Gimnazija "Svetozar Marković", Niš
Pripreme za srpsku matematičku olimpijadu
Petak, 30.03.2007

TEORIJA BROJEVA, POLINOMI I POLINOMSKE FUNKCIONALNE JEDNAČINE

predavač: *Marko Petković*

1. Dokazati da je ceo deo sledećeg izraza:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{m^2}}$$

jednak $2m-1$ ili $2m-2$.

2. Neka je $P(x)$ polinom sa nenegativnim realnim koeficijentima. Ako je $P(4)=2$ i $P(16)=8$ dokazati da je $P(8)\leq 4$ i naći sve polinome za koje važi jednakost.

3. Neka su $a_1,\ldots,a_7$ prirodni brojevi takvi da apsolutne vrednosti razlika $|a_i-a_j|$ formiraju niz od 10 uzastopnih prirodnih brojeva. Dokazati da je $\max\{a_1,\ldots,a_7\}-\min\{a_1,\ldots,a_7\}=10$.

4. Dokazati da postoje celi brojevi m i n takvi da je:

$$\left|\frac{m^2}{n^3}-\sqrt{2007}\right|<10^{-8}$$

5. Dokazati da postoje celi brojevi m i n takvi da je:

$$\left|\sqrt{2007}-\sqrt{m}+\sqrt{n}\right|<10^{-9}$$

6. Da li je moguće poredjati 100 prirodnih brojeva na kružnici tako da za svaka 3 uzastopna broja (po kružnici) važi da je jedan od njih jednak proizvodu druga 2.

7. Naći sve cele brojeve m takve da su sva rešenja jednačine:

$$3x^3-3x^2+m=0$$

racionalna.

8. Neka je $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ gde su a_i celi brojevi i $n\geq 3$. Neka je $m=\min A$ a $M=\max A$. Predpostavimo da postoji polinom $p(x)$ sa celobrojnim koeficijentima takav da je $m<p(a)<M$ za svako $a\in A$ i da je $p(m)<p(a)$ za svako $a\in A\setminus\{m,M\}$. Dokazati da je $n\leq 5$.

9. Neka je $a_n=n+\{\sqrt{n}\}$ gde smo sa $\{x\}$ označili ceo broj najbliži broju x (ukoliko je x oblika $t-\frac{1}{2}$ gde je t ceo broj, onda je $\{x\}=t+1$). Naći najmanji indeks k takav da su brojevi $a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+2007}$ uzastopni.

10. Mujo i Haso igraju sledeću igru. Na početku imaju redom p i q novčića. U svakom potezu jedan igrač daje drugom onoliko novčića koliko on već ima. Posle n poteza (n Mujinih i isto toliko Hasinih) Mujo ima q novčića a Haso p. Naći odnos $\frac{p}{q}$ u funkciji od n.

11. Neka su a i b uzajamno prosti prirodni brojevi. Dokazati da je $\mathrm{NZD}(a+b, a^2+b^2) \leq 2$.

12. Naći najmanji prirodan broj oblika $36^k - 5^l$ gde su $k, l \in \mathbb{N}$.

13. Naći sve polinome $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ čije su sve nule realne i nenegativne i koji zadovoljava jednačinu $P(x)P(x+1) = P(x^2)$.

14. Neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od $2n$. Ako je za sve cele brojeve $k = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$ ispunjeno $|P(k)| \leq 1$ dokazati da tada za sve $x \in [-n, n]$ važi $|P(x)| \leq 2^{2n}$.

15. Naći sve polinome $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju sledeću funkcionalnu jednačinu $f(x)f(2x^2) = f(2x^3+x)$.

Za sve primedbe, komentare, sugestije, itd. u vezi zadataka (a i uopšte) možete me kontaktirati putem e-maila.

© Marko Petković
dexterofnis@gmail.com