku jednakosti.

Prevođenje sistema nejednačina u sistem JEDNAČINA.

Matrična reprezenatacija problema.

Teorema 2.1.2 *Skup dopustivih rešenja zadatka linearnog programiranja je konveksan skup. Takav skup u R^n naziva se konveksni polijedar.*

Teorema 2.1.3 *Ako je oblast dopustivih rešenja D zadatka linearnog programiranja ograničena, tada se maksimum i minimum funkcije cilja dobija u jednoj ekstremnoj tački na granici obalsti D.*

Zadatak 1. Dat je zadatak linearnog programiranja u opštem obliku:
Maksimizirati: $F = 2x_1 + 5x_2$
pod ograničenjima

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 21 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.2 Konveksni skupovi

2.3 Geometrijsko rešenje zadatka LP (slučaj $n = 2$)

Geometrijska metoda, za razliku od algebarske (simpleks) metode ima ograničenu primenu. Ona može da se iskoristi u slučaju dve ili tri promenljive. Ova metoda se može primeniti i u slučaju ako je $n - m = 2$, gde je n broj promenljivih, a m broj jednačina.

Zadatak 1.
Pronaći maksimalnu vrednost funkcije kriterijuma:

$$Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Zadatak 2.
Pronaći maksimalnu vrednost funkcije kriterijuma:

$$Z(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 14 \\ -x_1 + 3x_2 &\geq 0 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Zadatak 3.
Pronaći minimalnu vrednost funkcije kriterijuma:

$$Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Zadatak 4.

Jedna fabrika proizvodi grejalice i usisivače. Za proizvodnju jedne grejalice potrebno je 2 sata rada za proizvodnju delova i 1 sat rada za sklapanje i proveru. Za proizvodnju usisivača potreban je 1 sat rada za proizvodnju delova i 2 sata za sklapanje i proveru. Deo fabrike gde se proizvode ovi aparati može da radi najviše 8 sati dnevno, dok deo fabrike za sklapanje i proveru može da radi najviše 10 sati dnevno. Ako je zarada od prodaje za svaku grejalicu 30 din. i za svaki usisivač 50 din koliko grejalica i usisivača treba proizvoditi da bi zarada bila maksimalna?

Zadatak 5. (Post-optimalna analiza)

Firma proizvodi dve vrste boja: za unutrašnje (U) i za spoljašnje (S) radove. Proizvedene količine boja firma isporučuje trgovini na veliko. Za proizvodnju ovih boja koriste se sirovine A i B. Maksimalno moguće dnevne zalihe sirovina A i B iznose respektivno 6 i 8 tona. Utrošak sirovina A i B u tonama za proizvodnju jedne tone svake od boja iznosi:

Sirovine	Utrošak sirovina u t.		Maksimalne zalihe
	boja S	boja U	
A	1	2	6
B	2	1	8

Analiza tržišta u dužem periodu pokazuje da dnevna potražnja boje U nikada ne premašuje potražnju boje S više od jedne tone. Takođe je uočeno da dnevna potražnja boje U nikada ne prelazi 2 tone dnevno.

Cene jedne tone boja jednake su: 3 hiljade dinara za jednu tonu boje S i 2 hiljade dinara za jednu tonu boje U. Koje količine boja (u tonama) treba da proizvede firma, tako da se realizacijom proizvodnje ostvari maksimalna zarada?

Rešenje:

Prvi zadatak analize osteljivosti: uticaj promena količine sirovina na optimalno rešenje.

1) Za koliko mogu da se uvećaju zalihe sirovina A ili B da bi se poboljšalo optimalno rešenje?

2) Za koliko mogu da se smanje zalihe neke sirovine a da se zadrži dobijeno optimalno rešenje?

- Aktivna i neaktivna ograničenja. Prava koja predstavlja aktivno ograničenje prolazi kroz optimalnu tačku. Prava koja ne prolazi kroz optimalnu tačku predstavlja neaktivno ograničenje. Ako je neko ograničenje aktivno, onda je logično da se taj resurs proglasi i deficitarnnim, jer se u potpunosti koristi u proizvodnji. Resurs kome odgovara neaktivno ograničenje je nedeficitarni resurs, jer se po realizaciji proizvodnje ne utroše sve njegove zalihe.

Pri analizi osetljivosti modela u odnosu na promene desnih strana ograničenja odrađujemo:

- Granično dopustivo uvećanje zaliha deficitarnog resursa, koje će omogućiti poboljšanje optimalnog rešenja

- Granično dopustivo smanjenje zaliha nedeficitarnog resursa, koje neće izmeniti optimalnu vrednost funkcije cilja.

Drugi zadatak analize osetljivosti: Koji je resurs najpogodnije uvećati?

Dopuna resursa zahteva dodatno ulaganje novca, pa je prirodno postaviti pitanje: Kom resursu dati prednost u ulaganju dodatnih sredstava?

Uvodimo karakteristiku značajnosti svake dodatne jedinice deficitarnog resursa. Označimo sa y_i tu karakteristiku za resurs i:

$$y_i = \frac{\text{maksimalni priraštaj optimalne vrednosti } Z}{\text{maksimalno dopustivi priraštaj obima resursa } i}$$

Treći zadatak analize osetljivosti: U kojim granicama je dopustiva promena koeficijenata funkcije cilja?

- Za koliko se može umanjiti ili uvećati svaki od koeficijenata, a da ne dođe do promene optimalnog rešenja?
- Kako promeniti neki od koeficijenata funkcije cilja da nedeficitarni resurs postane deficitarni i obratno, da deficitarni postane nedeficitarni?

Zadatak 6. (Beskonačno mnogo rešenja)
Pronaći maksimalnu vrednost funkcije kriterijuma:

$$Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Zadatak 7. (Neograničena funkcija cilja)
Pronaći maksimalnu vrednost funkcije kriterijuma:

$$Z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 \leq 4 & \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

2.4 Geometrijsko rešenje zadatka LP (slučaj $n - m = 2$)

Zadatak LP se može grafički rešiti i u slučaju kada je broj promenljivih za dva veći od broja nezavisnih linearnih ograničenja. Tada se dve od n promenljivih mogu izabrati kao nezavisne (slobodne) promenljive, a preostalih m mogu se uzeti za zavisne promenljive i izraziti pomoću nezavisnih promenljivih.

Neka je zadatak LP dat u kanoničkom obliku:

Maksimizirati $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
Pod ograničenjima

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Kada je zadatak LP dat u opštem obliku, najpre ga treba transformisati na kanonički oblik.

Ako su x_1 i x_2 izabrane za nezavisne primenljive, onda se iz sistema jednačina promenljive $x_3, x_4, \ldots, x_n$ mogu izraziti pomoću x_1 i x_2 na sledeći način:

$$\begin{aligned} x_3 &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \beta_3 \\ x_4 &= \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \beta_4 \\ &\ldots \\ x_n &= \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \beta_n \end{aligned}$$

Veličine x_1 i x_2 odmeravamo u koordinatnom sistemu Ox_1x_2 i, očigledno, zbog uslova $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, parovi vrednosti (x_1, x_2) se prikazuju tačkama u prvom kvadrantu tog koordinatnog sistema. Uslovi nenegativnosti drugih promenjivih određuju oblast dopustivih rešenja u prvom kvadrantu. Nejednačina, na primer $x_3 \geq 0$ određuje dopustivu poluravan sa jedne strane prave $\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$. Deo ravni Ox_1x_2 koji istovremeno pripada svim poluravnima $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ predstavlja oblast dopustivih rešenja D.

Zadatak 1. Rešiti geometrijskom metodom zadatak:
Minimizirati $F = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 - 2x_7$
pod ograničenjima:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= -5 \\ x_1 + x_2 - x_5 &= -4 \\ x_2 + x_6 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 &= 7 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 7 \end{aligned}$$

Zadatak 2. Rešiti geometrijskom metodom zadatak:
Minimizirati $F = -x_1 - x_2 - x_5$
pod ograničenjima:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 &= -3 \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5 \end{aligned}$$

Zadatak 3. Rešiti geometrijskom metodom zadatak:
Maksimizirati $F = 2x_1 + 5x_2$
pod ograničenjima:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 &= 21 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 9 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5 \end{aligned}$$

2.5 Algebarska simpleks metoda za rešavanje zadatka LP

Neka u kaniničnom obliku zadatka LP imamo n promenljivih i m međusobno linearno nezavisnih ograničenja $(r = m)$ sa, na primer, minimizacijom funkcije cilja:

Minimizirati: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

pod ograničenjima

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$x \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Optimalno rešenje se nalazi u jednom od temena konveksnog polijedra, gde je najmanje $k = n - m$ promenljivih jednako nuli. Izaberimo proizvoljno k promenljivih za nezavisne i pomoću njih izrazimo zavisne promenljive. Neka su nezavisne promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k + \beta_{k+1} \\
&x_{k+2} = \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+2,k}x_k + \beta_{k+2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nk}x_k + \beta_n
\end{aligned}
$$

Funkcija cilja u funkciji $x_1, x_2, \ldots, x_k$ postaje

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_k x_k$$

Ako stavimo da je $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ dobijamo bazisno dopustivo rešenje:

$$(0, 0, \ldots, 0, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n) \quad \text{i} \quad F = \gamma_0$$

I KORAK: Među koeficijentima funkcije cilja $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ odabrati γ_i za koje važi da je $\gamma_i < 0$. U tom slučaju će promenljiva x_i preći iz zavisnih u nezavisne.

Ako takvo γ_i ne postoji, onda smo dostigli optimalnu tačku, tj. više ne možemo da umanjimo vrednost funkcije cilja.

Ako su svi koeficijenti $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ uz promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_k$ u funkciji cilja pozitivni, onda uvećavajući neku od ovih promenljivih (na vrednosti koje su veće od 0) ne možemo da umanjimo vrednost funkcije cilja. To znači da je dobijeno bazisno rešenje i optimalno. Međutim, ako između koeficijenata $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ ima i negativnih, onda uvećavajući vrednost promenljivih ispred kojih je koeficijent u funkciji cilja negativan, možemo da umanjimo vrednost funkcije cilja F, to jest, možemo da dođemo do boljeg bazisnog rešenja.

Neka je koeficijenat γ_1 negativan. Sada ima smisla uvećati promenljivu x_1 i na taj način preći od dobijenog rešenja, gde je x_1 bilo jednako nuli, do novog bazisnog rešenja gde će umesto x_1 biti jednaka nuli neka od zavisnih promenljivih. Uvećavajući x_1, smanjujemo vrednost funkcije cilja F ali moramo da pazimo da nam pri tom neka od zavisnih promenljivih $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ne postane negativna. One, očigledno neće postati negativne, ako su koeficijenti uz x_1 u svim jednačinama pozitivni, pa se tada x_1 može da uveća do beskonačnosti, što bi značilo da je u tom slučaju funkcija cilja neograničena.

Pretpostavimo da se između koeficijenati uz x_1 u jednačinama nalaze i negativni koeficijenti. Neka je, na primer, u jednačini za x_l:

$$x_l = \alpha_{l1}x_1 + \alpha_{l2}x_2 + \cdots + \alpha_{lk}x_k + \beta_l$$

koeficijenat uz x_1 negativan: $\alpha_{l1} < 0$. Ako stavimo $x_2 = x_3 = \cdots = x_k = 0$, onda x_1 možemo da uvećamo do vrednosti

$$-\frac{\beta_l}{\alpha_{l1}}, \quad , \quad \beta_l > 0$$

jer za tu vrednost promenljive x_1 promenljiva x_l postaje jednaka nuli. Od promeljivih $x_{k+1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ biramo promenjivu x_r za koju je veličina

$$\frac{\text{slobodan član}}{-\text{koeficijent uz } x_1}$$

najmanja, tj.

$$-\frac{\beta_r}{\alpha_{r1}} = \min_{k+1 \le l \le n} \left(-\frac{\beta_l}{\alpha_{l1}} \right)$$

Tada se veličina x_1 izražava iz jednačine

$$x_r = \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \cdots + \alpha_{rk}x_k + \beta_r$$

i zamenjuje u ostalim jednačinama i u funkciji cilja. Na taj način smo promenljivama x_1 i x_r zamenili mesta u sistemu, tj. promenljiva x_1 je postala zavisna, dok smo promenljivu x_r prbacili u nezavisne, uz to smo poboljšali vrednost funkcije cilja, a da pri tom nismo narušili dopustivost rešenja.

Navedeni postupak se ponavlja dok se ne dobije optimalno rešenje.

Zadatak 1. Minimizirati $F = 5x_1 - 2x_3$ pri ograničenjima:

$$\begin{aligned} -5x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 &\le 5 \\ -3x_1 + 5x_4 &\le 7 \\ x_i &\ge 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

2.6 Kanonični zadatak LP. Takerove tabele.

Zadatak linearnog programiranja koji je dat u opštem obliku treba transformisati u kanonični oblik pogodan za popunjavanje Takerovih tabela.

Moramo razlikovati maksimizacioni i minimizacioni kanonični oblik zadatka LP.

Zadatak 1. Jedna firma proizvodi pravougaone (P) i okrugle stolove. Za svaki pravougaoni sto potrebna je jedna jedinica komponente A (greda 0,1 x 0,1 x 4), dve jedinice komponente B (daska 0,02 x 0,2 x 4) i dve jedinice komponente C (ukrasna ploča 1 x 1), a za svaki okrugli sto potrebne su dve jedinice komponente A, dve jedinice komponente B i jedna jedinica komponente C. Firma ima na raspolaganju 20 jedinica komponente A, 30 jedinica komponente B i 25 jednica komponente C. Ako firma ostvaruje čistu zaradu za svaki pravougaoni sto $c_1 = 200$ dinara i za svaki okrugli sto $c_2 = 150$ dinara, koliko stolova svake vrste treba da proizvede da bi zarada bila maksimalna?

Zadatak 2. Kompanija priprema mešavinu hrane od tri sastojka: S_1, S_2 i S_3. Svaka jedinica sastojka S_1 sadrži jedan gram proteina, 2 grama masnoće i košta 20 para. Svaka jedinica sastojka S_2 sadrži 2 grama proteina, 2 grama masnoće i košta 30 para. Svaka jedinica sastojka S_3 sadrži 2 grama proteina, 1 gram masnoće i košta 25 para. Ako mešavina ova tri sastojka mora da sadrži najmanje 200 grama proteina i najmanje 150 grama masnoće, koliko jedinica svakog sastojka hrane treba kompanija da iskoristi tako da realizuje minimalne troškove?

Zadatak 3 Maksimizirati $F = -x_1 + 2x_2 + 4x_3$, P.O.

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 - x_3 \le 1 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

2.7 Zadaci LP bez prirodnih ograničenja

Simpleks metodu smo koristili za rešavanje kanoničkih zadataka LP kod kojih se tražio maksimum ili minimum funkcije cilja. Osnovna osobina zadataka LP u opštem obliku je bila nenegativnost promenljivih, tj. simpleks metoda pretpostavlja da su sve promenljive u zadatku nenegativne. Međutim, jednostavne modifikacije simpleks algoritma omogućavaju rešavanje izvesnih zadataka LP bez prirodnih ograničenja.

Definicija 2.7.1 *Realna promenljiva u zadatku LP je bez prirodnog ograničenja, ako ne zadovoljava uslov nenegativnosti.*

Prvi tip ovakvih zadataka čine zadaci LP kod kojih samo neke od promenljivih ne ispunjavaju uslov nenegativnosti. Takvi zadaci se lako transformišu na ekvivalentni zadatak LP u kanoničkom obliku uz dodavanje niza jednačina.

Primer 1. Maksimizirati $F(x,y) = x + 3y$, pri ograničenjima

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 10 \\ -3x - y &\leq -15 \end{aligned}$$

Rešenje: $x = 4, y = 3, t_1 = t_2 = 0$, max$F = 13$.

Primer 2. Maksimizirati $F(x,y) = x + 3y$, pri ograničenjima

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 10 \\ 3x + y &\leq 15 \end{aligned}$$

Rešenje: Funkcija cilja je neograničena, max $F = +\infty$.

Primer 3. Maksimizirati $F(x,y) = x + 3y$, pri ograničnjima

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 10 \\ 3x + y &\leq 15 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Rešenje: $x = t_1 = 0, t_2 = 10, y = 5$, max$F = 15$.

Drugi tip nestandardnih zadataka LP pojavljuje se kada se među nejednačinama nađu neka ograničenja u obliku jednačina. Možemo smatrati da ta ograničenja dopuštaju dopunske promenljive 0, što omogućava da zadatak prevedemo u kanonički oblik.

Primer 4. Maksimizirati $F(x,y,z) = 2x + y - 2z$ pri ograničenjima:

$$\begin{aligned} x + y + z &\leq 1 \\ y + 4z &= 2 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Rešenje: $x = t_1 = 0, z = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$, max$F = 0$.

Primer 5. Maksimizirati $F(x,y,z) = x + 4y + 2z$, pod ograničenjima:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &\leq 6 \\ 4x - 7y &= 28 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Rešenje: Skup dopustivih rešenja je prazan.

Primer 6. Maksimizirati $F(x,y,z) = x + 2y + z$ pod ograničenjima:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + y &\leq 1 \\ x, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Glava 3

Dualni zadatak linearnog programiranja

Svakom zadatku LP odgovara njegov dualni zadatak.

3.1 Dualne kanonične tabele

3.2 Dualni simpleks algoritam

3.3 Dualnost u nekanoničnim tabelama

Teorija dualnosti se može proširiti na prilagođene dualne nekanonične tabele koje smo sreli. U ovom poglavlju pokazaćemo oblik dualne nekanonične tabele i ilustrovaćemo proceduru rešavanja kojom se ove tabele redukuju na dualne kanonične tabele.

Dualna kanonična tabela je oblika:

$$
\begin{array}{c|cccccc|c|l}
 & x_1 & \dots & x_2 & x_{j+1} & \dots & x_n & -1 & \\
\hline
y_1 & a_{11} & \dots & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} & b_1 & = -0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y_i & a_{i1} & \dots & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} & b_i & = -0 \\
y_{i+1} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} & b_{i+1} & = -t_{i+1} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y_m & a_{m1} & \dots & a_{mj} & a_{m,j+1} & \dots & a_{mn} & b_m & = -t_m \\
\hline
-1 & c_1 & \dots & c_j & c_{j+1} & \dots & c_n & d & = F \\
\hline
 & =0 & \dots & =0 & =s_{j+1} & \dots & =s_n & =G &
\end{array}
$$

Napomenimo da svakoj nezavisnoj promenljivoj bez ograničenja (nenegativnosti) u maksimizacionom zadatku LP odgovara ograničenje u obliku jednačine u dualnom minimizacionom zadatku i isto tako tako svakoj nezavisnoj promenljivoj bez ograničenja (nenegativnosti) u minimizacionom zadatku odgovara ograničenje u obliku jednačine u dualnom maksimizacionom zadatku. Ova osobina je suštinska i omogućava nam da rešimo dualne nekanonične zadatke.

Pogledati **Primer 1. i Primer 2.** u [?] kao i zadatke na kraju tog poglavlja. (to su neki od zadataka za pripremu pismenog dela ispita)

3.4 Razni zadaci

1. Geometrijskom metodom izračunati minimum i maksimum funkcije cilja:
   $F = 2 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5$, pod ograničenjima:

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 - x_3 + 2 &= 0 \\
3x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 8 &= 0 \\
3 - x_1 - x_5 &= 0 \\
x_i &>= 0, i = 1..5
\end{aligned}$$

2. Rešiti geometrijskom metodom zadatak:
   Maksimizirati $F = 2x_1 + 5x_2$, pod ograničenjima:

$$\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + x_3 &= 24 \\
3x_1 + x_2 + x_4 &= 21 \\
x_1 + x_2 + x_5 &= 9 \\
x_i &>= 0; i = 1, 2, 3, 4, 5
\end{aligned}$$

3. Algebarskom simpleks metodom minimizirati $F = 4x_1 + 47x_2 + 13x_3 + 26x_4$

   pri ograničenjima

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 6 \\
6x_1 + 13x_3 &= 30 \\
24x_2 + 13x_4 &= 96 \\
x_3 + x_4 &\leq 6 \\
x_i &\geq 0, i = 1, \ldots, 4
\end{aligned}$$

4. Algebarskom simpleks metodom maksimizirati $F = 14x_1 + 7x_2 + 10x_3$

   pri ograničenjima

$$\begin{aligned}
5x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 2400 \\
4,5x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 &\leq 3000 \\
1,5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 2700 \\
3x_1 + 2,5x_2 + 5x_3 &\leq 3600 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

5. Algebarskom simpleks metodom minimizirati $F = -x_4 + x_5$

   pri ograničenjima

$$\begin{aligned}
x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\
x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\
x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\
x_i &\geq 0, i = 1, 2, \ldots, 5
\end{aligned}$$

6. Rešiti svaki od zadataka linearanog programiranja koristeći simpleks tabele.

   a) Maksimizirati $F(x, y) = x$

   pri ograničenjima

$$x + y \leq 1, \quad x - y \geq 1, \quad y - 2x \geq 1, \quad x, y \geq 0$$

   b) Minimizirati $G(x, y) = y - 5x$

pri ograničenjima

$$x - y \geq 1, \quad y \leq 8, \quad x, y \geq 0$$

c) Minimizirati $g(x, y, z) = -x - y$

pri ograničenjima

$$3x + 6y + 2z \leq 6; \quad y + z \geq 1; \quad x, y, z \geq 0$$

d)

$$\begin{array}{rr|r|cc}
x & y & \text{-1} & & \\
\hline
1 & \text{-1} & 3 & = & \text{-}t_1 \\
\text{-2} & 1 & 2 & = & \text{-}t_2 \\
\hline
2 & \text{-1} & 0 & = & F \\
\hline
\end{array}$$

e)

$$\begin{array}{r|rr|r|}
\hline
x & \text{-2} & 1 & \text{-3} \\
y & 1 & \text{-2} & \text{-2} \\
\hline
\text{-1} & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & =t_1 & =t_2 & =G
\end{array}$$

f)

$$\begin{array}{rr|r|cc}
x & y & \text{-1} & & \\
\hline
\text{-1} & \text{-1} & \text{-2} & = & \text{-}t_1 \\
1 & \text{-2} & 0 & = & \text{-}t_2 \\
\text{-2} & 1 & 1 & = & \text{-}t_3 \\
\hline
\text{-1} & 3 & 0 & = & \text{F} \\
\hline
\end{array}$$

7. Naći sva rešenja sledećih zadataka linearnog programiranja:

a)

$$\begin{array}{rrrr|r|cc}
x & y & z & u & \text{-1} & & \\
\hline
0 & 1 & 1 & \text{-1} & 3 & = & -t_1 \\
1 & 1 & 1 & \text{-1} & 3 & = & -t_2 \\
\hline
2 & 3 & \text{-1} & \text{-12} & 0 & = & F \\
\hline
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|rr|r|}
\hline
x & \text{-1} & \text{-1} & \text{-1} \\
y & \text{-1} & 1 & \text{-1} \\
\hline
\text{-1} & \text{-2} & 1 & 0 \\
\hline
 & =t_1 & =t_2 & =G
\end{array}$$

8. Minimizirati $G(y_1, y_2, y_3) = y_1 + 2y_2 + 3y_3$ pri ograničenjima

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &>= 1 \\ y_1 + y_3 &>= 1 \\ 2y_2 + y_3 &= 1 \\ y_1, y_2, y_3 &>= 0 \end{aligned}$$

   a) Postaviti dualni maksimizacioni zadatak.
   b) Rešiti oba zadatka koristeći dualnu tabelu. Ako bilo koji od zadataka ima beskonačno mnogo rešenja, naći sva rešenja.

9. Potrebno je izgraditi određen PVO sistem. Poznato je da protivnik raspolaže sa 100 aviona za dejstvo sa malih visina, 150 aviona za dejstvo sa srednjih visina i 100 aviona za dejstvo sa velikih visina, ali se ne zna sa koje će visine dejstvovati. Možemo obezbediti dva tipa raketa. Prvi tip raketa obara avione sa verovatnoćama 3/4, 1/2, 1/4 respektivno, a drugi tip sa verovatnoćama 1/4, 1/2, 3/4, zavisno od visine leta. Prvi tip rakete staje 25 a drugi 50 n.j. po komadu. Koliko kojih raketa je nužno obezbediti pa da očekivani broj oborenih aviona ne bude manji od broja aviona koji mogu dejstvovati. Pri tome izdatke za nabavke raketa svesti na najmanju moguću meru.
   a) Sastaviti matematički model problema.
   b) Napisati dualni problem datom problemu i rešiti ih dualnom simpleks metodom.
   c) Napraviti postoptimalnu analizu problema (šta znači koja promenljiva) i odgovoriti da li napadač može, i za koliko da poveća broj nekog od tipova aviona, a da branilac ne mora da ulaže dodatna sredstva za nabavku raketa.

10. U šumi se nalazi 4 vrste jestive pečurke. U različitom vremenskom periodu prvi berač B1 raspolaže sa 80 radnih časova berbe, drugi berač B2 sa 70 časova berbe, a treći berač B3 sa 75 časova berbe. Za kilu prve vrste pečurke P1 beračB1 treba da utroši 1/2 časa berbe, b2 3/4 časa berbe, a B3 1 čas berbe. Za pečurku P2 berač B1 utroši 2 časa berbe, B2 1 čas berbe, a B3 1/2 časa berbe. Za P3 berač B1 utroši 1/4 časa, B2 3/4 časa, a B3 1/2 časa berbe. Branje pečurke P4 zahteva od berača B1 2 časa berbe, od B2 3 časa berbe, a od B3 1 čas berbe. Na pijacama berači prodaju pečurke po sledećim cenama: P1 za 50 din/kg, P2 za 60 din/kg, P3 za 45 din/kg, a P4 za 90 din/kg. Na pijacama se može prodati najvisv e 100 kg pečurki P1, 90kg P2, 120kg P3 i 70kg P4. Odrediti optimalni plan berbe,ako se podrazumeva da sva tri berača rade zajedno, da bi se dobila maksimalna zarada. Postaviti primarni i dualni problem LP, a zatim rešiti oba problema.

11. U jednom pogonu treba da se proizvode dve vrste proizvoda na tri mašine. Norma časovi obrade , raspoloživi kapaciteti mašina i finansijski efekti dati su u tabeli :

	P_1	P_2	Kapacitet
M_1	2	4	48
M_2	4	2	60
M_3	3	0	96
Dobit	6000	4000	

Naći optimalni program proizvodnje koji će obezbediti maksimalni dohodak.

- Problem rešiti pomoću simpleks tabele.
- Objasniti značenje promenljivih u modelu.
- Da li optimalno rešenje znači i potpuno iskorišćenje mašina?

Rešenje: X*=(12,6,0,0,60), F(X*)=96000.

12. Jedna pekara se specijalizovala za proizvodnju tri vrste peciva: pogače od 800g, hleb od 400g i kifle od 300g. Poizvodnja peciva se vrši u dve faze: od pripremljenog testa se na mašini za mešenje (M1) oblikuju odgovarajuća peciva, a zatim se peku u peći (P). Trajanje (u minutima) mešenja i pecv enja ovih peciva, kao i jedinični troškovi proizvodnje (u parama) su dati u tabeli:

	M1	P	troškovi
pogača	7	5	190
hleb	6	6	140
kifla	7	7	150

Za pečenje može da radi 600 minuta dnevno, a mašina za mešenje, koja predstavlja usko grlo u proizvodnji i čiji je kapacitet uvek u potpunosti iskorišćen, 560 minuta dnevno. Potrebno je odrediti količinu pogača, hleba i kifli koju treba ispeći za 5 dana, koje će obezbediti minimalne troškove proizvodnje, ako se mora utrošiti bar 160 kg testa.

a) Formulisati matematički model

b) Odrediti sva optimalna rešenja i objasniti jedno od njih

c) Odrediti da li dolazi do promene optimalnog rešenja ako je potrebno:

- maksimizirati ukupnu količinu peciva
- maksimizirati iskorišćenost kapacieta mašina
- utrošiti najmanje 200 kg testa

13. Pekara proizvodi tri vrste bureka: burek sa sirom od 1kg, burek sa mesom od 1 kg i prazan burek od 2 kg. Sve tri vrste bureka pravi pekar, koji dnevno radi tačno 420 minuta, a burek se zatim peče u peći čiji je dnevni kapacitet 500 minuta. Trajanje (u minutima) pravljenja i pečenja bureka, kao i jedinični troškovi proizvodnje (u dinarima) su dati u tabeli:

	pekar	peć	troškovi
burek sa sirom	4	5	20
burek sa mesom	4	2	20
prazan burek	2	4	23

Potrebno je odrediti koliko bureka i koje vrste treba ispeći za 5 dana, tako da troškovi proizvodnje budu minimalni i da bude ukupno napravljeno bar 1200 kg bureka.

a) Formulisati matematički model
b) Odrediti sva optimalna rešenja i objasniti jedno od njih
c) Odrediti da li dolazi do promene optimalnog rešenja ako je potrebno:
   - maksimizirati ukupnu količinu bureka
   - maksimizirati iskorišćenost kapacieta peći
   - napraviti najmanje 1600 kg bureka

14. Jedna tkačnica proizvodi tri vrste tkanina kao mešavinu pamuka i vune. Jedan metar najtanje tkanine (T_1) sadrži 200g pamuka i 100g vune; metar tkanine srednje debljine (T_2) sadrži 100g pamuka i 300g vune, a metar najdeblje tkanine (T_3) sadrzv i po 200g pamuka i vune. U skladištu tkačnice se nalazi 50 kg vune, koja se, zbog neodgovarajućih uslova skladištenja, mora odmah potrošiti i 40 kg pamuka. Troškovi proizvodnje po metru tkanine T_1, T_2 i T_3 iznose 25, 30 i 26 novčanih jedinica, respektivno.

a) Formulisati matematički model minimizacije ukupnih troškova proizvodnje tkanina, ako se zahteva da se proizvede najmanje 10 metara više tkanine tipa T_1 nego tipa T_2.
b) Formulisati dualni model modela pod a)
c) Odrediti optimalno rešenje modela pod b), a zatim odrediti i objasniti optimalno rešenje modela pod a)
d) Da li dolazi do promene optimalnog rešenja ako se zahteva da ukupna dužina tkanina bude maksimalna
e) Da li dolazi do promene opt. rešenja ako se količina vune u skladištu smanji za 8 kg
f) Odrediti optimalno rešenje ako je potrebno da dužina najtanje tkanine bude najmanje onolika kolika je ukupna dužina druge dve tkanine zajedno

15. Dat je problem linearnog programiranja:

Naći maksimum funkcije cilja $F(X) = x_1 - x_2 + 2x_3$, pod ograničenjima:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 15 \\ -x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 & \end{aligned}$$

a. Postaviti dualni problem, datog problema.
b. Dualnim simplex algoritmom pronaći optimalno rešenje.

Napomena Obratiti pažnju na ograničenje tipa jednakost, kao i na to da sve promenljive ne zadovoljavaju uslov nenegativnosti.

16. Uprava fabrike sokova hoće u ovoj godini da lansira novu grupu proizvoda - sokove od dunja. Za tu svrhu je otkupljeno 2000 litara kaše od dunja. Ova kaša ne može da se iskoristi za neku od već postojećih vrsta sokova i zbog toga mora potpuno da se iskoristi za nove proizvode. Sokovi od dunja će biti u pakovanjima od jednog litra i proizvodiće se u 3 varijante:

- Dunja*** - koja sadrži 50% kaše i 50% vode,
- Dunja** - koja sadrži 40% kaše, 10% šećera i 50% vode i
- Dunja* - koja sadrži 25% kaše, 25% šećera i 50% vode.

Na osnovu analize tržišta, procenjeno je da do kraja godine može da se proda najviše 6000 litara svih sokova od dunje, a da će Dunje***, zbog visoke cene, moći da se proda najviše 1000 litara. Pošto uprava želi da održi imidž proizvođača kvalitetnih sokova, odlučeno je da se soka Dunja* proizvede najviše 2000 litara. Potrebno je odrediti koliko litara soka Dunja***, Dunja** i Dunja* treba proizvesti da bi ukupan profit koji se ostvaruje prodajom ovih sokova bio maksimalan. Profit po jednom pakovanju soka Dunja*** je 15 nj, Dunja** 12 nj i Dunja* 9nj.

1) Formulisati matematički model
2) Odrediti jedno optimalno rešenje koristeći simpleks tabele
3) Odrediti drugo bazno optimalno rešenje i napisati sva optimalna rešenja.
4) Primenom postoptimanle analize odrediti da li se isplati proizvoditi dečje sokove Dunja*** u pakovanjima od 0,2 litra, ako je očekivani profit po jednom pakovanju ovih sokova 4 nj.

17. Miladin, otac malog Perice (studenta matematike) bavi se vinogradarstvom. Ove godine sazrelo je 1800 kg belog i 1200 kg crnog grožđa. Vinarija za 1 kg belog grožđa plaća 0,42 eura plus 0.02 eura po stepenu slatkoće, a za 1 kg crnog grožđa 0,40 eura plus 0.02 eura po stepenu slatkoće. Grožđe svaka 4 dana postane slađe za jedan stupanj. Perica može brati grožđe 21.9 (najviše 1500 kg), 25.9 (najviše 1100 kg) i 27.9 (najviše 800 kg). Mali Perica je simpleks metodom našao optimalan plan berbe, za koji je zarada najveća. Koji je to plan, ako je 21.9 slatkoća belog grožđa 17 stepena, a crnog 18.5 stepena?