Gimnazija "Svetozar Marković", Niš
Dodatna nastava iz matematike za 3. i 4. razred
Četvrtak, 11.01.2007

POLINOMI I POLINOMSKE FUNKCIONALNE JEDNAČINE

predavač: *Marko Petković*

1 Osnovna teorija

<u>Definicija.</u> Neka je $\mathcal{R}$ prsten. *Polinom* $P(x)$ nad prstenom $\mathcal{R}$ je svaki izraz oblika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ gde su $a_i \in \mathcal{R}$ i $a_n \neq 0$. Broj n nazivamo *stepenom* polinoma $P(x)$, u oznaci $n = \mathrm{dg}P(x)$, dok skup svih polinoma nad $\mathcal{R}$ obeležavamo sa $\mathcal{R}[x]$.

<u>Teorema.</u> Svaki polinom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stepena n ima tačno n kompleksnih nula.

<u>Bezuov stav.</u> Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x - a$ je $P(a)$.

<u>Vietove formule.</u> Neka je $P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ polinom. Označimo sa $\sigma_k = \sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$, gde se sumiranje vrši po svim indeksima $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Ako polinom $P(x)$ napišemo u obliku $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tada važe sledeće *Vietove formule* $a_i = (-1)^{n-i}\sigma_{n-i}a_n$. Izrazi $\sigma_k = \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ nazivaju se *osnovni simetrični polinomi.*

<u>Njutn-Girardove formule.</u> Neka su σ_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ osnovni simetrični polinomi promenljivih $x_1, \ldots, x_n$. Neka je $S_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$. Tada važe sledeće Njutn-Girardove formule:

$$S_k\sigma_0 - S_{k-1}\sigma_1 + \ldots + (-1)^k S_0\sigma_k = 0$$

<u>Lagranžova interpolaciona formula.</u> Neka su $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$ realni brojevi pri čemu su $x_0, \ldots, x_n$ medjusobno različiti. Tada postoji jedinstveni polinom $P_n(x)$ stepena n takav da je $P(x_i) = y_i$ za svako $i = 0, \ldots, n$ i važi sledeća *Lagranžova interpolaciona formula*:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

<u>Ajzenštajnov kriterijum.</u> Neka je $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ polinom sa celobrojnim koeficijentima. Ako postoji prost broj p takav da $p \mid a_0, \ldots, a_{n-1}$, $p \nmid a_n$ i $p^2 \nmid a_0$, tada je polinom $P(x)$ ireducibilan [1] u $\mathbb{Z}[x]$.

[1] Polinom $P(x)$ je ireducibilan u $\mathcal{R}[x]$ ukoliko ne postoje dva polinoma $Q(x), R(x) \in \mathcal{R}[x]$ različita od konstante takva da je $P(x) = Q(x)R(x)$

2 Zadaci

1. Dokazati da je polinom $P(x) = x^n + x + p \in \mathbb{Z}[x]$ ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$ za svaki prost broj p.

2. Dokazati da je polinom $x^{2007} - 9$ ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$.

3. Dokazati da je polinom $P(x) = x^n + 5x^{n-1} - 3$ ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$.

4. (prošireni Ajzenštajnov kriterijum) Neka je $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ polinom sa celobrojnim koeficijentima i neka je p prost broj takav da je $p \mid a_0, \ldots, a_k$, $p \nmid a_{k+1}$ i $p^2 \nmid a_0$. Tada postoji ireducibilni faktor $Q(x)$ polinoma $P(x)$ stepena većeg od k.

5. Dat je polinom sa realnim koeficijentima $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ koji ima tri realna pozitivna korena, ne obavezno različita. Odrediti minimalnu vrednost zbira $a + b$.

6. Neka su date dve različite kolekcije realnih brojeva $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ (jednake su ako su skupovno jednake $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ i ako se svaki broj podjednak broj puta ponavlja u svakoj kolekciji). Dokazati da ukoliko su kolekcije $a_i + a_j$ i $b_i + b_j$, $1 \leq i < j \leq n$ jednake, da je tada n stepen dvojke.

7. Neka je $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ polinom sa kompleksnim koeficijentima. Dokazati da postoji $z \in \mathbb{C}$ takav da je $|z| = 1$ i $|f(z)| \geq 1$.

8. Ako su x_i nule polinoma $P(x) = 18x^{48} + 3x + 2006$ izračunati $\sum_{i=1}^{48} \frac{x_i}{1+x_i}$.

9. Postoje li realni brojevi b i c takvi da svaka od jednačina $x^2 + bx + c = 0$ i $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$ ima po dva celobrojna korena?

10. Dati su prirodni brojevi k i n, $k \leq n$ i realni brojevi $a_1, \ldots, a_n$. Pretpostavimo da je za sve prirodne brojeve $i \leq k$ ispunjeno $a_1^i + \ldots + a_n^i = n$. Dokazati da je onda:

$$(x + a_1) \cdots (x + a_n) = x^k + \binom{n}{1} x^{k-1} + \ldots + \binom{n}{k-1} x + \binom{n}{k}$$

11. Neka je $P(x)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima i neka je definisan polinom $Q(x) = P^{(k)}(x) = \underbrace{P(P(\cdots P(x)) \cdots)}_{k\text{-puta}}$. Dokazati da postoji najviše n različitih celih brojeva t takvih da je $Q(t) = t$.

12. Dat je polinom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ čiji su svi koeficijenti nenegativni i koji ima n realnih nula. Dokazati da je $P(2) \geq 3^n$.

13. Za polinom sa celobrojnim koeficijentima $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ kažemo da je *deljiv* prirodnim brojem m ako $m \mid P(x)$ za svako celobrojno x. Dokazati da ako je $P(x)$ deljiv sa m, tada je broj $n! a_n$ deljiv sa m.

14. Dat je polinom $f(x)$ sa celobrojnim koeficijentima stepena n. Neka su k i p prirodni brojevi. Dokazati da ako nijedan od brojeva $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p)$ nije deljiv sa $p+1$, tada $f(x)$ nema celobrojnih nula.

15. Odrediti sve trojke (x, y, z) pozitivnih racionalnih brojeva takvih da su $x + y + z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ i xyz celi brojevi.

16. Neka su $a_1, \ldots, a_n$ dati celi brojevi. Dokazati da je polinom $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n) - 1$ ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$.

17. Neka su $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ i $Q(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$ polinomi sa celobrojnim nenegativnim koeficijentima i neka je $m = \max_{0 \leq i \leq n} a_i$. Dokazati da ako postoje brojevi a i b takvi da je $a < b$, $b > m$, $P(a) = Q(a)$ i $P(b) = Q(b)$, onda je $P(x) = Q(x)$.

18. Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ proizvoljan polinom stepena 2 sa celobrojnim koeficijentima. Dokazati da postoji k uzastopnih prirodnih brojeva takvih da je $f(x)$ složen broj.

19. Ako je $P(x)$ polinom n-tog stepena takav da je $P(k) = 2^k$ za svako $k = 0, 1, \ldots, n$, naći $P(n+1)$.

20. Ako je $P(x)$ polinom n-tog stepena takav da je $P(k) = \frac{1}{k}$ za svako $k = 1, \ldots, n+1$, naći $P(n+2)$.

21. Neka je $P(x)$ polinom, i k prirodan broj takvi da je $P(i) = f_i$ za $i = k, k+1, \ldots, 2k-3, 2k-2$ gde f_i predstavlja i-ti Fibonačijev broj. Dokazati da je $P(2k-1) = f_{2k-1} - 1$.

22. Polinom $P(x)$ stepena n uzima celobrojne vrednosti za sve $x = 0, 1, 2, 4, \ldots, n^2$. Dokazati da $P(x)$ uzima celobrojne vrednosti za svako $x = m^2$ gde je m proizvoljan ceo broj.

23. Neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od $2n$. Ako je za sve cele brojeve $k = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$ ispunjeno $|P(k)| \leq 1$ dokazati da tada za sve $x \in [-n, n]$ važi $|P(x)| \leq 2^{2n}$.

24. Polinomi $P(x), Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ čiji su stepeni redom 3,2 i 3 zadovoljavaju identitet:

$$P^2(x) + Q^2(x) = R^2(x)$$

Koliko realnih i različitih nula ima polinom $T(x) = P(x)Q(x)R(x)$?

25. Ako za realne brojeve x, y, z, a, b, c važi $x + y + z = ax + by + cz = ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ dokazati da je tada $a^3x + b^3y + c^3z = 1 - (1-a)(1-b)(1-c)$.

26. Neka je d ceo broj i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_1, \ldots, x_n$ realni brojevi takvi da je broj $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^i$ ceo za svako $1 \leq j < d$. Dokazati da je tada i $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^d$ ceo broj.

27. Naći sve polinome $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ i $P(x) \neq const$ za koje važi $P(x^3+1) = (P(x+1))^3$

28. Naći sve polinome $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ za koje važi $P(0) = 0$ i $P(x) = \frac{P(x-1)+P(x+1)}{2}$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

29. Naći sve polinome $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju sledeću funkcionalnu jednačinu $f(x)f(x+1) = f(x^2+x+1)$.

30. Naći sve polinome $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju sledeću funkcionalnu jednačinu $f(x)f(2x^2) = f(2x^3+x)$.

31. Neka je niz polinoma $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ definisan na sledeći način: $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x))$. Dokazati da jednačina $P_n(x) = x$ ima 2^n realnih i različitih rešenja.

32. Naći sve polinome $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ za koje važi $xP(x-1) = (x-2)P(x)$.

33. Naći sve polinome $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ čije su sve nule realne i nenegativne i koji zadovoljava jednačinu $P(x)P(x+1) = P(x^2)$.

Za sve primedbe, komentare, sugestije, itd. u vezi zadataka (a i uopšte) možete me kontaktirati putem e-maila.

dexterofnis@gmail.com

UPUTSTVA I REŠENJA ZADATAKA

1. Imamo da za $|z| < 1$ važi $|z^n| < |z| + p$, pa prema tome ovaj polinom nema nula u jediničnom krugu. Pretpostavimo suprotno, da je $P(x) = Q(x)R(x)$. Sada je $P(0) = Q(0)R(0) = p$ pa je $Q(0) = \pm 1$ a $P(0) = \pm p$. Neka su $x_1, \ldots, x_k$ nule polinoma $Q(x)$. Tada je $|Q(0)| = |x_1 \cdots x_k| < 1$ što predstavlja kontradikciju.

2. Pretpostavimo suprotno. Neka je $f(x) = g(x)h(x)$ i neka su $x_1, \ldots, x_k$ sve nule polinoma $h(x)$. Pošto je $|x_i| = \sqrt[2007]{9}$ to je i $|x_1 \cdots x_k| = 10^{\frac{k}{2007}} \notin \mathbb{Z}$. Medjutim vrednost $|x_1 \cdots x_k|$ je (do na znak) slobodni član polinoma $h(x)$ pa je zato ceo broj. Kontradikcija.

3. Pretpostavimo suprotno. Neka je $p(x) = g(x)h(x)$ gde su:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i x^i, \qquad h(x) = \sum_{i=1}^{n-k} c_i x^i$$

polinomi sa celobrojnim koeficijentima različiti od konstante. Pošto je $b_0 c_0 = 3$, sledi da je bar jedan od brojeva b_0 i c_0 jednak ± 1. Neka je to c_0. Tada je $|b_0| = 3$. Neka je t minimalan indeks takav da $3 \nmid b_t$. Ako predstavimo $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ dobijamo da je:

$$a_t = b_i c_0 + (b_{i-1} c_1 + \ldots + b_0 c_i)\,, \quad 3 \nmid a_t$$

Pošto je $a_i = 0$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n-2$, sledi da je $t \geq n-1$, pa je i $k \geq n-1$. Polinom $g(x)$ je onda stepena 1, pa pošto ovaj polinom nema racionalnih nula, dobijamo da je ireducibilan.

4. Koristimo sličnu ideju kao u prethodnom zadatku. Neka je $P(x) = P_1(x) \cdots P_m(x)$ razlaganje polinoma $P(x)$ na ireducibilne polinome. Neka je $P_i(x) = \sum_{i=1}^{d_i} p_{ij} x^j$, gde su $d_1, \ldots, d_m$ redom stepeni polinoma $P_i(x)$. Pošto je $a_0 = p_{10} \cdots p_{m0}$, zaključujemo da je tačno jedan od brojeva $p_{10}, \ldots, p_{m0}$ deljiv sa p. Bez gubljenja opštosti predpostavimo da je to p_{10}.

Ako sada označimo sa $h(x) = P_2(x) \cdots P_m(x)$, a sa $f(x) = P_1(x)$, na sličan način kao u prethodnom zadatku dobijamo da $p \nmid a_t$ gde je t minimalan broj takav da $p \nmid b_t = p_{1t}$. Odavde, prema uslovu zadatka sledi da je $d_1 \geq t \geq k+1$.

5. Neka su r, s i t traženi koreni. Na osnovu Vietovih pravila je $a = r+s+t$, $b = rs+st+rt$ i $rts = 1$, pa je:

$$a + b = r + s + t + rs + st + rt = r + s + t + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \geq 6\sqrt[6]{rst\frac{1}{t}\frac{1}{r}\frac{1}{s}} = 6,$$

pri čemu se jednakost dostiže za $r = s = t = 1$.

6. Posmatrajmo polinome $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i}$ i $g(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}$. Prema uslovu zadatka imamo da je $f(x) \neq g(x)$. Dalje imamo da važi:

$$f(x)^2 = \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x^{a_i + a_j} = f(x^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x^{a_i + a_j}$$

Ponovo, prema uslovu zadatka imamo da je $f(x)^2 - f(x^2) = g(x)^2 - g(x^2)$. Pošto je $f(1) = g(1) = n$ sledi da je 1 nula polinoma $f(x) - g(x)$, pa prema tome postoji broj k i polinom $Q(x)$ takav da je $f(x) = (x-1)^k Q(x)$. Posmatrajmo sada:

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{f(x) - g(x)} = \frac{(x^2-1)^k Q(x^2)}{(x-1)^k Q(x)} = (x+1)^k \frac{Q(x^2)}{Q(x)}$$

Ako sada zamenimo $x = 1$ dobijamo da je $n = 2^{k-1}$.

8. Primetimo da $x_i \notin \{1,0\}$ i da je $\frac{x_i}{1+x_i} = \frac{1}{1+x_i^{-1}}$. Koristićemo sledeće dve očigledne činjenice:

(a) Ako su y_i nule polinoma $A(x)$ n-tog stepena, onda su y_i^{-1} nule polinoma $x^n A(x^{-1})$.

(b) Ako su y_i nule polinoma $A(x)$, onda su y_i+1 nule polinoma $A(x-1)$. Iz (a) sledi da su x_i^{-1} nule polinoma $Q(x) = x^{48}P(x^{-1})$, iz (b) da su $1+x_i^{-1}$ nule polinoma $R(x) = Q(x-1)$. Konačno, iz (a) sledi da su $\frac{1}{1+x_i^{-1}}$ nule polinoma:

$$\begin{aligned} x^{48}R(x^{-1}) &= x^{48}Q(x^{-1}-1) = x^{48}(x^{-1}-1)^{48}P((x^{-1}-1)^{-1}) \\ &= 18x^{48} + 3x(1-x)^{47} + 2006(1-x)^{48} \\ &= 2021x^{48} - 96147x^{47} + \ldots + 2006. \end{aligned}$$

Iz Vietovih formula za ovaj polinom, dobijamo da je traweni zbir jednak $\frac{96147}{2021}$.

9. Neku su celobrojni koreni prve jednačine k i l, a druge m i n. Tada bi na osnovu Vietovih formula važilo

$$\begin{aligned} k+l &= -b & (1) \\ k\cdot l &= c & (2) \\ 2(m+n) &= -b-1 & (3) \\ 2m\cdot n &= c+1 & (4) \end{aligned}$$

Iz jednakosti (4) sledi da je broj c neparan. Sada, na osnovu jednakosti (2) zaključujemo da su brojevi k i l neparni, iz čega, dalje, na osnovu (1), zaključujemo da je b paran broj. Medjutim, na osnovu (3) sledi da je b neparan broj. Stoga, brojevi b i c sa traženim svojstvom ne postoje.

11. Neka je $Q(t) = t$. Neka je $a_0 = t$ i $a_{i+1} = P(a_i)$ za $i \geq 1$. Imamo da je $a_k = t$ i da važi: $a_1 - a_0 \mid P(a_1) - P(a_0) = a_2 - a_1$. Na sličan način dobijamo da je:

$$a_1 - a_0 \mid a_2 - a_1 \mid a_3 - a_2 \mid \ldots \mid a_k - a_{k-1} \mid a_0 - a_k \mid a_1 - a_0$$

Prema tome vrednost $|a_{i+1} - a_i|$ je konstantna. Ovo je moguće samo u slučaju da je broj elemenata skupa $\{a_0, \ldots, a_k\}$ jednak 1 ili 2, odnosno da medju brojevima $a_0, \ldots, a_k$ ima ne više od 2 različita.

Znači, za svako celobrojno t koje zadovoljava jednačinu $Q(x) = x$ važi $P(P(t)) = t$. Neka su $t_1, \ldots, t_k$ celobrojna rešenja jednačine $Q(x) = x$, i neka je $s_i = P(t_i)$. Imamo da važi:

$$t_i - t_j \mid P(t_i) - P(t_j) \mid s_i - s_j \mid P(s_i) - P(s_j) \mid t_i - t_j$$

pa je, prema tome $t_i - t_j = s_i - s_j$. Slično dobijamo i da je $|t_i - s_j| = |t_j - s_i|$. Odavde sledi da je $t_i + s_i = t_j + s_j = u$, odnosno da su svi t_i koreni jednačine $x + P(x) = u$. Odavde trivijalno sledi da ih ima najviše n.

12. Pošto su svi koeficijenti polinoma $P(x)$ nenegativni, sledi da sve nule manje ili jednake 0. Prema tome polinom možemo zapisati u obliku $P(x) = (x+x_1)\cdots(x+x_n)$ gde su $x_1, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi. Korišćenjem nejednakosti izmedju aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo da je $2 + x_i = 1 + 1 + x_i \geq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot x_i} = \sqrt[3]{x_i}$. Prema tome, dobijamo da je:

$$P(2) \geq 3^n \sqrt[3]{x_1 \cdots x_n} = 3^n \sqrt[3]{1} = 3^n$$

14. Pretpostavimo suprotno, da $f(x)$ ima celobrojnu nulu m. Tada je $P(m) = 0$, odnosno na osnovu Bezuovog stava postoji polinom $g(x)$ sa celobrojnim koeficijentima tako da važi $f(x) = (x-m)g(x)$. Ukoliko sada zamenimo $x = k, k+1, \ldots, k+p$ imamo da je $f(k+i) = (k+i-m)g(k+i)$, za svako $i = 0, 1, \ldots, p$. Medju brojevima $k-m, k+1-m, \ldots, k+p-m$ postoji tačno jedan deljiv sa $p+1$, što predstavlja kontradikciju sa polaznom pretpostavkom.

16. Pretpostavimo suprotno, neka je $p(x) = f(x)g(x)$. Na osnovu definicije polinoma $p(x)$ važi $p(a_i) = f(a_i)g(a_i) = -1$. Odavde dobijamo (pošto su $f(x)$ i $g(x)$ polinomi sa celobrojnim koeficijentima) da važi: $f(a_i) = -g(a_i)$, odnosno $f(a_i) + g(a_i) = 0$ za svako $i = 1, \ldots, n$. Stepeni polinoma $f(x)$ i $g(x)$ su najviše $n-1$, pa je i stepen polinoma $f(x) + g(x)$ najviše $n-1$. Pošto on ima bar n nula, zaključujemo da je identički jednak nuli, odnosno da važi $p(x) = -f(x)^2$. Medjutim, ovo nemoguće jer je koeficijent uz najstariji član polinoma $p(x)$ pozitivan (i jednak 1) dok je za polinom $-f(x)^2$ negativan.

17. Pošto je $b > m$, izraz: $P(b) = a_0 + a_1 b + \ldots + a_n b^n$ predstavlja reprezentaciju broja $P(b)$ u sistemu sa osnovom b. Ukoliko je i $b_i \leq b$ za svako $i = 0, \ldots, k$, onda na osnovu jedinstvenosti predstavljanja broja u sistemu sa osnovom b imamo da je $P(x) = Q(x)$. Pretpostavimo sada da je $d_i > m$. Napišimo d_i u obliku $d_i = q_i b + r_i$, gde je $0 \leq r_i < b$ i $q_i > 1$. Posmatrajmo polinom $Q_1(x)$ definisan pomoću:

$$Q_1(x) = b_k x^k + \ldots + (b_{i+1} + q_i)x^{i+1} + r_i x^i + b_{i-1}x^{i-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Imamo da je $Q_1(b) = P(b)$, a na osnovu:

$$b_i a^i + b_{i+1}a^{i+1} = (q_i b + r_i)a^i + b_{i+1}a^{i+1} < (q_i a + r_i)a^i + b_{i+1}a^{i+1} = r_i a^i + (b_{i+1} + q_i)a^{i+1}$$

dobijamo da je $Q_1(a) < Q(a)$. Ponavljajući dalje ovaj postupak nalazimo polinom $Q_m(x)$ za koji važi da je $Q_m(b) = P(b)$ i kod kog su svi koeficijenti manji od b. Na osnovu prethodnog slučaja, zaključujemo da je $P(x) = Q_m(x)$. Medjutim to je nemoguće, jer je $Q_m(a) < Q(a) = P(a)$.

18. Neka je $A = |f(p+1) \cdots f(p+k)|$, gde je p prirodan broj koji ćemo kasnije odrediti. Uočimo sada polinoma $f(x)$ u tačkama $A + p + 1, \ldots, A + p + k$. Imamo da važi:

$$f(A + p + i) = aA^2 + (2a(p+i) + b)A + f(p+i)$$

odakle zaključujemo da $f(p+i) \mid f(A+p+i)$. Ukoliko bi važilo da je $f(p+i) \neq \pm 1$ i $|f(p+i)| < |f(A+p+i)|$ tada bi sledilo da su brojevi $f(A+p+i)$ svi složeni.

Dokažimo sada da postoji broj p takav da je prethodni uslov ispunjen. Jednačina $f(x) = \pm 1$ može imati najviše 4 rešenja u skupu celih brojeva. Takodje, za dovoljno veliku vrednost broja x, $|f(x)|$ je rastuća funkcija po x. Ovim smo dokazali postojanje broja p.

19. **Prvo rešenje:** Posmatrajmo polinom:

$$P(x) = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \ldots + \binom{x}{n-1} + \binom{x}{n}, \qquad \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

Proverom, lako možemo utvrditi da za svako $k = 0, 1, \ldots, n$ važi:

$$P(k) = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} = 2^k$$

Zamenom takodje imamo da je:

$$P(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+1}{n} = 2^{n+1} - 1$$

Drugo rešenje: Koristićemo Lagranžovu interpolacionu formulu. Pošto je polinom definisan u tačkama $x_i = i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, imamo da važi:

$$(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n) = (i-0)(i-1)\cdots 1(-1)(-2)\cdots(-n+i) = i!(n-i)!(-1)^{n-i}$$

a za $x = n+1$ na sličan način dobijamo:

$$(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n) = (n+1-0)(n+1-1)\cdots(n+2-i)(n-i)\cdots 1 = \frac{(n+1)!}{n-i+1}$$

Zamenom u Lagranžovu interpolacionu formulu dobijamo:

$$P(n+1) = \sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{(n+1)!}{(n-i+1)(n-i)!i!}(-1)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n+1}{i}(-1)^{n-i} = 2^{n+1} - 1$$

20. Na sličan način kao u prethodnom zadatku korišćenjem Lagranžove interpolacione formule dobijamo:

$$P(n+2) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{i!(n+2-i)!}(-1)^{n+1-i} = \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+2}{i}(-1)^{n+1-i} = \frac{1}{n+2}\left(1-(-1)^{n+1}\right)$$

21. Primenom Lagranžove interpolacione formule dobijamo da je:

$$P(x) = \sum_{i=k}^{2k-2} f_i \frac{(x-k)\cdots(x-i+1)\cdot(x-i-1)\cdots(x-2k+2)}{(i-k)!(2k-2-i)!}$$

Ako sada zamenimo $x = 2k-1$ dobijamo da je:

$$P(2k-1) = \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{j} f_{k+j} = f_{2k-1} - 1$$

24. Neka je $P(x) = a_3x^3 + \ldots$ i $R(x) = b_3x^3 + \ldots$. Polinomi $P(x)^2 + Q(x)^2$ i $R(x)^2$ su stepena 6, a koeficijenti uz najstariji član (uz x^6) su redom a_3^2 i b_3^2. Prema tome $a_3 = z \cdot b_3$ gde je $z = \pm 1$ i polinom $R(x)$ možemo napisati kao $R(x) = zP(x) + P_1(x)$, gde je $P_1(x)$ polinom stepena najviše 2. Zamenom u uslov zadatka dobijamo:

$$R^2 = (zP + P_1)^2 = P^2 + 2zPP_1 + P_1^2 = P^2 + Q^2$$

$$2zPP_1 + P_1^2 = Q^2$$

Pošto je desna strana (Q^2) stepena 4, to je stepen leve strane takodje 4, pa je polinom $2zPP_1$ je stepena najviše 4 odnosno polinom P_1 je stepena najviše 1. Rastavljanjem prethodne jednakosti imamo:

$$P_1(2zP + P_1) = Q^2$$

Ako bi P_1 bio konstanta (stepena 0), onda bi stepen leve strane prethodne jednakosti bio 3 što je nemoguće. Znači polinom P_1 ima stepen 1 i može se pretstaviti u obliku $P_1(x) = A_1(x-a)$ gde su $A_1, a \in \mathbb{R}$ i $A_1 \neq 0$. Dalje, pošto $(x-a)|Q^2$ to $(x-a)|Q(x)$ i $Q(x)$ možemo pretstaviti u obliku $Q(x) = A(x-a)(x-b)$ gde su takodje $b, A \in \mathbb{R}$ i $A \neq 0$. Zamenom dobijamo da je:

$$2zP(x) + A_1(x-a) = \frac{A^2}{A_1}(x-a)(x-b)^2$$

odnosno

$$P(x) = \frac{1}{2z}(x-a)\left(\frac{A^2}{A_1}(x-b)^2 - A_1\right)$$

$$R(x) = zP(x) + A_1(x-a) = \frac{1}{2}(x-a)\left(\frac{A^2}{A_1}(x-b)^2 + A_1\right)$$

Zamenom u $T(x) = P(x)Q(x)R(x)$ dobijamo:

$$T(x) = \frac{1}{4z}(x-a)^3(x-b)\left(\frac{A^2}{A_1}(x-b)^2 - A_1\right)\left(\frac{A^2}{A_1}(x-b)^2 + A_1\right)$$

Polinom $\frac{A^2}{A_1}(x-b)^2 - A_1$ ima dve realne nule $b \pm \left|\frac{A_1}{A}\right|$, dok polinom $\frac{A^2}{A_1}(x-b)^2 + A_1$ nema realnih nula. Znači, realne nule polinoma $T(x)$ su $x = a, b, b + \left|\frac{A_1}{A}\right|, b - \left|\frac{A_1}{A}\right|$. Ukupno ih ima 4, poslednje 3 su sve medjusobno različite, dok prva može biti jednaka nekoj od naredne tri. Znači mogu biti 3 ili 4 različite nule polinoma $T(x)$.

28. Data jednačina je ekvivalentna sa $P(x+1) = 2P(x) - P(x-1)$. Indukcijom se lako dokazuje da je $P(n) = nP(1) = nc$, gde je $c = P(1)$. Posmatrajmo sada polinom $Q(x) = P(x) - cx$. Zamenom dobijamo da je $Q(x)$ takodje rešenje date funkcionalne jednačine, pri čemu je $Q(1) = 0$, pa je i $Q(n) = nQ(1) = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Odavde sledi da je $Q(x) \equiv 0$, pa je $P(x) = cx$. Proverom dobijamo da je za svako $c \in \mathbb{R}$, polinom $P(x) = cx$ rešenje date jednačine.

29. Neka je z nula polinoma $f(x)$ maksimalnog modula. Ako zamenimo x sa $z-1$ dobijamo $f(z^2 - z + 1) = f(z)f(z-1) = 0$. Takodje imamo da je $f(z^2 + z + 1) = f(z)f(z+1) = 0$. Prema tome, nule polinoma $f(x)$ su i $z_1 = z^2 + 1 + z$ i $z_2 = z^2 + 1 - z$. Ako je $z^2 + 1 \neq 0$ imamo da važi:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 2(|z|^2 + |z^2+1|^2) > 2|z|^2 \quad \Longrightarrow \quad |z_1| > |z| \vee |z_2| > |z|$$

što je kontradikcija. Znači $z^2 + 1 = 0$, odnosno $z = \pm i$. Sada polinom $f(x)$ možemo zapisati kao $f(x) = (x^2+1)^k g(x)$. Zamenom u jednačinu, dobijamo da $g(x)$ takodje zadovoljava traženu funkcionalnu jednačinu, pri čemu je $g(\pm i) \neq 0$. Prema tome zaključujemo da je $g(x) \equiv 1$. Znači sva rešenja jednačine su $f(x) = (x^2+1)^k$.

30. Primetimo da je $f(x) \equiv 0$ rešenje. Ako zamenimo $x = 0$ dobijamo da je $f(0) = 1$, odnosno da je proizvod nula polinoma $f(x)$ jednak 1. Neka je z proizvoljna kompleksna nula polinoma $f(x)$ maksimalnog modula. Ako je $|z| > 1$, zamenom dobijamo da je i $2z^3 + z$ nula. Medjutim važi $|2z^3 + z| > 2|z|^3 - |z| = |z|(2|z|^2 - 1) > |z|$, što predstavlja kontradikciju sa činjenicom da je z nula maksimalnog modula. Pošto je proizvod svih nula 1, imamo da važi $|z| \geq 1$, a iz prethodnog dobijamo da je $|z| = 1$ i da su sve nule modula 1. Takodje je i $|2z^2 + 1| = 1$ odakle dobijamo da je $z^2 = -1$, odnosno $z = \pm i$. Prema tome, sva rešenja jednačine su polinomi $f(x) = (x^2+1)^n$.

31. Uvedimo smenu $x = 2\cos t$. Sada je $P_1(2\cos t) = 2\cos 2t$. Može se pokazati indukcijom da važi $P_n(2\cos t) = 2\cos 2^n t$, pa se naša jednačina svodi na $\cos 2^n t = \cos t$. Rešenja ove jednačine su:

$$t_k = \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \qquad t'_k = \frac{2k\pi}{2^n + 1}$$

za svako $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ova rešenja generišu ukupno 2^n rešenja polazne jednačine.

32. Zamenom za $x = 0, 2$ dobijamo da je $P(1) = P(0) = 1$. Dakle $P(x) = (x^2 - x)Q(x)$. Zamenom u jednačinu dobijamo da je $Q(x) = Q(x-1)$ odakle trivijalno sledi da je $Q(x) \equiv C$. Proverom dobijamo da svi polinomi $P(x) = C(x^2 - x)$ zadovoljavaju jednačinu.

33. Neka su $a_1, \ldots, a_n$ nule polinoma $P(x)$. Tada su sve nule polinoma $P(x^2)$ i $P(x+1)$ jednake redom $\pm\sqrt{a_1}, \ldots, \pm\sqrt{a_n}$ i $a_1 - 1, \ldots, a_n - 1$. Prema tome, kolekcije brojeva $a_1, \ldots, a_n, a_1 - 1, \ldots, a_n - 1$ i $\pm\sqrt{a_1}, \ldots, \pm\sqrt{a_n}$ su jednake. Pošto u prvoj kolekciji ima podjednako negativnih i pozitivnih brojeva, sledi da su svi $a_i - 1$ negativni, pa je $0 \leq a_i \leq 1$ za svako $i = 1, \ldots, n$. Pretpostavimo da je $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Tada je, sa jedne strane:

$$a_1 - 1 \leq a_2 - 1 \leq \cdots \leq a_n - 1 \leq 0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n,$$

a sa druge:

$$-\sqrt{a_n} \leq -\sqrt{a_{n-1}} \leq \cdots \leq -\sqrt{a_1} \leq 0 \leq \sqrt{a_1} \leq \cdots \leq \sqrt{a_n}.$$

Pošto su kolekcije iste dobijamo da je $\sqrt{a_i} = a_i$ pa odavde sledi da je $a_i = 0, 1$. Iz uslova $-\sqrt{a_i} = a_{n+1-i}$ dobijamo da su prvih $k = \frac{n}{2}$ korena jednaka 0 a drugih k jedakih 1. Prema tome, traženi polinom je $P(x) = (x^2 - x)^k$. Neposrednom proverom utvrdjujemo da ovaj polinom za proizvoljno k zadovoljava uslove zadatka.