2. Bulova i prekidačka algebra

2.1. Definicija i osobine opštih Bulovih algebri

Definicija. Neka je B neprazan skup, $+,\cdot$ binarne operacije na B, $\overline{}$ unarna operacija na B i $0,1 \in B$ različite konstante. Izraz $x \cdot y$ kraće ćemo zapisivati kao xy. Algebarska struktura $(B,+,\cdot,\overline{},0,1)$ je *Bulova algebra* ako zadovoljava sledeće zakone:

1. Komutativnost: $x + y = y + x, xy = yx$
2. Komplement: $x + \bar{x} = 1, x\bar{x} = 0.$
3. Distributivnost: $x(y + z) = xy + xz, x + yz = (x + y)(x + z)$
4. Neutralni elementi: $x + 0 = 0 + x = x, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

Nadalje ćemo podrazumevati da je $(B,+,\cdot,\overline{},0,1)$ Bulova algebra i tu predpostavku nećemo eksplicitno navoditi prilikom formulacija teorema i definicija. Sledeću teoremu nećemo dokazivati.

Teorema. Operacije $+$ i $\cdot$ su asocijativne, tj. važi sledeći zakon:

5. Asocijativnost: $x + (y + z) = (x + y) + z, (xy)z = x(yz)$

Zadatak 1. Dokazati sledeća osnovna svojstva Bulovih algebri:

a) Idempotentnost: $x + x = x, xx = x$
b) Ograničenost: $x + 1 = 1, x \cdot 0 = 0$
c) Absorbcija: $x(x + y) = x, x + xy = x$

Zadatak 2. Pokazati da ukoliko za strukturu $(B,+,\cdot,\overline{},0,1)$ važe zakoni 1-3 iz definicije Bulove algebre i važi zakon a) iz predhodnog zadatka, da tada važi i zakon 4, tj da je odgovarajuća struktura Bulova algebra.

Zadatak 3. Dokazati da u svakoj Bulovoj algebri važe sledeća svojstva:

a) Jedinstvenost inverznog elementa: $x + a = 1 \wedge xa = 0 \Rightarrow a = \bar{x}$
b) Involutivnost: $\bar{\bar{x}} = x$
c) Demorganovi zakoni: $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}, \overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$
d) Uopšteni Demorganovi zakoni: $\overline{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdots \overline{x_n}$,
$\overline{x_1 x_2 \ldots x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_n}$
e) Sažimanje: $xy + x\bar{y} = x, (x + y)(x + \bar{y}) = x$

Zadatak 4. Neka je $B = \{0,1\}$, operacije $+$ i $\cdot$ redom maksimum i minimum a $\bar{x} = 1 - x$. Dokazati da je odgovarajuća struktura Bulova algebra.

Napomena: Bulova algebra iz predhodnog zadatka se naziva *prekidačka algebra* predstavlja osnovu za rad digitalnih elektronskih kola a ujedno i računara.

Zadatak 5. Neka je A proizvoljan neprazan skup. Posmatrajmo strukturu $(P(A),\cup,\cap,^c,\emptyset,A)$ gde je sa $P(A)$ označen partitivni skup skupa A a sa ^{c} operacija komplementiranja. Dokazati da je ova struktura Bulova algebra.

Zadatak 6. Neka je $(L, \leq)$ linearno uredjenje (svaka dva elementa su uporediva). Neka je $[x, y) = \{c \in L \mid a \leq c < b\}$ poluotvoreni interval. Skupove $\{c \in L \mid c \leq x\}$ i $\{c \in L \mid x \leq c\}$ takodje ćemo smatrati poluotvorenim intervalima. Dokazati da je $B(L) = \{A \subseteq L \mid A \text{ je konačna unija poluotvorenih intervala}\}$ Bulova algebra sa istim operacijama kao u predhodnom zadatku.

Definicija. *Bulov izraz* je korektan izraz koji se sastoji od konstanti 0 i 1, promenljivih $x, y, z, a, b, c, \ldots$ kao i operacija $+, \cdot$ i $\overline{}$. Formalno, bulov izraz može se definisati na sledeći način:

1. Bulovi izrazi su konstante 0, 1kao i promenljive $x, y, z, a, b, c, \ldots$. Označimo skup ovih izraza sa E_0.
2. Rekurzivno definišemo niz skupova E_n pomoću
$$E_n = E_{n-1} \cup \{A + B \mid A, B \in E_{n-1}\} \cup \{A \cdot B \mid A, B \in E_{n-1}\} \cup \{\bar{A} \mid A \in E_{n-1}\}.$$
3. Skup svih Bulovih izraza je $E = \bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i$.

Definicija. Neka je Q Bulov izraz. *Dualni izraz* izraza Q, u oznaci Q^* definišemo kao izraz koji se dobija kada se u izrazu Q svako pojavljivanje operacije $+$ zameni sa $\cdot$ i obratno, i kada se svako pojavljivanje konstante 1 zameni konstantom 0 i obratno.

Zadatak 7. Dati formalnu definiciju dualnog Bulovog izraza na sličan način kao što je formalno definisan pojam Bulovog izraza.

Zadatak 8. Dokazati da ukoliko su dva Bulova izraza jednaka (za svaku kombinaciju vrednosti promenljivih imaju iste vrednosti), isto važi i za njihove dualne Bulove izraze.

Zadatak 9. Dokazati generalisanu Demorganovu teoremu
$$\overline{Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = Q^*(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$$

Definicija. Operacija $x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y$ naziva se simerična razlika.

Zadatak 10. Dokazati sledeće osobine simetrične razlike

a) $x = y$ akko važi $x \,\Delta\, y = 0$,
b) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$,
c) $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$.

Zadatak 11. Uprostiti sledeći Bulov izraz
$$a \cdot \bar{b} + c + (\bar{a} + b)\bar{c}.$$

Zadatak 12. Ако je a $\oplus\, b = c$ dokazati da je $a \oplus c = b$.

Zadatak 13. Proveriti sledeću jednakost
$$\bar{a}b\bar{c} = a(\bar{b} + \bar{c}) + bc + a\bar{c}$$

Teorema. (Hangtington) Neka je B neprazan skup a $+, \overline{}$ redom binarna i unarna operacija na B. Ukoliko važe sledeće tri aksiome:

1. Asocijativnost: $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. Komutativnost: $x + y = y + x$
3. Hangtingtonova aksioma: $\overline{\bar{x} + y} + \overline{\bar{x} + \bar{y}} = x$

Ako definišemo $x \cdot y = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$, $1 = x + \bar{x}$ i $x\bar{x} = 0$ tada je odgovarajuća struktura $(B, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$ Bulova algebra.

Teorema. **(Robins)**[1] Predhodna teorema važi i ako se umesto Hangtingtonove aksiome uvede dualna (*Robinsova aksioma*): $\overline{\overline{x+y}+\overline{x+\bar{y}}} = x$.

2.2. Prekidačke funkcije

U nastavku ćemo predpostaviti da je $(B, +, \cdot, \overline{\ }, 0,1)$ Bulova algebra iz zadatka 4, tj da je $B = \{0,1\}$ a operacije $+, \cdot, \overline{\ }$ odgovaraju redom disjunkciji, konjunkciji i negaciji.

Definicija. *Prekidačka funkcija* od n promenljivih je svaka funkcija $f: B^n \to B$.

Zadatak 11. Koliko ima ukupno prekidačkih funkcija od n promenljivih? Koliko ima prekidačkih funkcija od n promenljivih koje eksplicitno zavise od svih svojih promenljivih? Funkcija f eksplicitno zavisi od promenljive x_i ako postoji barem jedan vektor $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in B^{n-1}$ tako da $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

ToDo:

Načini predstavljanja prekidačkih funkcija. Vektor istinitosti. Skupovi decimalnih indeksa. Brojni indeks. Nepotpuno definisane prekidačke funkcije. PDNF, DNF, PKNF, KNF, PPNF, karakteristični polinom. Šenonova teorema razvoja. Fiktivne promenljive. Potpuni skupovi prekidačkih funkcija. Postova teorema.

[1] Ovu teoremu su dokazali W. McCune i G. Kolata 1996. godine pomoću kompjuterskog programa EQP