Gimnazija "Svetozar Marković", Niš
Dodatna nastava iz matematike za drugi, treći i četvrti razred
Nedelja, 01.11.2009.

POLINOMI

predavač: *dr Marko Petković*

1 Osnovna teorija

DEFINICIJA. Neka je $\mathcal{R}$ prsten. *Polinom* $P(x)$ nad prstenom $\mathcal{R}$ je svaki izraz oblika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ gde su $a_i \in \mathcal{R}$ i $a_n \neq 0$. Broj n nazivamo *stepenom* polinoma $P(x)$, u oznaci $n = \text{dg}P(x)$, dok skup svih polinoma nad $\mathcal{R}$ obeležavamo sa $\mathcal{R}[x]$.

TEOREMA. Svaki polinom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stepena n ima tačno n kompleksnih nula.

BEZUOV STAV. Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x - a$ je $P(a)$.

VIETOVE FORMULE. Neka je $P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ polinom. Označimo sa $\sigma_k = \sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$, gde se sumiranje vrši po svim indeksima $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Ako polinom $P(x)$ napišemo u obliku $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tada važe sledeće *Vietove formule* $a_i = (-1)^{n-i}\sigma_{n-i}a_n$. Izrazi $\sigma_k = \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ nazivaju se *osnovni simetrični polinomi*.

NJUTN-GIRARDOVE FORMULE. Neka su σ_k, $k = 1, \ldots, n$ osnovni simetrični polinomi promenljivih $x_1, \ldots, x_n$. Neka je $S_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$. Tada važe sledeće Njutn-Girardove formule:

$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + \ldots + (-1)^{k-1}S_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0, \quad k \leq n$$
$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + \ldots + (-1)^n S_{k-n+1}\sigma_{n-1} + (-1)^n S_{k-n}\sigma_n = 0, \quad k > n$$

LAGRANŽOVA INTERPOLACIONA FORMULA. Neka su $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$ realni brojevi pri čemu su $x_0, \ldots, x_n$ medjusobno različiti. Tada postoji jedinstveni polinom $P_n(x)$ stepena n takav da je $P(x_i) = y_i$ za svako $i = 0, \ldots, n$ i važi sledeća *Lagranžova interpolaciona formula*:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

AJZENŠTAJNOV KRITERIJUM. Neka je $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ polinom sa celobrojnim koeficijentima. Ako postoji prost broj p takav da $p \mid a_0, \ldots, a_{n-1}$, $p \nmid a_n$ i $p^2 \nmid a_0$, tada je polinom $P(x)$ ireducibilan [1] u $\mathbb{Z}[x]$.

[1]Polinom $P(x)$ je ireducibilan u $\mathcal{R}[x]$ ukoliko ne postoje dva polinoma $Q(x), R(x) \in \mathcal{R}[x]$ različita od konstante takva da je $P(x) = Q(x)R(x)$

2 Zadaci

1. Neka je $P(x)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima. Dokazati da ne postoje različiti celi brojevi $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 3$ takvi da je $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \ldots, f(x_n) = x_1$.

2. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{2011} - x^{2010} + x^{2009}$ sa polinomom $g(x) = x^3 + 1$.

3. Dat je polinom $f(x)$ sa celobrojnim koeficijentima stepena n. Neka su k i p prirodni brojevi. Dokazati da ako nijedan od brojeva $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p)$ nije deljiv sa $p+1$, tada $f(x)$ nema celobrojnih nula.

4. Ako su x_i nule polinoma $P(x) = 18x^{48} + 3x + 2006$ izračunati $\sum_{i=1}^{48} \frac{x_i}{1+x_i}$.

5. Dat je polinom sa realnim koeficijentima $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ koji ima tri realna pozitivna korena, ne obavezno različita. Odrediti minimalnu vrednost zbira $a + b$.

6. Neka je $a \geq 3$ i $f(x)$ polinom n-tog stepena sa realnim koeficijentima. Dokazati da je

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |a^i - f(i)| \geq 1.$$

7. Neka su $a_1, \ldots, a_n$ dati celi brojevi. Dokazati da je polinom $P(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) - 1$ ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$.

8. Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ proizvoljan polinom stepena 2 sa celobrojnim koeficijentima. Dokazati da postoji k uzastopnih prirodnih brojeva takvih da je $f(x)$ složen broj.

9. Dokazati da je polinom $P(x) = x^n + 5x^{n-1} - 3$ ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$.

10. (prošireni Ajzenštajnov kriterijum) Neka je $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ polinom sa celobrojnim koeficijentima i neka je p prost broj takav da je $p \mid a_0, \ldots, a_k$, $p \nmid a_{k+1}$ i $p^2 \nmid a_0$. Tada postoji ireducibilni faktor $Q(x)$ polinoma $P(x)$ stepena većeg od k.

11. Dat je polinom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ čiji su svi koeficijenti nenegativni i koji ima n realnih nula. Dokazati da je $P(2) \geq 3^n$.

12. Postoje li realni brojevi b i c takvi da svaka od jednačina $x^2 + bx + c = 0$ i $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$ ima po dva celobrojna korena?

13. Marko i Marija igraju sledeću igru. Marija zamisli neki polinom P čiji su koeficijenti iz skupa $\mathbb{N}_0$. Marko mora da odgonetne taj polinom u najviše m poteza. On u jednom potezu može da kaže ceo broj k, a Marija mu saopštava vrednost $P(k)$. Naći najmanji broj poteza m pomoću kog Marko sigurno može da pronadje polinom koji je Marija zamislila.

14. Neka je $P(x)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima i neka je definisan polinom $Q(x) = P^{(k)}(x) = \underbrace{P(P(\cdots P(x))\cdots)}_{k\text{-puta}}$. Dokazati da postoji najviše n različitih celih brojeva t takvih da je $Q(t) = t$.

15. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ realni brojevi takvi da je $x_1^i + \ldots + x_n^i = a$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, izračunati $x_1^{n+1} + \ldots + x_n^{n+1}$.

16. Naći sve polinome $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ čije su sve nule realne i nenegativne i koji zadovoljava jednačinu $P(x)P(x+1) = P(x^2)$.

17. Ako je $P(x)$ polinom n-tog stepena takav da je $P(k) = 2^k$ za svako $k = 0, 1, \ldots, n$, naći $P(n+1)$.

UPUTSTVA I REŠENJA ZADATAKA

1. Zadatak 162, Račetova zbirka.

2. Polinom $P(x)$ možemo napisati na sledeći način:

$$f(x) = x^{2009}(x^2-x+1) = (x^{2009}+1-1)(x^2-x+1) = ((x+1)Q(x)-1)(x^2-x+1) = (x^3+1)Q(x)-x^2+x-1.$$

Prema tome, ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa x^3+1 je $-x^2+x-1$.

3. Pretpostavimo suprotno, da $f(x)$ ima celobrojnu nulu m. Tada je $P(m) = 0$, odnosno na osnovu Bezuovog stava postoji polinom $g(x)$ sa celobrojnim koeficijentima tako da važi $f(x) = (x-m)g(x)$. Ukoliko sada zamenimo $x = k, k+1, \dots, k+p$ imamo da je $f(k+i) = (k+i-m)g(k+i)$, za svako $i = 0, 1, \dots, p$. Medju brojevima $k-m, k+1-m, \dots, k+p-m$ postoji tačno jedan deljiv sa $p+1$, što predstavlja kontradikciju sa polaznom pretpostavkom.

4. Primetimo da $x_i \notin \{1, 0\}$ i da je $\frac{x_i}{1+x_i} = \frac{1}{1+x_i^{-1}}$. Koristićemo sledeće dve očigledne činjenice:

(a) Ako su y_i nule polinoma $A(x)$ n-tog stepena, onda su y_i^{-1} nule polinoma $x^n A(x^{-1})$.

(b) Ako su y_i nule polinoma $A(x)$, onda su y_i+1 nule polinoma $A(x-1)$. Iz (a) sledi da su x_i^{-1} nule polinoma $Q(x) = x^{48}P(x^{-1})$, iz (b) da su $1+x_i^{-1}$ nule polinoma $R(x) = Q(x-1)$. Konačno, iz (a) sledi da su $\frac{1}{1+x_i^{-1}}$ nule polinoma:

$$\begin{aligned} x^{48}R(x^{-1}) &= x^{48}Q(x^{-1}-1) = x^{48}(x^{-1}-1)^{48}P((x^{-1}-1)^{-1}) \\ &= 18x^{48} + 3x(1-x)^{47} + 2006(1-x)^{48} \\ &= 2021x^{48} - 96147x^{47} + \ldots + 2006. \end{aligned}$$

Iz Vietovih formula za ovaj polinom, dobijamo da je traženi zbir jednak $\frac{96147}{2021}$.

5. Neka su r, s i t traženi koreni. Na osnovu Vietovih pravila je $a = r+s+t$, $b = rs+st+rt$ i $rts = 1$, pa je:

$$a+b = r+s+t+rs+st+rt = r+s+t+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s} \geq 6\sqrt[6]{rst\frac{1}{t}\frac{1}{r}\frac{1}{s}} = 6,$$

pri čemu se jednakost dostiže za $r = s = t = 1$.

6. Zadatak rešavamo indukcijom po stepenu polinoma $n = \mathrm{dg} f(x)$. Neka je $n = 0$ odnosno $f(x) = c$. Ako važi $|1-c| < 1$ i $|a-c| < 1$ onda je $|1-a| < 2$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $a \geq 3$.

Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve polinome stepena ne većeg od $n-1$ i dokažimo da važi za sve polinome stepena n. Pretpostavimo suprotno, da za polinom $f(x)$ stepena n tvrdjenje ne važi. Neka je

$$g(x) = \frac{f(x+1)-f(x)}{a-1}$$

polinom najviše $n-1$-vog stepena. Tada je za proizvoljno $i = 0, 1, \dots, n$ zadovoljeno

$$|a^i - g(i)| = \left| a^i - \frac{f(x+1)-f(x)}{a-1} \right| \leq \frac{|a^{i+1} - f(i+1)|}{|a-1|} + \frac{|a^i - f(i)|}{|a-1|} \leq \frac{2}{|a-1|} < 1.$$

Poslednja nejednakost je u suprotnosti sa indukcijskom hipotezom.

7. Pretpostavimo suprotno, neka je $p(x) = f(x)g(x)$. Na osnovu definicije polinoma $p(x)$ važi $p(a_i) = f(a_i)g(a_i) = -1$. Odavde dobijamo (pošto su $f(x)$ i $g(x)$ polinomi sa celobrojnim koeficijentima) da važi: $f(a_i) = -g(a_i)$, odnosno $f(a_i) + g(a_i) = 0$ za svako $i = 1, \ldots, n$. Stepeni polinoma $f(x)$ i $g(x)$ su najviše $n-1$, pa je i stepen polinoma $f(x) + g(x)$ najviše $n-1$. Pošto on ima bar n nula, zaključujemo da je identički jednak nuli, odnosno da važi $p(x) = -f(x)^2$. Medjutim, ovo nemoguće jer je koeficijent uz najstariji član polinoma $p(x)$ pozitivan (i jednak 1) dok je za polinom $-f(x)^2$ negativan.

8. Neka je $A = |f(p+1) \cdot \ldots \cdot f(p+k)|$, gde je p prirodan broj koji ćemo kasnije odrediti. Uočimo sada polinoma $f(x)$ u tačkama $A+p+1, \ldots, A+p+k$. Imamo da važi:

$$f(A+p+i) = aA^2 + (2a(p+i)+b)A + f(p+i)$$

odakle zaključujemo da $f(p+i) \mid f(A+p+i)$. Ukoliko bi važilo da je $f(p+i) \neq \pm 1$ i $|f(p+i)| < |f(A+p+i)|$ tada bi sledilo da su brojevi $f(A+p+i)$ svi složeni.

Dokažimo sada da postoji broj p takav da je prethodni uslov ispunjen. Jednačina $f(x) = \pm 1$ može imati najviše 4 rešenja u skupu celih brojeva. Takodje, za dovoljno veliku vrednost broja x, $|f(x)|$ je rastuća funkcija po x. Ovim smo dokazali postojanje broja p.

9. Pretpostavimo suprotno. Neka je $p(x) = g(x)h(x)$ gde su:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i x^i, \qquad h(x) = \sum_{i=1}^{n-k} c_i x^i$$

polinomi sa celobrojnim koeficijentima različiti od konstante. Pošto je $b_0 c_0 = 3$, sledi da je bar jedan od brojeva b_0 i c_0 jednak ± 1. Neka je to c_0. Tada je $|b_0| = 3$. Neka je t minimalan indeks takav da $3 \nmid b_t$. Ako predstavimo $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ dobijamo da je:

$$a_t = b_i c_0 + (b_{i-1}c_1 + \ldots + b_0 c_i)\,, \quad 3 \nmid a_t$$

Pošto je $a_i = 0$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n-2$, sledi da je $t \geq n-1$, pa je i $k \geq n-1$. Polinom $g(x)$ je onda stepena 1, pa pošto ovaj polinom nema racionalnih nula, dobijamo da je ireducibilan.

10. Koristimo sličnu ideju kao u prethodnom zadatku. Neka je $P(x) = P_1(x) \cdots P_m(x)$ razlaganje polinoma $P(x)$ na ireducibilne polinome. Neka je $P_i(x) = \sum_{i=1}^{d_i} p_{ij} x^j$, gde su $d_1, \ldots, d_m$ redom stepeni polinoma $P_i(x)$. Pošto je $a_0 = p_{10} \cdots p_{m0}$, zaključujemo da je tačno jedan od brojeva $p_{10}, \ldots, p_{m0}$ deljiv sa p. Bez gubljenja opštosti predpostavimo da je to p_{10}.

Ako sada označimo sa $h(x) = P_2(x) \cdots P_m(x)$, a sa $f(x) = P_1(x)$, na sličan način kao u prethodnom zadatku dobijamo da $p \nmid a_t$ gde je t minimalan broj takav da $p \nmid b_t = p_{1t}$. Odavde, prema uslovu zadatka sledi da je $d_1 \geq t \geq k+1$.

11. Pošto su svi koeficijenti polinoma $P(x)$ nenegativni, sledi da sve nule manje ili jednake 0. Prema tome polinom možemo zapisati u obliku $P(x) = (x+x_1) \cdots (x+x_n)$ gde su $x_1, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi. Korišćenjem nejednakosti izmedju aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo da je $2 + x_i = 1 + 1 + x_i \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot x_i} = \sqrt[3]{x_i}$. Prema tome, dobijamo da je:

$$P(2) \geq 3^n \sqrt[3]{x_1 \cdots x_n} = 3^n \sqrt[3]{1} = 3^n$$

12. Neku su celobrojni koreni prve jednačine k i l, a druge m i n. Tada bi na osnovu Vietovih formula važilo

$$\begin{aligned} k + l &= -b && (1) \\ k \cdot l &= c && (2) \\ 2(m+n) &= -b - 1 && (3) \\ 2m \cdot n &= c + 1 && (4) \end{aligned}$$

Iz jednakosti (4) sledi da je broj c neparan. Sada, na osnovu jednakosti (2) zaključujemo da su brojevi k i l neparni, iz čega, dalje, na osnovu (1), zaključujemo da je b paran broj. Medjutim, na osnovu (3) sledi da je b neparan broj. Stoga, brojevi b i c sa traženim svojstvom ne postoje.

13. Dokazaćemo da je minimalan broj poteza 2. Neka Marko u prvom potezu zatraži od Marije vrednost $P(1)$. Sada je:

$$P(1) = a_n + \ldots + a_1 + a_0 \geq a_i, \quad \forall i = 0, \ldots, n$$

Neka je $A = P(1) + 1$. U drugom potezu Marko traži vrednost $P(10^A)$. Imamo da je:

$$B = P(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0$$

Pošto je $a_i < A$, brojevi a_i predstavljaju redom cifre u reprezentaciji broja B u sistem sa osnovom A. Koristeći ovu činjenicu, Marko može da rekonstruiše polinom $P(x)$ tako što nadje predstavljanje broja B u sistemu sa osnovom A. Ovim smo konstruisali metod kojim u 2 poteza dolazimo do traženog polinoma.

Dokazaćemo da je u opštem slučaju nemoguće rekonstruisati polinom $P(x)$ u jednom potezu. Pretpostavimo suprotno. Neka Marko u prvom potezu traži $B = P(x_0)$, i neka je $B < x_0$. Sada postoje dva polinoma $P_1(x) = B$ i $P_2(x) = x - (x_0 - B)$ za koje je $P_1(x_0) = P_2(x_0) = B$, pa samo na osnovu ovog podataka Marko ne može zaključiti koji je polinom Marija zamislila.

14. Neka je $Q(t) = t$. Neka je $a_0 = t$ i $a_{i+1} = P(a_i)$ za $i \geq 1$. Imamo da je $a_k = t$ i da važi: $a_1 - a_0 \mid P(a_1) - P(a_0) = a_2 - a_1$. Na sličan način dobijamo da je:

$$a_1 - a_0 \mid a_2 - a_1 \mid a_3 - a_2 \mid \ldots \mid a_k - a_{k-1} \mid a_0 - a_k \mid a_1 - a_0$$

Prema tome vrednost $|a_{i+1} - a_i|$ je konstantna. Ovo je moguće samo u slučaju da je broj elemenata skupa $\{a_0, \ldots, a_k\}$ jednak 1 ili 2, odnosno da medju brojevima $a_0, \ldots, a_k$ ima ne više od 2 različita.

Znači, za svako celobrojno t koje zadovoljava jednačinu $Q(x) = x$ važi $P(P(t)) = t$. Neka su $t_1, \ldots, t_k$ celobrojna rešenja jednačine $Q(x) = x$, i neka je $s_i = P(t_i)$. Imamo da važi:

$$t_i - t_j \mid P(t_i) - P(t_j) \mid s_i - s_j \mid P(s_i) - P(s_j) \mid t_i - t_j$$

pa je, prema tome $t_i - t_j = s_i - s_j$. Slično dobijamo i da je $|t_i - s_j| = |t_j - s_i|$. Odavde sledi da je $t_i + s_i = t_j + s_j = u$, odnosno da su svi t_i koreni jednačine $x + P(x) = u$. Odavde trivijalno sledi da ih ima najviše n.

15. Račetova zbirka, zadatak 594.

16. Neka su $a_1, \ldots, a_n$ nule polinoma $P(x)$. Tada su sve nule polinoma $P(x^2)$ i $P(x+1)$ jednake redom $\pm\sqrt{a_1}, \ldots, \pm\sqrt{a_n}$ i $a_1 - 1, \ldots, a_n - 1$. Prema tome, kolekcije brojeva $a_1, \ldots, a_n, a_1 - 1, \ldots, a_n - 1$ i $\pm\sqrt{a_1}, \ldots, \pm\sqrt{a_n}$ su jednake. Pošto u prvoj kolekciji ima podjednako negativnih i pozitivnih brojeva, sledi da su svi $a_i - 1$ negativni, pa je $0 \leq a_i \leq 1$ za svako $i = 1, \ldots, n$. Pretpostavimo da je $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Tada je, sa jedne strane:

$$a_1 - 1 \leq a_2 - 1 \leq \cdots \leq a_n - 1 \leq 0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n,$$

a sa druge:

$$-\sqrt{a_n} \leq -\sqrt{a_{n-1}} \leq \cdots \leq -\sqrt{a_1} \leq 0 \leq \sqrt{a_1} \leq \cdots \leq \sqrt{a_n}.$$

Pošto su kolekcije iste dobijamo da je $\sqrt{a_i} = a_i$ pa odavde sledi da je $a_i = 0, 1$. Iz uslova $-\sqrt{a_i} = a_{n+1-i}$ dobijamo da su prvih $k = \frac{n}{2}$ korena jednaka 0 a drugih k jedakih 1. Prema tome, traženi polinom je $P(x) = (x^2 - x)^k$. Neposrednom proverom utvrdjujemo da ovaj polinom za proizvoljno k zadovoljava uslove zadatka.

17. Prvo rešenje: Posmatrajmo polinom:

$$P(x) = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \ldots + \binom{x}{n-1} + \binom{x}{n}, \qquad \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

Proverom, lako možemo utvrditi da za svako $k = 0, 1, \ldots, n$ važi:

$$P(k) = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} = 2^k$$

Zamenom takodje imamo da je:

$$P(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+1}{n} = 2^{n+1} - 1$$

Drugo rešenje: Koristićemo Lagranžovu interpolacionu formulu. Pošto je polinom definisan u tačkama $x_i = i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, imamo da važi:

$$(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n) = (i-0)(i-1)\cdots 1(-1)(-2)\cdots(-n+i) = i!(n-i)!(-1)^{n-i}$$

a za $x = n+1$ na sličan način dobijamo:

$$(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n) = (n+1-0)(n+1-1)\cdots(n+2-i)(n-i)\cdots 1 = \frac{(n+1)!}{n-i+1}$$

Zamenom u Lagranžovu interpolacionu formulu dobijamo:

$$P(n+1) = \sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{(n+1)!}{(n-i+1)(n-i)!i!}(-1)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n+1}{i}(-1)^{n-i} = 2^{n+1} - 1$$

Za sve primedbe, komentare, sugestije, itd. u vezi zadataka (a i uopšte) možete me kontaktirati putem e-maila.

© Marko Petković
dexterofnis@gmail.com