Gimnazija "Svetozar Marković", Niš
Dodatna nastava iz matematike za 3. i 4. razred
Petak, 19.01.2007

# RAZNI ZADACI

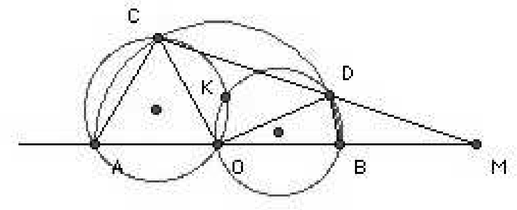
predavač: *Marko Petković*

**1.** Naći sva celobrojna rešenja sledećeg sistema jednačina: $a + b = \mathrm{NZD}(a, b)^2$, $b + c = \mathrm{NZD}(b, c)^2$, $c + a = \mathrm{NZD}(c, a)^2$

**2.** Naći sva celobrojna rešenja jednačine $(m^2 - n^2)^2 = 1 + 16n$.

**3.** Neka je dat prirodan broj $k$. Dokazati da je moguće konstruisati niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $a_1 = k$, i da $a_1 + \ldots + a_n$ deli $a_1^2 + \ldots + a_n^2$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

**4.** Dat je krug $k$ sa centrom $O$ i $AB$ proizvoljan prečnik kruga $k$. Neka su $C$ i $D$ različite tačke kruga $k$ sa iste strane prave $(AB)$ i $M$ presek pravih $(AB)$ i $(CD)$. Neka je $K$ presek krugova opisanih oko trouglova $\triangle ACO$ i $\triangle BDO$. Dokazati da je $\angle MKO$ prav.




Slika uz zadatak 4.

**5.** Naći $\lfloor \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{2}{3} \rfloor + \lfloor \frac{2^2}{3} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{2^n}{3} \rfloor$.

**6.** Naći sve funkcije $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ koje zadovoljavaju $f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geq 3f(x + 2y + 3z)$.

**7.** Neka je $S$ skup sa $n$ elemenata. Naći najmanji prirodan broj $k$ takav da za svaki izbor $A_1, \ldots, A_k \subseteq S$ različitih podskupova postoje skupovi $B_1, \ldots, B_k \subseteq S$ takvi da je $B_i = A_i$ ili $B_i = S \setminus A_i$ i da je $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$.

**8.** Naći sve parove funkcija $f, g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ takve da je $f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x)$.

**9.** Dokazati da je:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3 = n^2(n + 3)2^{n-3}.$$

**10.** Dato je ukupno $6n$ kuglica, po $2n$ plavih, crvenih i zelenih. Dve osobe dele kuglice tako da svaka dobije po $3n$ kuglica. Na koliko načina ova podela može da se izvrši?

**11.** Neka je $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$. Naći sumu:

$$\sum_{\substack{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n) \\ S \neq \emptyset}} \prod_{x\in S} \frac{1}{x}.$$

**12.** Dokazati da za svaki prirodan broj $n$ postoji permutacija $p_1, \ldots, p_n$ brojeva $1, \ldots, n$ takva da $p_{k+1} \mid p_1 + \ldots + p_k$ za svako $k = 1, \ldots, n-1$.

**13.** Na jednoj zabavi $n$ momaka i $n$ devojaka su formirali parove za ples. Pri tome je razlika u visini u svakom paru manja od $10cm$. Dokazati da je takodje razlika u visini $k$-tog momka po visini i $k$-te devojke takodje manja od $10cm$ za svako $k = 1, \ldots, n$.

**14.** Neka su $a, b$ i $c$ pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati sledeću nejednakost:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

**15.** Naći maksimalnu vrednost izraza:

$$S = \frac{x_1}{1 + x_2 + \ldots + x_n} + \frac{x_2}{1 + x_1 + x_3 + \ldots + x_n} + \ldots + \frac{x_n}{1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}$$

pod uslovom $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Brojevi $x_i$ su pozitivni.

**16.** Dva kruga sa centrima $O_1$ i $O_2$ seku se u tačkama $A$ i $B$. Prava $p$ koja prolazi kroz tačku $A$ seče krugove redom u tačkama $Y$ i $Z$. Tangente na krugove u tačkama $Y$ i $Z$ seku se u tački $X$ a prave $(YO_1)$ i $(ZO_2)$ u tački $P$. Neka opisani krug $k$ oko trougla $O_1O_2B$ seče pravu $(XB)$ u tačkama $B$ i $Q$. Dokazati da je $PQ$ prečnik kruga $k$.

**17.** Dužine stranica četvorougla su prirodni brojevi. Dužina svake stranice deli sumu dužina preostale 3 stranice. Dokazati da su bar dve stranice iste dužine.

**18.** Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadat je sa:

(i) $x_1 = 2$; $x_2 = 8$;

(ii) $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$ za svako $n \geq 3$

Dokazati da je $\sum_{i=1}^{n} \arctan x_n^2 < \frac{\pi}{12}$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

**19.** Zadat je niz realnih brojeva $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sa:

(i) $x_1 = 2$;

(ii) $x_n = 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{2^{n-1} + \sqrt{4^{n-1} - x_{n-1}^2}}$, za $n \geq 2$.

Odrediti, ako postoji, $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

**20.** Dokazati da jednačina $x^{n-1} + y^n = z^{n+1}$ ima beskonačno mnogo rešenja u skupu celih brojeva za svako $n \in \mathbb{N}$.

Za sve primedbe, komentare, sugestije, itd. u vezi zadataka (a i uopšte) možete me kontaktirati putem e-maila.

© Marko Petković
*dexterofnis@gmail.com*

# UPUTSTVA I REŠENJA ZADATAKA

**1.** Neka je $d = \mathrm{NZD}(a,b,c)$. Tada postoje celi brojevi $A, B$ i $C$ takvi da je $a = Ad$, $b = Bd$ i $c = Cd$. Neka je $r = \mathrm{NZD}(A,B)$, $s = \mathrm{NZD}(B,C)$ i $t = \mathrm{NZD}(C,A)$. Brojevi $r, s$ i $t$ su medjusobno dva po dva uzajamno prosti jer ukoliko bi npr. važilo $d_1 = \mathrm{NZD}(r,s)$, tada bi $d_1$ delio sva tri broja $a, b$ i $c$, što je nemoguće. Prema tome, imamo da je $A = rSt$, $B = rsT$ i $C = Rst$. Zamenom u sistem dobijamo $A + B = t^2 d$, $B + C = r^2 d$ i $C + A = s^2 d$. Odavde dobijamo da $d \mid 2A, 2B, 2C$, odakle sledi da je $d = 1, 2$.

Neka je $r = \min\{r,t,s\}$. Iz $B + C = r^2 d$ trivijalno sledi $St + sT = rd$. Sada imamo:

$$2r \geq rd = St + sT \geq s + t \geq 2r$$

pa zaključujemo da je $r = s = t = 1$ i $d = 2$. Prema tome $(a,b,c) = (2,2,2)$ je jedino rešenje (proverom dobijamo da ova trojka stvarno zadovoljava uslove zadatka).

**2.** Trivijalno imamo da mora da važi $n \geq 0$. Takodje očigledo važi da ako je $(m,n)$ rešenje da je tada i $(-m,n)$ takodje rešenje date jednačine. Ako zamenimo $m = 0$ dobijamo $n^4 = 1 + 16n$. Ova jednačina nema rešenja. Ako je $n = 0$ dobijamo rešenje $m = \pm 1$.

Pretpostavimo sada da je $m, n > 0$. Dobijamo $m^2 = n^2 + \sqrt{1+16n}$ ili $m^2 = n^2 - \sqrt{1+16n}$. U prvom slučaju je trivijalno $m > n$. Medjutim $m^2 \geq (n+1)^2 > n^2 - \sqrt{1+16n}$ za $n > 3$. Proverom dobijamo da je $(4,3)$ rešenje. Na sličan način možemo pokazati da je u drugom slučaju $m^2 \leq (n-1)^2 < n^2 - \sqrt{1+16n}$. Takodje proverom dobijamo da je $(4,5)$ rešenje. Znači, sva rešenja zadatka su $(\pm 1, 0), (\pm 4, 3), (\pm 4, 5)$.

**3.** Dokaz izvodimo indukcijom po $n$. Za $n = 1$ imamo trivijalno da $a_1 \mid a_1^2$. Pretpostavimo da smo odredili $a_1, \ldots, a_n$, i odredimo $a_{n+1}$. Neka je $A_n = a_1 + \ldots + a_n$ a $B_n = a_1^2 + \ldots + a_n^2$. Stavimo $a_{n+1} = A_n^2 + B_n - A_n$. Dobijamo da je $A_{n+1} = a_1 + \ldots + a_{n+1} = A_n^2 + B_n$ kao i:

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= a_1^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = B_n + (A_n^2 + B_n - A_n)^2 = (A_n^2 + B_n)^2 - 2A_n(A_n^2 + B_n) + (A_n^2 + B_n) \\ &= A_{n+1}^2 - 2A_n A_{n+1} + A_{n+1} \end{aligned}$$

što je očigledno deljivo sa $A_{n+1}$.

**4.** Primenimo inverziju $\psi_{O,k}$ sa centrom u tački $O$ i u odnosu na krug $k$. Tačke $A, B, C$ i $D$ su invarijantne u odnosu na ovu inverziju. Neka je $M' = \psi_{O,k}(M)$ i $K' = \psi_{O,k}(K)$. Krugovi opisani oko trouglova $\triangle AOC$ i $\triangle BOD$ slikaju se redom u prave $(AC)$ i $(BD)$, pa je prema tome $K' = (AC) \cap (BD)$. Uglovi $\angle BCA$ i $\angle BDA$ su pravi (kao uglovi nad prečnikom $AB$), pa su $C$ i $D$ podnožja visina $\triangle A'B'K'$. Iz sličnosti trouglova $\triangle M'OK'$ i $\triangle KOM$ dobijamo da je $\angle MKO = \angle K'M'O$. Slika prave $(CD)$ je opisani krug oko $\triangle CDO$. Primetimo da je to Ojlerov krug 9 tačaka. Takodje presek ovog kruga i prave $(AB)$ su tačke $O$ i $M'$. Prema tome, $M'$ je podnožje visine iz $K'$ trougla $\triangle A'B'K'$, pa je $\angle K'M'O$ prav odakle sledi da je i $\angle MKO$ prav.

**5.** Neka je $f(n) = \lfloor \frac{2^n}{3} \rfloor$. Imamo da je $f(0) = f(1) = 0$. Sledeće relacije važe redom za $n$ parno i neparno $f(n+1) = 2f(n)$ i $f(n+1) = 2f(n) + 1$ ($2^n \equiv_3 1, 2$ u zavisnosti da li je $n$ parno ili neparno). Dalje je $f(2n) = 2f(2n-1) + 1 = 4f(2n-2) + 1$. Ako stavimo $a_n = f(2n) + \frac{1}{3}$ dobijamo da je $a_{n+1} = 4a_n$, pa sledi da je $a_n = \frac{4^n}{3}$. Sumiranjem dalje dobijamo da je

$$f(2) + f(4) + \ldots + f(2n) = a_1 + \ldots + a_n - \frac{n}{3} = \frac{4}{9}(4^n - 1) - \frac{n}{3}.$$

Pošto je $f(2n+1) = f(2n)$, sledi da je:

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(2n) = \frac{2n}{3}(4^n - 1) - n$$

Sada zamenom za $n = 1000$ dobijamo traženo rešenje.

**6.** Stavimo $x = a$, $y = z = 0$. Dobijamo da je $2f(a) + f(0) \geq 3f(a)$ pa je $f(a) \leq f(0)$. Stavimo sada $x = y = \frac{a}{2}$ i $z = -\frac{a}{2}$. Dobijamo $f(a) + f(0) + f(0) \geq 3f(0)$, pa je $f(a) \geq f(0)$. Prema tome $f$ je konstanta. Proverom dobijamo da sve konstantne funkcije zadovoljavaju datu nejednačinu.

**7.** Neka su $A_1, \ldots, A_k$ zadati. Posmatrajmo svih $2^k$ mogucnosti za skupove $C_1 \cap \cdots \cap C_n$ gde je je $C_i = A_i$ ili $C_i = S \setminus A_i$. Svi ovi skupovi su medjusobno disjunktni. Ukoliko je $2^k > n$, sledi da je bar jedan od posmatranih skupova prazan. Sada je dovoljno uzeti $B_i = S \setminus C_i$. Ukoliko je $2^k \leq n$, tada možemo odabrati skupove $A_i$ na sledeći način ($S = \{s_1, \ldots, s_n\}$):

$$A_i = \{s_j \mid j \text{ ima na poziciji } i \text{ u binarnom zapisu jedinicu}\}$$

tako da nijedan od $2^k$ preseka nije prazan. Prema tome, $k$ je minimalni broj takav da je $2^k > n$.

**9.** Formirati kombinatorni model problema. Od $n$ ljudi biramo skupštinu od $k$ ljudi ($k$ nije fiksno), pri čemu biramo predsednika, zamenika predsednika i sekretara koji ne moraju biti različite osobe.

**12.** Za $n = 2m$ to je $m+1, 1, m+2, 2, \ldots, m+m, m$ a za $n = 2m+1$ je $m+1, 1, m+2, 2, \ldots, m+m, m, 2m+1$.

**13.** Pretpostavimo suprotno, da je $m_k - d_k \geq 10$. Tada je $m_i - d_j \geq 10$ za $i = 1, \ldots, k$ i $j = k, k+1, \ldots, n$. Po Dirihleovom principu, dvoje od posmatranih $n+1$ ljudi moralo je biti upareno. Medjutim, njihova razlika u visini je veća ili jednaka $10cm$. Kontradikcija.

**14.** Uvesti smenu $x = 1/a$, $y = 1/b$ i $z = 1/c$ i primeniti Koši-Švarc-Bunjakovski nejednakost.

**15.** Uočimo da je $S = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2-x_i} - n$. Primenom Koši-Švarc-Bunjakovski nejednakosti dobijamo $S \geq \frac{n}{2n-1}$.

**17.** Neka je $a < b < c < d$. Tada je $d < a+b+c < 3d$ pa je $a+b+c = 2d$. Sada svaki od brojeva $a, b, c, d$ deli $a+b+c+d = 3d$. Neka je $x = \frac{3d}{a}$, $y = \frac{3d}{b}$ i $z = \frac{3d}{c}$. Imamo da je $x > y > z > 3$ pa je $y \geq 4$, $z \geq 5$ i $x \geq 6$. Zamenom dobijamo:

$$2d = a + b + c \leq \frac{3d}{6} + \frac{3d}{5} + \frac{3d}{4} < 2d$$

što je kontradikcija.

**18.** Korišcenjem jednakosti $arccot x = \arctan\frac{1}{x}$ i $\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$, indukcijom možemo pokazati da je:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \text{arccot} x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \arctan\frac{1}{x_n^2} = \arctan f(n)$$

gde je $f(n)$ definisano sledećom rekurentnom relacijom:

$$f(n) = \frac{x_n^2 f(n-1) + 1}{x_n^2 - f(n-1)}$$

i važi $f(1) = 1/x_1^2$. Dokaz indukcijom: Za $n = 1$ je trivijalno.

$$S_{n+1} = \arctan f(n) + \arctan\frac{1}{x_n^2} = \arctan\frac{f(n) + 1/x_n^2}{1 - \frac{f(n)}{x_n^2}} = \arctan\frac{x_n^2 f(n-1) + 1}{x_n^2 - f(n-1)} = \arctan f(n+1)$$

Može da se pokaže indukcijom da je $f(n) = \frac{x_n}{x_{n+1}}$. Rešavanjem diferencne jednačine za niz $x_n$ dobijamo:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right)$$

Odavde je $f(n) = \frac{x_n}{x_{n+1}} < 2 - \sqrt{3}$ za svako $n$, pa je i $\arctan f(n) < \arctan(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$.

**19.** Uvedimo smenu $x_n = 2^n \sin\theta_n$. Ako zamenimo u rekurentnu relaciju dobijamo:

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{2^{n-1} - \sqrt{4^{n-1} - 4^{n-1}\sin^2\theta_{n-1}}} = 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{2^{n-1} - 2^{n-1}\sqrt{1-\sin^2\theta_{n-1}}} \\ &= 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{2^{n-1} - 2^{n-1}\cos\theta_{n-1}} == 2^n\sqrt{\frac{1-\cos\theta_{n-1}}{2}} = 2^n \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} = 2^n\sin\theta_n \end{aligned}$$

gde je $\theta_n = \frac{\theta_{n-1}}{2}$. Pretpostavili smo da je $\theta_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tj da su $\sin\theta_n$ i $\cos\theta_n$ nenegativni. Pošto je $x_1 = 2$, možemo uzeti da je $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$. Sada se indukcijom lako pokazuje da je $x_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$. Potražimo sada graničnu vrednost niza $x_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin\pi x}{x} = \pi$$

**20.** Neka je

$$z = a^{n-1} + b^n, \quad x = a\left(a^{n-1}+b^n\right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad y = b(a^{n-1}+b^n) \tag{1}$$

Tada je

$$\begin{aligned} z^{n+1} = (a^{n-1}+b^n)^{n+1} = a^{n-1}(a^{n-1}+b^n)^n + b^n(a^{n-1}+b^n)^n = \\ \left(a\left(a^{n-1}+b^n\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{n-1} + \left(b(a^{n-1}+b^n)\right)^n = x^{n-1} + y^n \end{aligned}$$

Još samo preostaje da nadjemo brojeve $a$ i $b$ tako da $c = \left(a^{n-1}+b^n\right)^{\frac{1}{n-1}}$ bude ceo broj. Prethodni izraz je ekvivalentan sa:

$$a^{n-1} + b^n = c^{n-1} \Leftrightarrow b^n = c^{n-1} - a^{n-1}$$

Na sličan način, neka je:

$$c = p(p^{n-1} - q^{n-1}), \quad a = q(p^{n-1} - q^{n-1}), \quad b = p^{n-1} - q^{n-1} \tag{2}$$

Proverom dobijamo da važi:

$$b^n = (p^{n-1} - q^{n-1})^n = p^{n-1}(p^{n-1}-q^{n-1})^{n-1} - q^{n-1}(p^{n-1}-q^{n-1})^{n-1} = c^{n-1} - a^{n-1}$$

Zamenom (2) u (1) dobijamo:

$$x = ac^n = q(p^{n-1}-q^{n-1})p^n(p^{n-1}-q^{n-1})^n = p^n q(p^{n-1}-q^{n-1})^{n+1}$$

$$y = bc^{n-1} = (p^{n-1}-q^{n-1})p^{n-1}(p^{n-1}-q^{n-1})^{n-1} = p^{n-1}(p^{n-1}-q^{n-1})^n$$

$$z = c^{n-1} = p^{n-1}(p^{n-1}-q^{n-1})^{n-1}$$

što predstavlja rešenje jednačine za svako $p, q \in \mathbb{N}$ i $p > q$ i svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.