Gimnazija "Svetozar Marković", Niš
Dodatna nastava iz matematike za 1. razred
Subota, 07.10.2006

NEJEDNAKOSTI

predavač: *Marko Petković*

1 Osnovne nejednakosti

<u>Nejednakost izmedju sredina.</u> Neka su $x_1, \dots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Označimo sa:

$$M_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}$$

sredinu k*-tog reda* ($k \in \mathbb{R} \setminus 0$) brojeva $x_1, \dots, x_n$. Imamo da je $M_k(x_1, \dots, x_n)$ rastuca funkcija po k, odnosno

$$k \leq l \Rightarrow M_k \geq M_l$$

Specijalno, imamo da je M_{-1} *harmonijska*, M_1 *aritmeticka*, M_2 *kvadratna*, dok je $M_0 := \lim_{t \to 0} M_t$ *geometriska sredina brojeva* $x_1, x_2, \dots x_n$. Nejednakost izmedju ovih sredina ima oblik:

$$M_2 > M_1 > M_0 > M_{-1}.$$

Nejednakost izmedju sredina može da se uopšti na sledeći način. Neka su w_i pozitivni realni brojevi za koje je $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Tada je *težinska sredina* k*-tog reda* brojeva $x_1, \dots, x_n$ zadata na sledeći način:

$$M_k(x_1, \dots, x_n; w_1, \dots, w_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^k w_i \right)^{\frac{1}{k}}$$

Za težinske sredine važi ista nejednakost kao i za obične, tj M_k je rastuća funkcija po k.

<u>Nejednakost rearanžiranja.</u> Neka su a_i i b_i, $i = 1, 2, \dots, n$ pozitivni realni brojevi pri čemu važi $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Neka je c_i, $i = 1, 2, \dots, n$ permutacija niza b_n. Posmatrajmo vrednost zbira:

$$S_n(a_1, \dots, a_n; c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n a_i c_i$$

Ovaj zbir ima maksimalnu vrednost ukoliko je $c_1 \geq \dots \geq c_n$, a najmanju ukoliko je $c_1 \leq \dots \leq c_n$.

<u>Cauchy-Schwartz-ova nejednakost.</u> Za realne brojeve x_i, y_i važi

$$(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2$$

<u>Hölder-ova nejednakost.</u> Ako za pozitivne brojeve p i q važi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada za svaki par n-torki realnih brojeva x, y važi:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

Čebiševljeva nejednakost. Ukoliko realni brojevi x_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ zadovoljavaju uslov: $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ tada važi

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i) \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Muirhead-ova nejednakost. Za niz realnih brojeva $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ definise se funkcija T sa n promenljivih:

$$T_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\pi} x_1^{a_{\pi(1)}} x_2^{a_{\pi(2)}} \cdots x_n^{a_{\pi(n)}}$$

gde se sumiranje vrsi po svim permutacijama π skupa $\{1, 2 \ldots, n\}$. Ukoliko sa dva niza realnih brojeva a i b važi: $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ i $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$, tada važi *Muirhead*-ova nejednakost

$$T_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq T_b(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

za sve n-torke x nenegativnih realnih brojeva.

Šurova nejednakost. Za nenegativne realne brojeve a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; $k \in \mathbb{R}$ važi:

$$a_1^k(a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_n) + \ldots + a_n^k(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1}) \geq 0$$

2 Zadaci

1. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da tada važi:

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}.$$

2. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokazati da važi:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

3. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc \leq 1$. Dokazati:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

4. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi takvi da je $x_1 + \ldots + x_n = a$ i $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{a^2}{n-1}$. Dokazati da je tada $x_i \in \left[0, \frac{2a}{n}\right]$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$.

5. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da tada važi:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

6. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = 1$. Dokazati da je tada:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$

7. Dokazati da za pozitivne realne brojeve važi:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_3}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3}\geq\frac{4}{3}$$

8. Ako su a, b i c dužine stranica trougla dokazati da važi:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

9. Neka su a, b i c dužine stranica trougla a x, y i z realni brojevi takvi da je $x+y+z=0$. Dokazati da je tada:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy\leq 0$$

10. Neka su a, b i c dužine stranica trougla, P površina i s poluobim. Dokazati da tada važi nejednakost:

$$3^{500}(a^{2001}+b^{2001}+c^{2001})\geq 2^{2001}P^{1000}s.$$

11. Neka je su $x_1,\ldots,x_n$ pozitivni realni brojevi za koje važi $x_1+\ldots+x_n=1$. Neka je s najveći broj u nizu:

$$\frac{x_1}{1+x_1},\quad \frac{x_2}{1+x_1+x_2},\quad \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3},\quad \cdots\quad ,\quad \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Koja je najmanja vrednost za s. Za koje $x_1,\ldots,x_n$ se ona dostiže?

12. Neka su $x_1,\ldots,x_n$ pozitivni realni brojevi za koje važi $x_1\cdot\ldots\cdot x_n=1$. Dokazati da važi:

$$x_1^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}\geq\frac{1}{x_1}+\ldots\frac{1}{x_n}$$

13. Dokazati da za pozitivne realne brojeve važi nejednakost

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c.$$

Odrediti kada važi jednakost.

14. Neka su $a_1,a_2,\ldots,a_n$ pozitivni realni brojevi. Dokazati da važi:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geq\frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

15. Dat je niz prirodnih brojeva $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ za koji važi: $a_1>a_0$ i $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$. Dokazati da je $a_{2003}\geq 2^{2003}$.

Za sve primedbe, komentare, sugestije, itd. u vezi zadataka (a i uopšte) možete me kontaktirati putem e-maila.

© Marko Petković
dexterofnis@gmail.com